



N° Réf :.....

Université Abdelhafid Boussouf – Mila

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master
En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Quelques propriétés des solutions de certaines équations aux différences dans les corps ultramétriques

Préparé par :

- Guizi Hadjer
- Boutouatou Halima

Soutenue le 22/06/2026 devant le jury

Haddad Nabila	MCB	U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Bourourou Siham	MCB	U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Meskine Habiba	MAA	U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire : 2025/2026

Remerciements

Avant tout, nous remercions Allah le Tout-Puissant de nous avoir accordé la santé, la volonté et la patience nécessaires pour mener à bien ce travail.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre encadreuse, **Madame Bourourou Siham**, pour son accompagnement tout au long de la réalisation de ce mémoire. Nous le remercions sincèrement pour sa disponibilité, ses précieux conseils, sa rigueur scientifique ainsi que pour l'intérêt constant qu'il a porté à ce travail.

Nous adressons également nos vifs remerciements aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce mémoire. Nous leur sommes reconnaissantes pour le temps consacré à l'examen de notre travail ainsi que pour leurs remarques et suggestions qui contribueront à son amélioration.

Nous exprimons aussi notre reconnaissance à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à nos familles pour leur soutien moral, leur confiance, leurs encouragements constants et les sacrifices consentis tout au long de nos études.

Abstract

This thesis is devoted to the study of certain difference equations in an ultrametric setting. We focus on the properties of meromorphic solutions defined over a complete field endowed with a non-Archimedean absolute value.

First, we introduce the fundamental concepts of ultrametric analysis, including p -adic numbers and analytic and meromorphic functions. Then, we develop the main tools of ultrametric Nevanlinna theory, which are essential for studying the growth and value distribution of meromorphic functions.

Finally, we apply these tools to investigate certain difference and q -difference equations, highlighting conditions on the coefficients that influence the growth, nature, and asymptotic behavior of their solutions.

Keywords : ultrametric analysis, p -adic numbers, meromorphic functions, Nevanlinna theory, difference equations, q -difference equations.

Résumé

Ce mémoire porte sur l'étude de certaines équations aux différences dans le cadre ultramétrique. Nous nous intéressons en particulier aux propriétés des solutions méromorphes définies sur un corps complet muni d'une valeur absolue non archimédienne.

Nous présentons d'abord les notions de base de l'analyse ultramétrique, notamment les nombres p -adiques et les fonctions analytiques et méromorphes. Ensuite, nous introduisons les outils essentiels de la théorie de Nevanlinna ultramétrique, permettant d'analyser la croissance ainsi que la distribution des zéros et des pôles.

Enfin, nous appliquons ces résultats à l'étude de certaines équations aux différences et aux q -différences, en mettant en évidence des conditions sur les coefficients influençant le comportement des solutions.

Mots-clés : analyse ultramétrique, nombres p -adiques, fonctions méromorphes, théorie de Nevanlinna, équations aux différences, q -différences.

ملخص

تتناول هذه المذكرة دراسة بعض المعادلات ذات الفروق في إطار فوق-متري. ونهتّم على وجه الخصوص بخصائص الحلول الميرومورفية المعرّفة على حقل كامل مزوّد بقيمة مطلقة غير أرخميدية.

نقدّم أولاً المفاهيم الأساسية للتحليل فوق-المتري، ولا سيما الأعداد p -الأديكيّة والدوال التحليلية والميرومورفية. ثم نعرض الأدوات الأساسية لنظرية نيفانلينا فوق-المتريّة، التي تتيح تحليل نمو الدوال وتوزيع أصفارها وأقطابها.

وأخيراً، نطبّق هذه النتائج على دراسة بعض المعادلات ذات الفروق ومعادلات q -الفروق، مع إبراز الشروط المتعلقة بالمعاملات والتي تؤثر في سلوك الحلول.

الكلمات المفتاحية: التحليل فوق-المتري، الأعداد p -الأديكيّة، الدوال الميرومورفية، نظرية نيفانلينا، المعادلات ذات الفروق، معادلات q -الفروق.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires en analyse ultramétrique	3
1.1 Corps valués ultramétrique	3
1.1.1 Corps normés	3
1.2 Corps des nombres p -adiques	4
1.2.1 Valuation p -adique sur $\mathbb{Z}$	5
1.2.2 Valuation p -adique sur $\mathbb{Q}$	6
1.2.3 Valeur absolue p -adique sur $\mathbb{Q}$	7
1.2.4 Complétion de $\mathbb{Q}$	12
1.3 Propriétés analytiques et topologiques des nombres p -adiques	13
1.3.1 Propriétés analytiques	13
1.3.2 Propriétés topologiques	16
1.4 Corps C_p des nombres complexes p -adiques	20
1.5 Fonctions analytiques d'un corps ultramétrique	21
1.5.1 Zéro des fonction analytiques	23
1.6 Fonction méromorphes d'un corps ultramétrique	29
1.7 Polygone de valuation	30
2 Théorie de Nevanlinna ultramétrique	32
2.1 Formule de Jensen	32

2.2	Fonction de Nevanlinna	35
2.3	Théorème fondamental de Nevanlinna	40
3	Etude de certaines propriétés des solutions des équations aux différences	
	dans le cas ultramétrique	42
3.1	Équations aux q -différences	43
3.2	Équations aux différences	48
	Conclusion	57

Introduction

Au cours des dernières décennies, l'analyse ultramétrique s'est imposée comme un domaine fondamental en mathématiques modernes, en raison de ses nombreuses applications en théorie des nombres, en géométrie arithmétique et en dynamique des systèmes discrets. Contrairement à l'analyse classique, fondée sur les valeurs absolues archimédiennes, l'analyse ultramétrique repose sur des valeurs absolues non archimédiennes vérifiant l'inégalité ultramétrique, ce qui confère aux espaces étudiés une structure profondément différente, tant du point de vue topologique qu'analytique.

Dans ce cadre, le corps des nombres p -adiques constitue un exemple central et incontournable. Il permet de développer une théorie riche des fonctions analytiques et méromorphes, dont les propriétés présentent des particularités remarquables, notamment en ce qui concerne la convergence des séries, la structure des disques et le comportement des zéros.

Par ailleurs, l'étude des équations aux différences, et en particulier des équations aux q -différences, occupe une place importante dans plusieurs branches des mathématiques, telles que l'analyse dynamique et la théorie des fonctions. Ces équations apparaissent naturellement dans la modélisation de phénomènes discrets et nécessitent des outils adaptés pour analyser le comportement de leurs solutions.

Dans ce contexte, la théorie de Nevanlinna ultramétrique constitue un outil puissant pour étudier la croissance des fonctions méromorphes ainsi que la distribution de

leurs zéros et de leurs pôles. Elle permet d'établir des relations fondamentales entre la structure d'une fonction et son comportement asymptotique, et joue un rôle essentiel dans l'analyse des solutions des équations fonctionnelles.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier certaines propriétés des solutions d'équations aux différences dans le cadre ultramétrique. Plus précisément, nous nous intéressons aux conditions portant sur les coefficients de ces équations qui influencent la croissance et la nature des solutions méromorphes, notamment leur caractère transcendant et leur comportement asymptotique.

Pour atteindre cet objectif, nous procédons en trois étapes. Dans un premier temps, nous introduisons les notions fondamentales de l'analyse ultramétrique, en mettant l'accent sur les nombres p -adiques, leurs propriétés analytiques et topologiques, ainsi que sur les fonctions analytiques et méromorphes. Dans un deuxième temps, nous présentons les outils essentiels de la théorie de Nevanlinna dans le cadre ultramétrique, qui permettent d'analyser la croissance des fonctions. Enfin, dans un troisième temps, nous appliquons ces résultats à l'étude de certaines équations aux différences et aux q -différences, afin de dégager des conditions garantissant des propriétés spécifiques des solutions.

Ce travail s'inscrit ainsi dans le prolongement des recherches récentes en analyse ultramétrique et contribue à une meilleure compréhension des interactions entre la théorie des fonctions méromorphes et les équations aux différences dans ce cadre non archimédien.

Préliminaires en analyse ultramétrique

1.1 Corps valués ultramétrique

1.1.1 Corps normés

Définition 1.1.1

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une valeur absolue sur $\mathbb{K}$ est une application

$$|\cdot| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (i) $|x| = 0 \iff x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{K};$
- (ii) $|xy| = |x| \cdot |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{K};$
- (iii) $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{K}$ (inégalité triangulaire).

On dit que la valeur absolue $|\cdot|$ est ultramétrique si, au lieu de (iii), on a

$$|x + y| \leq \max(|x|, |y|), \quad \forall x, y \in \mathbb{K}.$$

Cette propriété est connue comme l'inégalité triangulaire forte ou ultramétrique ; elle est plus forte que la propriété (iii).

Définition 1.1.2

- (i) On appelle *corps valué* tout couple de la forme $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, où $\mathbb{K}$ est un corps et $|\cdot|$ est une valeur absolue sur $\mathbb{K}$.
- (ii) On appelle *distance induite* sur $\mathbb{K}$ par $|\cdot|$, la distance $d_{|\cdot|}$ définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{K}, \quad d_{|\cdot|}(x, y) = |x - y|.$$

- (iii) Si $|\cdot|$ est une valeur absolue ultramétrique, alors

$$\forall x, y, z \in \mathbb{K}, \quad d_{|\cdot|}(x, z) \leq \max(d_{|\cdot|}(x, y), d_{|\cdot|}(y, z)),$$

et la distance induite par cette valeur absolue est appelée *distance ultramétrique*.

- (iv) Lorsque $\mathbb{K}$ est muni d'une distance ultramétrique, on dit que $\mathbb{K}$ est un *corps valué ultramétrique*.

1.2 Corps des nombres p -adiques

Le corps des nombres p -adiques constitue un exemple fondamental et largement étudié d'espace ultramétrique. Plus précisément, il s'agit d'un corps topologique complet obtenu par complétion du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ relativement à la valeur absolue p -adique $|\cdot|_p$, laquelle vérifie une forme renforcée de l'inégalité triangulaire, appelée *inégalité ultramétrique*.

Cette construction repose sur le procédé général de complétion des espaces métriques, garantissant l'existence d'un corps complet contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-corps dense. L'approche adoptée consiste ainsi à considérer la valuation p -adique définie sur $\mathbb{Q}$, puis à construire le corps des nombres p -adiques $\mathbb{Q}_p$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des suites de Cauchy de nombres rationnels.

Cette approche topologique permet non seulement de définir rigoureusement le

corps $\mathbb{Q}_p$, mais également d'étudier ses propriétés fondamentales, notamment la nature ultramétrique de la distance induite, la complétude ainsi que la structure algébrique qui en découle.

Par ailleurs, plusieurs propriétés caractéristiques du corps $\mathbb{Q}_p$ s'inscrivent dans le cadre plus général des corps ultramétriques. Parmi celles-ci figurent la discrétion de la valuation, la description précise des boules ouvertes et fermées, ainsi que la structure des anneaux d'entiers associés, lesquelles jouent un rôle essentiel dans diverses applications, notamment en théorie des nombres, en géométrie arithmétique et en analyse non archimédienne.

1.2.1 Valuation p-adique sur $\mathbb{Z}$

Définition 1.2.1

Soit p un nombre premier. La valuation p -adique de x sur $\mathbb{Z}$ est l'application

$$V_p : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} V_p(x) & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

où $V_p(x)$ est le plus grand entier positif tel que $p^{V_p(x)}$ divise x i.e : $x = p^{V_p(x)}y$ avec p ne divise pas y .

