



N° Réf :.....

Université Abdelhafid Boussouf – Mila

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master
En: Mathématiques

Spécialité: Modélisation Mathématiques et Techniques de Décision

Processus de Rosenblatt et Application

Préparé par :

- Djouambi Wissal

- Bouketta Farah

Soutenue le 22/06/2026

devant le jury

S. Boukaf

M.C.A

U. Abdelhafid Boussouf, Mila

Présidente

R. Ahmed Yahia

M.C.B

U. Abdelhafid Boussouf, Mila

Rapporteur

F. Bouzekria

M.A.A

U. Abdelhafid Boussouf, Mila

Examineur

Année universitaire : 2025/2026

Remerciements

Avant tout, je remercie **Allah** , le Tout-Puissant, de m'avoir accordé la force, la patience et la persévérance nécessaires pour mener à bien ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à mon professeur encadrant: **Dr.Rakia Ahmad Yahia** pour ses conseils et son accompagnement durant la réalisation de ce mémoire.

Je remercie également les membres du jury d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mes chers parents, mon père **Ali** et ma mère **Khadidja** , pour leur amour, leurs sacrifices, leurs encouragements et leur soutien indéfectible.

Mes remerciements vont également à mes frères et à mes soeurs **Imane** et **Awatif** pour leurs encouragements.

J'adresse également mes sincères remerciements à mes amises : **Wissal, Chaima, Yousra.**

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Remerciements

Avant tout, je remercie **Allah**, le Tout-Puissant, de m'avoir accordé la force, la patience et la persévérance nécessaires pour mener à bien ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à mon professeur encadrant: **Dr.Rakia Ahmad Yahia** pour ses conseils et son accompagnement durant la réalisation de ce mémoire.

Je remercie également les membres du jury d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mes chers parents, mon père **Abd Elkamel** et ma mère **Noura**, pour leur amour, leurs sacrifices, leurs encouragements et leur soutien indéfectible.

Mes remerciements vont aussi à mon frère **Salah Eddine** ainsi qu'à mes soeurs **Anfal** et **Israa** pour leurs encouragements .

J'adresse également mes sincères remerciements à mes amises: **Farah, Chaima, Yousra.**

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Abstract

In this work , we analyse the Rosenblatt process, a non-Gaussian process with stationary increments and self-similar properties, which arises as a limit in the framework of the non-central limit theorem (Taqqu (1979)).

We present its representation as a multiple Wiener-Itô integral with respect to Brownian motion over a finite interval. We then discuss some applications of the process to stochastic differential equations, functional equations, and financial modeling.

Keywords: Rosenblatt process, long memory, self-similarity, multiple Wiener-Itô integral, Hurst parameter, stochastic equations.

Résumé

Dans ce mémoire on analyse le processus de Rosenblatt, un processus non gaussien , autosimilaire à accroissements stationnaires, qui apparaît comme limite dans le cadre du théorème de limite non centrale (Taqqu (1979)).

Nous présentons sa représentation sous forme d'intégrale multiple de Wiener-Itô par rapport au mouvement brownien sur un intervalle fini. Puis nous présentons quelques applications du processus à équation différentielle stochastique, à équation fonctionnelle ainsi qu'à la modélisation financière.

Mots-clés: processus de Rosenblatt, mémoire longue, autosimilarité, intégrale multiple de Wiener-Itô, paramètre de Hurst, équations stochastiques.

ملخص

في هذه المذكرة ندرس عملية روزنبلات (Rosenblatt)، وهي عملية عشوائية غير غاوسية ذاتية التشابه وذات زيادات مستقرة، تظهر كحد في إطار نظرية النهاية غير المركزية.

ثم نقدم تمثيلها على شكل تكاملات متعددة بالنسبة للحركة البراونية على مجال محدود، ثم نستعرض بعض تطبيقاتها في المعادلات التفاضلية العشوائية، والمعادلات الدالية، وكذا في النمذجة المالية.

الكلمات المفتاحية : عملية روزنبلات، الذاكرة الطويلة، التشابه الذاتي، تكاملات (Wiener-Itô) المتعددة، معامل هيرست، المعادلات العشوائية.

Table des matières

Les Notations	2
Introduction	4
1 Mouvement brownien et les intégrales stochastiques	6
1.1 Rappels	6
1.1.1 Processus à accroissements indépendants et stationnaires	7
1.1.2 Mouvement Brownien	8
1.2 Le processus auto-similaire	9
1.3 Mouvement brownien fractionnaire (mBf)	10
1.3.1 Propriétés Principales du mBf	11
1.4 Intégrale stochastique	12
1.4.1 Processus élémentaire	12
1.4.2 Les propriétés de l'intégrale stochastique	13
1.5 Calcul d'Itô	13
1.5.1 Processus d'Itô	14
1.5.2 Les formules d'Itô	15
2 Le processus de Rosenblatt	17
2.1 Outils théoriques pour le processus de Rosenblatt	17
2.1.1 Le processus d'Hermite	17
2.1.2 Théorème non centrale limite	19
2.1.3 L'intégrale multiple de wiener-Itô	21
2.2 Processus de Rosenblatt	21
2.3 Représentation par intervalle de temps fini du processus de Rosenblatt .	22

2.4	Intégrale de Wiener par rapport au processus de Rosenblatt	25
2.5	Processus de Rosenblatt de dimension infinie	28
2.6	Exemple de simulation du processus de rosenblatt en PYTHON	29
2.6.1	Impact du paramètre de Hurst sur les trajectoires simulées	31
3	Application	33
3.1	Application du processus de Rosenblatt à une équation différentielle stochastique	33
3.1.1	Définition de la solution	34
3.1.2	Existence et unicité de la solution	34
3.1.3	Simulation numérique des équations différentielles stochastiques	36
3.2	Application à une équation fonctionnelle neutre avec retard	41
3.2.1	Présentation du modèle	41
3.2.2	Définition de la solution mild	42
3.2.3	Existence et unicité des solutions mild	43
3.3	Application du processus de Rosenblatt en finance	47
	conclusion	51
	Bibliographie	52

Table des figures

2.1	Simulation du processus de Rosenblatt ($H=0.6$)	30
2.2	Simulation du processus de Rosenblatt ($H=0.8$)	30
2.3	Simulation du processus de Rosenblatt ($H=0.9$)	31
3.1	Solution numérique de l'équation différentielle stochastique (3.2) dirigée par le processus de Rosenblatt ($H=0.7$)	38
3.2	La solution exacte pour 5 trajectoire de l'équation (3.6) ($H = 0.6; M = 50$).	39
3.3	La solution exacte et approximation d'Euler-Maruyama pour 5 trajectoires ($H = 0.6; M = 50$)	40
3.4	Le graphe de l'erreur entre la solution exacte et l'approximation d'Euler- Maruyama (EM) pour notre exemple.	40

Les Notations

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$	Filtration .
B_t	Mouvement brownien standard, où $t \geq 0$ représente le temps.
B_t^H	Mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$.
Z_t^H	Processus de Rosenblatt de paramètre de Hurst $H \in (\frac{1}{2}, 1)$.
$R_H(t, s)$	Fonction de covariance du processus considéré aux instants t et s .
$K_H(t, s)$	noyau associé à la représentation intégrale du mouvement brownien fractionnaire.
$I_m(f)$	Intégrale multiple de Wiener-Itô d'ordre m associée à la fonction f .
$L^2(\Omega)$	Espace des variables aléatoires de carré intégrable sur Ω .
$L^2([0, T])$	espace des fonctions carrées intégrables sur $[0, T]$.
$L_2^0(Y, X)$	espace des opérateurs linéaires de Hilbert-Schmidt de Y vers X .
$[nt]$	partie entière de nt (fonction plancher).
$y_1 \vee y_2$	maximum de y_1 et y_2 , c.-à-d $y_1 \vee y_2 = \max(y_1, y_2)$.
$H_m(x)$	polynôme d'Hermite d'ordre m .
B^2	espace de Banach des processus stochastiques de carré intégrable.
$=^{(d)}$	Égalité en loi égalité (Égalité des distributions de dimension finie).
mBf	Mouvement Brownien Fractionnaire.

p.s Presque sûrement.

i.i.d. variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Introduction

Les processus autosimilaires sont d'un grand intérêt dans plusieurs domaines d'application, puisque les propriétés d'autosimilarité apparaissent dans différents phénomènes tels que les télécommunications, l'économie, l'hydrologie et les turbulences ...etc .

De nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de ces processus, notamment ceux de Murad S. Taqqu [21], qui présentent l'apparition de l'autosimilarité dans plusieurs applications, ainsi que les monographies de Gennady Samorodnitsky et Murad S. Taqqu [19] .

Dans ce travail, nous étudions une classe spécifique des ces processus autosimilaires obtenus comme limites dans le contexte du théorème de limite non centrée (voir [22] ou [5]), il s'agit du processus de Rosenblatt, noté $(Z_t^H)_{t \geq 0}$, associé au paramètre de Hurst $H \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Le processus de Rosenblatt est défini par une intégrale multiple de Wiener-Itô d'ordre deux [10] , ce processus constitue l'exemple le plus simple des processus de Hermite non gaussiens ,et admet des trajectoires continues au sens de Hölder (jusqu'à l'ordre H), possède des incréments stationnaires et vérifie la propriété d'auto-similarité $(Z_t^H(ct))_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} (c^H Z_t^H(t))_{t \geq 0}$, avec dépendance de longue mémoire. De plus, sa fonction de covariance est identique à celle du mouvement brownien fractionnaire B^H [4].

Dans ce mémoire, notre objectif est d'étudier le processus de Rosenblatt . Bien que la littérature scientifique accorde une attention particulière au mouvement brownien fractionnaire, en raison de son rôle fondamental dans la théorie des processus autosimilaires et de ses nombreuses applications, le processus de Rosenblatt constitue également un modèle d'intérêt majeur. En effet, ce processus non gaussien, caractérisé par

son autosimilarité, la stationnarité de ses accroissements ainsi que sa dépendance à mémoire longue, occupe une place importante dans la modélisation de phénomènes complexes. Ce travail vise ainsi à présenter ses fondements théoriques, à développer les outils analytiques associés et à illustrer certaines de ses applications dans le cadre des équations différentielles stochastiques, des équations fonctionnelles neutres avec retard ainsi que de la modélisation financière.

Ce travail est réparti en trois chapitres, organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous introduisons quelques notions fondamentales de probabilité. Ensuite nous présentons les concepts clés du mouvement brownien standard et fractionnaire, puis nous abordons l'intégration stochastique et le calcul d'Itô.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions le processus de Rosenblatt. En commençons par présenter les outils théoriques nécessaires à son étude, notamment le processus d'Hermite, le théorème de limite non centrale et l'intégrale multiple de Wiener-Itô. Ensuite, nous introduisons le processus de Rosenblatt en exposant sa définition, ses principales propriétés, ainsi que sa représentation sur un intervalle de temps fini. Nous abordons également l'intégrale de Wiener par rapport à ce processus, puis nous généralisons la construction au cas de dimension infinie. Enfin, nous terminons ce chapitre par un exemple de simulation numérique du processus de Rosenblatt en Python, afin d'illustrer l'effet du paramètre de Hurst sur l'allure des trajectoires simulées.

