

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Université Abdelhafid Boussouf – Mila

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master
En: Mathématiques

Spécialité: Modélisation Mathématiques et Techniques de Décision

Étude combinatoire des nombres de Legendre-Stirling

Préparé par :

- Soltani Nabila
- Khellaf Fedwa

Soutenue le .../06/2026

devant le jury

Halim Yacine

Pr

U. Abdelhafid Boussouf, Mila

Président

Bazeniar Abdelghafour

MCA

U. Abdelhafid Boussouf, Mila

Rapporteur

Boufelgha Ibrahim

MCB

U. Abdelhafid Boussouf, Mila

Examineur

Année universitaire : 2025/2026

Remerciements

Avant tout, nous remercions Allah, le Tout-Puissant, de nous avoir accordé la santé, la volonté et la persévérance nécessaires pour mener à bien ce travail.

C'est grâce à Sa grâce et à Sa bénédiction que nous avons pu surmonter les difficultés rencontrées tout au long de ce parcours.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et notre sincère reconnaissance à notre encadreur, Monsieur le Docteur Abdelghafour Bazeniar, pour son accompagnement précieux, sa disponibilité, ses conseils judicieux, sa patience et la confiance qu'il nous a témoignée tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Ses orientations et ses remarques pertinentes ont grandement contribué à l'aboutissement de ce travail.

Nous adressons également nos vifs remerciements aux membres du jury, Monsieur le Professeur Halim Yacine et Monsieur le Docteur Boufelgha Ibrahim, qui nous font l'honneur d'examiner et d'évaluer ce mémoire. Nous leur sommes reconnaissants pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture et à l'appréciation de notre travail.

Nos remerciements s'étendent à l'ensemble des enseignants du Département de Mathématiques ainsi qu'au personnel administratif de l'Institut de Mathématiques et d'informatique pour la qualité de la formation dispensée et pour les conditions favorables qu'ils ont mises à notre disposition durant notre cursus universitaire.

Nous exprimons enfin notre gratitude à tous nos camarades, amis et proches qui nous ont soutenus et encouragés tout au long de cette expérience, ainsi qu'à toutes les personnes qui ont contribué, directement ou indirectement, à la réalisation de ce mémoire.

À toutes et à tous, nous adressons nos plus sincères remerciements.

Merci

Dédicace

L'occasion tant attendue est enfin venue de dédier ce modeste travail, fruit de plusieurs années d'efforts, de persévérance et de travail assidu, aux personnes qui me sont les plus chères. Par leur présence bienveillante, leur soutien indéfectible et leurs encouragements constants, elles ont été la source de ma motivation, de ma force et de ma détermination tout au long de mon parcours universitaire.

Je dédie ce travail :

Tout d'abord, à **Allah**, le Tout-Puissant, pour m'avoir accordé la santé, la volonté, le courage et la patience nécessaires à l'accomplissement de ce travail.

À mon très cher père, qui a toujours été à mes côtés, m'a soutenue durant toutes mes années d'études et a mis à ma disposition tous les moyens nécessaires à ma réussite.

À ma très chère mère, pour son amour inconditionnel, ses sacrifices, ses encouragements, ses précieux conseils et son soutien constant tout au long de ma vie.

À mes frères : **Alla**, **Fouad** et **Moatez**.

À mes soeurs : **Imane** et **Nihad**.

À mes chers amis, pour leur soutien, leur présence et leurs encouragements.

À mon encadreur, **Dr. Abdelghafour Bazeniar**, en témoignage de ma profonde gratitude et de mon grand respect.

FEDWA

Dédicace

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect et la reconnaissance que je porte aux personnes qui me sont les plus chères.

Je dédie ce mémoire à mes très chers parents, pour leurs sacrifices, leur soutien indéfectible et leur affection tout au long de ma vie.

À mon frère et à mes soeurs, pour leur présence et leurs encouragements.

À mes amies, en témoignage de mon estime et de mon amitié sincère.

Que Dieu leur accorde santé, bonheur et une longue vie.