Exemple 1.2.1

- (1) Soit $x = 540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ on a $V_2(x) = 2$, $V_3(x) = 3$, $V_5(x) = 1$ et $V_p(x) = 0$ pour tout nombre premier p différent de 2, 3, 5.
- (2) Soit $x = 1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ on a $V_2(x) = 3$, $V_5(x) = 2$, $V_7(x) = 1$ et $V_p(x) = 0$ pour tout nombre premier p différent de 2, 5, 7.

1.2.2 Valuation p-adique sur $\mathbb{Q}$

Définition 1.2.2

Soit $x \in \mathbb{Q}$ avec $x = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ on définit

$$V_p\left(\frac{a}{b}\right) = V_p(a) - V_p(b).$$

Ainsi, la valuation p-adique d'un nombre rationnel est toujours un entier relatif.

Exemple 1.2.2

- (1) pour $x = \frac{72}{25}$ on a $\frac{72}{25} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{5^2}$, alors $V_2(x) = 3$, $V_3(x) = 2$, $V_5(x) = -2$ et $V_p(x) = 0$ pour tout nombre premier p différent de 2, 3, 5.
- (2) pour $x = \frac{40}{9}$ on a $\frac{40}{9} = \frac{2^3 \cdot 5}{3^2}$, alors $V_2(x) = 3$, $V_3(x) = -2$, $V_5(x) = 1$ et $V_p(x) = 0$ pour tout nombre premier p différent de 2, 3, 5.

Proposition 1.2.1 [12] [20]

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$, valuation p-adique vérifie les propriétés suivantes

- (i) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$
- (ii) $v_p(a + b) \geq \min[v_p(a), v_p(b)]$

Preuve.

Pour montrer (i) et (ii) soient a, b deux nombres entiers ne sont pas nuls, on peut écrire

$$a = p^\alpha n_1 \text{ avec } \alpha = v_p(a) \text{ et } p \text{ ne divise pas } n_1.$$

$$b = p^\beta n_2 \text{ avec } \beta = v_p(b) \text{ et } p \text{ ne divise pas } n_2.$$

donc,

$$ab = p^{\alpha+\beta}(n_1 n_2) \text{ avec } p \text{ ne divise pas } n_1 n_2.$$

d'où

$$v_p(ab) = \alpha + \beta = v_p(a) + v_p(b).$$

Pour (ii), on distingue trois cas :

Si $\alpha < \beta$, nous avons

$$a + b = p^\alpha (n_1 + p^{\beta-\alpha} n_2),$$

d'où

$$v_p(a + b) = \alpha \geq \min[v_p(a), v_p(b)].$$

Si $\alpha > \beta$, nous avons

$$a + b = p^\beta (p^{\alpha-\beta} n_1 + n_2),$$

d'où

$$v_p(a + b) = \beta \geq \min[v_p(a), v_p(b)].$$

Si $\alpha = \beta$, on a

$$a + b = p^\alpha (n_1 + n_2) \text{ où } p \text{ ne divise pas } (n_1 + n_2).$$

d'où

$$v_p(a + b) = \alpha \geq \min[v_p(a), v_p(b)].$$

■

1.2.3 Valeur absolue p -adique sur $\mathbb{Q}$

Définition 1.2.3

Soit p un nombre premier, on définit la valeur absolue p -adique comme

$$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \longmapsto |x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Remarque 1.2.1

Si x s'écrit $\prod_i p_i^{\alpha_i}$, où les α_i sont des entiers, alors $v_{p_i}(x) = \alpha_i$ et $|x|_{p_i} = \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}$. Notons que $1 = \prod_i p_i^0$, donc $v_p(1) = 0$, pour tout nombre premier p .

Exemple 1.2.3

(1) Pour $x = \frac{72}{25} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{5^2} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^{-2} \in \mathbb{Q}$, alors

$$\left| \frac{72}{25} \right|_2 = \frac{1}{8}, \quad \left| \frac{72}{25} \right|_3 = \frac{1}{9}, \quad \left| \frac{72}{25} \right|_5 = 25$$

et

$$\left| \frac{72}{25} \right|_p = 1 \quad \text{pour } p \neq 2, 3, 5.$$

(2) On a $|p^n|_p = \frac{1}{p^n}$, plus un nombre est divisible par p , plus on est petite.

Proposition 1.2.2 [20]

L'application $|\cdot|_p$ est une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.

Preuve.

(i) Soit $x \in \mathbb{Q}$, alors

$$|x|_p = 0 \iff p^{-v_p(x)} = 0 \iff -v_p(x) = -\infty \iff v_p(x) = +\infty \iff x = 0$$

(ii) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$. Alors si $x = 0$ ou $y = 0$, on a l'égalité.

Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on trouve

$$\begin{aligned} |xy|_p &= p^{-v_p(xy)} \\ &= p^{-v_p(x) - v_p(y)} \\ &= p^{-v_p(x)} p^{-v_p(y)} \\ &= |x|_p |y|_p \end{aligned}$$

(iii) Soit $x, y \in \mathbb{Q}$. Si $x = 0$ ou $y = 0$, on a le résultat, en effet soit $x = 0$ et $y \neq 0$

$$|x + y|_p = |y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$$

Si $x + y = 0$, c'est-à-dire $x = -y$, on a

$$|x|_p = |y|_p$$

et

$$|x + y|_p = 0 \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$$

Si $x, y \neq 0$, on a $|x + y|_p = p^{-v_p(x+y)}$. Soit $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$, $a, c \in \mathbb{Z}$ et $b, d \in \mathbb{Z}^*$, nous avons

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

d'où

$$\begin{aligned} v_p(x + y) &= v_p(ad + cb) - v_p(bd) \\ &= v_p(ad + cb) - v_p(b) - v_p(d) \\ &\geq \min\{v_p(a) + v_p(d), v_p(c) + v_p(b)\} - v_p(b) - v_p(d) \\ &= \min\{v_p(a) - v_p(b), v_p(c) - v_p(d)\} \\ &= \min\{v_p(x), v_p(y)\} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} v_p(x + y) &\geq \min\{v_p(x), v_p(y)\} \\ -v_p(x + y) &\leq -\min\{v_p(x), v_p(y)\} \\ &= \max\{-v_p(x), -v_p(y)\} \end{aligned}$$

Si $\max\{-v_p(x), -v_p(y)\} = -v_p(x)$, on a $-v_p(x + y) \leq -v_p(x)$ donc

$$p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-v_p(x)} = \max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\}$$

d'où

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$$

si $\max\{-v_p(x), -v_p(y)\} = -v_p(y)$, on a $-v_p(x+y) \leq -v_p(y)$ donc

$$p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-v_p(y)} = \max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\}$$

d'où

$$|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$$

et par suite $|\cdot|_p$ est une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.

■

Définition 1.2.4

On peut définir sur le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ trois types de valeurs absolues

(1) *Valeur absolue triviale*

$$|x| = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(2) *Valeur absolue ordinaire*

$$|x|_\infty = \max(x, -x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(3) *Valeur absolue p -adique $|\cdot|_p$.*

Remarque 1.2.2

1) La valeur absolue p -adique $|\cdot|_p$ prend ses valeurs dans

$$|\mathbb{Q}|_p = \{p^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

2) Par définition de la valeur absolue p -adique, on a pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $|x|_p \leq 1$.

Théorème 1.2.1 (Théorème d'Ostrowski) [20]

Toute valeur absolue non triviale $|\cdot|$ sur $\mathbb{Q}$ est équivalente soit à $|\cdot|_p$ pour un nombre premier p , soit à la valeur absolue usuelle notée $|\cdot|_\infty$.

Théorème 1.2.2 (Formule du produit) [21]

Pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$, on a

$$\prod_{p \leq \infty} |x|_p = 1$$

où $p \leq \infty$ signifie que nous prenons le produit sur l'ensemble des nombres premiers de $\mathbb{Q}$, y compris l'infini.

Preuve.

Soit $x \in \mathbb{Q}^*$, alors la factorisation primaire de x s'écrit

$$x = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

alors

$$|x|_{\infty} = |\pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

tel que $p_i \in \{1, \dots, k\}$

$$|x|_{p_i} = p_i^{-\alpha_i}$$

d'autre part, si $p \notin \{p_1, \dots, p_k\}$ alors $|x|_p = 1$. On obtient

$$|x|_{\infty} \prod_{p \text{ premier}} |x|_p = |x|_{\infty} \prod_{i=1}^k |x|_{p_i} = (p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) (p_1^{-\alpha_1} \cdots p_k^{-\alpha_k}) = 1$$

■

Exemple 1.2.4

Pour $x = \frac{3}{2}$, on a

$$\left| \frac{3}{2} \right|_{\infty} = \frac{3}{2}, \quad \left| \frac{3}{2} \right|_2 = 2, \quad \left| \frac{3}{2} \right|_3 = \frac{1}{3},$$

et pour tout autre p ,

$$\left| \frac{3}{2} \right|_p = 1.$$

Ainsi

$$\left| \frac{3}{2} \right|_{\infty} \prod_{p \text{ premier}} \left| \frac{3}{2} \right|_p = \frac{3}{2} \times 2 \times \frac{1}{3} = 1$$

1.2.4 Complétion de $\mathbb{Q}$

Il est bien connu que le corps $\mathbb{Q}$ n'est pas complet pour la valeur absolue usuelle et que sa complétion est le corps des nombres réels $\mathbb{R}$. La même procédure peut être appliquée lorsque l'on considère la valeur absolue p -adique ultramétrique $|\cdot|_p$.

La complétion de $\mathbb{Q}$ relativement à cette valeur absolue conduit à un corps ultramétrique appelé corps des nombres p -adiques, noté $\mathbb{Q}_p$. Les éléments de $\mathbb{Q}_p$ sont définis comme les classes d'équivalence de suites de Cauchy de nombres rationnels par la relation suivante

$$(a_n) \sim (b_n) \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n - b_n|_p = 0$$

Il reste à prolonger la valeur absolue p -adique de $\mathbb{Q}$ à l'ensemble $\mathbb{Q}_p$. Soit $x \in \mathbb{Q}_p$ et (x_n) une suite de Cauchy de nombres rationnels convergente vers x pour la distance p -adique.

On montre que la suite $(|x_n|_p)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et qu'elle admet une limite indépendante du choix de la suite (x_n) .

On définit alors la valeur absolue p -adique de x par : $|x|_p = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n|_p$ (voir [12])

Dans la suite, on commencera par définir l'anneau des entiers p -adiques $\mathbb{Z}_p$, puis on construira le corps des fractions de cet anneau afin d'obtenir le corps des nombres p -adiques $\mathbb{Q}_p$.

Définition 1.2.5

Soit p un nombre premier. La complétion $\mathbb{Q}_p$ de $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ est appelée le corps des nombres p -adiques. Son anneau $\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p, |a|_p \leq 1\}$ est l'anneau des entiers p -adiques.

Remarque 1.2.3

L'ensemble des valeurs de l'application $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}_+$ est le même ensemble de valeurs de l'application $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_+$, et il est donné par $\{p^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. Par contre, la valeur absolue usuelle définie sur $\mathbb{R}$ parcourt tout l'ensemble des nombres réels positifs $\mathbb{R}_+$.

1.3 Propriétés analytiques et topologiques des nombres p -adiques

Dans cette section, nous étudions les propriétés élémentaires analytiques des nombres p -adiques qui concernent la convergence des suites et des séries définies dans $\mathbb{Q}_p$, et nous faisons une étude des propriétés topologiques sur les disques de $\mathbb{Q}_p$.

1.3.1 Propriétés analytiques

Proposition 1.3.1 [20]

Soit $(a_n)_n$ une suite dans $\mathbb{Q}_p$. On a $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

Preuve.