Le troisième chapitre est consacré à quelques applications du processus de Rosenblatt. Nous présentons d'abord son utilisation dans les équations différentielles stochastiques, puis dans les équations fonctionnelles neutres avec retard, en mettant en évidence des résultats d'existence et d'unicité des solutions. Nous terminons par une application en finance, illustrant l'intérêt du processus de Rosenblatt dans la modélisation des phénomènes financiers à mémoire longue.

Mouvement brownien et les intégrales stochastiques

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base de la théorie des probabilités et des processus stochastiques. Nous présentons notamment les processus à accroissements indépendants et stationnaires, les processus autosimilaires, certaines propriétés du mouvement brownien standard et du mouvement brownien fractionnaire, ainsi que les notions d'intégrale stochastique et le calcul d'Itô, qui seront utiles pour l'étude du processus de Rosenblatt.

1.1 Rappels

Définition 1.1.1 (*Processus Stochastique*) Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et indexées par le temps $t \in [0, T]$.

Un processus stochastique dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend du temps t et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$.

On peut le voir comme une application :

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} \times \Omega &\longrightarrow E \\ (t, \omega) &\longmapsto X_t(\omega). \end{aligned}$$

- Pour un $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ décrit la trajectoire (ou réalisation) du processus.

Définition 1.1.2 (*Processus Gaussiens*) Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est gaussien si toute combinaison linéaire $(X_{t_1} + \dots + a_n X_{t_n})$ suit une loi gaussienne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(t_1, \dots, t_n) \in T$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$.

Définition 1.1.3 (*filtration*)

- Soit Ω un espace fondamental, $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $\mathcal{F}$. On note $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.
- Une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ pour tout $0 \leq s \leq t$ dans T .

Définition 1.1.4 Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus stochastique défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Une filtration naturelle à X est la filtration définie par :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s \mid 0 \leq s \leq t), \quad \forall t \in T.$$

Définition 1.1.5 (*Processus Mesurable*) Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est dit mesurable si l'application suivante est mesurable :

$$\begin{aligned} X : (\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

1.1.1 Processus à accroissements indépendants et stationnaires

Définition 1.1.6 Un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est à accroissements indépendants si pour tout $0 \leq s \leq t$:

$$X_t - X_s$$

est indépendante de $\mathcal{F}_s^X$.

Définition 1.1.7 Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit à accroissements stationnaires si pour tout $h > 0$, la variable aléatoire $X_{t+h} - X_t$ a la même loi que X_h . C'est-à-dire :

$$(X_{t+h} - X_t) \stackrel{(d)}{=} X_h.$$

Définition 1.1.8 *Un processus stochastique à accroissements indépendants et stationnaires si la loi de l'accroissement $X_{t+s} - X_t$ ne dépend pas de t , pour tout $s > 0$.*

1.1.2 Mouvement Brownien

Définition :

Un mouvement brownien standard réel $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien centré à trajectoires continues tel que :

$$\mathbb{E}[B_t] = 0,$$

et dont la fonction de covariance est donnée par :

$$K(s, t) = \min(s, t).$$

De plus, l'opérateur de covariance $K(s, t) = \min(s, t)$ est symétrique et de type positif.

- appelle également ce processus le processus de Wiener.[6]

Proposition 1.1.1 *tout mouvement brownien est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. En effet, Pour tous $0 \leq s \leq t$, on a :*

$$\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s \quad p.s.$$

Preuve. Si $s < t$, l'indépendance de $B_t - B_s$ et $\mathcal{F}_s$ implique que

$$\mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s) = 0,$$

puisque B est centrée. D'où le résultat. ■

Propriétés fondamentales :

- 1) $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$ -p.s.
- 2) $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ ($\mathbb{E}[B_t] = 0$ et $\text{Var}(B_t) = K(t, t) = t$).

3) $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants. En effet, soit $0 \leq s < t < u < v$, on a

$$\text{Cov}(B_t - B_s, B_u - B_v) = 0.$$

4) Si $s \leq t$, on a

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \sim B_{t-s}$$

car

$$\mathbb{E}[B_t - B_s] = \mathbb{E}[B_t] - \mathbb{E}[B_s] = 0$$

et

$$\begin{aligned} \text{Var}(B_t - B_s) &= \text{Cov}(B_t - B_s, B_t - B_s) \\ &= \text{Cov}(B_t, B_t) - 2\text{Cov}(B_t, B_s) + \text{Cov}(B_s, B_s) \\ &= t - 2s + s \\ &= t - s. \end{aligned}$$

Alors, d'après les propriétés (3) et (4), le mouvement brownien possède des accroissements indépendants et stationnaires.[6]

1.2 Le processus auto-similaire

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. On utilise la notation suivante $X_t \stackrel{d}{=} Y_t, \forall t \geq 0$, lorsque les processus $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ ont une même loi pour tout $t \geq 0$.

Définition 1.2.1 Un processus stochastique $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ est dit **auto-similaire** de paramètre $H > 0$ si, pour tout $c > 0$, on a :

$$\{X(ct)\}_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} \{c^H X(t)\}_{t \geq 0}.$$

Proposition 1.2.1 [15] Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus autosimilaire de paramètre H . La relation $X_t \stackrel{d}{=} t^H X_1$ permet de décrire le comportement limite de $(X_t)_{t \geq 0}$ lorsque $t \rightarrow \infty$:

- Si $H < 0$, alors $X_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} 0$.

- Si $H = 0$, alors $X_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X_1$.
- Si $H > 0$ et $X_1 \neq 0$, alors $|X_t| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} +\infty$.

Théorème 1.2.1 [17] Soit $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ un processus non trivial, auto-similaire de paramètre H et à accroissements stationnaires. On suppose que $\mathbb{E}(|X(1)|^2) < +\infty$. Alors on a :

$$\mathbb{E}[X(t)X(s)] = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

Preuve. D'après la propriété d'auto-similarité d'ordre H du processus X_t , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t)X(s)] &= \frac{1}{2} \{ \mathbb{E}[X(t)^2] + \mathbb{E}[X(s)^2] - \mathbb{E}[(X(t) - X(s))^2] \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \mathbb{E}[X(t)^2] + \mathbb{E}[X(s)^2] - \mathbb{E}[X(|t - s|)^2] \} \\ &= \frac{1}{2} \{ t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H} \} \mathbb{E}[|X(1)|^2]. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.2.2 Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est H -autosimilaire et $H > 0$, alors $X_0 = 0$ p.s.

Preuve. D'après la définition 1.2.1, $X_0 \stackrel{d}{=} c^H X_0$, d'où $X_0 = 0$ p.s. ■

1.3 Mouvement brownien fractionnaire (mBf)

Définition 1.3.1 [14] Le mouvement brownien fractionnaire avec un paramètre $H \in]0, 1]$ est un processus gaussien réel centré, noté:

$$B^H = \{B_t^H : t \in \mathbb{R}\},$$

défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et qui satisfait les propriétés suivantes :

- $B_0^H = 0$ p.s.
- L'espérance du carré de B_t^H est donnée par:

$$E[(B_t^H)^2] = |t|^{2H}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Le paramètre H est appelé paramètre de Hurst

Proposition 1.3.1 *Le mouvement brownien fractionnaire admet une fonction de covariance R_H , définie pour $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ par :*

$$R_H(t, s) = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H})$$

- Cette fonction caractérise la dépendance temporelle du processus.

Remarque 1.3.1 .

- le mouvement brownien fractionnaire coïncide avec le mouvement brownien standard Si $H = \frac{1}{2}$, sinon le mouvement brownien B_t^H n'est pas une semimartingale, ni un processus de Markov.
- Si $H = 1$, alors $B_t^1 = tB_1^1$ presque sûrement, pour tout $t \geq 0$.

1.3.1 Propriétés Principales du mBf

Auto-similarité :

[14] Le mouvement brownien fractionnaire $B_H(t)$ de paramètre H est auto-similaire d'ordre H , ce qui signifie que :

$$\forall \alpha > 0, \quad \{B_H(\alpha t), t \in \mathbb{R}\} \stackrel{d}{=} \{\alpha^H B_H(t), t \in \mathbb{R}\}$$

Accroissement stationnaires :

[14] Le mouvement brownien fractionnaire $(B_H(t))_{t \geq 0}$ est un processus à accroissements stationnaires, c'est-à-dire :

$$\forall h > 0, \quad \{B_H(t + h) - B_H(h), t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{B_H(t), t \geq 0\}$$

Propriétés de mémoire :

Définition 1.3.2 [3] On définit la fonction d'autocovariance $r(n) := \mathbb{E}[(X_1 - X_0)(X_{n+1} - X_n)]$, pour un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ à accroissements stationnaires. on dit que

1. $(X_t)_{t \geq 0}$ est à **mémoire longue** Si : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |r(n)| = +\infty$.
2. $(X_t)_{t \geq 0}$ est à **mémoire courte** Si : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |r(n)| < +\infty$.

Proposition 1.3.2 .

- Le mBf à une longue mémoire si $H > \frac{1}{2}$.
- Le mBf à une courte mémoire si $H < \frac{1}{2}$.
- Le mBf est sans mémoire si $H = \frac{1}{2}$ (Les accroissements sont indépendants).

1.4 Intégrale stochastique

1.4.1 Processus élémentaire

Définition 1.4.1 Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit X_i sont des variables aléatoires $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurable et bornée, et il existe une partition de l'intervalle $[0, T]$ de forme $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, on a donc un processus élémentaire $(X_t)_{t \in [0, T]}$ telles que :

$$X_t = \sum_{i=1}^n X_i \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

on voit donc que sur l'intervalle $(t_{i-1}, t_i]$, la valeur du processus (X_t) ne dépend pas de t .

Définition 1.4.2 Un intégrale stochastique (intégrale d'Itô) , pour un processus (X_t) donné par (1.1) , définie par :

$$(X \cdot B)_T = \int_0^T X_t dB_t = \sum_{i=1}^n X_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

- tel que $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Proposition 1.4.1 Si X est un processus élémentaire, alors $\int_0^T X_t dB_t$ est une $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ martingale continue .

1.4.2 Les propriétés de l'intégrale stochastique

[1]

1) Espérance nulle: (contrage) Soient X un processus dans L^2 adaptés, on a :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T X dB_t \right] = 0$$

2) Linéarité: Soient X, Y deux processus élémentaire sur $[0, T]$,et $c \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^T (cX + Y) dB_t = c \int_0^T X dB_t + \int_0^T Y dB_t$$

3) Soient X un processus élémentaire sur $[0, T]$, et $0 \leq S < U < T$, on a :

$$\int_S^T X dB_t = \int_S^U X dB_t + \int_U^T X dB_t$$

4) Si $\int_0^T X dB_t$ est une martingale continue de carré intégrable alors :

$$\int_0^T X dB_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

et

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T X_t dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T X_t^2 dt \right].$$

1.5 Calcul d'Itô

Définition 1.5.1 [1] On définit $V = V(S, T)$ comme la classe des fonctions

$$f : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

telles que :

- 1) $(t, \omega) \mapsto f(t, \omega)$ est $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ -mesurable.
- 2) $f(t, \omega)$ est $\mathcal{F}_t$ -adapté .
- 3) $\mathbb{E} \left[\int_0^T f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty$.