NABILA

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions les nombres de Legendre-Stirling et une généralisation basée sur les structures combinatoires. Nous présentons les propriétés fondamentales de ces nombres ainsi que leurs liens avec les permutations et les fonctions génératrices. Une interprétation combinatoire en termes de triplets et s-uplets de permutations est également étudiée, permettant d'obtenir de nouvelles relations et fonctions génératrices associées.

Mots-clés : Nombres de Legendre-Stirling, nombres de Stirling, permutations, fonctions génératrices, combinatoire.

Abstract

In this thesis, we study the Legendre-Stirling numbers and a generalization based on combinatorial structures. We present their fundamental properties as well as their connections with permutations and generating functions. A combinatorial interpretation in terms of triplets and s -tuples of permutations is also studied, leading to new relations and associated generating functions.

Keywords : Legendre-Stirling numbers, Stirling numbers, permutations, generating functions, combinatorics.

ملخص

في هذه المذكرة، ندرس أعداد ليجاندر-ستيرلينغ وتعميمًا مبنيًا على البنى التوافقية. نقدّم الخصائص الأساسية لهذه الأعداد، بالإضافة إلى علاقاتها بالتباديل ودوال التوليد. كما تتم دراسة تفسير توافقي من حيث ثلاثيات و-s-مجموعات من التباديل، مما يسمح بالحصول على علاقات جديدة ودوال توليد مرتبطة بها.

الكلمات المفتاحية: أعداد ليجاندر-ستيرلينغ، أعداد ستيرلينغ، التباديل، دوال التوليد، التوافقية.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Fondements combinatoires	3
1.1 Principe de base de dénombrement	3
1.1.1 L'addition	3
1.1.2 Multiplication	4
1.1.3 Soustraction (principe d'inclusion exclusion)	4
1.2 Factorielle montante et factorielle descendante	5
1.2.1 Applications des factorielles montante et descendante	5
1.3 Coefficients binomiaux	7
1.4 Coefficients binomiaux	8
1.5 Objets combinatoire	9
1.5.1 Permutation	10
1.5.2 Partition d'un entier	14
1.6 Diagrammes de ferrers	15
1.6.1 Tableau de young	16
1.6.2 Formule des équerres	17
1.7 Fonctions symétrique	18
1.7.1 Fonctions symétriques monomiale	18
1.7.2 Fonctions symétriques élémentaires	19
1.7.3 Fonctions symétriques complètes	20
2 Fonctions génératrices et Nombres remarquables en combinatoire	21
2.1 Fonctions génératrices	22
2.1.1 Fonctions génératrices ordinaire et exponentielle	22
2.1.2 Fonction génératrice double	23
2.1.3 Techniques de construction d'une fonction génératrice	23
2.2 Nombres de Stirling	25
2.2.1 Nombres de Stirling de première espèce	25
2.2.2 Nombres de Stirling de deuxième espèce	29
2.3 Nombres et polynomes de Bell	32
2.3.1 Relation de récurrence	33
2.3.2 Fonctions génératrices	34
2.3.3 Formule de Dobinski	34

2.4	Nombres d'Euler	35
2.4.1	Interprétation combinatoire	35
2.4.2	Fonction génératrice	36
3	Des généralisation des nombres de Legendre-Stirling	37
3.1	Nombres de Legendre-Stirling de première espèce	38
3.2	Nombres de Legendre-Stirling de deuxième espèce	40
3.3	Polynômes de Legendre-Stirling	41
3.3.1	Permutation de Legendre-Stirling	42
3.4	Généralisation des nombres de Legendre-Stirling	46
3.4.1	Nombres de Legendre-Stirling associés aux triplets de per- mutations	46
3.4.2	Polynômes des nombres de Legendre-Stirling associés aux triplets de permutations	49
3.4.3	Etude combinatoire des triples de permutations	50
3.5	s -Legendre-Stirling de première espèce	54
3.5.1	Polynômes et fonctions génératrices de s -permutations . . .	56
	Conclusion générale	58

Liste des tableaux

1.1	Triangle de Pascal	8
1.2	Triangle des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}_2$	10
1.3	Tableau de Young standard	16
1.4	Tableau de Young semi-standard	17
2.1	Nombres de Stirling de première espèce	26
2.2	Nombres de Stirling de deuxième espèce.	30
2.3	Les premières valeurs des nombres de Bell.	33
3.1	Premiers nombres de Legendre-Stirling de première espèce.	38
3.2	Nombres de Legendre-Stirling de deuxième espèce.	40
3.3	premiers nombres de triplets permutation de première espèce	46