Si $(a_n)_p$ est de Cauchy alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+m} - a_n|_p = 0, \quad \forall m > 0$$

d'où quand $m = 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

Inversement, on a

$$\begin{aligned} |a_{n+m} - a_n|_p &= |a_n - a_{n+1} - \dots + a_{n+m-1} - a_{n+m}|_p \\ &\leq \max\{|a_n - a_{n+1}|_p, |a_{n+1} - a_{n+2}|_p, \dots, |a_{n+m-1} - a_{n+m}|_p\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$$

d'où $(a_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$. ■

Remarque 1.3.1

$(a_n)_n$ est convergente dans $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si

$$|a_{n+1} - a_n|_p \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Proposition 1.3.2 [20]

Soit $(a_n)_n$ une suite dans $\mathbb{Q}_p$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ dans $\mathbb{Q}_p$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|_p = 0,$$

ou bien $\exists n_0 \in \mathbb{N}; |a_n|_p = |a_{n_0}|_p$ pour $n \geq n_0$ (la suite $(|a_n|_p)_{n \geq 0}$ est stationnaire à partir d'un rang n_0).

Preuve.

Soit $n, m \in \mathbb{N}, n > m$, on a

$$||a_n|_p - |a_m|_p| < |a_n - a_m|_p \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

donc $(|a_n|_p)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet, donc $(|a_n|_p)_n$ est convergente.

Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|_p \neq 0,$$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|_p = l > 0$.

Posons $\varepsilon = \frac{l}{2}$, donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_1$,

$$|a_n|_p > \frac{l}{2}.$$

De même, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m > n_2$ on a

$$|a_m - a_n|_p < \frac{l}{2}.$$

D'où, pour $n, m > \max(n_1, n_2) = n_0$, on a

$$|a_m|_p = |a_m - a_n + a_n|_p \leq \max\{|a_n - a_m|_p, |a_n|_p\} = |a_n|_p.$$

Si $n = n_0$, on aura

$$|a_m|_p \leq |a_{n_0}|_p, \quad \text{pour } m \geq n_0.$$

De même,

$$|a_n|_p \leq \max\{|a_n - a_m|_p\} = |a_m|_p.$$

Alors

$$|a_{n_0}|_p \leq |a_m|_p, \quad \text{pour } m \geq n_0,$$

d'où

$$|a_{n_0}|_p = |a_m|_p, \quad \text{pour } m \geq n_0.$$

■

Maintenant, soit la série $\sum_{k \geq 0} a_k$ et $a_k \in \mathbb{Q}_p$. On sait que la série $\sum_{k \geq 0} a_k$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ converge dans $\mathbb{Q}_p$.

Proposition 1.3.3 [20]

Soit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ une série dans $\mathbb{Q}_p$ ($a_k \in \mathbb{Q}_p$), alors $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Dans ce cas,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|_p \leq \max |a_n|_p.$$

Preuve.

La série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

converge dans $\mathbb{Q}_p$, donc S_n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$, d'où

$$|S_n - S_{n-1}|_p \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Mais $a_n = S_n - S_{n-1}$, donc (a_n) tend vers zéro dans $\mathbb{Q}_p$.

Maintenant, supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$$

on a le résultat, sinon d'après la propriété (1.2.1), il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geq N_0$ on a

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|_p = \left| \sum_{n=1}^{N_0} a_n \right|_p \quad (1.1)$$

D'autre part, on a

$$\max_{1 \leq n \leq N_0} \{|a_n|_p\} \leq \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n|_p\} \quad (1.2)$$

De (1.1) et (1.2) on a

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|_p = \left| \sum_{n=1}^{N_0} a_n \right|_p \leq \max_{1 \leq n \leq N_0} \{|a_n|_p\} \leq \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n|_p\}.$$

■

1.3.2 Propriétés topologiques

Définition 1.3.1

Soit $a \in \mathbb{Q}_p$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on appelle

(1) le disque ouvert dans $\mathbb{Q}_p$, de rayon r et de centre a , l'ensemble donné par

$$D^-(a, r) = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x - a|_p < r\}$$

(2) le disque fermé dans $\mathbb{Q}_p$, de rayon r et de centre a , l'ensemble donné par

$$D^+(a, r) = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x - a|_p \leq r\}$$

(3) le cercle de centre a et de rayon r , l'ensemble donné par

$$C(a, r) = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x - a|_p = r\}$$

La notation $D(a, r)$ désignera l'un ou l'autre de ces disques.

Proposition 1.3.4 [12] [10]

Soient $a, b \in \mathbb{Q}_p$ et $r, s \in \mathbb{R}_+$. Alors

- (i) Si $b \in D(a, r)$, alors $D(b, r) = D(a, r)$. Autrement dit, tout point d'un disque est un centre de ce disque.
- (ii) Tout disque de l'espace topologique $\mathbb{Q}_p$ est à la fois ouvert et fermé.
- (iii) Soient $D(a, r)$ et $D(b, s)$ deux disques, alors ils sont disjoints, ou l'un est inclus dans l'autre.

Preuve.

- (i) Si $b \in D(a, r)$, on a par définition $|b - a|_p < r$. Prenons $x \in \mathbb{Q}_p$ tel que $|x - a|_p < r$. On a par l'inégalité ultramétrique

$$|x - b|_p < \max\{|x - a|_p, |b - a|_p\} < r.$$

De telle sorte que $x \in D(b, r)$, et donc on a montré que $D(a, r) \subset D(b, r)$. En changeant simplement les rôles de a et b , on montre que $D(b, r) \subset D(a, r)$, d'où l'égalité.

- (ii) Soit $a \in \mathbb{Q}_p$ et considérons $D^-(a, r)$, $r > 0$, le disque ouvert centré en a et de rayon r . Par définition, c'est un ouvert de $\mathbb{Q}_p$. Il reste donc à montrer qu'il est aussi fermé dans le cas non-archimédien. Alors Prenons un point x sur la frontière de

$D^-(a, r)$. Ce que signifie que tout disque ouvert centré en x contenir des points que sont dans de $D^-(a, r)$. Choisissons un rayon $s < r$. Maintenant, Puisque x est un point de la frontière de $D^-(a, r)$,

$$D^-(a, r) \cap D^-(x, s) \neq \emptyset.$$

Il existe un élément $y \in D^-(a, r) \cap D^-(x, s)$, cela signifie que

$$|y - a|_p < r \quad \text{et} \quad |y - x|_p < s < r.$$

appliquant l'inégalité ultramétrique nous obtenons

$$|x - a|_p < \max\{|x - y|_p, |y - a|_p\} < \max\{s, r\} < r,$$

d'où $x \in D^-(a, r)$. cela montre que tout point sur la frontière de $D^-(a, r)$ appartient à $D^-(a, r)$, ce que veut dire que $D^-(a, r)$ est un ensemble fermé.

(iii) Nous pouvons Supposer que $r < s$. Si l'intersection n'est pas vide, il existe $c \in D(a, r) \cap D(b, s)$. En suite, nous avons, à partir de (i), que

$$D(a, r) = D(c, r) \quad \text{et} \quad D(b, s) = D(c, s).$$

Par conséquent

$$D(a, r) = D(c, r) \subset D(c, s) = D(b, s).$$

■

L'anneau Z_p a des propriétés topologiques intéressantes.

Proposition 1.3.5 [12]

L'anneau Z_p des entiers p -adiques est un ensemble compact, et $\mathbb{Z}$ (de même $\mathbb{N}$) est dense dans Z_p .

Preuve.

Soit x_{kk} une suite dans $\mathbb{Z}_p$, le développement de Hensel de chaque terme est écrit comme suit

$$x_k = \cdots a_2^k a_1^k a_0^k = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^k p^i,$$

telle que

$$a_i^k \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}, \quad \forall i \geq 0.$$

On peut trouver un $b_0 \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ et une suite $(x_{0k})_k$ de $(x_k)_k$ telle que le dernier chiffre de x_{0k} est b_0 . De la même façon, il existe un $b_1 \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ et une sous-suite $(x_{1k})_k$ de $(x_{0k})_k$ telle que les deux derniers chiffres de $(x_{1k})_k$ est $b_1 b_0$. On continue cette procédure, on va obtenir des nombres $b_0, b_1, b_2, \dots$ avec une suite de suites

$$x_{00}, x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0s}, \dots$$

$$x_{10}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1s}, \dots$$

$$x_{20}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2s}, \dots$$

$$\vdots$$

$$x_{n0}, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{ns}, \dots$$

$$\vdots$$

telle que toute suite est une sous-suite de la suite précédente et chaque élément de la n^{me} rangée termine par $b_n \dots b_2 b_1 b_0$. Pour tout $j = 0, 1, \dots$, nous avons

$$x_{jj} \in \{x_{j-1j}, x_{j-1j+1}, \dots\},$$

Posons

$$x = \dots 000a_n a_{n-1} \dots a_0 = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i.$$

Alors $x_n \in \mathbb{Z}$ et

$$|x - x_n|_p \leq p^{-n},$$

donc $(x_n)_n$ converge vers x dans $\mathbb{Z}_p$. ■

1.4 Corps $\mathbb{C}_p$ des nombres complexes p -adiques

Définition 1.4.1

Soit $\mathbb{K}$ un corps ultramétrique. On dit que $\mathbb{K}$ est algébriquement clos si tout polynôme $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{K}$. De manière équivalente, cela signifie que tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{K}$ se factorise entièrement en un produit de polynômes linéaires dans l'anneau $\mathbb{K}[x]$. Il est bien connu que le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p -adiques n'est pas algébriquement clos pour tout nombre premier p . À titre d'exemple, considérons le polynôme

$$P(x) = x^2 - p \in \mathbb{Q}_p[x].$$

Si ce polynôme admettait une racine $x \in \mathbb{Q}_p$, on aurait nécessairement

$$v_p(x^2) = v_p(p) = 1,$$

d'où

$$v_p(x) = \frac{1}{2}.$$

Or la valuation p -adique d'un élément de $\mathbb{Q}_p$ est toujours un entier. Par conséquent, une telle valeur est impossible et l'équation $x^2 - p = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Q}_p$. Autrement dit,

$$\pm \sqrt{p} \notin \mathbb{Q}_p.$$

Dans de nombreux contextes d'analyse p -adique, il est alors naturel de considérer une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, que l'on note $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$. Ce corps est obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}_p$ toutes les racines des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$. Toutefois, bien que $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$ soit algébriquement clos, il n'est pas complet pour la valeur absolue p -adique. On considère donc la complétion de $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$ pour cette valeur absolue, ce qui conduit au corps $\mathbb{C}_p$, appelé corps des nombres complexes p -adiques. Ce corps est à la fois complet et algébriquement clos. De plus, la valeur absolue p -adique sur $\mathbb{Q}_p$

se prolonge de manière naturelle à $\mathbb{C}_p$, et l'on continue de la noter $|\cdot|_p$, laquelle demeure une valeur absolue ultramétrique. Le corps $\mathbb{C}_p$ vérifie plusieurs propriétés fondamentales que nous rappelons ci-dessous.

Proposition 1.4.1 [22]

Le corps $\mathbb{C}_p$ possède les propriétés suivantes

- (i) $\mathbb{C}_p$ est algébriquement clôt.
- (ii) $\mathbb{C}_p$ n'est pas localement compact.
- (iii) L'ensemble des valeurs p -adiques de $\mathbb{C}_p$ est l'ensemble de puissances rationnelles de p , c'est-à-dire $|\mathbb{C}_p| = \{p^y, y \in \mathbb{Q}\}$.
- (iv) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p \subset \widetilde{\mathbb{Q}_p} \subset \mathbb{C}_p$.

1.5 Fonctions analytiques d'un corps ultramétrique

On note $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clôt, complet par rapport à une valeur absolue ultramétrique $|\cdot|$.

Définition 1.5.1 (série entière)

Une série entière dans $\mathbb{K}$ est une série de fonctions qui s'écrit sous la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x - a)^n, \quad a_n \in \mathbb{K}.$$

Où x et a sont des nombres de $\mathbb{K}$.

