



N° Réf :.....

Université Abdelhafid Boussouf – Mila

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master
En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques Fondamentales

Titre

Quelques théorèmes sur les fonctions symétriques et leurs applications

Préparé par :

-kerdoun dikra

-Beldi abla

Soutenue le 22/06/2026

devant le jury

Bourourou siham

MBC

U. Abdelhafid Boussouf, Mila

Président

Bouzakaria fahima

MAA

U. Abdelhafid Boussouf, Mila

Rapporteur

Khalfaoui mohamed

MAA

U. Abdelhafid Boussouf, Mila

Examineur

Année universitaire : 2025/2026

Table des matières

Table des matières	2
Remerciement	4
Dédicace	5
Dédicace	6
Introduction	7
1 Notions préliminaires	9
1.1 Séries formelles	9
1.1.1 Définitions et opérations	9
1.1.2 Inverse d'une série formelle	11
1.2 Relations de récurrence linéaires homogènes	13
1.2.1 Relations de récurrence d'ordre deux de certaines suites	16
1.2.2 Relations de récurrence d'ordre trois	17
1.2.3 Relations de récurrence de certains polynômes orthogonaux	18
1.2.4 Polynômes bivariés complexes de Fibonacci et de Lucas	24
1.3 Fonctions génératrices ordinaires	25
1.3.1 Définition et propriétés fondamentales	25

1.3.2	Fonctions génératrices de certaines suites	27
2	Fonctions symétriques élémentaires et complètes	31
2.1	Fonctions symétriques	31
2.1.1	Fonctions symétriques élémentaires	32
2.2	Fonctions symétriques complètes	34
2.3	Quelques propriétés des fonctions symétriques	39
2.3.1	Définitions fondamentales	39
2.3.2	Propriétés principales	40
2.3.3	Développement et identités	42
2.3.4	Factorisation des fonctions symétriques	42
2.3.5	Applications à certaines suites	44
2.3.6	Tableau récapitulatif	44
3	Fonctions génératrices ordinaires des produits du nombres et polynômes avec des fonctions symétriques en plusieurs variables	45
3.1	Définitions et quelques propriétés	46
3.2	les fonctions génératrices des nombres et des polynômes	47
	Bibliographie	56

Remerciements

Avant tout, nous remercions Allah, le Tout-Puissant, de nous avoir accordé la santé, la force et la patience nécessaires pour accomplir ce travail et mener à bien nos études. nous tenons tout d'abord à exprimer notre profonde gratitude à notre directeur de recherche la Professeur Fahima Bouzekria pour sa patience ses précieux conseils et la confiance qu'elle nous a accordé tout au long de la réalisation de ce travail. Un grand merci aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer cette mémoire et d'enrichir ce travail par leurs remarques constructives nos remerciements les plus sincères s'adressent à nos familles pour leur soutien inconditionnel ainsi à tous les profs qui nous ont enseigné tout au long de notre parcours universitaire Enfin, nous remercions chaleureusement toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réussite de notre parcours

Dédicace

À maman, les racines de ma sensibilité et la douceur de mes jours. À mon père, le pilier de ma vie et le guide de mes ambitions.

Aucune dédicace ne saurait exprimer la profondeur de ma reconnaissance pour l'amour, l'éducation et le soutien que vous m'avez offerts tout au long de ce parcours. Tout ce que je suis aujourd'hui, je vous le dois.

À mes frères diya imad et surtout anis Pour leur affection, leur soutien moral Je leur souhaite réussite bonheur et épanouissement dans tout ce qu'ils entreprendront

Dédicace

À mon cher fils djad harimi

Toi qui es la lumière de ma vie, la prunelle de mes yeux, un morceau de mon cœur et un cadeau précieux de Dieu.

Ta présence remplit mes jours de bonheur, d'espoir et de force. Chaque effort accompli dans ce travail porte une part de l'amour immense que je te porte.

Je te dédie ce modeste travail avec toute mon affection, en souhaitant qu'il soit pour toi un exemple de persévérance et de réussite.

Que Dieu te protège, te guide et t'accorde une vie pleine de bonheur, de santé et de succès.

Avec tout mon amour.

Ta maman.

Introduction générale

Les fonctions symétriques occupent une place importante dans plusieurs domaines des mathématiques, notamment en algèbre, en théorie des polynômes, en combinatoire et en théorie des nombres. Elles apparaissent naturellement lorsqu'on étudie des expressions algébriques invariantes sous toute permutation des variables. Cette propriété fondamentale leur confère un rôle essentiel dans la compréhension de nombreuses structures mathématiques.

L'étude des fonctions symétriques remonte aux travaux de mathématiciens tels que Newton, Viète et Gauss, qui ont mis en évidence les relations profondes entre les racines d'un polynôme et ses coefficients. Les théorèmes fondamentaux relatifs aux fonctions symétriques permettent d'exprimer toute fonction symétrique comme un polynôme en les fonctions symétriques élémentaires, offrant ainsi un outil puissant pour la résolution de nombreux problèmes algébriques.

L'objectif principal de ce mémoire est de présenter quelques théorèmes fondamentaux sur les fonctions symétriques et d'explorer leurs principales applications. Nous nous intéresserons en particulier aux propriétés des polynômes symétriques, aux relations entre les différentes familles de fonctions symétriques ainsi qu'à leur utilisation dans l'étude des équations algébriques.

Ce travail est organisé comme suit. Dans un premier chapitre, nous rappelons les no-

tions préliminaires nécessaires concernant les polynômes et les fonctions symétriques. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de quelques théorèmes fondamentaux, notamment le théorème fondamental des fonctions symétriques et certaines de ses conséquences. Enfin, le dernier chapitre présente diverses applications de ces résultats à la théorie des polynômes et à d'autres domaines des mathématiques.

Nous espérons que cette étude permettra de mettre en évidence l'importance des fonctions symétriques ainsi que leur contribution dans le développement de plusieurs branches des mathématiques modernes.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions fondamentales qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. Nous rappelons principalement les définitions et résultats de base concernant les séries formelles, les relations de récurrence linéaires, les fonctions génératrices ainsi que les fonctions symétriques. Ces outils seront indispensables dans les développements effectués dans les chapitres suivants.

1.1 Séries formelles

1.1.1 Définitions et opérations

Soit K un corps commutatif ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$).

Définition 1.1.1. *On appelle **série formelle** à coefficients dans K toute expression de la forme*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in K.$$

L'ensemble des séries formelles est noté

$$K[[z]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n ; a_n \in K \right\}.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le terme z^n est appelé monôme de degré n et a_n son coefficient.

Définition 1.1.2. Soient $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

deux séries formelles appartenant à $K[[z]]$.

Les opérations suivantes sont définies sur $K[[z]]$:

1. Addition

$$u(z) + v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

2. Produit

$$u(z)v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

3. Multiplication par un scalaire

Pour tout $\lambda \in K$,

$$\lambda u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n z^n.$$

4. Dérivation formelle

$$u'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

5. Intégration formelle

$$\int u(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

1.1.2 Inverse d'une série formelle

Définition 1.1.3. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

La série $v(z)$ est appelée inverse de $u(z)$ si $u(z)v(z) = 1$.