Table des figures

1.1	Une 3-permutation de [4].	12
1.2	Le diagramme de Ferrers.	16
1.3	Le diagramme de Ferrers conjugué.	16
3.1	Le triangle de Legendre-Stirling de première espèce.	41

Introduction générale

La combinatoire constitue une branche importante des mathématiques. Elles remontent à l'Antiquité et se sont développées au fil du temps. Elle comporte plusieurs domaines, dont la théorie des graphes, la théorie des ensembles et l'étude des permutations et des combinaisons. La combinatoire est vaste et diversifiée et elle occupe une place essentielle dans la résolution de ces problèmes [39].

Les nombres de Stirling sont des objets combinatoires et arithmétiques fondamentaux. C'est du mathématicien écossais James Stirling qu'ils tirent leur nom, lui qui les étudia au XVIII^e siècle. On les trouve d'abord dans son *Methodus Differentialis* [41]. Dans sa suite, Jordan les a étudiés dans le cadre de la théorie des différences finies, en donnant une exposition complète de leurs propriétés principales. Laplace et Cauchy ont donné par la suite plusieurs estimations asymptotiques et approximations relatives à ces nombres. Nielsen puis beaucoup d'autres ont poursuivi ces travaux et ont contribué au développement de la théorie des nombres de Stirling sous ses différentes formes et généralisations. [12, 31]

Dans ce contexte, les nombres de Legendre-Stirling apparaissent comme une généralisation remarquable des nombres de Stirling classiques. Introduits initialement dans l'étude des puissances des opérateurs différentiels associés aux polynômes de Legendre [16], ils possèdent de nombreuses propriétés analogues à celles des nombres de Stirling tout en présentant des caractéristiques combinatoires plus riches. L'étude de ces nombres a conduit au développement de nouvelles interprétations combinatoires, de relations de récurrence, de fonctions génératrices ainsi que de diverses structures énumératives associées.

L'objectif principal de ce mémoire est d'explorer les aspects combinatoires des nombres de Legendre-Stirling et de mettre en évidence les différentes structures qui leur sont liées. Nous nous intéressons particulièrement aux interprétations combinatoires de ces nombres, à leurs propriétés fondamentales ainsi qu'aux techniques énumératives permettant leur étude. Une attention particulière est également accordée aux permutations de Legendre-Stirling et à certaines de leurs généralisations, qui constituent aujourd'hui un domaine de recherche actif en combinatoire algébrique. Dans la dernière partie de ce travail, nous proposons une généralisation des permutations de Legendre-Stirling en introdui-

sant les triple Legendre-Stirling permutations. Cette extension permet d'élargir le cadre combinatoire classique et conduit à l'obtention de nouvelles familles de coefficients, de relations de récurrence et de fonctions génératrices. Les résultats obtenus constituent une contribution à l'étude combinatoire de cette classe de permutations et ouvrent la voie à de futures recherches dans ce domaine.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux notions fondamentales de la combinatoire nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Nous rappelons les principes fondamentaux du dénombrement, les factorielles et les coefficients binomiaux, puis nous introduisons les principaux objets et structures combinatoires, notamment les permutations, les partitions et les fonctions symétriques. Ces concepts constituent le cadre théorique indispensable pour les développements présentés dans les chapitres suivants.

Le deuxième chapitre porte sur des outils analytiques fondamentaux en combinatoire, notamment les fonctions génératrices, qui permettent de représenter et d'étudier les suites numériques. Nous introduisons ensuite les nombres combinatoires remarquables tels que les nombres de Stirling de première et de deuxième espèce, les nombres de Bell et les nombres d'Euler. Nous présentons leurs propriétés principales, leurs relations de récurrence, leurs interprétations combinatoires.