Définition 1.5.2

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{K}$. Comme en analyse archimédienne, si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$, on pose

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

le nombre R est appelé le rayon de convergence de f . Donc, Pour $x \in \mathbb{K}$, on a les situations suivants

(i) $|x| < R$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n||x|^n = 0$ et alors la série est convergente.

(ii) $|x| > R$, donc la série est divergente.

(iii) $|x| = R$, donc on peut avoir ou bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n||x|^n = 0$ et alors la série convergente sur la totalité du cercle $C(0, R)$, ou bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n||x|^n \neq 0$ et alors la série est divergente dans le cercle $C(0, R)$. D'autre part, quand $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, on a $R = 0$ et donc f est convergente seulement quand $x = 0$. Quand $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, on dit que le rayon de convergence de f est égal à $+\infty$ et dans ce cas f convergente pour tout $x \in \mathbb{K}$. Le disque $D^-(0, R)$ est appelé le disque de convergence.

Exemple 1.5.1

(1) La série exponentielle $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{K}$, a pour disque de convergence le disque $D^-(0, 1)$.

(2) La série $\sum_{n \geq 0} a^n x^n$, $a \in \mathbb{K}$ est une série géométrique et son disque de convergence est $D^-(0, |a|^{-1})$.

Définition 1.5.3

Soit f une fonction définie de $D^+(a, R)$ dans $\mathbb{K}$, on dit que f est une fonction analytique sur $D^+(a, R)$, s'il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, satisfaisant $|a_n|R^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, et pour tout $x \in D^+(a, R)$, on a

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x - a)^n.$$

Autrement dit, on dit qu'une fonction f est analytique si elle est développable en série entière autour de chaque point de son domaine de définition.

Définition 1.5.4

Soit f une fonction définie de $D^-(a, R)$ dans $\mathbb{K}$, on dit que f est une fonction analytique sur

$D^-(a, R)$, si pour tout $0 < r < R$, la restriction de f à $D^+(a, r)$ est une fonction analytique sur $D^+(a, r)$.

Définition 1.5.5 (Fonction entière)

Une fonction analytique dans le plan tout entier $\mathbb{K}$ est dite entière.

Notation.

On note par $\mathcal{A}(D^-(a, R))$ (resp. $\mathcal{A}(D^+(a, R))$) l'ensemble des fonctions analytiques dans le disque $D^-(a, R)$ (resp. $D^+(a, R)$).

On note par $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}[x]$) l'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{K}$ (resp. l'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{K}$, qui ne sont pas des polynômes, et qui s'appellent fonctions transcendentes).

Proposition 1.5.1 [6]

Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes

- (i) $f \in \mathcal{A}(D^-(a, R))$,
- (ii) La série $f(x)$ est convergente pour tout $x \in D^-(a, R)$.

1.5.1 Zéro des fonction analytiques

Dans cette partie on étudiera les zéro des fonctions analytiques.

Définition 1.5.6

Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$) et soit $\gamma \in \mathbb{K}$ (resp. $\gamma \in D^-(0, R)$). Soit $r \in]0, +\infty[$ tel que $D^+(\gamma, r) \subset \mathbb{K}$ (resp. $r \in]0, R[$ tel que $D^+(\gamma, r) \subset D^-(\gamma, R)$) et soit

$$f(x) = \sum_{n=q}^{+\infty} a_n(x-\gamma)^n, \quad \forall x \in D^+(\gamma, r),$$

avec $a_q \neq 0$ et $q > 0$. On dit que dans ce cas γ est un zéro de f d'ordre de multiplicité q , et q est appelé l'ordre de multiplicité du zéro γ .

Remarque 1.5.1

- Si $q = 0$, il faut comprendre que γ n'est pas un zéro.
- Si $q = 1$, on dit que γ est un zéro simple.
- Si $q = 2$, on dit que γ est un zéro multiple.
- Si $q = \infty$, il faut comprendre que la fonction f est identiquement nulle sur un voisinage de γ .

Proposition 1.5.2 [12]

Une fonction analytique non nulle sur un disque vérifie le principe de zéro isolés, c'est-à-dire que si b est un zéro de f , il existe un disque de centre b et de rayon assez petit, où la fonction f n'admet comme zéro que b .

Preuve.

Si b est un zéro de f , on peut écrire la fonction non nulle f sous la forme

$$f(x) = a_m(x - b)^m + a_{m+1}(x - b)^{m+1} + \dots,$$

tels que $m \geq 1$ est un entier, et $a_m \neq 0$. Il résulte que si $|x - b|$ est assez petit, et non nul,

$$|f(x)| = |a_m|_p |x - b|_p^m \neq 0.$$

■

Définition 1.5.7

Soit

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathcal{A}(\mathbb{K}) \quad (\text{resp. } f \in \mathcal{A}(D^-(0, R))).$$

On définit le module maximum de f , pour $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), par la formule

$$|f|(r) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n.$$

Proposition 1.5.3 [12] [6]

Soient $0 < r < R$ et

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0, R)),$$

telles que $|a_n| r^n$ ait pour limite 0. La fonction

$$f \mapsto |f|(r) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n$$

est une norme ultramétrique sur $\mathcal{A}(D^+(0, r))$. Elle est appelée la valeur absolue de Gauss. De plus on a,

$$\|f\| = \max_{x \in D(0, r)} |f(x)| = |f|(r).$$

On a comme propriétés de la fonction

$$r \mapsto |f|(r).$$

Proposition 1.5.4 [12]

On suppose que $f \in \mathcal{A}(D^+(0, R))$ et $0 < r < R$. Si f n'est pas nulle, alors :

- (i) La fonction $r \mapsto |f|(r)$ est croissante ;
- (ii) Si la fonction f a un zéro b dans le disque $D^+(0, r)$ alors la fonction $|f|(r)$ est strictement croissante si $r > |b|$;
- (iii) La fonction $|f|(r)$ est continue.

Preuve.

(i) On a déjà vu que $|f|(r)$ est la borne supérieure de $|f|(r)$ sur le disque $D^+(0, r)$, ce qui fournit le résultat immédiatement.

(ii) Soit $r_0 > |b|$. On a

$$|f|(r_0) = |a_s| r_0^s,$$

pour un $s \geq 1$, en raison de la présence d'au moins un zéro dans le disque $D^+(0, r_0)$.

Comme a_s n'est pas nul, si $r > r_0$, on a $|a_s| r^s$, donc

$$|f|(r) = \max_{k \geq 0} |a_k| r^k \geq |a_s| r^s > |a_s| r_0^s = |f|(r_0).$$

(iii) Fixons $\beta \in]0, r[$. Alors $|a_n| \beta^n$ tend vers 0 si $n \rightarrow +\infty$, de sorte qu'il existe N entier tel que

$$\max_{n \leq N} |a_n| \beta^n = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \beta^n.$$

Il en résulte que si $t \in [0, \beta]$, on a aussi

$$\max_{n \leq N} |a_n| t^n = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n| t^n = |f|(r).$$

Comme la fonction

$$t \mapsto \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n| t^n$$

est clairement continue, on a démontré le résultat. ■

Lemme 1.5.1 [\[12\]](#)

Soit

$$Q(x) = b_0 + \cdots + b_s x^s$$

un polynôme de $\mathbb{K}[x]$. On suppose que

$$|b_s| r^s = \max_{0 \leq j \leq s} \{|b_j| r^j\} = |Q|(r).$$

Alors le polynôme Q a toutes ses racines dans le disque $D^+(0, r)$ de $\mathbb{K}$.

Preuve.

Montrons que le polynôme $Q(x)$ a toutes ses racines dans le disque $D^+(0, r)$. On factorise

$Q(x)$:

$$Q(x) = b_s(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_s),$$

où $b_s \neq 0$ et les α_i sont dans $\mathbb{K}$, et pas forcément distincts. D'où

$$|x - \alpha_i|(r) = \max\{|x|, |\alpha_i|\} = \max\{r, |\alpha_i|\},$$

et on a

$$|Q|(r) = |b_s|r^s = |b_s| \prod_{i=1}^s \max\{r, |\alpha_i|\}.$$

Alors $\prod_{i=1}^s \max\{r, |\alpha_i|\} = r^s$, et comme

$$\max\{r, |\alpha_i|\} = r \quad \text{et} \quad |\alpha_i| \leq r, \quad \forall i.$$

On a donc bien montré que toutes les racines de Q sont dans le disque $D^+(0, r)$. ■

Théorème 1.5.1 [12]

Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0, r)),$$

et soit s un indice tel que l'on ait

$$|a_s| r^s = |f|(r), \quad \text{et} \quad |a_j| r^j < |a_s| r^s \quad \text{pour } j > s.$$

Il existe alors un couple (Q, H) , Q étant un polynôme de $\mathbb{K}[x]$, $Q(x) = b_0 + \cdots + b_s x^s$, avec

$$|b_s| r^s = |Q|(r) = |f|(r),$$

, et $H(x)$ est une série entière appartenant à $\mathcal{A}(D^+(0, r))$ telle que

$$|H - 1|(r) < 1$$

vérifiant

$$f(x) = Q(x) H(x).$$

Théorème 1.5.2 [12]

Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0, r)),$$

et soit s un indice tel que l'on ait

$$|a_s| r^s = |f|(r) \quad \text{et} \quad |a_j| r^j < |a_s| r^s \quad \text{pour } j > s.$$

Alors

(i) Si $s \geq 1$, la fonction f a exactement s zéros dans le disque $D^+(0, r)$, compte tenu des multiplicités.

(ii) La fonction f n'a aucun zéro dans le disque $D^+(0, r)$ si et seulement si $s = 0$, et sa valeur absolue y est alors constante dans ce disque.

Preuve.

On utilise le Théorème 1.4.1. On a donc

$$f = QH,$$

avec les propriétés indiquées.

(i) Comme $|H - 1|(r) < 1$, on a $|H(x)| = 1$ pour tout $x \in D^+(0, r)$, donc $H(x)$ ne s'annule pas. Comme le polynôme Q qui intervient dans la factorisation a toutes ses racines dans le disque $D^+(0, r)$. D'après le Lemme 1.4.1, f a exactement s zéros compte tenu des multiplicités dans ce disque.

(ii) Si f n'a aucun zéro dans le disque, on doit avoir $s = 0$ par (i). Si $s = 0$, le polynôme Q qui intervient dans la décomposition $f = QH$ est un polynôme de degré 0, donc une constante c , non nulle puisque f est non nulle. Comme $|H - 1| < 1$ pour tout $x \in D^+(0, r)$,

et par suite

$$|f(x)| = |c|$$

■

1.6 Fonction méromorphes d'un corps ultramétrique

Dans cette partie, on va présenter quelques définition et propriétés liées aux fonctions méromorphes dans un corps ultramétrique.

Définition 1.6.1

On dit qu'une fonction f est méromorphe sur $\mathbb{K}$ (resp. sur $D(0, R)$) si elle est analytique sur $\mathbb{K}$ (resp. sur $D(0, R)$) sauf aux points de singularités isolées qui sont des pôles.

Remarque 1.6.1

Le quotient de deux fonctions entières est une fonction méromorphe. C'est à dire, si la fonction f est méromorphe dans $\mathbb{K}$ (resp. dans $D(0, R)$), alors on peut écrire $f = \frac{g}{h}$ tel que $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}(D(0, R))$) sans zéros communs.

Notation.