Proposition 1.1.4. Une série formelle $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

est inversible dans $K[[z]]$ si et seulement si $a_0 \neq 0$.

Démonstration : Supposons que $v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ soit l'inverse de

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Alors,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = 1.$$

En appliquant le produit de Cauchy, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = 1.$$

Par identification des coefficients, il vient

$$a_0 b_0 = 1.$$

Par conséquent,

$$a_0 \neq 0.$$

Réciproquement, supposons que

$$a_0 \neq 0.$$

Le système triangulaire

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1, \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0, \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0, \\ \vdots \\ a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique $(b_n)_{n \geq 0}$.

Ainsi, la série $u(z)$ possède un inverse dans $K[[z]]$.

□

Exemple 1.1.1. 1. La série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ est inversible et son inverse est $1 - z$.

2. La série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ est inversible et son inverse est $1 + z$.

3. La série exponentielle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est inversible et son inverse est $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}$.

1.2 Relations de récurrence linéaires homogènes

Définition 1.2.1. *Une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre k à coefficients constants est une relation de la forme :*

$$u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + \cdots + d_k u_{n-k} = 0,$$

Remarque 1.2.1.

La suite $u_n = 0$ est une solution de la relation précédente. Elle est appelée solution triviale.

Cherchons des solutions sous la forme

$$u_n = z^n, \quad z \neq 0.$$

En remplaçant dans la relation de récurrence, on obtient

$$z^n + d_1 z^{n-1} + d_2 z^{n-2} + \cdots + d_k z^{n-k} = 0.$$

En divisant par z^{n-k} , il vient

$$z^k + d_1 z^{k-1} + d_2 z^{k-2} + \cdots + d_k = 0.$$

Cette équation est appelée équation caractéristique associée à la relation de récurrence.

Définition 1.2.2. *Le polynôme caractéristique associé à la relation précédente est défini par*

$$P(z) = z^k + d_1 z^{k-1} + d_2 z^{k-2} + \cdots + d_k.$$

Théorème 1.2.1. *Supposons que le polynôme caractéristique $P(z)$*

admette k racines distinctes $z_1, \dots, z_k$.

Alors, la solution générale de la relation de récurrence est donnée par

$$u_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \cdots + c_k z_k^n,$$

où $c_1, c_2, \dots, c_k$ sont des constantes réelles.

Proposition 1.2.3 (Dépendance des conditions initiales). *Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$*

des scalaires donnés.

Il existe une unique suite (u_n) solution de la relation de récurrence telle que

$$u_0 = \alpha_0, \quad u_1 = \alpha_1, \quad \dots, \quad u_{k-1} = \alpha_{k-1}.$$

Remarque 1.2.2. *La relation de récurrence ainsi que les conditions initiales déterminent la suite de manière unique.*

Exemple 1.2.1. *Considérons la suite de Fibonacci définie par*

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, & n \geq 2, \\ F_0 = 0, & F_1 = 1. \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée est

$$z^2 - z - 1 = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = 5,$$

d'où les deux racines distinctes

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

La solution générale est donnée par

$$F_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n.$$

Autrement dit,

$$F_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Les constantes c_1 et c_2 sont déterminées à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} F_0 = c_1 + c_2 = 0, \\ F_1 = c_1 z_1 + c_2 z_2 = 1. \end{cases}$$

Après résolution du système, on obtient

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ainsi,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

1.2.1 Relations de récurrence d'ordre deux de certaines suites

Définition 1.2.4 (Suite de Fibonacci généralisée [5]). *La suite de Fibonacci généralisée*

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

est définie par la relation de récurrence suivante :
$$\begin{cases} U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}, & n \geq 2, \\ U_0 = \alpha, & U_1 = \beta, \end{cases}$$

où $a, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$.

Le tableau suivant regroupe quelques suites récurrentes obtenues à partir de cette relation, notamment les suites de k -Fibonacci, k -Lucas, k -Pell, k -Jacobsthal et k -Mersenne.

Les valeurs de a, b, α, β	Les suites	Relations de récurrence
$a = k, b = \alpha = 1, \beta = 1$	k -Fibonacci	$\begin{cases} F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2}, & n \geq 2, \\ F_{k,0} = 0, & F_{k,1} = 1 \end{cases}$
$a = \beta = k, b = 1, \alpha = 2$	k -Lucas	$\begin{cases} L_{k,n} = kL_{k,n-1} + L_{k,n-2}, & n \geq 2, \\ L_{k,0} = 2, & L_{k,1} = k \end{cases}$
$a = 2, b = k, \alpha = 0, \beta = 1$	k -Pell	$\begin{cases} P_{k,n} = 2P_{k,n-1} + kP_{k,n-2}, & n \geq 2, \\ P_{k,0} = 0, & P_{k,1} = 1 \end{cases}$
$a = k, b = 2, \alpha = 0, \beta = 1$	k -Jacobsthal	$\begin{cases} J_{k,n} = kJ_{k,n-1} + 2J_{k,n-2}, & n \geq 2, \\ J_{k,0} = 0, & J_{k,1} = 1 \end{cases}$
$a = 3k, b = -2, \alpha = 0, \beta = 1$	k -Mersenne	$\begin{cases} M_{k,n} = 3kM_{k,n-1} - 2M_{k,n-2}, & n \geq 2, \\ M_{k,0} = 0, & M_{k,1} = 1 \end{cases}$

Tab. 1.1 : Relations de récurrence de certaines suites d'ordre deux.

Cas particulier : $k = 1$

En prenant $k = 1$, les relations précédentes se réduisent à plusieurs suites classiques bien connues.

Les valeurs de a, b, α, β	Les suites	Relations de récurrence
$a = 1, b = \alpha = 1, \beta = 1$	Fibonacci	$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, & n \geq 2, \\ F_0 = 0, & F_1 = 1 \end{cases}$
$a = \beta = 1, b = 1, \alpha = 2$	Lucas	$\begin{cases} L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, & n \geq 2, \\ L_0 = 2, & L_1 = 1 \end{cases}$
$a = 2, b = 1, \alpha = 0, \beta = 1$	Pell	$\begin{cases} P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, & n \geq 2, \\ P_0 = 0, & P_1 = 1 \end{cases}$
$a = 1, b = 2, \alpha = 0, \beta = 1$	Jacobsthal	$\begin{cases} J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, & n \geq 2, \\ J_0 = 0, & J_1 = 1 \end{cases}$
$a = 3, b = -2, \alpha = 0, \beta = 1$	Mersenne	$\begin{cases} M_n = 3M_{n-1} - 2M_{n-2}, & n \geq 2, \\ M_0 = 0, & M_1 = 1 \end{cases}$

Tab. 1.2 : Relations de récurrence de quelques suites classiques.