Le troisième chapitre étudie les différentes généralisations des nombres de Legendre-Stirling. Après un rappel des propriétés fondamentales et des principales structures combinatoires associées aux nombres de Legendre-Stirling, nous nous intéressons aux généralisations obtenues à partir des triplets de permutations, en examinant les nombres, les polynômes et les interprétations combinatoires correspondants. Nous terminons ce chapitre par l'étude d'une généralisation de première espèce liée aux s -uplets de permutations, ainsi que par l'analyse des polynômes et des fonctions génératrices qui leur sont associés.

Fondements combinatoires

L'objectif de ce chapitre est de présenter les notions combinatoires de base nécessaires à la compréhension des notions abordées dans les chapitres suivants. Nous introduisons d'abord les principes fondamentaux du dénombrement, puis les factorielles et les coefficients binomiaux. Ensuite, nous étudions plusieurs structures combinatoires classiques telles que les permutations, les partitions d'entiers et les tableaux de Young. Enfin, nous terminons ce chapitre par une introduction aux fonctions symétriques, qui constituent un outil essentiel dans l'étude des polynômes et des fonctions génératrices en combinatoire.

1.1 Principe de base de dénombrement

Pour approfondir les notions abordées dans cette section et explorer les aspects théoriques, le lecteur pourra se référer aux travaux de [3, 35, 12, 18].

1.1.1 L'addition

Définition 1.1.1 Soit S un ensemble fini et soient $S_1, S_2, \dots, S_n$ des sous-ensembles de S tels que :

1. $\bigcup_{i=1}^n S_i = S$,
2. $S_i \cap S_j = \emptyset$, pour tout $i \neq j$.

On dit alors que les ensembles $S_1, S_2, \dots, S_n$ forment une partition de l'ensemble S .

Principe combinatoire de la somme : Si un ensemble S peut être divisé en plusieurs parties disjointes $S_1, S_2, \dots, S_m$, alors le nombre d'éléments dans S est égal à la somme du nombre d'éléments dans chaque partie :

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_m \tag{1.1}$$

Autrement dit, pour compter le nombre d'éléments possibles dans un ensemble, on peut décomposer le problème en cas mutuellement exclusifs, puis additionner les résultats pour chaque cas.

1.1.2 Multiplication

Définition 1.1.2 Soient S_1 et S_2 deux ensembles, on définit le produit cartésien $S_1 \times S_2$ comme étant :

$$S_1 \times S_2 = \{(a, b) \mid a \in S_1 \text{ et } b \in S_2\}.$$

Exemple 1.1.1 Si $S_1 = \{1, 2, 3\}$ alors,

$$S_1 \times S_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Principe combinatoire de la produit : Si $S_1, S_2, \dots, S_n$ des ensembles finis. Alors le nombre total de façons de sélectionner un élément dans chacun de ces ensembles successivement est égal au produit du nombre d'éléments de chaque ensemble :

$$|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot \dots \cdot |S_n|. \quad (1.2)$$

Ceci revient à dire que s'il y a n_1 façons de compléter la tâche s_1 et n_2 façons de compléter la tâche $s_2 \dots$ et n_n façons de compléter la tâche s_n , alors il y a $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_n$ façons de compléter toutes les tâches.

Remarque 1.1.1 Dans un produit cartésien, l'ordre d'un couple (a, b) est important ; les couples (a, b) et (b, a) sont différents.

1.1.3 Soustraction (principe d'inclusion exclusion)

Le principe d'inclusion-exclusion est une méthode de dénombrement permettant de calculer le nombre d'éléments satisfaisant simultanément ou non certaines propriétés.

Cas de deux ensembles : Soit A un ensemble fini, et soient A_1 et A_2 deux sous-ensembles de A . Le principe d'inclusion-exclusion permet de déterminer le cardinal de l'intersection de leurs complémentaires en soustrayant de $|A|$ les cardinaux de A_1 et A_2 , puis en réincluant le cardinal de leur intersection :

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |A| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| \quad (1.3)$$

Généralisation : Ce principe se généralise à une famille de n sous-ensembles $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$. En définissant S_k comme la somme des cardinaux de toutes les intersections de k sous-ensembles distincts, la formule s'écrit de manière alternative :

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = |A| - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^k S_k + \cdots + (-1)^n S_n \quad (1.4)$$

Exemple 1.1.2 Dans une classe de 30 étudiants :

- 18 étudient l'anglais,
- 12 étudient l'espagnol,
- 5 étudient les deux langues.