On note par $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}(D(0, R))$) le corps des fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$ (resp. dans $D(0, R)$), c'est à dire le corps de fractions de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. de $\mathcal{A}(D(0, R))$). La valeur absolue $|\cdot|(r)$ définie sur $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. sur $\mathcal{A}(D^-(0, R))$) quand $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), s'étend d'une manière naturelle à $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. à $\mathcal{M}(D^-(0, R))$) en posant $|f|(r) = \frac{|g|(r)}{|h|(r)}$ quand $f = \frac{g}{h}$ et $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $g, h \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$).

Lemme 1.6.1

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ n'ayant ni zéros ni pôles dans $\mathbb{K}$. Alors f est une constante.

Remarque 1.6.2

(i) Toute fonction entière est une fonction méromorphe. Autrement dit $\mathcal{A}(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{K})$.

(ii) Toute fonction rationnelle dans $\mathbb{K}$ est une fonction méromorphe.

1.7 Polygône de valuation

Dans cette section, nous allons présenter les propriétés de polygône de valuation qui détermine la distribution des zéros des fonctions entières (aussi des polynômes).

Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une fonction non nulle de $\mathcal{A}(D^-(0, R))$ et soit $0 < r < R$, et regardons la fonction $r \mapsto |f|(r)$, pour $r \in [0, +\infty[$.

Pour simplifier, supposons que $a_0 \neq 0$, alors pour $|x|$ assez petit, on aura $|f(x)| = |a_0|$, de sorte que $|f|(r) = |a_0| = \text{constante}$, pour r assez petit.

Soit r_1 la première valeur de r et s_1 la plus grande valeur de k telle que $|a_k| r_1^k = |a_0|$, alors f a exactement s_1 zéros sur le cercle $|x| = r_1$, et aucun dans le disque ouvert de centre 0, rayon r_1 .

On a $|f|(r) = |a_{s_1}| r^{s_1}$, pour $r \geq r_1$ et assez proche de r_1 .

En général, on s'arrête quand il existe une valeur $k > s_1$ et un $r > r_1$ tels que $|a_k| r^k = |a_{s_1}| r^{s_1}$; soit r_2 la première valeur de r telle qu'il en soit ainsi, et s_2 le plus grand des entiers $k > s_1$ tels que $|a_k| r_2^k = |a_{s_1}| r_2^{s_1}$.

Alors, sur le cercle $|x| = r_2$, f a $s_2 - s_1$ zéros, et aucun dans la couronne ouverte de centre 0 et de rayons r_1, r_2 .

On a $|f|(r) = |a_{s_1}| r^{s_1}$, pour $r \in [r_1, r_2]$.

Et ainsi de suite, on trouve des cercles où se trouvent les zéros de f , de rayons r_k (suite finie ou infinie), le nombre des zéros sur ces cercles est $s_k - s_{k-1}$, et en plus, on a le fait que la fonction $|f|(r)$ est continue et monomiale par morceaux, c'est-à-dire que sur $[r_k, r_{k+1}]$, il existe une constante c_k et un entier s_k tels que

$$|f|(r) = c_k r^{s_k}.$$

Les rayons r_k s'appellent les rayons exceptionnels pour la série entière f .

On fabrique maintenant une fonction Φ_f définie par

$$\Phi_f : I =]-\infty, \log R[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\log r \mapsto \Phi_f(\log r) = \log |f|(r) = \max_{n \geq 0} \{\log |a_n| + n \log r\}.$$

Notation

On note $v^+(f, r)$ (resp. $v^-(f, r)$) le plus grand (resp. le plus petit) entier j tel que

$$\log |a_j| + j \log r = \Phi_f(\log r) = \max_{n \geq 0} \{\log |a_n| + n \log r\}.$$

C'est-à-dire que

$$|a_j| r^j = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n.$$

Théorème 1.7.1

La fonction Φ_f vérifie les propriétés suivantes :

- (i) *C'est une fonction convexe, croissante, continue et affine par morceaux ;*
- (ii) *Si f a un zéro dans $D^-(0, r)$, la fonction Φ_f est strictement croissante pour $\log r > \log |b|$;*
- (iii) *La fonction Φ_f est dérivable à gauche et à droite en chaque point $\log r \in I$. Sa dérivée à gauche en $\log r$ est égale à $v^+(f, r)$ et sa dérivée à droite en $\log r$ est égale à $v^-(f, r)$;*
- (iv) *Le nombre de zéros de f dans le cercle $C(0, r)$, en prenant en compte les multiplicités, est égal à $v^+(f, r) - v^-(f, r)$, où $v^+(f, r)$ (resp. $v^-(f, r)$) est le nombre des zéros de f dans le disque $D^+(0, r)$ (resp. $D^-(0, r)$).*
- (v) *La représentation de la fonction Φ_f est connue en analyse ultramétrique sous le nom de polygone de valuation.*

Théorie de Nevanlinna ultramétrique

La théorie de Nevanlinna ultramétrique, introduite en 1989 par A. Boutabaa, constitue une méthode essentielle dans l'étude des problèmes de distribution de valeurs, initialement développée pour les fonctions méromorphes sur l'ensembles du corps $\mathbb{K}$, cette théorie à été étudiée en 2001 par A. Boutabaa et A. Exassut aux fonctions méromorphes définies dans un disque ouvert de $\mathbb{K}$. Ce chapitre est consacré à l'analyse approfondre de cette théorie.

Notation.

À partir d'ici et tout au long de ce travail, on notera $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clôt, complet par rapport à une valeur absolue ultramétrique $|\cdot|$.

2.1 Formule de Jensen

Dans cette section, on s'intéresse de la version ultramétrique de la formule de Jensen qu'on utilise pour obtenir le théorème fondamental de Nevanlinna.

Théorème 2.1.1 [\[3\]](#)[\[4\]](#)

Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0, Pour $r \in]0, R[$, on a :

$$\log |f|(r) = \log |f(0)| + \sum_{|\alpha| \leq r} \left(z(r, f) - z\left(r, \frac{1}{f}\right) \right) \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

Preuve.

La démonstration de cette formule est une conséquence des propriétés du polygône de valuation.

Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$ telle que $f(0) \neq 0$. Le polygône de valuation de f donne pour $r \in]0, R[$:

$$\log |f|(r) = \log |f(0)| + \sum_{|\alpha| \leq r} z(r, f) \log \frac{r}{|\alpha|}. \quad (2.1)$$

Pour montrer l'égalité (2.1), soient $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k < \dots < r$ et $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots < n$. On pose

$$\log |f|(r) = \max_{n \geq 0} \{ \log |a_n| + n \log r \}.$$

Le cas où r_1 plus proche de zéro, f n'a pas de zéros à valeur absolue entre 0 et r_1 , on a

$$\log |f|(r_1) = \log |f(0)| = \log |a_0| + n_0 \log r_1.$$

Le cas où $0 < r_1 < r_2$, on a

$$\log |f|(r_2) = \log |a_{n_1}| + n_1 \log r_2.$$

Le cas où $r_{k-1} < r_k$, on a

$$\log |f|(r_k) = \log |a_{n_{k-1}}| + n_{k-1} \log r_k.$$

Le cas où $r_k < r$, on a

$$\log |f|(r) = \log |a_{n_k}| + n_k \log r.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 \log |f|(r) &= [\log |f|(r) - \log |f|(r_k)] + [\log |f|(r_k) - \log |f|(r_{k-1})] + \cdots + [\log |f|(r_2) - \log |f|(r_1)] + \log |f|(r_1) \\
 &= [\log |a_{n_k}| + n_k \log r - \log |a_{n_k}| - n_k \log r_k] + [\log |a_{n_{k-1}}| + n_{k-1} \log r_k - \log |a_{n_{k-1}}| - n_{k-1} \log r_{k-1}] + \\
 &\quad + \cdots + [\log |a_{n_1}| + n_1 \log r_2 - \log |a_{n_1}| - n_1 \log r_1] + \log |f(0)| \\
 &= n_k \log \frac{r}{r_k} + n_{k-1} \log \frac{r_k}{r_{k-1}} + \cdots + n_1 \log \frac{r_2}{r_1} + \log |f(0)| \\
 &= (n_k - n_{k-1}) \log \frac{r}{r_k} + (n_{k-1} - n_{k-2}) \log \frac{r}{r_{k-1}} + \cdots + (n_1 - n_0) \log \frac{r}{r_1} + \log |f(0)| \\
 &= \sum_{i=1}^k (n_i - n_{i-1}) \log \frac{r}{r_i} + \log |f(0)|.
 \end{aligned}$$

Où $(n_i - n_{i-1})$ le nombre des zéros de f dans le cercle $|x| = r_i$, donc

$$\log |f|(r) = \log |f(0)| + \sum_{0 < |\alpha| \leq r} z(r, f) \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$ telle que $f(0) \neq 0, \infty$. On pose $f = \frac{g}{h}$ telle que $g, h \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$. Soit α (resp. β) un zéro de g (resp. de h), on a

$$\begin{aligned}
 \log |f|(r) &= \log \left| \frac{g}{h} \right| (r) \\
 &= \log |g|(r) - \log |h|(r) \\
 &= \log |g(0)| + \sum_{0 < |\alpha| \leq r} z(r, g) \log \frac{r}{|\alpha|} - \log |h(0)| - \sum_{0 < |\beta| \leq r} z(r, h) \log \frac{r}{|\beta|} \\
 &= \log \frac{|g(0)|}{|h(0)|} + \sum_{0 < |\alpha| \leq r} z(r, f) \log \frac{r}{|\alpha|} - \sum_{0 < |\beta| \leq r} z\left(r, \frac{1}{f}\right) \log \frac{r}{|\beta|} \\
 &= \log |f(0)| + \sum_{0 < |\alpha| \leq r} z(r, f) \log \frac{r}{|\alpha|} - \sum_{0 < |\beta| \leq r} z\left(r, \frac{1}{f}\right) \log \frac{r}{|\beta|}.
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\log |f|(r) = \sum_{0 < |\alpha| \leq r} \left(z(r, f) - z\left(r, \frac{1}{f}\right) \right) \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

■

2.2 Fonction de Nevanlinna

Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$. Pour tout $r \in]0, R[$, notons par $Z(r, f)$ la fonction de comptage des zéros de f dans le disque $D^-(0, r)$, comptés avec leurs multiplicités

$$Z(r, f) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq r \\ \omega_\alpha(f) > 0}} \omega_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

On a aussi, c'est à dire sans prendre en compte les multiplicités, la version simple des zéros

$$\bar{Z}(r, f) = \sum_{|\alpha| \leq r} \log \frac{r}{|\alpha|},$$

de même, pour les pôles de f dans le disque $D^-(0, r)$, comptés avec leurs multiplicités, on définit,

$$N(r, f) = - \sum_{\substack{|\alpha| \leq r \\ \omega_\alpha(f) < 0}} \omega_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha|} = Z\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

Et

$$\bar{N}(r, f) = \bar{Z}\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

Pour $x > 0$, on pose $\log^+ x = \max(0, \log x)$, telle que $x > 0$ et $\log$ est une fonction logarithmique réelle. On définit pour $r \in]0, R[$,

$$m(r, f) = \log^+ |f|(r) = \max(0, \log |f|(r)),$$

la fonction de compensation.

En fin, on définit la fonction de Nevanlinna (appelée aussi la fonction caractéristique de f), quand f n'a ni zéro ni pôle en 0, par

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Remarque 2.2.1

Tout au long de ce chapitre, on supposera que la fonction f intervenant dans les fonctions

$m(r, f)$, $N(r, f)$ et $T(r, f)$ n'a pas de zéro en 0, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$), et n'a ni zéro ni pôle en 0, si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$).

Par les notations précédentes, on peut réécrire Théorème 2.1.1 sous forme,

Théorème 2.2.1 [5]

Soit $R > 0$, et soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$) n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors

$$\log |f|(r) = Z(r, f) - N(r, f) + \log |f(0)|, \quad (2.2)$$

pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$).