1.2.2 Relations de récurrence d'ordre trois

Définition 1.2.5 (Suite de Tribonacci généralisée [6]). *La suite de Tribonacci généralisée*

$(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$

est définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} V_n = rV_{n-1} + sV_{n-2} + tV_{n-3}, & n \geq 3, \\ V_0 = a, & V_1 = b, & V_2 = c, \end{cases}$$

où

$$a, b, c \in \mathbb{C}, \quad r, s \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{N}^*.$$

Exemple 1.2.2. 1. Pour $r = 0, \quad s = t = 1, \text{ et } a = 1, \quad b = 1+i, \quad c = 1+i,$

on obtient la suite des nombres gaussiens de Padovan définie par

$$\begin{cases} GP_n = GP_{n-2} + GP_{n-3}, & n \geq 3, \\ GP_0 = 1, & GP_1 = 1 + i, & GP_2 = 1 + i. \end{cases}$$

2. Pour $r = 0$, $s = 2$, $t = 1$, et $a = 1 - i$, $b = 1 + i$, $c = 1 + i$,

on obtient une autre suite gaussienne vérifiant une relation de récurrence d'ordre trois.

1.2.3 Relations de récurrence de certains polynômes orthogonaux

Dans cette partie, nous présentons quelques propriétés fondamentales des polynômes orthogonaux ainsi que certaines relations de récurrence associées aux polynômes de Chebyshev. Ces polynômes jouent un rôle important dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées et de l'analyse.

Définition 1.2.6 (Suite de polynômes orthogonaux [2]). Une suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes réels est dite orthogonale si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_n(x)$ est de degré n ;
- les polynômes de la suite sont orthogonaux deux à deux relativement à un produit scalaire donné.

Théorème 1.2.2 ([2]). Soit $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes orthogonaux normalisés telle que

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Alors cette suite vérifie une relation de récurrence de la forme

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x), & n \geq 1, \\ P_{-1}(x) = 0, & P_0(x) = 1, \end{cases}$$

où

$$(\alpha_n)_{n \geq 0} \quad \text{et} \quad (\beta_n)_{n \geq 1}$$

sont deux suites de nombres réels.

Proposition 1.2.7 (Favard [2]). *Toute suite de polynômes satisfaisant une relation de récurrence linéaire d'ordre deux est une suite de polynômes orthogonaux.*

Polynômes de Chebyshev

Définition 1.2.8. *Les polynômes de Chebyshev de première espèce $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définis par $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$, Par conséquent, pour tout $x \in [-1, 1]$, on obtient*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Proposition 1.2.9. *Les polynômes de Chebyshev de première espèce vérifient la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x, \\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x), & n \geq 0. \end{cases}$$

Démonstration : D'après la définition précédente, on a

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

En utilisant les formules trigonométriques,

$$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2 \cos((n+1)\theta) \cos \theta.$$

Ainsi,

$$T_{n+2}(\cos \theta) + T_n(\cos \theta) = 2 \cos \theta T_{n+1}(\cos \theta).$$

Comme

$$x = \cos \theta,$$

on obtient finalement

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

□

Définition 1.2.10. *Les polynômes de Chebyshev de seconde espèce $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définis par*

$$\sin \theta U_n(\cos \theta) = \sin((n+1)\theta), \quad \theta \in [0, \pi].$$

Proposition 1.2.11 ([4]). *Les polynômes de Chebyshev de seconde espèce vérifient la*

relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} U_0(x) = 1, \\ U_1(x) = 2x, \\ U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x) - U_n(x), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Démonstration : La démonstration est analogue à celle des polynômes de Chebyshev de première espèce.

□

Définition 1.2.12. Les polynômes de Chebyshev de troisième espèce $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définis par

$$V_n(x) = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \theta \in [0, \pi],$$

où $x = \cos \theta$ et $x \in [-1, 1]$.

Proposition 1.2.13 ([3]). Les polynômes de Chebyshev de troisième espèce satisfont la relation de récurrence :

$$\begin{cases} V_0(x) = 1, \\ V_1(x) = 2x - 1, \\ V_{n+2}(x) = 2xV_{n+1}(x) - V_n(x), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Démonstration : Il suffit de montrer que

$$V_n(x) + V_{n+2}(x) = 2xV_{n+1}(x).$$

D'après la définition précédente, on a

$$V_n(x) = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Ainsi,

$$V_n(x) + V_{n+2}(x) = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \cos\left(n + \frac{5}{2}\right)\theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

En utilisant les identités trigonométriques :

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

on obtient

$$V_n(x) + V_{n+2}(x) = 2 \cos \theta \frac{\cos\left(n + \frac{3}{2}\right)\theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Comme

$$x = \cos \theta,$$

on déduit que

$$V_n(x) + V_{n+2}(x) = 2xV_{n+1}(x).$$

La relation cherchée est donc vérifiée.

□

Définition 1.2.14. *Les polynômes de Chebyshev de quatrième espèce*

$$(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

sont définis par

$$W_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \theta \in [0, \pi],$$

où

$$x = \cos \theta \quad \text{et} \quad x \in [-1, 1].$$

Proposition 1.2.15 ([3]). *Les polynômes de Chebyshev de quatrième espèce vérifient la relation de récurrence :*

$$\begin{cases} W_0(x) = 1, \\ W_1(x) = 2x + 1, \\ W_{n+2}(x) = 2xW_{n+1}(x) - W_n(x), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Démonstration : La preuve est similaire à celle de la proposition précédente.

□

Le tableau suivant présente quelques relations de récurrence associées à certaines familles de polynômes.

Suite de polynômes	Relation de récurrence
Polynômes de Fibonacci	$\begin{cases} F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), & n \geq 2, \\ F_0(x) = 1, & F_1(x) = x \end{cases}$
Polynômes de Lucas	$\begin{cases} L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x), & n \geq 2, \\ L_0(x) = 2, & L_1(x) = x \end{cases}$

Tab. 1.3 : Quelques relations de récurrence de certaines familles de polynômes.

1.2.4 Polynômes bivariés complexes de Fibonacci et de Lucas

Dans cette partie, nous introduisons les polynômes bivariés complexes de Fibonacci et de Lucas définis par des relations de récurrence linéaires d'ordre deux.

Définition 1.2.16 (Polynômes bivariés complexes de Fibonacci [1]). *Les polynômes bivariés complexes de Fibonacci*

$$(F_n(x, y))_{n \geq 0}$$

sont définis par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} F_n(x, y) = ix F_{n-1}(x, y) + F_{n-2}(x, y), & n \geq 2, \\ F_0(x, y) = 0, & F_1(x, y) = 1, \end{cases}$$

où

$$i^2 = -1.$$

Définition 1.2.17 (Polynômes bivariés complexes de Lucas [1]). *Les polynômes bivariés complexes de Lucas*

$$(L_n(x, y))_{n \geq 0}$$

sont définis par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} L_n(x, y) = ix L_{n-1}(x, y) + L_{n-2}(x, y), & n \geq 2, \\ L_0(x, y) = 2, & L_1(x, y) = ix. \end{cases}$$

Exemple 1.2.3. *Calculons les premiers polynômes de Fibonacci complexes. À partir de*

la relation de récurrence :

$$F_n(x, y) = ix F_{n-1}(x, y) + F_{n-2}(x, y),$$

on obtient : $F_0(x, y) = 0$, $F_1(x, y) = 1$.

$$F_2(x, y) = ix F_1(x, y) + F_0(x, y) = ix.$$

$$F_3(x, y) = ix F_2(x, y) + F_1(x, y) = (ix)^2 + 1.$$

Comme $i^2 = -1$, il vient $F_3(x, y) = 1 - x^2$.