On cherche le nombre d'étudiants qui n'étudient ni l'anglais ni l'espagnol.

On applique le principe d'inclusion-exclusion : $30 - 18 - 12 + 5 = 5$.

Ainsi, il y a 5 étudiants qui n'étudient aucune des deux langues.

1.2 Factorielle montante et factorielle descendante

Soient x un nombre réel ou complexe et n un entier positif, on définit la factorielle montante de x d'ordre n , notée $x^{\overline{n}}$ [25], par :

$$x^{\overline{0}} = 1, \quad x^{\overline{n}} = x(x+1) \cdots (x+n-1), \quad \text{si } n \geq 1. \quad (1.5)$$

et la factorielle descendante de x d'ordre n , notée $x^{\underline{n}}$, par :

$$x^{\underline{0}} = 1, \quad x^{\underline{n}} = x(x-1) \cdots (x-n+1), \quad \text{si } n \geq 1. \quad (1.6)$$

D'une manière équivalente, on appelle la factorielle montante généralisée de x d'ordre n et de coefficient p ($p \in \mathbb{N}$), le polynôme

$$(x|p)^{\overline{n}} = 1, \quad (x|p)^{\overline{n}} = x(x+p) \cdots (x+(n-1)p), \quad n \geq 1. \quad (1.7)$$

Et la factorielle descendante généralisée de x d'ordre n et de coefficient p ($p \in \mathbb{N}$), le polynôme

$$(x|p)^{\underline{n}} = 1, \quad (x|p)^{\underline{n}} = x(x-p) \cdots (x-(n-1)p), \quad n \geq 1. \quad (1.8)$$

La relation entre la factorielle montante et la factorielle descendante est donnée par :

$$x^{\overline{n}} = (-1)^n (-x)^{\underline{n}}.$$

1.2.1 Applications des factorielles montante et descendante

Les factorielles montante et descendante jouent un rôle fondamental en combinatoire énumérative, notamment dans l'étude des nombres de Stirling.

Utilisation de la factorielle montante dans les nombres de Stirling de première espèce

Les nombres de Stirling de première espèce $c(n, k)$ apparaissent dans le développement de la factorielle montante :

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n c(n, k) x^k.$$

Ces nombres comptent le nombre de permutations de $[n]$ ayant exactement k cycles.

Exemple 1.2.1 Pour $n = 3$, $x^{\bar{3}} = x(x + 1)(x + 2)$.

En développant : $x^{\bar{3}} = x^3 + 3x^2 + 2x$.

Ainsi,

$$c(3, 3) = 1, \quad c(3, 2) = 3, \quad c(3, 1) = 2.$$

On obtient alors :

$$x^{\bar{3}} = c(3, 3)x^3 + c(3, 2)x^2 + c(3, 1)x.$$

Utilisation de la factorielle descendante dans les nombres de Stirling de deuxième espèce

Les nombres de Stirling de deuxième espèce $S(n, k)$ interviennent dans le développement des puissances ordinaires en fonction des factorielles descendantes :

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) x^{\underline{k}}.$$

Les nombres $S(n, k)$ comptent le nombre de partitions d'un ensemble de n éléments en k sous-ensembles non vides.

Exemple 1.2.2 Pour $n = 3$,

$$x^3 = S(3, 1)x^{\underline{1}} + S(3, 2)x^{\underline{2}} + S(3, 3)x^{\underline{3}}.$$

Or,

$$S(3, 1) = 1, \quad S(3, 2) = 3, \quad S(3, 3) = 1.$$

Donc,

$$x^3 = x + 3x(x - 1) + x(x - 1)(x - 2).$$

En développant le membre de droite, on retrouve : $x^3 = x^3$.

Ces développements montrent l'importance des factorielles montantes et descendantes dans l'étude des nombres de Stirling et des structures combinatoires.