Corollaire 2.2.1 [3][4]

Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors, pour tout $r \in]0, R[$, on a

$$T\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r, f) + O(1).$$

Preuve.

D'après le Théorème 2.2.1, nous avons

$$\log |f(0)| = N(r, f) - Z(r, f) + \log |f|(r).$$

Puisque $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$, pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} \log |f(0)| &= N(r, f) - Z(r, f) + \log^+ |f(r)| - \log^+ \left| \frac{1}{f} \right|(r) \\ &= N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}) + m(r, f) - m(r, \frac{1}{f}) \\ &= N(r, f) + m(r, f) - N(r, \frac{1}{f}) - m(r, \frac{1}{f}) \\ &= T(r, f) - T(r, \frac{1}{f}). \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.1 [4]

Soient $f, g \in \mathcal{M}(K)$ (resp. $f, g \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$), non nulles et n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), nous avons

1. (i) $m(r, f + g) \leq \max\{m(r, f), m(r, g)\} + O(1)$.
(ii) $m(r, f - a) = m(r, f) + O(1)$.
(iii) $m(r, f \cdot g) \leq m(r, f) + m(r, g) + O(1)$.
(iv) $m(r, a \cdot f) = m(r, f) + O(1)$.
2. (i) $N(r, f + g) \leq N(r, f) + N(r, g) + O(1)$.
(ii) $N(r, f \cdot g) \leq N(r, f) + N(r, g) + O(1)$.
3. (i) $T(r, f + g) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1)$.
(ii) $T(r, f \cdot g) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1)$.

De plus, si $f, g \in \mathcal{A}(K)$ (resp. $f, g \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$), alors :

- (iii) $T(r, f + g) \leq \max\{T(r, f), T(r, g)\} + O(1)$.

Preuve.

(1) Puisque $|\cdot|(r)$ est une valeur absolue ultra-métrique sur $\mathcal{M}(K)$ (resp. sur $\mathcal{M}(D^-(0, R))$), elle satisfait l' inégalité triangulaire ultra-métrique :

$$|f + g|(r) \leq \max\{|f|(r), |g|(r)\}, \quad \text{et} \quad |f \cdot g|(r) = |f|(r) |g|(r).$$

Par conséquent, grâce à la croissance de la fonction logarithmique, on déduit sans difficulté (i), (iii) et (iv).

Si $|f|(r) > |a|$ pour r assez grand (resp. assez proche de R^-), alors

$$|f - a|(r) = |f|(r),$$

d'où

$$m(r, f - a) = m(r, f).$$

Sinon, si $|f|(r) \leq |a|$, alors $|f - a|(r) \leq |a|$, ce qui entraîne

$$|m(r, f - a) - m(r, f)| \leq \log |a|.$$

Ainsi,

$$m(r, f - a) = m(r, f) + O(1),$$

et donc (ii) est vérifiée.

(2) Les inégalités (i) et (ii) restent vérifiées tant que l'ordre des pôles de $f + g$ (ou $f \cdot g$) en un point x_0 est au plus égal à la somme des ordres des pôles de f et g en ce point. D'où

$$Z\left(r, \frac{1}{f+g}\right) \leq Z\left(r, \frac{1}{f}\right) + Z\left(r, \frac{1}{g}\right),$$

$$Z\left(r, \frac{1}{f \cdot g}\right) \leq Z\left(r, \frac{1}{f}\right) + Z\left(r, \frac{1}{g}\right).$$

(3)

(i) D'après l'inégalité (i) de 1) et le résultat de 2), on déduit :

$$m(r, f + g) + N(r, f + g) \leq \max\{m(r, f), m(r, g)\} + N(r, f) + N(r, g),$$

$$\leq m(r, f) + N(r, f) + m(r, g) + N(r, g) + O(1).$$

D'où

$$T(r, f + g) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1).$$

(ii) De même, d'après la propriété (iii) de 1), on obtient :

$$m(r, f \cdot g) + N(r, f \cdot g) \leq m(r, f) + m(r, g) + N(r, f) + N(r, g) + O(1),$$

d'où

$$T(r, f \cdot g) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1).$$

(iii) Puisque $N(r, f) = N(r, g) = 0$, l'inégalité découle immédiatement de la propriété (i) de 1. ■

On donne une autre définition de la fonction caractéristique de Nevanlinna.

Théorème 2.2.2 [7]

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, r))$) n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors, pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), on a

$$T(r, f) = \max\{Z(r, f) + \log |f(0)|, N(r, f)\}.$$

Corollaire 2.2.2 [7]

Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$) non nulle. Alors pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), on a

$$T(r, f) = Z(r, f) + O(1).$$

De plus, il existe $\rho \in]0, +\infty[$ (resp. $\rho \in]0, R[$) tel que pour $b \neq f(0)$, on a pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$)

$$Z(r, f) = Z(r, f - b).$$

Proposition 2.2.2 [4]

Soient $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$ et $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ tels que $f(0) \neq 0$, $f(0) \neq a$ et $f(0) \neq \infty$. Pour $r \in]0, R[$ on a

$$(i) \quad T(r, af) = T(r, f) + O(1)$$

$$(ii) \quad T(r, f - a) = T(r, f) + O(1)$$

Preuve.

Puisque

$$N(r, f) = N(r, af) = N(r, f - a),$$

$$m(r, f - a) = m(r, f) + O(1), \quad \text{et} \quad m(r, af) = m(r, f) + O(1),$$

alors

$$T(r, af) = T(r, f) + O(1),$$

et

$$T(r, f - a) = T(r, f) + O(1).$$

■

2.3 Théorème fondamental de Nevanlinna

Théorème 2.3.1 [4]

Soit $f \in \mathcal{M}(K)$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$) et $a \in \mathbb{K}$ tels que $f(0) \neq 0$, $f(0) \neq \infty$ et $f(0) \neq a$. Pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), on a

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1). \quad (2.3)$$

Preuve.

La démonstration est facile, elle découle du Corollaire 2.2.1 et de la propriété (ii) de la proposition 2.2.2. ■

Notation.

Soient φ, ψ deux fonctions réelles définies sur un intervalle $I =]0, +\infty[$ (resp. $I =]0, R[$), et soit $r \in I$.

(i) S'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que : $|\varphi(r)| \leq c |\psi(r)|$,

on écrira simplement $\varphi(r) = O(\psi(r))$.

(ii) Si $\lim_{r \rightarrow +\infty} \left| \frac{\varphi(r)}{\psi(r)} \right| = 0$, on écrira simplement $\varphi(r) = o(\psi(r))$.

Proposition 2.3.1 [4]

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. On a les équivalences suivantes

(i) f est une constante $\iff T(r, f) = o(\log r), r \rightarrow +\infty$.

(ii) $f \in \mathbb{K}(x)$ $\iff T(r, f) = O(\log r), r \rightarrow +\infty$.

(iii) f est non constante $\iff$ il existe $c \in \mathbb{R}$ et $A > 0$ tels que

$$T(r, f) \geq \log r + c, \quad \text{pour } r > A.$$

Preuve.

La démonstration de cette proposition dans thèse de doctorat[17].

■

Etude de certaines propriétés des solutions des équations aux différences dans le cas ultramétrique

Soit $\mathbb{K}$ un corps ultramétrique complet et algébriquement clôt, et soit $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{K}$. Dans ce chapitre, nous étudions les propriétés des solutions de certaines équations aux q -différences ultramétriques de la forme

$$\sum_{i=0}^s A_i(x) f(q^i x) = g(x),$$

où $q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$ et $g(x), A_0(x), \dots, A_s(x)$ sont des coefficients, tel que $A_0(x)A_s(x) \neq 0$.

Plus précisément, nous examinons le comportement de croissance des fonctions méromorphes ultramétriques f qui satisfont ces équations. En outre, nous établissons des conditions nécessaires sur les coefficients pour lesquelles une équation aux différences de la forme

$$\sum_{i=0}^s A_i(x) f(x + i) = B(x),$$

où $B(x), A_0(x), \dots, A_s(x)$ (avec $s \geq 1$) sont des polynômes, admet une solution méromorphe.

Récemment, un nombre significatif d'études (voir, par exemple, [[13], [1], [16], [14], [15], [19], [23], [8], [9], [11]]) se sont concentrées sur les équations aux différences et les équations aux q -différences, produisant de nombreux résultats significatifs. L'objectif principal de ce chapitre est d'étendre certains de ces résultats, initialement établis sur le corps complexe $\mathbb{C}$, au cadre des solutions méromorphes dans un corps ultramétrique.

3.1 Équations aux q -différences

Définition 3.1.1

Une équation fonctionnelle linéaire aux q -différence est une équation dont la variable est une fonction, et qui s'écrit sous forme

$$\sum_{i=0}^s A_i(x) f(q^i x) = g(x),$$

où $q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$, $g(x), A_0(x), \dots, A_s(x)$ sont des coefficients, tel que $A_0(x)A_s(x) \neq 0$.

Revenons maintenant au problème principal. Nous considérons l'équation aux q -différence suivante :

$$\sum_{i=0}^s A_i(x) f(q^i x) = g(x), \quad (3.1)$$

où $q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$, les coefficients $A_0(x), \dots, A_s(x)$ sont des éléments du corps $\mathbb{K}$ et $g(x)$ est un élément de $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ tel que $A_0(x)A_s(x) \neq 0$. Dans une contribution précédente de J. Heittokangas et al (comme référencé dans [11]). Les auteurs ont considéré un cas particulier de l'équation (3.1), à savoir lorsque le second membre $g(x)$ prend la forme rationnelle

$$\frac{P(x)}{x^l},$$

où $P(x)$ est un polynôme à coefficients complexes et l est un entier positif. Leur analyse portait principalement sur le comportement des solutions méromorphes sous cette structure de forçage spécifique.

En s'appuyant sur ce cadre, l'objectif du présent travail est d'élargir la portée de ce résultat. Nous visons à étudier le comportement des solutions pour des formes plus générales de $g(x)$, à obtenir des résultats plus profonds sur la nature des solutions méromorphes et rationnelles, et à établir de nouveaux théorèmes structurels pour les équations aux q -différences sur les corps ultramétriques.

Théorème 3.1.1 [18]

Supposons que, dans l'équation (3.1), la fonction $g(x)$ soit de la forme réduite

$$g(x) = \frac{h(x)}{x^l},$$

où $l \in \mathbb{N}$ et $h(x)$ est une fonction entière (c'est-à-dire $h(x) \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$), avec $h(0) \neq 0$.

Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est une solution non constante de l'équation (3.1), alors f est de la forme réduite

$$f(x) = \frac{F(x)}{x^p},$$

où $F(x)$ est une fonction entière et $p \geq l$.

Preuve.

Par hypothèse, nous avons

$$\sum_{i=0}^s A_i f(q^i x) = \frac{h(x)}{x^l}. \quad (3.2)$$

où $A_0, \dots, A_s \in \mathbb{K}$ tels que $A_0 A_s \neq 0$ et $h(x) \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, $h(0) \neq 0$, $l \in \mathbb{N}$.

Supposons que l'équation (3.2) possède une solution méromorphe f et soit $\alpha \neq 0$ un pôle de f . Alors, l'équation (3.2) assure que, pour au moins un indice i_1 parmi $1, \dots, s$, l'élément $\alpha_1 = q^{i_1} \alpha$ de $\mathbb{K}$ est un pôle de f .

En appliquant à nouveau ce raisonnement à α_i , nous déduisons qu'il existe $i_2 \in \{1, \dots, s\}$ tel que

$$\alpha_2 = q^{i_2} \alpha_1 = q^{i_1 + i_2} \alpha,$$

est un pôle de f , etc.