1.3 Fonctions génératrices ordinaires

1.3.1 Définition et propriétés fondamentales

Définition 1.3.1 (Fonction génératrice ordinaire [7]). Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite numérique.

La série formelle définie par $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$

est appelée fonction génératrice ordinaire associée à la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Proposition 1.3.2 ([7]). Soient $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

les fonctions génératrices des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$.

Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Le produit

$$G(z)H(z)$$

est la fonction génératrice de la suite

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)_{n \geq 0}.$$

2. *Pour tous scalaires*

$$\lambda, \mu \in \mathbb{K},$$

la série

$$\lambda G(z) + \mu H(z)$$

est la fonction génératrice de

$$(\lambda a_n + \mu b_n)_{n \geq 0}.$$

3. *La fonction*

$$(1 - z)G(z)$$

est associée à la suite

$$(a_n - a_{n-1})_{n \geq 0}.$$

4. *La série*

$$zG(z)$$

est la fonction génératrice de la suite

$$(u_{n-1})_{n \geq 1}.$$

5. La fonction

$$\frac{G(z)}{1-z}$$

est la fonction génératrice de la suite des sommes partielles

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k \right)_{n \geq 0}.$$

1.3.2 Fonctions génératrices de certaines suites

Dans cette partie, nous déterminons les fonctions génératrices associées à quelques suites récurrentes classiques.

Théorème 1.3.1. *La fonction génératrice de la suite de Fibonacci généralisée*

$$(U_n)_{n \geq 0}$$

définie par

$$U_n = pU_{n-1} + qU_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

avec

$$U_0 = \alpha, \quad U_1 = \beta,$$

est donnée par

$$G(z) = \frac{\alpha + (\beta - p\alpha)z}{1 - pz - qz^2}.$$

Démonstration : Posons

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n z^n.$$

Alors,

$$G(z) = U_0 + U_1z + \sum_{n=2}^{\infty} U_n z^n.$$

En utilisant la relation de récurrence,

$$U_n = pU_{n-1} + qU_{n-2},$$

on obtient

$$G(z) = \alpha + \beta z + p \sum_{n=2}^{\infty} U_{n-1} z^n + q \sum_{n=2}^{\infty} U_{n-2} z^n.$$

Par changement d'indice,

$$\sum_{n=2}^{\infty} U_{n-1} z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} U_n z^n = z(G(z) - \alpha),$$

et

$$\sum_{n=2}^{\infty} U_{n-2} z^n = z^2 G(z).$$

Ainsi,

$$G(z) = \alpha + \beta z + pz(G(z) - \alpha) + qz^2 G(z).$$

Après simplification, il vient

$$(1 - pz - qz^2)G(z) = \alpha + (\beta - p\alpha)z.$$

Donc,

$$G(z) = \frac{\alpha + (\beta - p\alpha)z}{1 - pz - qz^2}.$$

□

Exemple 1.3.1. *Pour la suite de Fibonacci classique définie par*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

avec

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$$

on a

$$p = q = 1, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1.$$

Ainsi, sa fonction génératrice est donnée par

$$G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Exemple 1.3.2. *Considérons la suite de Lucas définie par*

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2},$$

avec

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1.$$

La fonction génératrice correspondante est

$$G(z) = \frac{2 - z}{1 - z - z^2}.$$

Le tableau suivant résume les fonctions génératrices de quelques suites particulières.

Valeurs de p, q, α, β	Suites	Fonctions génératrices
$p = k, q = 1, \alpha = 0, \beta = 1$	k -Fibonacci	$\frac{z}{1 - kz - z^2}$
$p = \beta = k, q = 1, \alpha = 2$	k -Lucas	$\frac{2 - kz}{1 - kz - z^2}$
$p = 2, q = k, \alpha = 0, \beta = 1$	k -Pell	$\frac{z}{1 - 2z - kz^2}$
$p = k, q = 2, \alpha = 0, \beta = 1$	k -Jacobsthal	$\frac{z}{1 - kz - 2z^2}$
$p = 3k, q = -2, \alpha = 0, \beta = 1$	k -Mersenne	$\frac{z}{1 - 3kz + 2z^2}$

Tab. 1.4 : Fonctions génératrices de certaines suites récurrentes.

Chapitre 2

Fonctions symétriques élémentaires et complètes

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions fondamentales concernant les fonctions symétriques. Ces fonctions jouent un rôle important en algèbre, en combinatoire ainsi que dans l'étude des polynômes

Nous nous intéressons particulièrement aux fonctions symétriques élémentaires et complètes ainsi qu'à certaines propriétés classiques de leurs fonctions génératrices.

2.1 Fonctions symétriques

Définition 2.1.1 ([8]). Soit $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction de n variables.

On dit que f est une fonction symétrique si, pour toute permutation $\sigma \in S_n$,

$$\text{on a } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Autrement dit, la valeur de la fonction reste inchangée lorsque l'on permute les variables.

Remarque 2.1.1 ([9]). Les fonctions symétriques apparaissent naturellement dans la théo-

rie des polynômes et dans plusieurs problèmes combinatoires.

Exemple 2.1.1 ([9]). Considérons la fonction $f(x, y) = x + y$.

Nous avons :

$$f(y, x) = y + x = x + y.$$

Ainsi,

$$f(y, x) = f(x, y).$$

Donc cette fonction est symétrique.

Exemple 2.1.2. La fonction $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ est également symétrique puisque toute permutation des variables laisse la somme inchangée.

Exemple 2.1.3. Considérons maintenant $h(x, y) = x - y$.

Après permutation des variables, nous obtenons : $h(y, x) = y - x$.

Comme $y - x \neq x - y$, la fonction h n'est pas symétrique.

2.1.1 Fonctions symétriques élémentaires

Définition 2.1.2 ([8]). Soient n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$.

La fonction symétrique élémentaire de degré k , notée $e_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

est définie par $e_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}$.

Remarque 2.1.2. Par convention, $e_0 = 1$.

Si $k > n$, alors $e_k = 0$.

Exemple 2.1.4. Pour $n = 2$,

nous obtenons :

$$e_0^{(2)} = 1,$$

$$e_1^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$e_2^{(2)} = \lambda_1 \lambda_2.$$

Exemple 2.1.5. Pour $n = 3$,

nous avons :

$$e_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$e_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3,$$

$$e_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Proposition 2.1.3 ([9]). *La fonction génératrice des fonctions symétriques élémentaires est donnée par*

$$E(t) = \sum_{k \geq 0} e_k t^k = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i t).$$

Démonstration : Nous allons montrer cette relation par récurrence sur n .

Pour $n = 2$, nous avons :

$$(1 + \lambda_1 t)(1 + \lambda_2 t) = 1 + (\lambda_1 + \lambda_2)t + \lambda_1 \lambda_2 t^2.$$

Or,

$$e_0 = 1, \quad e_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad e_2 = \lambda_1 \lambda_2.$$

Donc :

$$(1 + \lambda_1 t)(1 + \lambda_2 t) = e_0 + e_1 t + e_2 t^2.$$

Supposons maintenant que

$$\sum_{k \geq 0} e_k^{(n)} t^k = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i t).$$

Alors :

$$\prod_{i=1}^{n+1} (1 + \lambda_i t) = \left(\sum_{k \geq 0} e_k^{(n)} t^k \right) (1 + \lambda_{n+1} t).$$

En développant le produit, nous obtenons :

$$\prod_{i=1}^{n+1} (1 + \lambda_i t) = \sum_{k \geq 0} e_k^{(n+1)} t^k.$$

Ainsi, la propriété est vraie pour tout entier n . □

2.2 Fonctions symétriques complètes

Définition 2.2.1 ([8]). Soient $k, n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ une famille de variables.