Définition 1.5.2 [1] soit $f \in V(S, T)$, l'intégrale d'Itô de cette fonction est défini par :

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \varphi_n(t, \omega) dB_t(\omega)$$

Où :

$$\varphi(t, \omega) = \sum_{j=0}^{n-1} X_j(\omega) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

représente une suite de fonction élémentaire tel que :

$$\mathbb{E} \left[\int_S^T \left(f(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega) \right)^2 dt \right] \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Corollaire 1.5.1 Si $\phi(t, \omega)$ bornée et élémentaire et B_t un mouvement brownien. alors on a l'égalité suivante:

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \phi(t, \omega)^2 dt \right].$$

- Cette égalité appelé **l'isométrie d'Itô** .

1.5.1 Processus d'Itô

Définition 1.5.3 [1] On appelle processus d'Itô tout processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s,$$

où :

- u est un processus $\mathcal{F}_t$ -adapté tel que

$$\int_0^t |u(s, \omega)| ds < +\infty \quad p.s.$$

- v est un processus $\mathcal{F}_t$ -adapté tel que

$$\int_0^t v^2(s, \omega) ds < +\infty \quad p.s.$$

Remarque 1.5.1 Si (X_t) est un processus d'Itô de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dB_s,$$

alors on dira que X admet la différentielle stochastique :

$$dX_t = u_t dt + v_t dB_t.$$

1.5.2 Les formules d'Itô

Formule d'Itô en dimension 1 :

Théorème 1.5.1 [2] Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard, et f une fonction de classe C^2 telle que :

$$\mathbb{E} \int_0^t (f'(B_s))^2 ds < \infty, \quad \forall t > 0.$$

Alors, pour tout $t > 0$:

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds.$$

Exemple 1.5.1 : Soit $f(x) = x^2$, alors :

$$f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2.$$

On a :

$$\mathbb{E} \int_0^t (2B_s)^2 ds = \int_0^t 4s ds = 2t^2 < \infty.$$

Donc, la formule d'Itô s'écrit :

$$B_t^2 - B_0^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s + \int_0^t ds,$$

c'est-à-dire :

$$B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s + t \implies \int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} (B_t^2 - t).$$

Formule d'Itô en dimension 2 :

Théorème 1.5.2 [2] Soient $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard et $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, telle que :

$$\mathbb{E} \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) \right)^2 ds < \infty, \quad \forall t > 0.$$

Alors, pour tout $t > 0$, la formule d'Itô s'écrit :

$$f(t, B_t) - f(0, B_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) ds.$$

Exemple 1.5.2 : Soit la fonction $f(t, x) = e^{x - \frac{t}{2}}$, On a :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}e^{x - \frac{t}{2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x - \frac{t}{2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x - \frac{t}{2}}.$$

D'après la formule d'Itô, on obtient :

$$e^{B_t - \frac{t}{2}} - 1 = \int_0^t \left(-\frac{1}{2}e^{B_s - \frac{s}{2}} \right) ds + \int_0^t e^{B_s - \frac{s}{2}} dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t e^{B_s - \frac{s}{2}} ds.$$

Les termes en ds se simplifient, donc :

$$e^{B_t - \frac{t}{2}} - 1 = \int_0^t e^{B_s - \frac{s}{2}} dB_s \implies \int_0^t e^{B_s - \frac{s}{2}} dB_s = e^{B_t - \frac{t}{2}} - 1.$$

Le processus de Rosenblatt

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au processus de Rosenblatt, considéré comme un processus stochastique non gaussien issu de la famille des processus d'Hermite. Nous présentons son origine théorique à travers le théorème de la limite non centrée, puis nous développons sa représentation sur un intervalle de temps fini ainsi que l'intégrale de Wiener qui lui est associée. Enfin, nous terminons par une extension en dimension infinie et un exemple de simulation numérique illustrant ce processus.

2.1 Outils théoriques pour le processus de Rosenblatt

2.1.1 Le processus d'Hermite

Définition 2.1.1 [9] Soit $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. pour tout $s \geq 0$, On définit la fonction suivante :

$$f_H(s, y) : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$y \longmapsto \prod_{i=1}^k (s - y_i)_+^{-(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{k})}.$$

Où $y_i = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ et $X_+ = \max(x, 0)$.

- Pour tout $t \geq 0$, la fonction :

$$\int_0^t f_H(s, y) ds. \quad (2.1)$$

est symétrique et appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R}^k)$.

L'intégrale de Wiener-Itô par rapport au mouvement brownien standard $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ associée à la fonction (2.1), donné par :

$$\begin{aligned} Z_H^{(k)}(t) &= c(H, k) \int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_0^t f_H(s, y) ds \right] dB(y_1) \cdots dB(y_k). \\ &= c(H, k) \int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_0^t \prod_{i=1}^k (s - y_i)_+^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{k}\right)} ds \right] dB(y_1) \cdots dB(y_k). \end{aligned} \quad (2.2)$$

tel que $c(H, k) > 0$ est la constante de normalisation.

- Le processus $(Z_H^{(k)}(t))_{t \geq 0}$ donné par (2.2) est appelé **processus d'Hermite** d'ordre $k \geq 1$ et de paramètre de Hurst $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Propriété 1 [25] Le processus $(Z_H^{(k)}(t))_{t \geq 0}$ est H -auto-similaire. Autrement dit, pour tout $c > 0$, on a :

$$(Z_H^{(k)}(ct)) \stackrel{(d)}{=} (c^H Z_H^{(k)}(t)).$$

$\stackrel{(d)}{=}$ désigne l'égalité en loi des distributions finies-dimensionnelles. De plus, le processus $Z_H^{(k)}$ possède des accroissements stationnaires.

Propriété 2 [9] Soit $s, t \in \mathbb{R}_+$, le processus d'Hermite admet une fonction de covariance défini par :

$$R(t, s) = \mathbb{E}[Z_H^{(k)}(t, H) Z_H^{(k)}(s, H)] = c_H \left(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H} \right),$$

Remarque 2.1.1 [25].

- 1) Si $k = 1$, le processus $Z_H^{(k)}$ ci-dessus est le mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.
- 2) Si $k \geq 2$, le processus $Z_H^{(k)}$ n'est pas gaussien.
- 3) Si $k = 2$, le processus $Z_H^{(k)}$ est appelé **le processus de Rosenblatt**.

2.1.2 Théorème non centrale limite

Définition 2.1.2 (Théorème centrale limite) [17] Si $X_1, X_2, \dots$ une suite des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées ; avec $E[X_1] = 0$ et $E[X_1^2] = 1$,alors on a:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nt]} X_j \xrightarrow{d} B(t)$$

Où : B_t est un mouvement brownien standard .

Si on fixe $t > 0$ on obtient le théorème classique de la limite centrale .

Théorème 2.1.1 [17] Supposons $\{X(t), t \geq 0\}$ est stochastiquement continue en $t = 0$, s'il existe un processus stochastique $\{Y(t), t \geq 0\}$ et un nombre réel $\{a(\lambda); \lambda > 0\}$ avec $a(\lambda) > 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} a(\lambda) = \infty$ tel que :

$$\frac{1}{a(\lambda)} Y(\lambda t) \xrightarrow{d} X(t) \quad , \quad \text{quand } \lambda \rightarrow \infty$$

alors , il existe $H > 0$ tel que le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ est H -autosimilaire , De plus la fonction $a(\lambda)$ est de la forme :

$$a(\lambda) = \lambda^H L(\lambda),$$

Où L est une fonction à variation lente .

Définition 2.1.3 On dit que $L(\lambda)$ est à variation lente si :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L(c\lambda)}{L(\lambda)} = 1, \quad \forall c > 0$$

Théorème 2.1.2 [17] Soit $\{\xi_n\}$ une suite gaussienne stationnaire vérifiant : $E[\xi_1] = 0$ et $E[\xi_1^2] = 1$ et dont la fonction de covariance satisfait :

$$E[\xi_1 \xi_{n+1}] \sim n^{H-1} L(n) \quad , \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, \quad \forall H \in (1/2, 1)$$

et pour toute fonction à variation lente L , on définit une autre suite stationnaire $\{X_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ par :

$$X_j = \xi_j^2 - 1, \tag{2.3}$$

alors :

$$\frac{1}{n^H} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow{d} Z$$

où Z est une variable aléatoire non gaussienne et sa fonction caractéristique est donnée par :

$$E[e^{i\theta Z}] = \exp\left(\sum_{p=2}^{\infty} \frac{(2i\theta)^p}{2p} \int_{x \in [0,1]^p} |x_1 - x_p|^{2(H-1)} \prod_{j=2}^p |x_j - x_{j-1}|^{2(H-1)} dx\right), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

D'après ce Théorème (Taqqu [20]) a considéré une version du processus (2.3) et a obtenu comme processus limite $n^{-H} \sum_{j=1}^n X_j$, ce processus limite est H -autosimilaire, et constitue le premier exemple d'un processus autosimilaire non gaussien il est connu sous le nom de processus de Rosenblatt.

- On introduit maintenant le **Théorème de la limite non centrée** :

On considère une suite gaussienne stationnaire $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ avec : $E[\xi_n] = 0$ et $E[\xi_n^2] = 1$ telle que sa fonction de corrélation satisfait :

$$r(n) = \mathbb{E}[\xi_0 \xi_n] = n^{\frac{2H-2}{k}} L(n)$$

avec $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ et L est une fonction à variation lente. Soit $H_m(x)$ le polynome d'Hermite de degré m défini par :

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2/2} \frac{d^m}{dx^m} (e^{-x^2/2}),$$

et soit g une fonction de rang d'Hermite égal à k de la forme :

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j H_j(x)$$

tel que : $\mathbb{E}[g(\xi_0)] = 0$, $\mathbb{E}[g(\xi_0)^2] < \infty$

où :

$$c_j = \frac{1}{j!} \mathbb{E}[g(\xi_0) H_j(\xi_0)],$$

comme $\mathbb{E}[g(\xi_0)] = 0$, on a $k \geq 0$, alors le théorème limite non centrale affirme que :

$$\frac{1}{n^H} \sum_{j=1}^{[nt]} g(\xi_j) \xrightarrow{d} Z_H^{(k)}(t)$$

converge lorsque $n \rightarrow \infty$ au sens des distributions de dimension finie vers le processus (2.2) .

2.1.3 L'intégrale multiple de wiener-Itô

[7] Dans cette partie, nous présentons les éléments de base du calcul sur le chaos de Wiener. Soit $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ un mouvement brownien standard et $\mathcal{H} = L^2([0, T])$. On note par S_m l'ensemble des fonctions simples $f \in L^2([0, T]^m)$ de la forme :

$$f = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n c_{i_1, \dots, i_m} \mathbf{1}_{A_{i_1} \times \dots \times A_{i_m}}$$

où les coefficients vérifient $c_{i_1, \dots, i_m} = 0$ si deux indices i_k et i_ℓ sont égaux, et où les ensembles $A_i \in \mathcal{B}([0, T])$ sont disjoints. Pour une telle fonction f , l'intégrale stochastique multiple d'ordre m est définie par :

$$I_m(f) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n c_{i_1, \dots, i_m} B(A_{i_1}) \cdots B(A_{i_m}) \quad (2.4)$$

Propriété 3 Soit $I_m(f)$ la fonction définie par (2.4) alors on a :

1) I_m est linéaire et vérifie:

$$\mathbb{E}[I_m(f)I_q(g)] = \begin{cases} m! \langle f, g \rangle_{L^2([0, T]^m)} & \text{si } m = q, \\ 0 & \text{si } q \neq m. \end{cases}$$

2) $I_m(f) = I_m(\tilde{f})$, où $\tilde{f}$ dénote la fonction symétrique de f définie par :

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$$

2.2 Processus de Rosenblatt

Dans cette section on analyse quelques propriétés de base du processus de Rosenblatt, en particulier sa représentation comme une intégrale stochastique sur un intervalle fini.