1.3 Coefficients binomiaux

Définition 1.3.1 Soit $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$. Le coefficient binomial est le nombre noté $\binom{n}{k}$ qui égale de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble de n éléments. La formule explicite est donnée par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{si } k > n \text{ ou } k < 0. \end{cases}$$

Ces coefficients apparaissent dans le développement de $(a + b)^n$ appelée relation du binôme de Newton qui a été découvert par Issac Newton (1646-1727) en 1676, où a et b sont des nombres réels ou complexe.

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^k b^{n-k}. \quad (1.9)$$

Exemple 1.3.1 1. Pour $n = 3$, on écrit la formule comme suit :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

2. Si $a = 1$ et $b = 1$, on trouve :

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Remarque 1.3.1 1. $\binom{n}{0} = 1$ car l'ensemble vide est l'unique sous-ensemble à zéro élément.

2. $\binom{n}{n} = 1$ car l'ensemble lui-même est l'unique sous-ensemble à n éléments.

3. Si $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$ car il est impossible de choisir k éléments parmi un ensemble contenant seulement n éléments.

Proposition 1.3.1 (Formule de Pascal) Le coefficient binomial satisfait la relation de récurrence suivante :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \quad (1.10)$$

Preuve. $\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles de $[n]$ de cardinalité k . Ce nombre est la somme du nombre de sous-ensembles de $[n]$ de cardinalité k qui contiennent le nombre n , et du nombre de sous-ensembles de $[n]$ de cardinalité k qui ne contiennent pas le nombre n .

1. Le nombre de sous-ensembles qui contiennent n est $\binom{n-1}{k-1}$ (car si on enlève n , il reste $n - 1$ éléments et il faut choisir $k - 1$).
2. Le nombre de sous-ensembles qui ne contiennent pas n est $\binom{n-1}{k}$.

Donc, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. ■

Proposition 1.3.2 (Formule de Vandermonde ou Chu-Vandermonde) *Le coefficient binomial satisfait la relation suivante :*

$$\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n}{0} \binom{m}{k} + \binom{n}{1} \binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k} \binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}. \quad (1.11)$$

À partir de la formule de Pascal, nous pouvons construire le triangle de Pascal. Voir la Table 1.1.

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

TABLE 1.1 – Triangle de Pascal

1.4 Coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux constituent une extension naturelle des coefficients binomiaux classiques. Ils sont définis comme suit.

Soient $s \geq 1$ et $n \geq 0$ deux entiers. Pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, sn\}$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}_s$ est défini comme étant le coefficient de x^k dans le

développement :

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^s)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k}_s x^k. \quad (1.12)$$

On a

$$\binom{n}{k}_1 = \binom{n}{k}$$

(où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial classique), et

$$\binom{n}{k}_s = 0 \quad \text{pour } k > sn \text{ ou } k < 0.$$

Une expression en fonction des coefficients binomiaux classiques est donnée par :

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j_1 + j_2 + \cdots + j_s = k} \binom{n}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-1}}{j_s}. \quad (1.13)$$

Ces coefficients vérifient les propriétés suivantes :

Symétrie

$$\binom{n}{k}_s = \binom{n}{sn - k}_s. \quad (1.14)$$

Relation de récurrence longitudinale

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^s \binom{n-1}{k-m}_s. \quad (1.15)$$

Relation de récurrence diagonale

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^s \binom{n}{m} \binom{k-m}{n-m}_{s-1}. \quad (1.16)$$

Ces coefficients permettent de construire une généralisation du triangle de Pascal, appelée le *s-triangle de Pascal*.

1.5 Objets combinatoire

En combinatoire, un objet combinatoire est une structure discrète ou dénombrable que l'on construit à partir d'un ensemble d'éléments en respectant des

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	3	2	1	
3	1	3	6	7	6	3
4	1	4	10	16	19	16
5	1	5	15	30	45	51

TABLE 1.2 – Triangle des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}_2$

règles de configurations bien précises.

1.5.1 Permutation

Pour approfondir les notions abordées dans cette section et explorer les aspects théoriques, le lecteur pourra se référer aux travaux de [6, 9, 22, 21, 32, 38, 13].