La fonction symétrique complète d'ordre k , notée $h_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, est définie par :

$$h_k^{(n)} = h_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_n = k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n},$$

où $i_1, i_2, \dots, i_n \geq 0$.

Par convention :

$$h_0^{(n)} = 1 \quad \text{et} \quad h_k^{(n)} = 0 \quad \text{si } k < 0.$$

Autrement dit, la fonction symétrique complète est la somme de tous les monômes homogènes de degré k .

Remarque 2.2.1 ([9]). *Les fonctions symétriques complètes jouent un rôle fondamental dans la théorie des fonctions symétriques. Elles interviennent dans les identités combinatoires, les déterminants ainsi que dans l'étude des représentations linéaires.*

Exemple 2.2.1. *Prenons le cas $n = 2$.*

On obtient :

$$h_0^{(2)} = 1,$$

$$h_1^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$h_2^{(2)} = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2,$$

$$h_3^{(2)} = \lambda_1^3 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_2^3.$$

Tous les monômes possibles de degré total k apparaissent dans l'expression.

Exemple 2.2.2. *Pour une famille de quatre variables $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, nous avons :*

$$h_1^{(4)} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4,$$

$$\begin{aligned} h_2^{(4)} = & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 \\ & + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 \\ & + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4. \end{aligned}$$

Cette expression contient tous les monômes homogènes de degré 2.

Proposition 2.2.2 ([8]). *La fonction génératrice des fonctions symétriques complètes est donnée par :*

$$H(t) = \sum_{k \geq 0} h_k^{(n)} t^k = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i t)^{-1}.$$

Démonstration : Par définition :

$$h_k^{(n)} = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n}.$$

Commençons par le cas $n = 2$.

Nous avons :

$$\sum_{k \geq 0} h_k^{(2)} t^k = h_0^{(2)} + h_1^{(2)} t + h_2^{(2)} t^2 + \dots$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} h_k^{(2)} t^k &= 1 + (\lambda_1 + \lambda_2) t \\ &\quad + (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2) t^2 + \dots \end{aligned}$$

Or :

$$1 + \lambda_1 t + \lambda_1^2 t^2 + \dots = \sum_{k \geq 0} (\lambda_1 t)^k = \frac{1}{1 - \lambda_1 t},$$

et :

$$1 + \lambda_2 t + \lambda_2^2 t^2 + \dots = \sum_{k \geq 0} (\lambda_2 t)^k = \frac{1}{1 - \lambda_2 t}.$$

En multipliant les deux séries, on obtient :

$$\left(\sum_{k \geq 0} (\lambda_1 t)^k \right) \left(\sum_{k \geq 0} (\lambda_2 t)^k \right) = \frac{1}{(1 - \lambda_1 t)(1 - \lambda_2 t)}.$$

Le produit engendre exactement tous les monômes homogènes de degré total k .

Ainsi :

$$\sum_{k \geq 0} h_k^{(2)} t^k = \frac{1}{(1 - \lambda_1 t)(1 - \lambda_2 t)}.$$

Supposons maintenant que :

$$H_n(t) = \sum_{k \geq 0} h_k^{(n)} t^k = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i t)^{-1}.$$

Montrons la propriété pour $n + 1$.

Nous utilisons la relation :

$$h_k^{(n+1)} = h_k^{(n)} + \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)}.$$

En multipliant par t^k et en sommant sur $k \geq 0$:

$$\sum_{k \geq 0} h_k^{(n+1)} t^k = \sum_{k \geq 0} h_k^{(n)} t^k + \lambda_{n+1} \sum_{k \geq 0} h_{k-1}^{(n+1)} t^k.$$

Comme :

$$\sum_{k \geq 0} h_{k-1}^{(n+1)} t^k = t \sum_{k \geq 0} h_k^{(n+1)} t^k,$$

nous obtenons :

$$H_{n+1}(t) = H_n(t) + \lambda_{n+1} t H_{n+1}(t).$$

Donc :

$$(1 - \lambda_{n+1} t) H_{n+1}(t) = H_n(t).$$

Par hypothèse de récurrence :

$$H_n(t) = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i t)^{-1}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} H_{n+1}(t) &= \frac{H_n(t)}{1 - \lambda_{n+1}t} \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} (1 - \lambda_i t)^{-1}. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$.

□

Proposition 2.2.3. *Pour tout entier $n \geq 0$, on a : $H(t)E(-t) = 1$.*

Démonstration : On a : $E(t) = \sum_{k \geq 0} e_k t^k = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i t)$,

$$E(-t) = \sum_{k \geq 0} e_k (-t)^k = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i t),$$

$$H(t) = \sum_{k \geq 0} h_k t^k = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i t)^{-1}.$$

Ainsi,

$$H(t)E(-t) = \left(\prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i t)^{-1} \right) \left(\prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i t) \right) = 1.$$

□

2.3 Quelques propriétés des fonctions symétriques

2.3.1 Définitions fondamentales

Définition 2.3.1 ([11]). Soit n un entier positif et $A = \{a_1, a_2\}$. un ensemble de variables données

La fonction symétrique complète de degré n est définie par :

$$S_n(A) = S_n(a_1 + a_2) = \frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{a_1 - a_2}.$$

Exemple 2.3.1. Nous obtenons les valeurs suivantes :

$$S_0(a_1 + a_2) = 1,$$

$$S_1(a_1 + a_2) = a_1 + a_2,$$

$$S_2(a_1 + a_2) = a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2.$$

Définition 2.3.2 ([11]). Soient A et B deux alphabets.

La suite $(S_j(A - B))_{j \geq 0}$

est définie par la fonction génératrice :

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(A - B)t^j = E(-t)H(t),$$

où

$$H(t) = \prod_{b \in B} (1 - bt)^{-1},$$

et

$$E(-t) = \prod_{a \in A} (1 - at).$$

2.3.2 Propriétés principales

Proposition 2.3.3 ([11]). Si $A = \emptyset$,

alors :

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(-B)t^j = \prod_{b \in B} (1 - bt).$$

Démonstration : Lorsque $A = \emptyset$, nous avons : $E(-t) = 1$.

En remplaçant dans la relation génératrice :

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(A - B)t^j = E(-t)H(t),$$

nous obtenons :

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(-B)t^j = \prod_{b \in B} (1 - bt).$$

□

Proposition 2.3.4 ([11]). Si $B = \emptyset$, alors :

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(A)t^j = \frac{1}{\prod_{a \in A} (1 - at)}.$$

Démonstration : Lorsque l'alphabet B est vide, la relation génératrice devient :

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(A)t^j = \frac{E(-t)}{1}.$$

Comme

$$E(-t) = \prod_{a \in A} (1 - at)^{-1},$$

nous obtenons immédiatement :

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(A) t^j = \frac{1}{\prod_{a \in A} (1 - at)}.$$

La propriété est donc démontrée.