On a d'après la formule (2.2) avec $k = 2$:

$$Z_H^2(t) := Z_t = a(H) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t (s - y_1)_+^{-\frac{2-H}{2}} (s - y_2)_+^{-\frac{2-H}{2}} ds \right) dB_{y_1} dB_{y_2}. \quad (2.5)$$

où $(B_y)_{y \in \mathbb{R}}$ est un mouvement Brownien standard réel. La constante $a(H)$ est positive et est telle que $E(Z_1^2) = 1$, on a :

$$a(H)^2 = \left(\frac{\beta\left(\frac{H}{2}, H-1\right)^2}{H(2H-1)} \right)^{-1}.$$

le processus $(Z_t^H)_{t \geq 0}$ est un processus H -autosimilaire, à accroissements stationnaires et admet une modification à trajectoires höldériennes presque sûrement continues d'ordre $\delta < H$. De plus le processus $(Z_t^H)_{t \geq 0}$ est à dépendance à mémoire longue lorsque $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. [25]

2.3 Représentation par intervalle de temps fini du processus de Rosenblatt

La représentation (2.5) n'est pas très commode pour construire un calcul stochastique par rapport au processus $(Z_t^H)_{t \geq 0}$; d'où la nécessité de représenter $(Z_t^H)_{t \geq 0}$ comme une intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien dans un intervalle de temps $[0, T]$. [12]

Rappelons que le mouvement brownien fractionnaire $(B_t^H)_{t \geq 0}$ de paramètre de Hurst $H > 0$ admet la représentation suivante :

$$B_t^H = \int_0^t K^H(t, s) dW_s, \quad (2.6)$$

avec $(W_t)_{t \in [0, T]}$ est un processus de Wiener standard et,

$$K^H(t, s) = c(H) s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du \quad (2.7)$$

où $t > s$ et

$$c(H) = \left(\frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H, H-\frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 2.3.1 *Soit K le noyau défini par (2.7), et soit le processus de $(Z_t^H)_{t \geq 0}$ de paramètre de Hurst H . Alors on a :*

$$Z_t \stackrel{d}{=} d(H) \int_0^t \int_0^t \left[\int_{y_1 \vee y_2}^t \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) du \right] dB_{y_1} dB_{y_2} \quad (2.8)$$

où $(B_t)_{t \in [0, T]}$ est un mouvement brownien standard,

$$H' = \frac{H+1}{2},$$

et

$$d(H) = \frac{1}{H+1} \left(\frac{H}{4(2H-1)} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Remarque 2.3.1 *i) La constante $d(H)$ est une constante de normalisation, elle est choisie de sorte que*

$$\mathbb{E}(Z_t Z_s) = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_t Z_s) &= 2d(H)^2 \int_0^t \int_0^s dy_1 dy_2 \left(\int_{y_1 \vee y_2}^t \int_{y_1 \vee y_2}^s \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_2) du dv \right) \\ &= 2d(H)^2 \int_0^t \int_0^s du dv \left(\int_0^{u \wedge v} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y) dy \right)^2 \\ &= 2d(H)^2 (H'(2H'-1))^2 \int_0^t \int_0^s |u-v|^{2H-2} du dv \\ &= R(s, t). \end{aligned}$$

ii) On peut montrer avec difficulté que le processus

$$Z'_t = d(H) \int_0^t \int_0^t \left[\int_{y_1 \vee y_2}^t \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) du \right] dB_{y_1} dB_{y_2}$$

définit un processus H auto-similaire à accroissements stationnaires. En effet, pour tout $c > 0$,

$$\begin{aligned} Z'(ct) &= d(H) \int_0^{ct} \int_0^{ct} \left[\int_{y_1 \vee y_2}^{ct} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) du \right] dB(y_1) dB(y_2) \\ &= d(H) \int_0^{ct} \int_0^{ct} \left[\int_{\frac{y_1}{c} \vee \frac{y_2}{c}}^t \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(cu, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(cu, y_2) c du \right] dB(y_1) dB(y_2) \\ &= \int_0^t \int_0^t \left[\int_{y_1 \vee y_2}^t \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(cu, cy_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(cu, cy_2) c du \right] dB(cy_1) dB(cy_2) \end{aligned}$$

et comme,

$$B(cy) \stackrel{d}{=} c^{\frac{1}{2}} B(y),$$

et,

$$\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(cu, cy_i) = c^{H' - \frac{3}{2}} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_i),$$

on obtient,

$$Z(ct) \stackrel{d}{=} c^H Z(t).$$

Le fait que le processus $(Z_t^H)_{t \geq 0}$ admette des accroissements stationnaires découle de la relation suivante:

$$K^{H'}(t+h, s) - K^{H'}(t, s) = K^{H'}(t-s, h),$$

pour tous $s, t \in [0, T]$, $s < t$ et $h > 0$.

- Le processus de Rosenblatt possède une propriété similaire au mBf : il peut être approché par une suite de semi-martingales (ici, puisque $H > \frac{1}{2}$, par une suite de processus à variation bornée).

L'observation de base est que, si l'on intervertit formellement les intégrales stochastiques et de

Lebesgue dans (2.8) , on obtient :

$$Z_t^H = d(H) \int_0^t \left(\int_0^u \int_0^u \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) dB(y_1) dB(y_2) \right) du.$$

Mais l'expression ci-dessus ne peut pas tenir car le noyau

$$\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2)$$

n'appartient pas à $L^2([0, T]^2)$, puisque la dérivée partielle se comporte comme

$$(u - y)^{H-\frac{2}{2}}$$

au voisinage de la diagonale.

2.4 Intégrale de Wiener par rapport au processus de Rosenblatt

La structure de covariance du processus de Rosenblatt permet de construire des intégrales de Wiener par rapport à celui-ci .Nous nous appuyons sur les travaux de Makoto Maejima et Ciprian Tudor [10] pour la définition des intégrales de Wiener dans le cadre des processus d'Hermite généraux, ainsi que sur ceux de Tudor [25] pour le cas du processus de Rosenblatt ,On note que :

$$Z_t^H = \int_0^T \int_0^T I(1_{[0,t]}) (y_1, y_2) dB(y_1) dB(y_2),$$

où l'opérateur I est défini sur l'espace des fonctions $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, à valeurs dans l'espace des fonctions $g : [0, T]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et donné par :

$$I(f)(y_1, y_2) = d(H) \int_{y_1 \vee y_2}^T f(u) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) du.$$

Si f un élément de l'ensemble E des fonctions en escalier sur $[0, T]$, de la forme :

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 1_{(t_i, t_{i+1}]}, \quad t_i \in [0, T].$$

Alors nous définissons naturellement son intégrale de Wiener par rapport à Z_t^H par

$$\begin{aligned} \int_0^T f(u) dZ_H(u) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i (Z^H(t_{i+1}) - Z^H(t_i)) \\ &= \int_0^T \int_0^T I(f)(y_1, y_2) dB(y_1) dB(y_2). \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions telles que :

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = 2 \int_0^T \int_0^T (I(f)(y_1, y_2))^2 dy_1 dy_2 < \infty.$$

Il s'en suit que

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = H(2H-1) \int_0^T \int_0^T f(u)f(v) |u-v|^{2H-2} du dv.$$

On peut voir que :

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{H}}^2 &= 2d(H)^2 \int_0^T \int_0^T \left(\int_{y_1 \vee y_2}^T f(u) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) du \right)^2 dy_1 dy_2 \\ &= 2d(H)^2 \int_0^T \int_0^T dy_1 dy_2 \int_{y_1 \vee y_2}^T \int_{y_1 \vee y_2}^T du dv \\ &\quad \times f(u)f(v) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2d(H)^2 \int_0^T \int_0^T \left(\int_0^{u \wedge v} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_1) dy_1 \right)^2 du dv \\
 &= H(2H - 1) \int_0^T \int_0^T f(u)f(v) |u - v|^{2H-2} du dv.
 \end{aligned}$$

On considère l'application

$$f \mapsto \int_0^T f(u) dZ^H(u)$$

est une isométrie de E vers $L^2(\Omega)$. comme E est dense dans $\mathcal{H}$, cette application peut être prolongée de manière unique en une isométrie de $\mathcal{H}$ vers $L^2(\Omega)$. cette extension est appelée l'intégrale de Wiener de $f \in \mathcal{H}$ par rapport à Z_t^H .

Notons que l'espace $\mathcal{H}$ contient non seulement des fonctions, mais ses éléments peuvent aussi être des distributions. Par conséquent, il convient de connaître les sous-espaces $|\mathcal{H}|$ de $\mathcal{H}$:

$$|\mathcal{H}| = \left\{ f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_0^T \int_0^T |f(u)||f(v)| |u - v|^{2H-2} du dv < \infty \right\}.$$

L'espace $|\mathcal{H}|$ (par conséquent $\mathcal{H}$) n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, mais il est de Banach pour la norme

$$\|f\|_{|\mathcal{H}|}^2 = H(2H - 1) \int_0^T \int_0^T |f(u)||f(v)| |u - v|^{2H-2} du dv.$$

Par conséquent, nous avons :

$$L^2([0, T]) \cap L^1([0, T]) \subset L^{1/H}([0, T]) \subset |\mathcal{H}| \subset \mathcal{H}.$$

Et, pour toute $f \in L^2([0, T])$, on a :

$$\|f\|_{|\mathcal{H}|}^2 \leq 2HT^{2H-1} \int_0^T |f(s)|^2 ds,$$

et

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C(H) \|f\|_{L^{1/H}([0,T])}^2,$$

pour une certaine constante $C(H) > 0$.

2.5 Processus de Rosenblatt de dimension infinie

[13] Soient X et Y deux espaces de Hilbert réels séparables et soit $L(Y, X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de Y dans X . Soit $Q \in L(Y, Y)$ un opérateur auto-adjoint, positif et de trace finie. Il existe alors une suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ de réels positifs ou nuls tel que $\text{tr}(Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$. Ainsi qu'une base orthonormée complète $(e_n)_{n \geq 1}$ de Y vérifiant $Qe_n = \lambda_n e_n$, $n \geq 1$.

On définit le processus de Rosenblatt de dimension infinie sur Y , par :

$$Z_t^H = Z_Q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e_n Z_n(t). \quad (2.9)$$

où $(Z_n)_{n \geq 1}$ est une famille de processus de Rosenblatt réels indépendants.