Définition 1.5.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Une permutation d'ordre n est une application bijective σ d'un ensemble E dans lui-même, où $|E| = n$. L'ensemble de toutes les permutations de E est noté S_E . Le cardinal de S_E est $n!$. Dans le cas particulier où $E = \{1, \dots, n\}$, on le note simplement S_n .

Notation 1.5.1 La notation standard d'une permutation place sur une première ligne les éléments dans leur ordre naturel et sur une deuxième ligne les images correspondantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Exemple 1.5.1 Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Le nombre de permutations de E est $3! = 6$. On a alors $[3] = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$. Par exemple, on choisit une permutation σ de $[3]$ et on l'écrit sous forme matricielle :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.5.1 -La permutation identité, notée σ_I , est la permutation qui conserve chaque élément à sa position initiale :

$$\sigma_I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

-Le produit de deux permutations σ_1 et σ_2 est défini par la composition des applications :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

-Pour déterminer l'inverse d'une permutation, il suffit d'échanger les éléments du domaine avec leurs images. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.5.2 Soit $\sigma \in S_n$. On définit les deux ensembles suivants :

$$\text{Supp}(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) \neq i\},$$

$$\text{Fix}(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) = i\}.$$

L'ensemble $\text{Supp}(\sigma)$ est appelé le support de la permutation σ , tandis que $\text{Fix}(\sigma)$ désigne l'ensemble des points fixes de σ .

Exemple 1.5.2 Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\text{Supp}(\sigma) = \{1, 2, 4, 6\}, \quad \text{Fix}(\sigma) = \{3, 5\}.$$

Orbites, Décomposition en cycles

Définition 1.5.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in M_n$. Pour tout $x \in [n]$, on appelle orbite de x sous l'action de σ l'ensemble :

$$O(x) = \{\sigma^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Autrement dit, l'orbite de x est constituée de tous les éléments obtenus en appliquant un nombre quelconque de fois la permutation σ (ou son inverse) à x .

Exemple 1.5.3 Considérons la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 7 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

— Pour l'élément 1 : $\sigma(1) = 5$, $\sigma^2(1) = \sigma(5) = 6$, $\sigma^3(1) = \sigma(6) = 3$, $\sigma^4(1) = \sigma(3) = 1$. Donc l'orbite de 1 est

$$O(1) = \{1, 3, 5, 6\} = O(3) = O(5) = O(6).$$



FIGURE 1.1 – Une 3-permutation de $[4]$.

- Pour l'élément 2 : $\sigma(2) = 2$ et donc $\sigma^k(2) = 2$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. L'orbite de 2 est un singleton : $O(2) = \{2\}$.
- Pour l'élément 4 : $\sigma(4) = 7$ et $\sigma^2(4) = \sigma(7) = 4$. L'orbite de 4 (ou de 7) est $O(4) = \{4, 7\}$.

Ainsi, la permutation σ possède exactement trois orbites :

$$O(1) = \{1, 3, 5, 6\}, \quad O(2) = \{2\}, \quad O(4) = \{4, 7\}.$$

Définition 1.5.4 une permutation σ de taille n est appelée cycle si tous les éléments de $[n]$ appartiennent à la même orbite.

Exemple 1.5.4 la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

peut être écrite

$$\sigma = (1, 2)(3)(4).$$

Cette représentation est appelée écriture en cycles. Nous conviendrons d'appeler k -permutation toute permutation ayant k cycles.

- Remarque 1.5.2**
1. Le nombre de permutations de $[n]$ à un cycle de longueur n égale $(n - 1)!$.
 2. Le nombre de permutations de $[n]$ composées de k cycles disjoints égale au nombre de Stirling de première espèce $c(n, k)$.

Transpositions

Définition 1.5.5 Une transposition est une permutation qui échange exactement deux éléments d'un ensemble fini, tous les autres éléments restant fixes. Elle correspond à un cycle de longueur 2.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (24).$$

Remarque 1.5.3 Toute permutation de S_n peut s'écrire comme un produit fini de transpositions. Cette écriture n'est pas unique.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (135)(24) = (13)(35)(24).$$

Définition 1.5.6 Une permutation est dite paire si elle peut être écrite comme produit d'un nombre pair de transpositions, et impaire dans le cas contraire.