□

Soient $A = \{x\}$ et $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Pour tout entier $k \geq 0$,

on a :

$$S_{n+k}(x - B) = x^k S_n(x - B).$$

Démonstration : À partir de la fonction génératrice :

$$\sum_{j \geq 0} S_j(x - B) t^j = \frac{\prod_{i=1}^n (1 - b_i t)}{1 - xt},$$

nous remarquons que le dénominateur produit une suite géométrique en puissances de x .

Après le rang n , chaque terme supplémentaire s'obtient en multipliant le précédent par x . Ainsi :

$$S_{n+k}(x - B) = x^k S_n(x - B).$$

□

2.3.3 Développement et identités

Proposition 2.3.5 ([11]). *Supposons que $A = \{x\}$. Alors :*

$$\frac{\prod_{b \in B} (1 - bt)}{1 - xt} = 1 + \dots + t^{j-1} S_{j-1}(x - B) + t^j \frac{S_j(x - B)}{1 - xt}.$$

Démonstration : Nous partons de la relation :

$$\frac{\prod_{b \in B} (1 - bt)}{1 - xt} = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(x - B) t^j.$$

En développant la série :

$$= 1 + S_1(x - B)t + \dots + S_j(x - B)t^j + \dots$$

Puis en utilisant le développement géométrique :

$$\frac{1}{1 - xt} = 1 + xt + x^2 t^2 + \dots,$$

nous obtenons la relation annoncée.

□

2.3.4 Factorisation des fonctions symétriques

Proposition 2.3.6 ([11]). *Nous avons la factorisation suivante :*

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(A - B) t^j = \left(\sum_{j=0}^{\infty} S_j(A) t^j \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} S_j(-B) t^j \right).$$

Démonstration : En utilisant les fonctions génératrices :

$$\sum_{j \geq 0} S_j(A) t^j = \frac{1}{\prod_{a \in A} (1 - at)},$$

et

$$\sum_{j \geq 0} S_j(-B) t^j = \prod_{b \in B} (1 - bt),$$

nous obtenons :

$$\left(\sum_{j \geq 0} S_j(A) t^j \right) \left(\sum_{j \geq 0} S_j(-B) t^j \right) = \frac{\prod_{b \in B} (1 - bt)}{\prod_{a \in A} (1 - at)}.$$

Cette expression correspond exactement à la fonction génératrice de

$$S_j(A - B).$$

Ainsi :

$$\sum_{j \geq 0} S_j(A - B) t^j = \left(\sum_{j \geq 0} S_j(A) t^j \right) \left(\sum_{j \geq 0} S_j(-B) t^j \right).$$

□

Nous déduisons alors :

$$S_j(A - B) = \sum_{k=0}^j S_{j-k}(A) S_k(-B).$$

2.3.5 Applications à certaines suites

Corollaire 2.3.1 ([12]). *La fonction symétrique associée aux polynômes de Jacobsthal-Lucas bivariés est donnée par :*

$$j_n = 2S_n(p_1 + [-p_2]) - xyS_{n-1}(p_1 + [-p_2]).$$

Corollaire 2.3.2 ([12]). *Pour les polynômes de Lucas complexes bivariés :*

$$L_n = 2S_n(p_1 + [-p_2]) - ixS_{n-1}(p_1 + [-p_2]).$$

Corollaire 2.3.3 ([12]). *La fonction symétrique associée aux nombres de Pell modifiés s'écrit :*

$$MP_n = S_n(p_1 + [-p_2]) - pS_{n-1}(p_1 + [-p_2]).$$

2.3.6 Tableau récapitulatif

Suites et polynômes	Fonctions symétriques associées
j_n	$2S_n(p_1 + [-p_2]) - xyS_{n-1}(p_1 + [-p_2])$
L_n	$2S_n(p_1 + [-p_2]) - ixS_{n-1}(p_1 + [-p_2])$
MP_n	$S_n(p_1 + [-p_2]) - pS_{n-1}(p_1 + [-p_2])$

Tableau : Fonctions symétriques associées à certaines suites bivariées.

Chapitre 3

Fonctions génératrices ordinaires des produits du nombres et polynômes avec des fonctions symétriques en plusieurs variables

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude des fonctions génératrices ordinaires associées à certains produits de suites numériques et de familles de polynômes. Plus précisément, nous établissons des fonctions génératrices faisant intervenir les fonctions symétriques en plusieurs variables pour les produits des nombres de Pell modifiés ainsi que pour les polynômes bivariés de Jacobsthal–Lucas et de Lucas complexe. L'utilisation des fonctions symétriques permet d'obtenir des représentations compactes et élégantes de ces produits, tout en mettant en évidence plusieurs propriétés algébriques remarquables. Les résultats développés dans ce chapitre constituent également un outil efficace pour l'étude de diverses identités et relations vérifiées par ces suites et polynômes

3.1 Définitions et quelques propriétés

Définition 3.1.1 ([11]). Soit f une fonction sur $\mathbb{R}^n$, la différence divisée $\partial_{a_i, a_{i+1}}$ est définie par :

$$\partial_{a_i, a_{i+1}}(f) = \frac{f(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, \dots, a_n)}{a_i - a_{i+1}}.$$

Définition 3.1.2 ([11]). L'opérateur de symétrisation $\delta_{a_1 a_2}^k$ est définie par :

$$\delta_{a_1 a_2}^k f(a_1) = \frac{a_1^k f(a_1) - a_2^k f(a_2)}{a_1 - a_2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Théorème 3.1.1. Soit $P = \{p_1, p_2\}$ et $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Soient deux alphabets, alors on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1, a_2, a_3, a_4) H_n(p_1 + p_2) t^n &= \frac{1 - (p_1 p_2) e_2^{(4)} t^2 + [(p_1 p_2)(p_1 + p_2)] e_3^{(4)} t^3}{\prod_{i=1}^4 (1 - a_i p_1 t) \prod_{i=1}^4 (1 - a_i p_2 t)} \\ &\quad - \frac{(p_1 p_2) [(p_1 + p_2)^2 - p_1 p_2] e_4^{(4)} t^4}{\prod_{i=1}^4 (1 - a_i p_1 t) \prod_{i=1}^4 (1 - a_i p_2 t)}. \end{aligned}$$

En remplaçant p_2 par $(-p_2)$ dans l'identité précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1, a_2, a_3, a_4) H_n(p_1 + [-p_2]) t^n &= \frac{1 + (p_1 p_2) e_2^{(4)} t^2 - [(p_1 p_2)(p_1 + p_2)] e_3^{(4)} t^3}{\prod_{i=1}^4 (1 - (p_1 - p_2) a_i t - p_1 p_2 a_i^2 t^2)} \\ &\quad + \frac{(p_1 p_2) [(p_1 - p_2)^2 + p_1 p_2] e_4^{(4)} t^4}{\prod_{i=1}^4 (1 - (p_1 - p_2) a_i t - p_1 p_2 a_i^2 t^2)}. \end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1, a_2, a_3, a_4) H_{n-1}(p_1 + [-p_2]) t^n = \frac{e_1^{(4)} t - (p_1 - p_2) e_2^{(4)} t^2 + \left[(p_1 - p_2)^2 + p_1 p_2 \right] e_3^{(4)} t^3}{\prod_{i=1}^4 (1 - (p_1 - p_2) a_i t - p_1 p_2 a_i^2 t^2)} - \frac{(p_1 - p_2) \left[(p_1 - p_2)^2 + 2 p_1 p_2 \right] e_4^{(4)} t^4}{\prod_{i=1}^4 (1 - (p_1 - p_2) a_i t - p_1 p_2 a_i^2 t^2)}.$$