La série (2.9) est convergente dans $L^2(\Omega)$ pour tout $t \in [0, T]$, dès lors que :

$$\mathbb{E} |Z_Q(t)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathbb{E} (z_n(t))^2 = t^{2H} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty.$$

Le processus Z_Q possède une fonction de covariance donnée par :

$$\mathbb{E} [\langle Z_Q(t), x \rangle \langle Z_Q(s), y \rangle] = R(s, t) \langle Qx, y \rangle, \quad \forall x, y \in X, \quad \forall t, s \in [0, T].$$

Soit $\varphi : [0, T] \longrightarrow L_2^0(Y, X)$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|K^* \varphi Q^{1/2} e_n\|_{L^2([0,T])}^2 < \infty.$$

L'intégrale de Wiener par rapport au processus de Rosenblatt Z_Q est définie par :

$$\begin{aligned} \int_0^t \varphi(s) dZ_Q(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \sqrt{\lambda_n} \varphi(s) e_n dz_n(s) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^t K^* \varphi Q^{1/2} e_n(y_1, y_2) dB(y_1) dB(y_2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Lemme 2.5.1 Si $\varphi : [0, T] \rightarrow L_2^0(Y, X)$ satisfait $\int_0^T \|\varphi(s)\|_{L_2^0}^2 ds < \infty$, alors la somme dans (2.10) est bien définie comme variable aléatoire à valeurs dans X et on a :

$$\mathbb{E} \left\| \int_0^t \varphi(s) dZ^H(s) \right\|^2 \leq 2H t^{2H-1} \int_0^t \|\varphi(s)\|_{L_2^0}^2 ds.$$

Démonstration. on a:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \int_0^t \psi(s) dZ^H(s) \right\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left\| \int_0^t \int_0^t \sqrt{\lambda_n} K_H^*(\psi e_n)(y_1, y_2) dB_n(y_1) dB_n(y_2) \right\|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2H t^{2H-1} \int_0^t \lambda_n \|\psi(s) e_n\|^2 ds \\ &= 2H t^{2H-1} \int_0^t \|\psi(s)\|_{L_2^0}^2 ds. \end{aligned}$$

2.6 Exemple de simulation du processus de rosenblatt en PYTHON

Le code de simulation du processus de rosenblatt commence par définir le nombre de pas de temps n , le pas de temps dt , et le paramètre de Hurst H . Il génère ensuite un bruit gaussien w à l'aide de la fonction **randn** de Python.

La trajectoire du processus est calculée en appliquant un noyau de mémoire longue de la forme $k^{H-3/2}$ au bruit à l'aide de la fonction **convolve**. Ensuite, un polynôme

d'Hermite (d'ordre 2) $X^2 - \mathbb{E}[X^2]$ est utilisé pour obtenir un processus non gaussien, puis normalisé.

Enfin, la trajectoire est obtenue en utilisant la fonction **cumsum** pour effectuer la somme cumulée, puis tracée à l'aide de la fonction **plot** de Python .

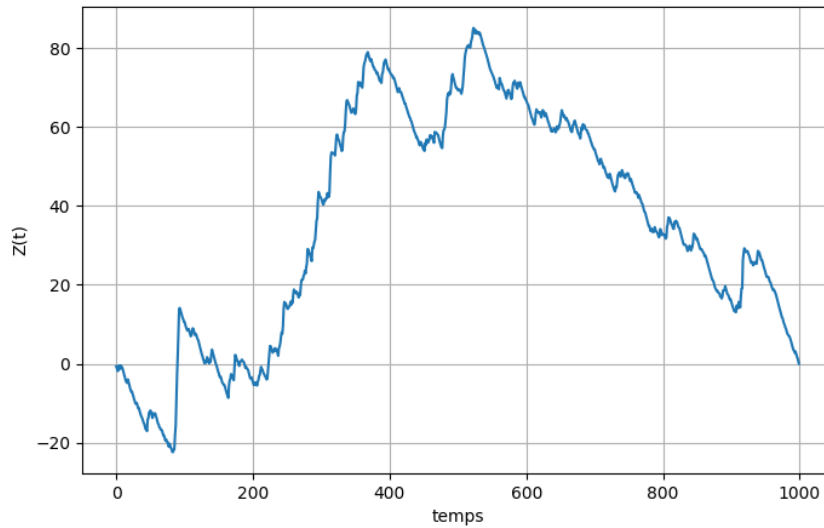


Figure 2.1: Simulation du processus de Rosenblatt ($H=0.6$)

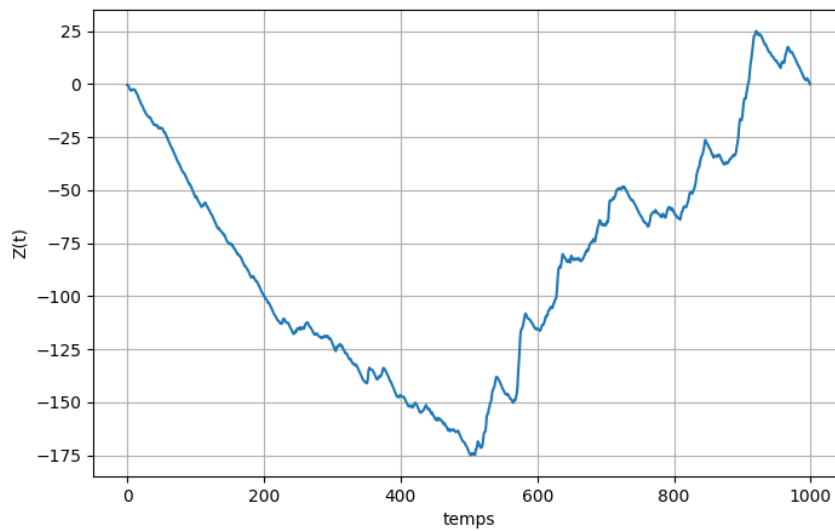


Figure 2.2: Simulation du processus de Rosenblatt ($H=0.8$)

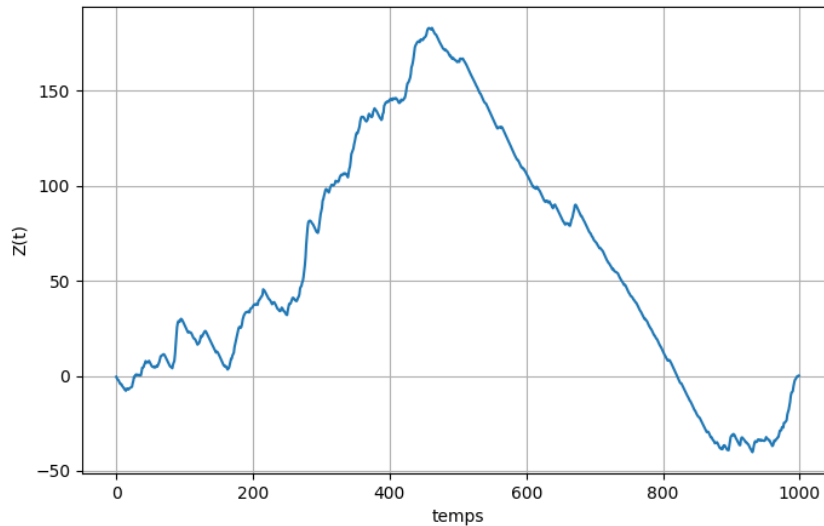


Figure 2.3: Simulation du processus de Rosenblatt ($H=0.9$)

2.6.1 Impact du paramètre de Hurst sur les trajectoires simulées

Les trajectoires simulées du processus de Rosenblatt ont été étudiées pour différentes valeurs du paramètre de Hurst H , à savoir $H = 0.6$, $H = 0.8$ et $H = 0.9$. Les résultats montrent clairement l'influence de ce paramètre sur le comportement du processus.

- Pour $H = 0.6$, les trajectoires présentent encore des fluctuations relativement irrégulières, avec une structure de dépendance faible. Le processus garde un comportement proche d'un bruit blanc, mais avec un début de régularité.
- Pour $H = 0.8$, les trajectoires deviennent plus lisses et montrent des tendances plus persistantes. On observe des phases de croissance ou de décroissance plus longues, ce qui traduit une mémoire longue plus marquée.
- pour $H = 0.9$, le processus est encore plus régulier. Les trajectoires sont fortement lissées et présentent des tendances très persistantes sur de longues périodes, ce qui met en évidence une forte dépendance à long terme et un effet cumulatif important.

En conclusion, l'augmentation du paramètre H entraîne une diminution des fluctuations

locales et une augmentation de la régularité ainsi que de la persistance des trajectoires du processus.

Application

Dans ce chapitre, nous présentons quelques applications du processus de Rosenblatt. Nous étudions d'abord son utilisation dans les équations différentielles stochastiques, puis dans les équations fonctionnelles neutres avec retard. Enfin, nous abordons une application en finance afin d'illustrer l'intérêt de ce processus dans la modélisation de phénomènes présentant une dépendance à long terme.

3.1 Application du processus de Rosenblatt à une équation différentielle stochastique

[18] Dans cette section, on présente l'équation différentielle stochastique associée au processus de Rosenblatt de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t) dZ_t^H \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où :

- X_t représente le processus inconnu recherché.
- X_0 est la condition initiale.
- $b(t, x)$ est le terme de dérive.

- $\sigma(t)$ est le coefficient de diffusion.
- Z_t^H est le processus de Rosenblatt.

- La forme intégrale équivalente de l'équation (3.1) s'écrit :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s) dZ_s^H \quad (3.2)$$

3.1.1 Définition de la solution

Avant de préciser les résultats théoriques relatifs à cette équation, il convient tout d'abord de définir la solution associée.

Définition 3.1.1 *Un processus stochastique $(X_t)_{t \in [0, T]}$ à valeurs réelles est appelé solution de l'équation (3.2) de condition initiale $X_0 = x_0$ si :*

1. *Le processus $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est continu par rapport au temps t et adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t, t \in [0, T])$.*
2. *$b(t, X_t) \in L^1([0, T]; \mathbb{R})$ et $\sigma(t) \in L^2([0, T]; \mathbb{R})$.*
3. *$X_0 = x_0$ est la condition initiale de (3.2) , pour tout $t \in [0, T]$, (X_t) satisfait l'équation (3.2) p.s.*

Définition 3.1.2 [1] *La solution X_t est dite unique si, pour toute autre solution Y_t de l'équation, on a :*

$$P(X_t = Y_t) = 1, \quad \forall t \in [0, T].$$

3.1.2 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.2). Pour le faire, nous introduisons certaines hypothèses portant sur les coefficients de l'équation :

(H1): Pour tout $t \in [0, T]$ et $x, y \in \mathbb{R}$, il existe une fonction positive $k(t) \in L^1([0, T])$ telle que : $|b(t, x)| \leq k(t)(1 + |x|)$ (croissance linéaire), et $|b(t, x) - b(t, y)| \leq k(t)|x - y|$ (condition de Lipschitz).

(H2): Pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $b(t, \cdot)$ est supposée continue à gauche et semi-continue inférieurement, i.e. pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} b(t, x) = b(t, x_0)$, et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} b(t, x) \geq b(t, x_0)$.

Théorème 3.1.1 *Supposons que la fonction b vérifie les hypothèses (H1) et (H2), si la fonction $\sigma \in L^2([0, T]; \mathbb{R})$, alors l'équation (3.2) admet au moins une solution.*

De plus, si la fonction $b(t, \cdot)$ est non croissante pour tout $t \in [0, T]$, alors cette solution est unique.

Preuve.

Existence : pour montrer l'existence de la solution, on utilise la méthode des approximations successives de Picard.