Ainsi, nous construisons une suite $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ de pôles de f tendant vers 0. Cela conduit à une contradiction, car une fonction méromorphe sur $\mathbb{K}$ ne peut posséder une suite de pôles s'accumulant en un point de $\mathbb{K}$.

Donc, f n'a pas de pôles différents de 0.

Supposons maintenant que f ait un pôle d'ordre p à l'origine. Il résulte immédiatement de l'équation (3.2) que $p \geq l$. Alors $h(x) = x^p f(x)$ est une fonction entière.

■

Nous présentons ensuite le résultat suivant, qui généralise le Théorème (2.3) (dans [11]) obtenu dans le cas complexe au cas ultramétrique.

Théorème 3.1.2 [18]

Supposons que dans l'équation (3.1), la fonction $g(x)$ soit méromorphe. Si $g(x)$ possède exactement un seul pôle non nul, alors toutes les solutions méromorphes f de l'équation (3.1) possèdent une infinité de pôles.

Preuve.

Soit $g(x)$ une fonction méromorphe dans $\mathbb{K}$ ayant exactement un seul pôle non nul en α .

Supposons que l'équation (3.1) admette une solution méromorphe $f(x)$. D'après l'équation (3.1), il est clair que pour au moins un indice i parmi $0, \dots, s$, l'élément $q^i \alpha$ est un pôle de f .

Supposons que $i \geq 1$. En substituant $q^i \alpha$ à x dans l'équation (3.1), il existe alors au moins un indice $i_1 \in \{1, \dots, s\}$ tel que $q^{i_1+i} \alpha$ est un pôle de f . Comme dans la démonstration du Théorème 3.1.1, nous obtenons une suite de pôles de f s'accumulant vers l'origine, ce qui est une contradiction.

Ainsi $i = 0$ et α est un pôle de f . Posons $\beta = q^{-s} \alpha$. D'après l'équation (3.1), nous avons

$$\sum_{i=0}^s A_i(x) f(q^i \beta) = g(\beta),$$

et $\alpha = q^s \beta$ est un pôle de f . Donc il existe un indice $i_1 \in \{0, \dots, s-1\}$ tel que $\alpha_1 = q^{i_1} \beta = q^{i_1-s} \alpha$ est un pôle de f . En répétant ce raisonnement pour α_1 , nous obtenons un indice $i_2 \in \{0, \dots, s-1\}$ et un autre pôle α_2 de f tel que

$$\alpha_2 = q^{i_2} \beta = q^{i_2-s} \alpha_1 = q^{i_2+i_1-2s} \alpha.$$

De cette manière, nous construisons une suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ de pôles de f satisfaisant, pour tout $n \geq 0$,

$$\left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \frac{|q|^{i_{n+1}+i_n+\dots+i_1-(n+1)s} |\alpha|}{|q|^{i_n+\dots+i_1-n s} |\alpha|} = |q|^{i_{n+1}-s} \geq |q|^{-1} > 1. \quad (3.3)$$

Ainsi f a une infinité de pôles. ■

Remarque 3.1.1

Si $g(x)$ possède plus d'un pôle non nul, alors f peut avoir un nombre fini de pôles.

Exemple 3.1.1

(1) *Considérons l'équation fonctionnelle*

$$f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{(x-1)(x-2)},$$

où $q = \frac{1}{2}$, et le second membre possède deux pôles non nuls en $x = 1$ et $x = 2$.

Nous pouvons résoudre cette équation récursivement en utilisant la relation

$$f(x) = g(x) - f\left(\frac{x}{2}\right), \quad \text{où} \quad g(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

Par substitutions successives, nous obtenons

$$f(x) = g(x) - g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x}{4}\right) - g\left(\frac{x}{8}\right) + \dots$$

En supposant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0,$$

la solution est

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\left(\frac{x}{2^k} - 1\right)\left(\frac{x}{2^k} - 2\right)}$$

Cette série converge lorsque $|q| < 1$, et elle définit une fonction $f(x)$ ayant un nombre fini de pôles.

Ceci confirme la Remarque 3.1.1.

(2) Considérons l'équation fonctionnelle

$$f(x) - 2f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{x-1},$$

où $q = \frac{1}{2}$, et le second membre possède un pôle non nul en $x = 1$.

Nous pouvons résoudre cette équation récursivement en utilisant la relation

$$f(x) = g(x) + 2f\left(\frac{x}{2}\right), \quad \text{où} \quad g(x) = \frac{1}{x-1}$$

Par substitutions successives, nous obtenons

$$f(x) = g(x) + 2g\left(\frac{x}{2}\right) + 2^2g\left(\frac{x}{4}\right) + 2^3g\left(\frac{x}{8}\right) + \dots$$

En supposant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0,$$

la solution est

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{\left(\frac{x}{2^k} - 1\right)}.$$

Cette série converge lorsque $|q| < 1$, et elle définit une fonction $f(x)$ ayant une infinité de pôles.

Ceci est confirme le Théorème 3.1.2.

3.2 Équations aux différences

Définition 3.2.1

Une équation fonctionnelle linéaire aux différences est une équation dont la variable est une fonction, et qui s'écrit sous la forme

$$\sum_{i=0}^s A_i(x) f(x+i) = B(x),$$

où $B(x), A_0(x), \dots, A_s(x)$ ($s \geq 1$) sont des éléments de $\mathbb{K}[x]$ tels que $A_0(x)A_s(x) \neq 0$.

Considérons maintenant l'équation aux différences suivante

$$\sum_{i=0}^s A_i(x) f(x+i) = B(x), \tag{3.4}$$

où $B(x), A_0(x), \dots, A_s(x)$ (avec $s \geq 1$) sont des éléments de $\mathbb{K}[x]$ tels que $A_0(x)A_s(x) \neq 0$.

Dans le travail référencé [9], B. Q. Chen et al. ont étudié les conditions nécessaires imposées aux coefficients d'une classe d'équations aux q -différences complexes, en particulier la forme présentée dans l'équation (3.1). Leur étude s'est concentrée sur l'identification des conditions sous lesquelles de telles équations admettent des solutions méromorphes lorsque le module de q est égal à 1, c'est-à-dire $|q| = 1$. Dans ce cadre, les coefficients $B(x), A_0(x), \dots, A_s(x)$ sont supposés être des fonctions polynomiales, et leur analyse a fourni des résultats fondamentaux concernant le comportement de ces équations dans le domaine complexe.

Motivés par leur approche, le présent article oriente l'étude vers un cadre apparenté mais distinct, à savoir le contexte ultramétrique. Ici, nous considérons l'analogue ultramétrique de l'équation aux différences, notée équation (3.4), et nous étudions l'existence ainsi que la nature des solutions sous des contraintes similaires sur les coefficients. L'objectif est de généraliser les résultats précédents et d'adapter les techniques analytiques au cadre ultramétrique, ce qui nécessite une attention particulière à la théorie des valuations et aux espaces de fonctions p -adiques. Les résultats obtenus dans ces

conditions ultramétriques sont présentés dans les sections suivantes et constituent les contributions principales de ce travail.

Lemme 3.2.1 [19]

Pour toute fonction $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ et pour tout $r > 0$, on a

- (i) $|f \circ \tau|(r) = |f|(r)$,
- (ii) $m(r, f \circ \tau) = m(r, f)$,
- (iii) $N(r, f \circ \tau) = N(r, f) + O(1)$,
- (iv) $T(r, f \circ \tau) = T(r, f) + O(1)$, où $\tau(x) = x + 1$.

Théorème 3.2.1 [18]

Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ une solution non constante de l'équation (3.4).

- (i) Si les coefficients $B(x), A_0(x), \dots, A_s(x)$ sont tous des constantes avec $A_0 A_s \neq 0$, et si $f(x)$ est une fonction entière non constante, alors pour tout $k \in \{0, \dots, s\}$, on a :

$$|A_k| \leq \max_{i \in \{0, \dots, s\} \setminus \{k\}} |A_i|.$$

- (ii) Si $B(x), A_0(x), \dots, A_s(x)$ et $f(x)$ sont des polynômes, alors il existe un indice $k \in \{0, \dots, s\}$ tel que :

$$\deg A_k \geq \deg B(x) - \deg f(x).$$

- (iii) Si $f(x)$ est une fonction entière transcendante, alors il existe au moins deux indices $k, l \in \{0, \dots, s\}$ tels que

$$\deg A_k = \deg A_l = \max_{0 \leq i \leq s} \{\deg A_i\}.$$

Preuve.

- (i) Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ une solution non constante de l'équation (3.4). D'après les hypothèses, tous les coefficients $B, A_0, \dots, A_s$ sont des constantes de $\mathbb{K}$, avec en particulier $A_0 A_s \neq 0$.

À partir de l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=0}^s A_i f(x+i) = B,$$

on peut isoler un terme quelconque, par exemple $A_k f(x+k)$, et l'écrire sous la forme

$$A_k f(x+k) = - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^s A_i f(x+i) + B,$$

Pour chaque $k \in \{0, 1, \dots, s\}$, ceci découle directement du réarrangement des termes dans l'équation (3.4).

Maintenant, soit $r > 0$. En appliquant le Lemme 3.2.1, qui affirme que

$$|f \circ \tau^i|(r) = |f|(r),$$

et en remarquant que les coefficients sont constants, nous pouvons estimer

$$|A_k| |f|(r) = |A_k f(x+k)|(r) \leq \max\{|A_i| |f|(r), i \in \{0, \dots, s\}, i \neq k, |B|\}.$$

Ainsi, pour r suffisamment grand, cette inégalité implique que

$$|A_k| \leq \max_{i \in \{0, \dots, s\} \setminus \{k\}} |A_i|.$$

Cette estimation, combinée avec le fait que f est une fonction entière non constante et que les coefficients sont constants, sera utilisée pour analyser davantage le comportement de croissance de f et dériver des propriétés supplémentaires dans la partie (ii) du théorème.

(ii) D'après l'équation (3.4), nous avons

$$B(x) = \sum_{i=0}^s A_i(x) f(x+i).$$

Puisque $f(x)$ est une fonction entière non constante sur un corps ultramétrique

$\mathbb{K}$, le degré de chaque terme $A_i(x)f(x+i)$ est donné par

$$\deg(A_i(x)) + \deg(f(x)),$$

car le décalage $f(x+i)$ ne change pas le degré de $f(x)$. C'est-à-dire

$$\deg(f(x+i)) = \deg(f(x)) \quad \text{pour tout } i.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\deg\left(\sum_{i=0}^s A_i(x)f(x+i)\right) \leq \max_{0 \leq i \leq s} \{\deg(A_i(x)) + \deg(f(x))\}.$$

Puisque le membre de gauche est égal à $\deg(B(x))$, nous concluons

$$\deg(B(x)) \leq \max_{0 \leq i \leq s} \{\deg(A_i(x)) + \deg(f(x))\}.$$

En soustrayant $\deg(f(x))$ des deux côtés, on obtient

$$\deg(B(x)) - \deg(f(x)) \leq \max_{0 \leq i \leq s} \deg(A_i(x)).$$

Ainsi, il existe au moins un $k \in \{0, \dots, s\}$ tel que

$$\deg(A_k(x)) \geq \deg(B(x)) - \deg(f(x)).$$

(iii) Nous considérons l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=0}^s A_i(x)f(x+i) = B(x),$$

et nous supposons que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est une fonction transcendante. Nous supposons que

- Il existe un unique indice k tel que

$$\deg A_k = \max_{i=0,\dots,s} \deg A_i.$$

- On définit $d_i = \deg A_i$ pour tout $i = 0, \dots, s$, et on pose

$$d = \max_{i \neq k} d_i \quad \text{de sorte que } d < d_k.$$

Maintenant, pour tout $i \neq k$, nous estimons la croissance des polynômes $A_i(x)$ comme suit

$$|A_i|(r) \leq r^{d_i + \frac{1}{2}} < r^{d + \frac{1}{2}} < r^{d_k - \frac{1}{4}} < |A_k|(r),$$

pour r suffisamment grand.