3.2 les fonctions génératrices des nombres et des polynômes

Dans cette partie, nous exploitons les théorèmes précédents pour dériver de nouvelles fonctions génératrices associées aux produits des fonctions symétriques à plusieurs variables. Nous nous intéressons particulièrement aux nombres de Pell–Lucas, aux polynômes bivariés de Lucas ainsi qu’aux polynômes bivariés de Jacobsthal–Lucas, dont nous établissons plusieurs propriétés génératrices.

Proposition 3.2.1. *[13] Pour tout entier naturel n , la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de Pell-Lucas gaussiens (p, q) et des fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(E) GQ_{p,q,n} z^n = \frac{P_5(z)}{\prod_{i=1}^4 (1 - 2p e_i z - q e_i^2 z^2)},$$

où

$$\begin{aligned}
P_5(z) &= 2 - 2ip + (4ip^2 + 2iq - 2p) e_1^{(4)} z \\
&+ (-8ip^3 - 6ipq + 4p^2 + 2q) e_2^{(4)} z^2 \\
&+ (16ip^4 + 16ip^2q + 2iq^2 - 8p^3 - 6pq) e_3^{(4)} z^3 \\
&+ (-32ip^5 - 40ip^3q - 10ipq^2 + 16p^4 + 16p^2q + 2q^2) e_4^{(4)} z^4.
\end{aligned}$$

Démonstration : On remarque que

$$GQ_{p,q,n} = (2 - 2ip)S_n(p_1 + [-p_2]) + (i(4p^2 + 2q) - 2p)S_{n-1}(p_1 + [-p_2]).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} S_n(E) GQ_{p,q,n} z^n &= (2 - 2ip) \sum_{n=0}^{\infty} S_n(E) S_n(p_1 + [-p_2]) z^n \\
&+ (i(4p^2 + 2q) - 2p) \sum_{n=0}^{\infty} S_n(E) S_{n-1}(p_1 + [-p_2]) z^n \\
&+ (2 - 2ip) \frac{1 + qe_2^{(4)} z^2 - 2qpe_3^{(4)} z^3 + q(4p^2 + q)e_4^{(4)} z^4}{\prod_{i=1}^4 (1 - 2pe_i z - qe_i^2 z^2)} \\
&+ (i(4p^2 + 2q) - 2p) \frac{e_1^{(4)} z - 2pe_2^{(4)} z^2 + (4p^2 + q)e_3^{(4)} z^3 - 2p(4p^2 + 2q)e_4^{(4)} z^4}{\prod_{i=1}^4 (1 - 2pe_i z - qe_i^2 z^2)} \\
&= \frac{P_5(z)}{\prod_{i=1}^4 (1 - 2pe_i z - qe_i^2 z^2)}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.2. [13] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice ordinaire du produit des nombres de Jacobsthal gaussiens (p, q) et des fonctions symétriques à plusieurs variables

est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(E) GJ_{p,q,n} z^n = \frac{P_6(z)}{\prod_{i=1}^4 (1 - pe_i z - 2qe_i^2 z^2)},$$

où

$$\begin{aligned} P_6(z) = & \left(3ip^2q + 2iq^2 - p^3 - 4pq + \frac{1}{2}ip^4 \right) z^4 e_4^{(4)} \\ & + \left(-2ipq + p^2 + 2q - \frac{1}{2}ip^3 \right) z^3 e_3^{(4)} \\ & + \left(iq - p + \frac{1}{2}ip^2 \right) z^2 e_2^{(4)} + \left(1 - \frac{1}{2}ip \right) z e_1^{(4)} + \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Démonstration : On remarque que $GJ_{p,q,n} = \frac{i}{2} S_n(p_1 + [-p_2]) + \left(1 - \frac{ip}{2} \right) S_{n-1}(p_1 + [-p_2])$.

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} S_n(E) GJ_{p,q,n} z^n &= \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} S_n(E) S_n(p_1 + [-p_2]) z^n \\ &+ \left(1 - \frac{ip}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} S_n(E) S_{n-1}(p_1 + [-p_2]) z^n \\ &+ \frac{i}{2} \frac{1 + 2qe_2^{(4)} z^2 - 2qpe_3^{(4)} z^3 + 2q(p^2 + 2q)e_4^{(4)} z^4}{\prod_{i=1}^4 (1 - pe_i z - qe_i^2 z^2)} \\ &+ \left(1 - \frac{ip}{2} \right) \frac{e_1^{(4)} z - pe_2^{(4)} z^2 + (p^2 + 2q)e_3^{(4)} z^3 - p(p^2 + 4q)e_4^{(4)} z^4}{\prod_{i=1}^4 (1 - pe_i z - 2qe_i^2 z^2)} \\ &+ \frac{P_6(z)}{\prod_{i=1}^4 (1 - pe_i z - 2qe_i^2 z^2)}. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.3. [13] Pour tout entier naturel n , la nouvelle fonction génératrice du produit des polynômes de Lucas bivariés et de la fonction symétrique en plusieurs va-

riables est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(E) L_n(x, y) z^n = \frac{e_2^{(4)}(x^2 + 2y)z^2 + (-x^3 - 3xy)z^3 e_3^{(4)} + e_4^{(4)}(x^4 + 4x^2y + 2y^2)z^4 + 2 - xze_1^{(4)}}{\prod_{i=1}^4 (1 - xe_i z - ye_i^2 z^2)}$$

Démonstration : On remarque que

$$L_n(x, y) = 2S_n(p_1 + [-p_2]) - xS_{n-1}(p_1 + [-p_2]),$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} S_n(E) L_n(x, y) z^n &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} S_n(E) S_n(p_1 + [-p_2]) - x \sum_{n=0}^{\infty} S_n(E) S_{n-1}(p_1 + [-p_2]) \\ &= 2 \frac{1 + ye_2^{(4)}z^2 - xye_3^{(4)}z^3 + y(x^2 + y)e_4^{(4)}z^4}{\prod_{i=1}^4 (1 - xe_i z - ye_i^2 z^2)} \\ &\quad - x \frac{e_1^{(4)}z - xe_2^{(4)}z^2 + (x^3 + xy)e_3^{(4)}z^3 - x^2(x^2 + 2y)e_4^{(4)}z^4}{\prod_{i=1}^4 (1 - xe_i z - ye_i^2 z^2)} \\ &= \frac{e_2^{(4)}(x^2 + 2y)z^2 + (-x^3 - 3xy)z^3 e_3^{(4)} + e_4^{(4)}(x^4 + 4x^2y + 2y^2)z^4 + 2 - xze_1^{(4)}}{\prod_{i=1}^4 (1 - xe_i z - ye_i^2 z^2)} \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.4. [13] Pour tout entier naturel n , la nouvelle fonction génératrice ordinaire du produit des polynômes de Jacobsthal–Lucas bivariés et de la fonction symétrique en plusieurs variables est donnée par

$$\begin{aligned} (x^2y^2 + 4y)z^2e_2^{(4)} + (-x^3y^3 - 6xy^2)z^3e_3^{(4)} + (x^4y^4 + 8x^2y^3 \\ + 8y^2)z^4e_4^{(4)} + 2 - xye_1^{(4)} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(E) j_n(x, y) z^n = \frac{\quad}{\prod_{i=1}^4 (1 - xye_i z - 2ye_i^2 z^2)}.$$