Posons :

$$X_t^{(0)} = x_0 \quad \text{pour tout } t \in [0, T]$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_t^{(n+1)} = x_0 + \int_0^t b(s, X_s^{(n)}) ds + \int_0^t \sigma(s) dZ_s^H$$

D'après l'hypothèse de croissance linéaire sur b , la suite $(X^{(n)})$ est bien définie et uniformément bornée.

D'autre part, en utilisant la condition de Lipschitz, on obtient l'estimation suivante:

$$\mathbb{E}|X^{(n+1)}(t) - X^n(t)|^2 \leq C \int_0^t \mathbb{E}|X^n(s) - X^{(n-1)}(s)|^2 ds$$

où C est une constante positive.

Ainsi, la suite $(X^n(t))_{t \in [0, T]}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathbf{B}^2$.

Comme cet espace est complet, il s'ensuit que cette suite converge vers un processus X_t dans $\mathbf{B}^2$, i.e.

$$X^n(t) \rightarrow X(t) \quad \text{dans } B^2$$

En passant à la limite dans l'équation précédente, on vérifie que le processus limite $X(t)$ satisfait l'équation (3.2). Par conséquent l'équation (3.2) admet au moins une solution.

unicité :

Soient X_t et Y_t deux solutions ayant la même condition initiale $X_0 = Y_0$.

Posons :

$$h(t) = E[|X_t - Y_t|^2]$$

En utilisant la condition de Lipschitz sur b , on obtient :

$$h(t) \leq C \int_0^t h(s) ds \quad \text{où } C > 0 \text{ est une constante.}$$

Par le lemme de Grönwall, on déduit que :

$$h(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, T]$$

Par conséquent :

$$X_t = Y_t \quad P.s.$$

Ce qui prouve l'unicité. • ■

3.1.3 Simulation numérique des équations différentielles stochastiques

Dans cette section, nous intéressons à la résolution numérique de l'équation différentielle stochastique dirigées par le processus de Rosenblatt (3.2)

Méthode d'Euler–Maruyama : En raison du caractère non gaussien et de la dépendance à longue mémoire de processus de Rosenblatt, il est difficile d'obtenir une solution analytique explicite. Pour cette raison, nous avons recours à une méthode numérique, en l'occurrence la méthode **d'Euler–Maruyama**, qui constitue une extension naturelle de la méthode d'Euler classique aux équations différentielles stochastiques. [16]

Avant d'appliquer cette méthode, il est nécessaire de simuler les incréments du processus de Rosenblatt. Pour cela, nous commençons par approximer sa fonction de répartition (CDF). En effet, le processus peut être décomposé sous la forme suivante, où les variables X_M et Y_M sont définies comme suit :

$$Z_H = X_M + Y_M = \sum_{n=1}^{M-1} \lambda_n (\varepsilon_n^2 - 1) + \sum_{n=M}^{\infty} \lambda_n (\varepsilon_n^2 - 1), \quad M \geq 1 \quad (3.3)$$

où :

- (ε_n) sont des variables aléatoires i.i.d. suivant une loi normale standard $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- Les poids $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ sont choisis de manière à satisfaire la relation suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k = \sigma_k(D) c_k, \quad D = 1 - H, \quad k = 2, 3, \dots$$

- la série (3.3) converge presque sûrement dans L^2 .

Le calcul de la fonction de répartition (CDF) de Z_H repose sur trois étapes principales [11] :

étape 1: Estimation des valeurs propres λ_n pour $n = 1, \dots, M$.

étape 2: Calcul de la fonction de répartition de X_M et de la densité de probabilité de Y_M (voir [11]).

étape 3: Obtention de la CDF de Z_H par convolution :

$$F_{Z_H}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_M}(x - y) f_{Y_M}(y) dy. \quad (3.4)$$

En utilisant des méthodes classiques d'intégration numérique, nous évaluons cette convolution sous PYTHON, où F_{X_M} désigne la fonction de répartition (CDF) de X_M et f_{Y_M} la densité de probabilité (PDF) de Y_M . Les paramètres choisis sont $D = 0,3$; $M = 50$ et $N = 5$, où M correspond au nombre de lois du chi-deux considérées et N à l'ordre du développement d'Edgeworth.

Après l'obtention numérique de la fonction de répartition F , nous appliquons la théorème d'inversion afin de générer les incréments du processus de Rosenblatt ΔZ_H^k .

Ensuite, nous appliquons la méthode d'Euler–Maruyama avec un pas de temps $\Delta t = 0,01$ sur l'intervalle $[0,1]$, en effectuant 10 réalisations afin d'obtenir la solution numérique de l'équation (3.2), et le schéma numérique s'écrit :

$$X_{k+1} = X_k + b(t_k, X_k)\Delta t + \sigma(t_k)\Delta Z_H^k, \quad (3.5)$$

où ΔZ_H est la variation de R_H entre les instants t_k et t_{k+1} , donnée par :

$$\Delta Z_H^k = Z_H(t_{k+1}) - Z_H(t_k).$$

Ce schéma est itéré pour obtenir une approximation de la solution sur tout l'intervalle.

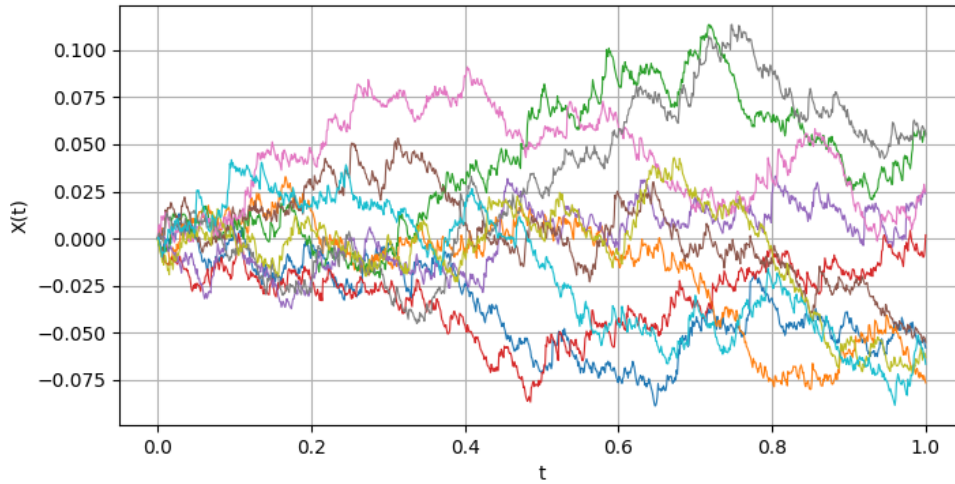


Figure 3.1: Solution numérique de l'équation différentielle stochastique (3.2) dirigée par le processus de Rosenblatt ($H=0.7$)

Exemple :

On considère l'équation différentielle stochastique linéaire suivante :

$$\begin{cases} dX_t = 3X_t dt + (1 + 2t) dZ_t^H & t \in [0, 1] \\ X_0 = 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

où Z_t^H désigne un processus de Rosenblatt de paramètre de Hurst $H \in (\frac{1}{2}, 1)$.

La solution exacte de l'équation (3.6) est donnée par :

$$X_t = e^{3t} \left(1 + \int_0^t e^{-3s} (1 + 2s) dZ_s^H \right)$$

On présente ci-dessous la simulation des trajectoires de la solution exacte sur l'intervalle $t \in [0, 1]$ en PYTHON :

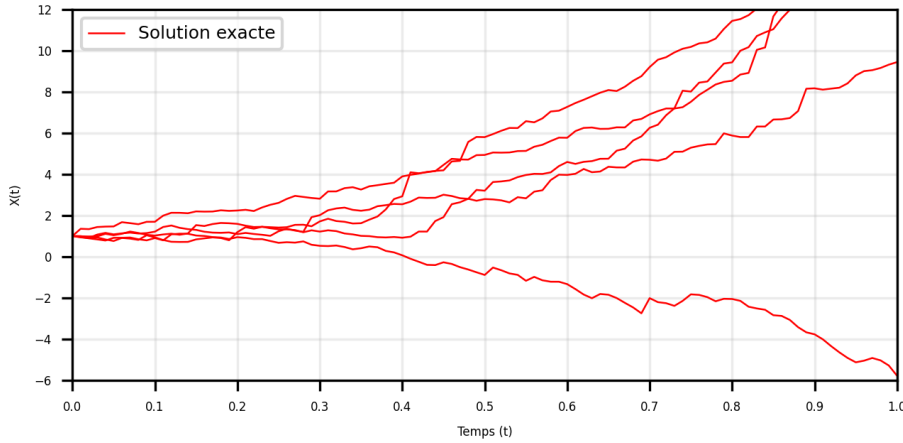


Figure 3.2: La solution exacte pour 5 trajectoire de l'équation (3.6) ($H = 0.6; M = 50$).

En appliquant la méthode d'Euler-Maruyama (EM) pour déterminer la solution numérique de cette EDS, on obtient le schéma suivant :

$$X_{i+1} = X_i + 3X_i \Delta t + (1 + 2t_i) \Delta Z_i^H$$

avec :

$$\Delta Z_i^H = Z_{t_{i+1}}^H - Z_{t_i}^H,$$

Nous procédons maintenant à une comparaison entre la solution exacte et la solution

approchée obtenue par le schéma d'Euler-Maruyama .

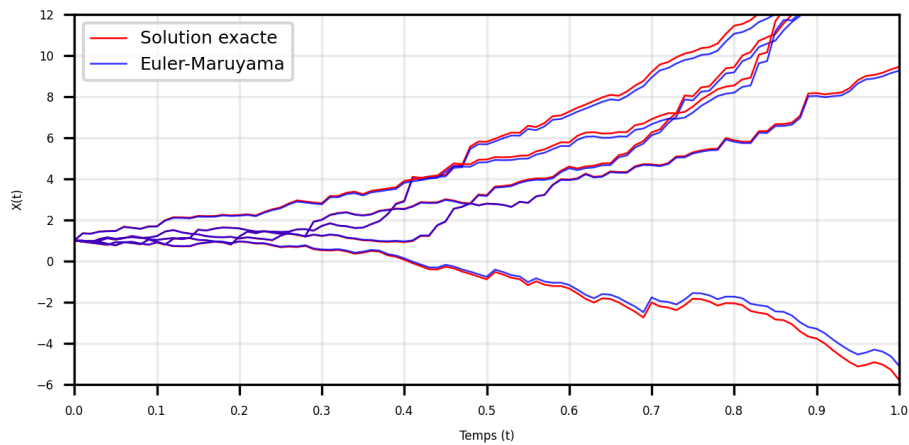


Figure 3.3: La solution exacte et approximation d'Euler-Maruyama pour 5 trajectoires ($H = 0.6; M = 50$) .