Cette inégalité provient de l'estimation classique de croissance des polynômes, avec une marge ajoutée (par exemple $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$) pour des raisons analytiques. Ensuite, en utilisant l'équation principale et en supposant que

$$|f(x+i)|(r) = |f|(r)$$

pour tout i , nous obtenons

$$\begin{aligned} r^{d + \frac{1}{2}} |f|(r) &< r^{d_k - \frac{1}{4}} |f|(r) \leq |A_k|(r) |f|(r), \\ &\leq \max \left\{ \left(\max_{i \in \{0, \dots, s\} \setminus \{k\}} |A_i|(r) \right) |f|(r), |B|(r) \right\}, \\ &\leq \max \left\{ r^{d_k - \frac{1}{4}} |f|(r), |B|(r) \right\}. \end{aligned}$$

Cependant, cela implique que la croissance de f est bornée par un taux polynomial, ce qui contredit l'hypothèse que f est transcendante (qui devrait croître plus rapidement que tout polynôme). Par conséquent, nous obtenons une contradiction.

Cette contradiction montre que l'hypothèse selon laquelle un seul coefficient

A_k possède le degré maximal ne peut pas être vraie si f est transcendante. Cette étape critique contribue à la démonstration complète du Théorème 3.2.2

■

Théorème 3.2.2 [18]

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ une solution non constante de l'équation (3.4).

(i) Si $f(x)$ est une fonction rationnelle de la forme

$$f(x) = \frac{p_0 + p_1x + \cdots + p_mx^m}{q_0 + q_1x + \cdots + q_tx^t},$$

alors

$$t - m \leq \max_{0 \leq i \leq s} \{\deg A_i\} - \deg B(x).$$

(ii) Si $f(x)$ est une fonction méromorphe transcendante et s'il existe un indice $k \in \{0, \dots, s\}$ tel que

$$\deg A_k(x) > \max_{i \in \{0, \dots, s\} \setminus \{k\}} \{\deg A_i(x)\},$$

alors $f(x)$ possède une infinité de pôles.

Preuve.

(i) Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où

$$P(x) = p_0 + p_1x + \cdots + p_mx^m, \quad Q(x) = q_0 + q_1x + \cdots + q_tx^t.$$

Alors, D'après l'équation (3.4), nous avons

$$\sum_{i=0}^s A_i(x) f(x+i) = B(x).$$

En multipliant les deux membres par

$$\prod_{j=0}^s Q(x+j),$$

on obtient

$$\sum_{i=0}^s \left(A_i(x) P(x+i) \prod_{\substack{0 \leq j \leq s \\ j \neq i}} Q(x+j) \right) = B(x) \prod_{j=0}^s Q(x+j).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \deg B(x) + (s+1)t &= \deg \left(B(x) \prod_{j=0}^s Q(x+j) \right) \\ &= \deg \left(\sum_{i=0}^s \left(A_i(x) P(x+i) \prod_{\substack{0 \leq j \leq s \\ j \neq i}} Q(x+j) \right) \right) \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq s} \deg A_i + m + st. \end{aligned}$$

D'où

$$t - m \leq \max_{0 \leq i \leq s} \deg A_i - \deg B(x).$$

- (ii) Soit $f(x)$ une fonction méromorphe transcendante satisfaisant l'équation aux différences

$$\sum_{i=0}^s A_i(x) f(x+i) = B(x), \quad (3.5)$$

où $A_i(x)$ et $B(x)$ sont des polynômes. Supposons qu'il existe un indice $k \in \{0, \dots, s\}$ tel que

$$\deg A_k(x) > \max_{i \neq k} \deg A_i(x).$$

Nous allons montrer que, sous ces hypothèses, la fonction $f(x)$ doit posséder une infinité de pôles. Supposons, par l'absurde, que $f(x)$ n'ait qu'un nombre fini de pôles. Alors, elle peut s'expression sous la forme $f(x) = \frac{g(x)}{b(x)}$, où $g(x)$ est une fonction entière et $b(x)$ est un polynôme qui regroupe tous les pôles de $f(x)$, notés $x_0, \dots, x_p$ (en tenant compte des multiplicités).

En substituant cette expression dans l'équation (3.5), on obtient

$$\sum_{i=0}^s A_i(x) \frac{g(x+i)}{b(x+i)} = B(x).$$

En multipliant les deux membres par le dénominateur commun

$$\prod_{j=0}^s b(x+j)$$

pour éliminer tous les dénominateurs, donne

$$\sum_{i=0}^s A_i(x) g(x+i) \prod_{j \neq i} b(x+j) = B(x) \prod_{j=0}^s b(x+j).$$

On obtient alors l'équation

$$\sum_{i=0}^s b_i(x) g(x+i) = B_1(x),$$

où $B_1(x), b_0(x), \dots, b_s(x)$ sont des polynômes et $g(x)$ est une fonction entière transcendante. Cependant, d'après l'hypothèse $\deg A_k(x) > \max_{i \neq k} \deg A_i(x)$,

on a

$$\deg b_k(x) = \deg A_k(x) + (p+1)s \geq \max_{i \neq k} \{\deg A_i(x)\} + (p+1)s = \max_{i \neq k} \{\deg b_i(x)\}.$$

D'après le Théorème 3.2.1 (iii), ceci est impossible. Par conséquent, $f(x)$ doit avoir une infinité de pôles. Ainsi, le Théorème 3.2.1 est démontré. ■

Corollaire 3.2.1 [18]

Si, dans l'équation (3.4), il existe un certain entier $k \in \{0, \dots, s\}$ tel que

$$\deg A_k(x) > \max_{i \in \{0, \dots, s\} \setminus \{k\}} \{\deg A_i(x)\}.$$

Alors

- (i) *Toute solution entière de l'équation (3.4) est un polynôme.*
- (ii) *Toute solution méromorphe de l'équation (3.4) possédant un nombre fini de pôles est une fonction rationnelle.*

Nous donnons quelques exemples pour montrer qu'il existe des équations de la forme (3.4) satisfaisant les hypothèses du corollaire 3.2.1.

Exemple 3.2.1

- (1) *La fonction $f(x) = x + 1$ est un polynôme et satisfait*

$$(1 - x)y(x) + (2x - 1)y(x + 1) + x^2y(x + 2) = x^3 + 3x + 5.$$

Ceci est confirme le Corollaire 3.2.1 (i)

- (2) *La fonction $f(x) = \frac{1}{x+1}$ est rationnelle et satisfait*

$$(x + 1)y(x) + x^2(x + 2)y(x + 1) = x^2 + 1.$$

Ceci est confirme le Corollaire 3.2.1 (ii)

Conclusion

Au terme de ce travail, nous avons étudié les solutions méromorphes de certaines équations aux q -différences ultramétriques définies sur un corps ultramétrique $\mathbb{K}$, supposé complet et algébriquement clôt. L'analyse du comportement de croissance de ces solutions dans le corps des fonctions méromorphes $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ nous a permis de mettre en évidence une relation significative entre la structure de l'équation considérée et l'ordre de croissance de ses solutions.

En outre, nous avons établi des conditions nécessaires portant sur les coefficients polynomiaux $A_0(x), \dots, A_s(x)$ et $B(x)$, garantissant l'existence de solutions méromorphes de l'équation

$$\sum_{i=0}^s A_i(x) f(x+i) = B(x),$$

dans $\mathcal{M}(\mathbb{K})$.

Ainsi les résultats obtenus apportent une contribution à l'étude des propriétés analytiques des équations aux différences ultramétriques. Ils constituent également une base pertinente pour de futures investigations, notamment en ce qui concerne l'étude de cas plus généraux ainsi que les applications potentielles de ce type d'équations.

Bibliographie

- [1] A. Bellout, R. Bououden, T. Houmor and M. Berkal, Nonlinear dynamics and chaos in fractional-order cardiac action potential duration mapping model with fixed memory length. *Gulf Journal of Mathematics*, 19(2), 369–383, 2025.
- [2] A. Boudjedour, I. Batiha, S. Boucetta, M. Dalah, K. Zennir and A. Ouannas, A finite difference method on uniform meshes for solving the time-space fractional advection diffusion equation. *Gulf Journal of Mathematics*, 19(1), 156–168, 2025.
- [3] A. Boutabaa, Application de la théorie de Nevanlinna p-adique. *Collectanea Mathematica*, 42(1), 75–93, 1991.
- [4] A. Boutabaa, Théorie de Nevanlinna p-adique. *Manuscripta Mathematica*, 67, 251–269, 1990.
- [5] A. Boutabaa and A. Escassut, Urs and Ursim for p-adic meromorphic functions inside a disc. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 44, 485–504, 2001.
- [6] A. Escassut, Analytic Elements in p-adic Analysis. World Scientific Publishing, 1995.
- [7] A.O.F. Jacqueline, Distribution de valeurs des fonctions méromorphe ultramétrique, Application de la théorie de Nevanlinna. These de Doctorat, Université Blaise Pascal.
- [8] B. Chen and Z. Chen, Meromorphic solutions of some q-difference equations. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 48(6), 1303–1314, 2011.

- [9] B. Q. Chen, Z. X. Chen and S. Li, Properties on solutions of some q -difference equations. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 26(10), 1877–1886, 2010.
- [10] Fernando Q. Gouvêa, p -adic Numbers. An Introduction, Second Edition, 1997.
- [11] J. Heittokangas, I. Laine, J. Rieppo and D. Yang, Meromorphic solutions of some linear functional equations. *Aequationes Mathematicae*, 60(1), 148–166, 2000.
- [12] J. P. Bézivin, Dynamique des fractions rationnelles p -adiques. Cours DEA de Mathématiques, Université de CAEN. 23 mai 2005.
- [13] M. B. Almatrafi and M. Berkal, Bifurcation analysis and chaos control for fractional predator-prey model with Gompertz growth of prey population. *Modern Physics Letters B*, 2550103, 2024.
- [14] M. Berkal and M. B. Almatrafi, Bifurcation and stability of two-dimensional activator-inhibitor model with fractional-order derivative. *Fractal and Fractional*, 7(5), 344, 2023.
- [15] M. Berkal and J. F. Navarro, Qualitative behavior of a two-dimensional discrete time prey-predator model. *Computational and Mathematical Methods*, 3(6), e1193, 2021.
- [16] M. Berkal, J. F. Navarro, M. Y. Hamada and B. Semmar, Qualitative behavior for a discretized conformable fractional-order predator-prey model. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 1–23, 2025.
- [17] S. Bourourou, Résolution de certaines classes d'équations fonctionnelles aux q -différences et aux différences dans l'espace des fonctions méromorphes p -adiques. Thèse de Doctorat, Université de Jijel, 2016.
- [18] S. Bourourou, A. Bellout et M. Berkal, *On some properties of solutions of certain q -difference equations in ultrametric fields*, Gulf Journal of Mathematics, Vol. 20, No. 1 (2025), pp. 140–150.
- [19] S. Bourourou, A. Boutabaa and T. Zerzaihi, On the growth of solutions of difference equations in ultrametric fields. *Indagationes Mathematicae*, 27(1), 112–123, 2016.

- [20] S. Katok, Real and p -adic analysis. Cours notes for Math 497 C, Mass program, Fall 2000 (2001).
- [21] Y. Aihara, Introduction to p -adic Analysis. Research reports of the Nevanlinna theory and its applications II. Nippon Institute of Technology, 1998.
- [22] Y. Amice, Les nombres p -adiques. Presses Universitaires de France, 1975.
- [23] Z. X. Chen, Growth and zeros of meromorphic solution of some linear difference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 373(1), 235–241, 2011.