Démonstration : On remarque que

$$j_n(x, y) = 2S_n(p_1 + [-p_2]) - xyS_{n-1}(p_1 + [-p_2]).$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} S_n(E) j_n(x, y) z^n &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} S_n(E) S_n(p_1 + [-p_2]) - xy \sum_{n=0}^{\infty} S_n(E) S_{n-1}(p_1 + [-p_2]) \\ &= 2 \frac{1 + 2ye_2^{(4)}z^2 - 2y^2xe_3^{(4)}z^3 + 2y(x^2y^2 + 2y)e_4^{(4)}z^4}{\prod_{i=1}^4 (1 - xye_i z - 2ye_i^2 z^2)} \\ &\quad - xy \frac{e_1^{(4)}z - xye_2^{(4)}z^2 + (x^2y^2 + 2y)e_3^{(4)}z^3 - xy(x^2y^2 + 4y)e_4^{(4)}z^4}{\prod_{i=1}^4 (1 - xye_i z - 2ye_i^2 z^2)} \\ &\quad (x^2y^2 + 4y)z^2e_2^{(4)} + (-x^3y^3 - 6xy^2)z^3e_3^{(4)} + (x^4y^4 + 8x^2y^3 \\ &\quad + 8y^2)z^4e_4^{(4)} + 2 - xye_1^{(4)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^4 (1 - xye_i z - 2ye_i^2 z^2)}{\prod_{i=1}^4 (1 - xye_i z - 2ye_i^2 z^2)} \end{aligned}$$

□

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons étudié certaines propriétés des fonctions symétriques ainsi que leurs relations avec les fonctions génératrices. En utilisant ces outils, nous avons établi plusieurs résultats concernant les nombres de Pell–Lucas, les polynômes bivariés de Lucas et les polynômes bivariés de Jacobsthal–Lucas. Les résultats obtenus mettent en évidence l'importance des fonctions génératrices dans l'étude des suites récurrentes et des polynômes associés. Ils ouvrent également des perspectives pour l'étude d'autres familles de suites et de polynômes

RÉSUMÉ

Ce mémoire est consacré à l'étude de quelques théorèmes fondamentaux sur les fonctions symétriques et de leurs applications. Après avoir présenté les notions préliminaires nécessaires, nous avons étudié les fonctions symétriques élémentaires et complètes ainsi que certaines relations algébriques qui les lient. Nous avons ensuite utilisé les fonctions génératrices comme outil principal pour établir plusieurs résultats concernant les fonctions symétriques et leurs applications à certaines suites récurrentes et familles de polynômes. En particulier, nous avons obtenu des fonctions génératrices associées aux nombres de Pell–Lucas, aux polynômes bivariés de Lucas et aux polynômes bivariés de Jacobsthal–Lucas. Les résultats obtenus mettent en évidence l'importance des fonctions symétriques dans l'étude combinatoire et algébrique des suites et des polynômes.

ABSTRACT

This dissertation is devoted to the study of some fundamental theorems on symmetric functions and their applications. After presenting the necessary preliminary notions, we investigate elementary and complete symmetric functions together with several algebraic relations connecting them. We then use generating functions as a principal tool to establish various results concerning symmetric functions and their applications to certain recurrent sequences and families of polynomials. In particular, we derive generating functions associated with Pell–Lucas numbers, bivariate Lucas polynomials, and bivariate Jacobsthal–Lucas polynomials. The obtained results highlight the importance of symmetric functions in the combinatorial and algebraic study of sequences and polynomials.

ملخص

تتناول هذه المذكرة دراسة بعض النظريات الأساسية المتعلقة بالدوال التناظرية وتطبيقاتها. وقد بدأنا بعرض المفاهيم والنتائج التمهيدية اللازمة، ثم درسنا الدوال التناظرية الأولية والكاملة وبعض العلاقات الجبرية التي تربط بينها. بعد ذلك، اعتمدنا على الدوال التوليدية كأداة رئيسية لاستخراج العديد من النتائج المتعلقة بالدوال التناظرية وتطبيقاتها على بعض المتتاليات العودية وعائلات من متعددات الحدود. وبصفة خاصة، تم الحصول على دوال توليدية مرتبطة بأعداد بيل-لوكاس ومتعددات حدود لوكاس ثنائية المتغيرات ومتعددات حدود جاكوبستال-لوكاس ثنائية المتغيرات. وتبرز النتائج المتحصل عليها أهمية الدوال التناظرية في الدراسة التوافقية والجبرية للمتتاليات ومتعددات الحدود، كما تفتح المجال أمام تطبيقات وتعميمات أخرى في هذا المجال.

Bibliographie

- [1] M. Asci and E. Gurel, *On Bivariate Complex Fibonacci and Lucas Polynomials*, Conference on Mathematical Sciences ICM, pp. 11–14, 2012.
- [2] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [3] M. R. Eslahchi, M. Dehghan and S. Amani, *The Third and Fourth Kinds of Chebyshev Polynomials and Best Uniform Approximation*, Mathematical and Computer Modelling, Vol. 55, pp. 1746–1762, 2012.
- [4] J. C. Mason and D. C. Handscomb, *Chebyshev Polynomials*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003.
- [5] Y. K. Panwar, B. Singh and V. K. Gupta, *Generalized Fibonacci Sequences and its Properties*, Palestine Journal of Mathematics, Vol. 3, No. 1, pp. 141–147, 2014.
- [6] Y. Soykan, I. Okumus and F. Tasdemir, *On Generalized Tribonacci Sedenions*, arXiv :1901.05312v1, 2019.
- [7] A. Boussayoud, *L'action de l'opérateur $k_{e_1 e_2}$ sur la série $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)z^n$* , Doctoral dissertation, Mohamed Seddik Ben Yahia University, Jijel, Algeria, 2017.

- [8] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, 1995.
- [9] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Volume 2*, Cambridge University Press, 1999.
- [10] Bruce E. Sagan, *The Symmetric Group*, Springer, 2001.
- [11] Alain Lascoux, *Symmetric Functions and Combinatorial Operators on Polynomials*, American Mathematical Society, 2003.
- [12] Verner E. Hoggatt, *Fibonacci and Lucas Numbers*, Houghton Mifflin, 1969.
- [13] F. Bouzekria, A. Boussayoud, Kh. Boubellouta, et F. Yakoubi. On generating functions of the products of symmetric functions in several variables with some numbers and polynomials. *Nonlinear Studies*, 33(1), pp. 281–297.