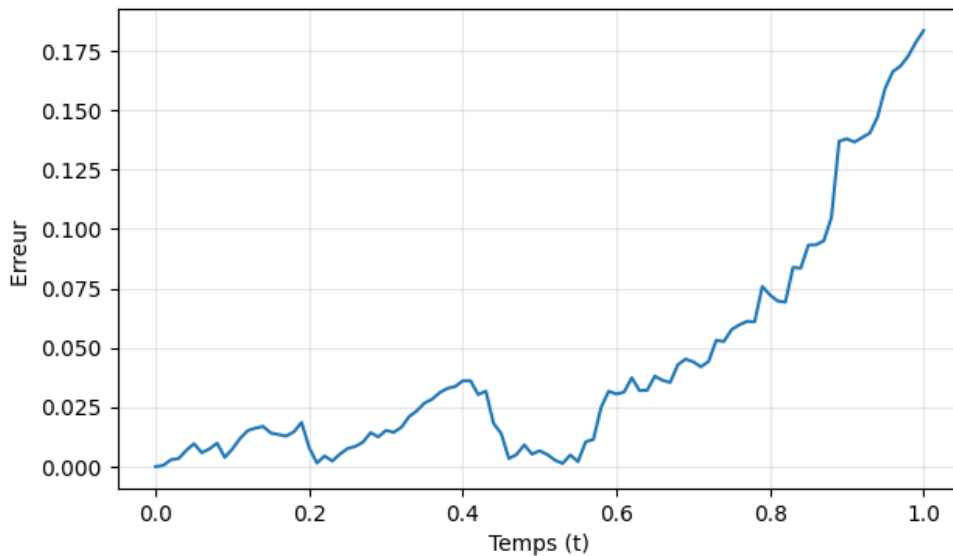


Figure 3.4: Le graphe de l'erreur entre la solution exacte et l'approximation d'Euler-Maruyama (EM) pour notre exemple.

À partir de la figure 3.3 , on constate que les trajectoires de la solution approchée obtenue par le schéma d'Euler-Maruyama (en bleu) sont très proches de celles de la solution exacte (en rouge), ce qui met en évidence la précision du schéma numérique

dans l'approximation de la solution de l'équation différentielle stochastique considérée, pilotée par le processus de Rosenblatt.

On remarque également que les deux solutions présentent une évolution globalement croissante sur l'intervalle considéré. Ce comportement est principalement dû au terme de dérive positif $3X_t$, qui induit une croissance exponentielle de la solution au cours du temps. Par ailleurs, le terme stochastique $(1 + 2t)dZ_t^H$ associé au processus de Rosenblatt introduit des fluctuations aléatoires autour de cette tendance déterministe, reflétant ainsi l'effet du bruit dans la dynamique du système.

Enfin, le faible écart observé entre les deux courbes est lié à l'erreur de discrétisation générée par le schéma d'Euler-Maruyama. Toutefois, cette erreur reste faible, ce qui confirme la convergence numérique et la stabilité de la méthode utilisée.

3.2 Application à une équation fonctionnelle neutre avec retard

[8] Dans cette section, nous étudions une classe d'équations différentielles stochastiques neutres avec retard dans un espace de Hilbert réel séparable.

3.2.1 Présentation du modèle

Soient X et Y deux espaces de Hilbert réels séparables, munis respectivement du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme $\| \cdot \|$. Nous considérons l'équation suivante :

$$d[x(t) + g(t, x(t - \tau))] = [A(t)x(t) + f(t, x(t - \tau))]dt + \sigma(t) dZ^H(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.7)$$

avec la condition initiale :

$$x(t) = \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0.$$

où :

- $\{A(t), t \in [0, T]\}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés sur X , générant un

système d'évolution $\{U(t, s), 0 \leq s \leq t \leq T\}$.

- $Z^H = \{Z^H(t), t \geq 0\}$ est un processus de Rosenblatt défini sur l'espace de Hilbert Y .
- $f, g : [0, +\infty) \times X \rightarrow X$ sont des fonctions satisfaisant des conditions de régularité (Lipschitz et croissance).
- $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow L_2^0(Y, X)$ est une application où $L_2^0(Y, X)$ désigne l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de Y dans X .

3.2.2 Définition de la solution mild

Dans le cadre des équations différentielles stochastiques en dimension infinie il est souvent difficile d'obtenir des solution classique, on introduit alors la notion de solution mild.

Définition 3.2.1 Soit $x(t)$, $t \in [-\tau, T]$, un processus stochastique à valeurs dans l'espace de Hilbert X . On dit que $x(t)$ est une solution mild de l'équation (3.7) si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) $x(\cdot) \in C([-\tau, T], L^2(\Omega, X))$, ce qui signifie que le processus $x(t)$ est continu par rapport au temps et dépend de manière régulière de t .
- 2) $x(t) = \varphi(t)$, $\forall t \in [-\tau, 0]$, ce qui signifie que l'état initial du système est entièrement déterminé sur l'intervalle de retard par la fonction donnée φ .
- 3) pour tout $t \in [0, T]$, $x(t)$ est donné par la représentation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} x(t) = & U(t, 0) \left(\varphi(0) + g(0, \varphi(-\tau)) \right) - g(t, x(t - \tau)) \\ & - \int_0^t U(t, s) A(s) g(s, x(s - \tau)) ds \\ & + \int_0^t U(t, s) f(s, x(s - \tau)) ds \\ & + \int_0^t U(t, s) \sigma(s) dZ^H(s), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \end{aligned}$$

3.2.3 Existence et unicité des solutions mild

Les hypothèses :

Afin d'établir les résultats principaux concernant l'existence, unicité de la solution nous supposons les conditions suivantes :

(H.1) La famille d'évolution $\{U(t, s)\}$ est exponentiellement stable, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $\beta > 0$ et $M \geq 1$ telles que :

$$\|U(t, s)\| \leq Me^{-\beta(t-s)}, \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T.$$

De plus, l'opérateur inverse $A^{-1}(t)$ est uniformément borné sur $[0, T]$, i.e. il existe $M^* > 0$ tel que :

$$\|A^{-1}(t)\| \leq M^*, \quad \forall t \in [0, T].$$

(H.2) Les fonctions $f, g : [0, T] \times X \rightarrow X$ sont continues et satisfont une condition de Lipschitz uniforme ainsi qu'une condition de croissance polynomiale :

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \vee \|g(t, x) - g(t, y)\| \leq C_1 \|x - y\|,$$

$$\|f(t, x)\|^2 \vee \|A^k(t)g(t, x)\|^2 \leq C_2(1 + \|x\|^2), \quad k = 0, 1.$$

(H.3) L'application $A(t)g(t, \cdot)$ est Lipschitz continue et il existe une constante $0 < L^* < \frac{1}{M^*}$ telle que :

$$\|A(t)g(t, x) - A(t)g(t, y)\| \leq L^* \|x - y\|, \quad \forall t \in [0, T], \quad x, y \in X.$$

De plus,

$$\lim_{t \rightarrow s} \mathbb{E} \|g(t, x(t)) - g(s, x(s))\|^2 = 0.$$

(H.4) L'opérateur $\sigma : [0, T] \rightarrow L_2^0(Y, X)$ est borné, c'est-à-dire qu'il existe $L > 0$ tel que :

$$\|\sigma(t)\|_{L_2^0(Y, X)} \leq L, \quad \forall t \in [0, T].$$

Enfin, la fonction initiale φ appartient à $C([-\tau, 0], L^2(\Omega, X))$

Lemme 3.2.1 Supposons que $\sigma : [0, T] \rightarrow L_2^0(Y, X)$ soit bornée, i.e.

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\sigma(t)\|_{L_2^0} < \infty,$$

et que $\{U(t, s), 0 \leq s \leq t \leq T\}$ soit un système d'évolution vérifiant :

$$\|U(t, s)\| \leq Me^{-\beta(t-s)}, \quad \beta > 0, M \geq 1.$$

Alors le processus :

$$X(t) = \int_0^t U(t, s)\sigma(s) dZ_H(s)$$

est bien défini et satisfait :

$$\mathbb{E}\|X(t)\|^2 \leq C_H M^2 t^{2H} \left(\sup_{t \in [0, T]} \|\sigma(t)\|_{L_2^0} \right)^2.$$

De plus,

$$X(t) \in C([0, T], L^2(\Omega, X)).$$

Preuve. On utilise la propriété d'isométrie du processus de Rosenblatt ainsi que la bornitude de σ . On obtient l'estimation suivante :

$$\mathbb{E} \left\| \int_0^t U(t, s)\sigma(s) dZ^Q(s) \right\|^2 \leq C \left(\sup_{t \in [0, T]} \|\sigma(t)\|_{L_2^0} \right)^2 t^{2H},$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de t .

Pour la continuité, soit $h > 0$. On introduit les deux termes :

$$I_1(h) = \int_0^t (U(t+h, s) - U(t, s))\sigma(s) dZ^H(s),$$

$$I_2(h) = \int_t^{t+h} U(t+h, s)\sigma(s) dZ^H(s).$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}\|I_1(h)\|^2 = \mathbb{E}\left\|\int_0^t (U(t+h,s) - U(t,s))\sigma(s) dZ^H(s)\right\|^2,$$

$$\mathbb{E}\|I_2(h)\|^2 = \mathbb{E}\left\|\int_t^{t+h} U(t+h,s)\sigma(s) dZ^H(s)\right\|^2.$$

En utilisant la continuité de $U(t,s)$, la bornitude de σ et le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}\|I_1(h)\|^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}\|I_2(h)\|^2 = 0.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left\|\int_0^{t+h} U(t+h,s)\sigma(s) dZ^H(s) - \int_0^t U(t,s)\sigma(s) dZ^Q(s)\right\|^2 \rightarrow 0.$$

Ainsi, le processus stochastique $X(t) = \int_0^t U(t,s)\sigma(s) dZ^H(s)$ est bien défini et appartient à l'espace $C([-\tau, 0], L^2(\Omega; X))$. ■

Théorème 3.2.1 *Sous les hypothèses (H.1)-(H.4), pour tout $T > 0$, l'équation (3.7) admet une unique solution mild sur $[-\tau, T]$.*

Preuve. Soit $B_T = C([-\tau, T], L^2(\Omega, X))$ l'espace de Banach muni de la norme :

$$\|x\|_{B_T} = \sup_{t \in [-\tau, T]} \mathbb{E}\|x(t)\|^2$$

On considère :

$$S_T(\varphi) = \{x \in B_T : x(s) = \varphi(s), s \in [-\tau, 0]\}.$$

On définit l'opérateur $\psi : S_T(\varphi) \rightarrow S_T(\varphi)$ par :

$$\psi(x)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-\tau, 0], \\ U(t, 0)(\varphi(0) + g(0, \varphi(-\tau))) - g(t, x(t - \tau)) \\ \quad - \int_0^t U(t, s)A(s)g(s, x(s - \tau))ds \\ \quad + \int_0^t U(t, s)f(s, x(s - \tau))ds \\ \quad + \int_0^t U(t, s)\sigma(s)dZ^H(s), & t \in [0, T]. \end{cases}$$

On écrit $\psi(x)(t) = \sum_{i=1}^5 I_i(t)$.

Chaque terme est continu dans $L^2(\Omega, X)$ grâce à la continuité de $U(t, s)$, aux hypothèses (H.1)-(H.2) et au théorème de convergence dominée. En particulier,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \|I_i(t+h) - I_i(t)\|^2 = 0.$$

Pour le terme stochastique,

$$I_5(t) = \int_0^t U(t, s)\sigma(s)dZ^H(s),$$

le Lemme 3.2.1 implique la continuité dans $L^2(\Omega, X)$, donc :

$$\psi(x) \in C([0, T], L^2(\Omega, X)).$$

Soient $x, y \in S_T(\varphi)$. En utilisant les hypothèses (H.2)-(H.3), l'inégalité de Hölder et la bornitude de $U(t, s)$, on obtient

$$\mathbb{E} \|\psi(x)(t) - \psi(y)(t)\|^2 \leq \gamma(t) \sup_{s \in [-\tau, t]} \mathbb{E} \|x(s) - y(s)\|^2,$$

avec $\gamma(0) < 1$. Il existe donc $T_1 > 0$ tel que $\gamma(T_1) < 1$, ce qui montre que ψ est une contraction sur $S_{T_1}(\varphi)$.

Par le théorème du point fixe de Banach, ψ admet un unique point fixe sur $[-\tau, T_1]$. En itérant le procédé, on obtient l'existence et l'unicité sur $[-\tau, T]$.

L'équation (3.7) admet une unique solution mild sur $[-\tau, T]$.

■

3.3 Application du processus de Rosenblatt en finance

Le processus de Rosenblatt, en raison de ses propriétés de dépendance à longue mémoire et d'autosimilarité, constitue un outil pertinent pour la modélisation de certains phénomènes financiers présentant des comportements non gaussiens.[24]

Dans cette section, nous étudions une application du processus de Rosenblatt dans le cadre de la modélisation des marchés financiers, plus précisément à travers la construction d'un modèle binaire de marché (binary market model), qui représente une approximation discrète d'un modèle continu de type Black-Scholes perturbé par un bruit de Rosenblatt.

Nous commençons par introduire le modèle de Black-Scholes dirigé par le processus de Rosenblatt. Comme d'habitude, nous considérons deux actifs : un investissement sans risque (bond) satisfaisant :

$$B_t = \int_0^t r_s B_s ds, \quad (3.8)$$

où r est une fonction déterministe dérivable, et un actif risqué (stock) dont la dynamique du prix suit l'équation stochastique :

$$S_t = S_0 + \int_0^t a_s S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dZ_s, \quad (3.9)$$

où Z est un processus de Rosenblatt, $\sigma > 0$, et a est une fonction déterministe dérivable.

Afin d'approcher ce modèle en temps continu, nous introduisons un modèle de *marché binaire* dans lequel les actifs sont échangés à des instants discrets $t_1 < t_2 < \dots$ et leurs dynamiques sont données par :

$$B_n = (1 + r_n)B_{n-1}$$

et ,

$$S_n = (a_n + (1 + X_n)) S_{n-1}$$

où B_n et S_n représentent respectivement le prix de l'actif sans risque et le prix de l'actif risqué durant la période comprise entre t_n et t_{n+1} , et r_n, a_n sont les taux d'intérêt de cette période.

Le processus $(X_n)_{n \geq 1}$ est supposé binaire, ce qui signifie qu'à chaque instant n , il peut prendre uniquement deux valeurs possibles : une valeur de baisse (down) notée d_n et une valeur de hausse (up) notée u_n , c'est-à-dire $X_n \in \{d_n, u_n\}$.

Cette structure binaire traduit donc deux mouvements possibles du marché à chaque période : une augmentation ou une diminution du prix de l'actif risqué.

De plus, pour éviter les opportunités d'arbitrage, la condition classique suivante doit être satisfaite pour tout n (voir [23]) :

$$d_n < r_n - a_n < u_n.$$

Dans ce qui suit, nous choisissons notre modèle binaire de manière à ce que le terme aléatoire X_n soit déterminé par une approximation discrète des incréments du processus de Rosenblatt :

$$X_n = \Delta Z_{\frac{n}{N}}^N \quad (3.10)$$

et

$$r_n = \frac{1}{N} r\left(\frac{n}{N}\right), \quad a_n = \frac{1}{N} a\left(\frac{n}{N}\right). \quad (3.11)$$

Ainsi, lorsque $N \rightarrow \infty$ le modèle de marché binaire converge vers le modèle de Black-Scholes donné par (3.8) et (3.9). [24]

Définition 3.3.1 (Arbitrage) *L'arbitrage est une stratégie financière permettant de réaliser un profit certain, sans investissement initial et sans risque, en exploitant des différences de prix d'un même actif sur différents marchés.*

Proposition 3.3.1 *Le modèle de marché binaire défini par les équations (3.10) et (3.11) admet des opportunités d'arbitrage. [24]*

Preuve. En utilisant la représentation :

$$X_n = f_{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) + \xi_n g_{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}),$$

où f_{n-1} dépend uniquement des variables aléatoires passées tandis que g_{n-1} désigne le coefficient associé à ξ_n , on obtient les deux états possibles du marché binaire :

$$u_n = f_{n-1} + g_{n-1}, \quad d_n = f_{n-1} - g_{n-1}.$$

Considérons la trajectoire particulière définie par $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{n-1} = 1$.

Il suffit alors d'étudier le comportement asymptotique de la quantité :

$$f_{n-1}(1, \dots, 1) - g_{n-1}(1, \dots, 1).$$

Les estimations obtenues à partir du noyau du processus de Rosenblatt permettent d'établir que :

$$f_{n-1}(1, \dots, 1) - g_{n-1}(1, \dots, 1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

Par conséquent, pour n suffisamment grand,

$$f_{n-1}(1, \dots, 1) - g_{n-1}(1, \dots, 1) > r_n - a_n.$$

Comme :

$$d_n = f_{n-1}(1, \dots, 1) - g_{n-1}(1, \dots, 1),$$

il vient que $d_n > r_n - a_n$.

Donc la condition d'absence d'arbitrage $d_n < r_n - a_n < u_n$, n'est pas satisfaite. Par suite, le modèle de marché binaire associé au processus de Rosenblatt admet des opportunités d'arbitrage. ■

Remarque 3.3.1 [24] Contrairement au mouvement brownien fractionnaire, le processus de Rosenblatt ne possède pas nécessairement la propriété de martingale lorsque $(H = \frac{1}{2})$. Par conséquent, les résultats classiques garantissant l'absence d'arbitrage ne sont plus applicables dans ce cadre. Cette particularité peut ainsi conduire à l'apparition d'opportunités d'arbitrage dans le modèle considéré.

Interprétation financière : L'introduction du processus de Rosenblatt dans le modèle

financier permet de prendre en compte les effets de mémoire à long terme dans la dynamique des prix. Contrairement au modèle classique de Black-Scholes, cette dépendance persistante entre les variations successives des actifs influence le comportement du marché et peut conduire à l'existence d'opportunités d'arbitrage

Conclusion

Au terme de ce travail, nous avons étudié le processus de Rosenblatt en tant que processus stochastique non gaussien caractérisé par l'autosimilarité, les accroissements stationnaires et la dépendance à mémoire longue. Nous avons présenté ses principaux fondements théoriques, mis en évidence ses propriétés essentielles ainsi que ses différentes représentations, puis nous avons abordé l'une de ses applications dans le domaine de la finance afin d'illustrer son intérêt dans la modélisation de phénomènes présentant une mémoire longue. Au cours de cette étude, nous avons rencontré plusieurs difficultés, notamment en ce qui concerne la simulation numérique du processus de Rosenblatt, en raison de la complexité de sa structure mathématique et de la mise en oeuvre de méthodes de simulation adaptées. Ces défis constituent néanmoins des perspectives intéressantes pour de futurs travaux de recherche, notamment à travers le développement de techniques de simulation plus performantes et l'exploration de nouvelles applications de ce processus dans différents domaines.

Bibliographie

- [1] B.Øksendal, "Stochastic differential equations." Stochastic differential equations: an introduction with applications. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003. 38-50.
- [2] P. Billingsley, Probability and measure, Wiley, 1995.
- [3] D. Charles-Philippe, Quelques théorèmes limites pour les matrices aléatoires, les processus non gaussiens et en probabilités libres. Diss. Université de Lille, 2022.
- [4] P. Coupek, T. E. Duncan and B. Pasik-Duncan, "A stochastic calculus for Rosenblatt processes." Stochastic Processes and their Applications 150 (2022): 853-885.
- [5] R. L. Dobrushin and P. Major, "Non-central limit theorems for non-linear functional of Gaussian fields." Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 50.1 (1979): 27-52.
- [6] B. Jean-Christophe, "Processus stochastique." Université de Rennes1 (2013).
- [7] E. Khalifa, Contributions à l'étude des processus de Lévy et des processus fractionnaires via le calcul de Malliavin et applications en statistique. Diss. Université Panthéon-Sorbonne-Paris I, 2009.
- [8] E. Lakhel, and A. Tlidi, "Time-dependent neutral stochastic delay partial differential equations driven by rosenblatt process in hilbert space." Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems: Theoretical Aspects and Applications. Cham: Springer International Publishing, 2018. 301-320.

- [9] L. Laurent, "Processus d'Hermite multifractionnaires: définition et premières propriétés." Séminaire de probabilités et statistique de l'Université de Lille, 2023.
- [10] M. Maejima, and C. Tudor, "Wiener integrals with respect to the Hermite process and a non-central limit theorem." *Stochastic Analysis and Applications* 25.5 (2007): 1043-1056.
- [11] V. Mark S, and M. Taqqu, "Properties and numerical evaluation of the Rosenblatt distribution." (2013): 982-1005.
- [12] S. Mohamed Eddine, *Calcul stochastique par rapport au processus de Rosenblatt*. Diss. Université 8 mai 1945 de Guelma, 2007.
- [13] O. Mouhamed Ait, Brahim Boufoussi, and El Hassan Lakhel, "Existence and stability for stochastic impulsive neutral partial differential equations driven by Rosenblatt process with delay and Poisson jumps." *Communications on Stochastic Analysis* 11.1 (2017): 7.
- [14] I. Nourdin, *Selected Aspects of Fractional Brownian Motion*. Bocconi Springer (2012).
- [15] L. Olivier, "Cours de probabilités et calcul stochastique." (2005).
- [16] B. Oumaima, *Analyse de l'erreur faible de discrétisation en temps et en particules d'équations différentielles stochastiques non linéaires au sens de McKean*. Diss. Université Paris-Est, 2020.
- [17] E. Paul, and M. Maejima, "An introduction to the theory of self-similar stochastic processes." *International Journal of Modern Physics B* 14.12n13 (2000): 1399-1420.
- [18] B. Sakina, et al. "Stochastic differential equation driven by the Rosenblatt process." *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica* 18.1 (2026): 9.
- [19] G. Samorodnitsky and M. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Variables*. Chapman and Hall, London (1994).
- [20] M. Taqqu, "Weak convergence to fractional Brownian motion and the Rosenblatt process," *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* 31 (1975): 287-302.

- [21] M. Taqqu, "A bibliographical guide to self-similar processes and long-range dependence." *Dependence in Probability and Statistics: A Survey of Recent Results*. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1986. 137-162.
- [22] M. Taqqu, "Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank." *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 50.1 (1979): 53-83.
- [23] S. Tommi, "Fractional Brownian motion, random walks and binary market models." *Finance and Stochastics* 5.3 (2001): 343-355.
- [24] S. Torres, C. A. Tudor, "Donsker type theorem for the Rosenblatt process and a binary market model." *Stochastic Analysis and Applications* 27.3 (2009): 555-573.
- [25] C. Tudor, "Analysis of the Rosenblatt process." *ESAIM: Probability and Statistics* 12 (2008): 230-257.