Inversions

Définition 1.5.7 Soit σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$. Un couple (i, j) est appelé une inversion si $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. Le nombre d'inversions est noté $\text{inv}(\sigma)$.

Exemple 1.5.5 Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Les inversions sont :

$$(5, 3), (5, 2), (5, 4), (5, 1), (3, 2), (3, 1), (2, 1), (4, 1)$$

Donc $\text{inv}(\sigma) = 8$.

Remarque 1.5.1 Les nombres mahoniens comptent les permutations de $[n]$ ayant exactement k inversions.

Descente

Définition 1.5.8 Soit $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. On appelle descente de σ tout indice $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. L'ensemble des descentes de σ est noté : $\text{Des}(\sigma) = \{i \in \{1, \dots, n-1\} \mid \sigma(i) > \sigma(i+1)\}$.

Exemple 1.5.6 Soit la permutation $\sigma = (3, 1, 4, 2)$.

On a :

$$3 > 1 \Rightarrow i = 1 \text{ est une descente,}$$

$$1 < 4 \Rightarrow \text{pas de descente en } i = 2,$$

$$4 > 2 \Rightarrow i = 3 \text{ est une descente.}$$

Ainsi :

$$\text{Des}(\sigma) = \{1, 3\}, \quad |\text{Des}(\sigma)| = 2.$$

Remarque 1.5.2 Les nombres d'Euler $A(n, k)$ comptent le nombre de permutations de $[n]$ ayant exactement k descentes.

1.5.2 Partition d'un entier

Les fondements théoriques et les notions détaillés qui structurent cette section s'appuient largement sur la littérature suivante [22, 2, 26].

Définition 1.5.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une partition de n en m parties est une suite finie d'entiers strictement positifs $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, telle que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = n.$$

On note :

- $\lambda \vdash n$: une partition (partage) de n ,
- λ_i : les parts de λ ,
- $l(\lambda) = l$: la longueur de la partition λ ,
- $\mathcal{P}(n)$: l'ensemble des partitions de n ,
- $p(n)$: le nombre de partitions de n ,
- $p(n, k)$: le nombre de partitions de n avec exactement k parts.

Exemple 1.5.7 Les partitions de l'entier 5 sont les suivantes :

$$(5), \quad (4, 1), \quad (3, 2), \quad (3, 1, 1), \quad (2, 2, 1), \quad (2, 1, 1, 1), \quad (1, 1, 1, 1, 1).$$

avec des longueurs respectives de 1, 2, 2, 3, 3, 4 et 5. On en déduit que :

$$p_1(5) = 1, \quad p_2(5) = 2, \quad p_3(5) = 2, \quad p_4(5) = 1, \quad p_5(5) = 1,$$

où $p_m(5)$ désigne le nombre de partitions de 5 en exactement m parties.

Partitions remarquables

On peut considérer des classes particulières de partitions en imposant des conditions supplémentaires sur les parts λ_i d'une partition.

1. **Partitions à parts toutes distinctes** : On note $P(D, n)$ le nombre de partitions de n dont toutes les parts sont deux à deux différentes. Par exemple :

$$P(D, 7) = 5, \quad P(D, 5) = 2, \quad P(D, 4) = 3.$$

2. **Partitions en exactement k parts** : On note $P(n, k)$ le nombre de partitions de n comportant exactement k parts.

$$P(n, k) = P(n - 1, k - 1) + P(n - k, k), \quad (1.17)$$

avec la condition initiale : $P_0(0) = 1$.

Interprétation combinatoire : On distingue deux cas disjoints :

- **Cas 1 :** une des parts est égale à 1. En supprimant cette part, on obtient une partition de $n - 1$ en $k - 1$ parts, ce qui donne $P(n - 1, k - 1)$ possibilités.
- **Cas 2 :** toutes les parts sont supérieures ou égales à 2. En soustrayant 1 à chaque part, on obtient une partition de $n - k$ en k parts, ce qui donne $P(n - k, k)$ possibilités.

Exemple 1.5.8 On considère $P(5, 2)$, c'est-à-dire le nombre de partitions de l'entier 5 en 2 parts positives. $P(5, 2) = P(4, 1) + P(3, 2)$ On calcule : $P(4, 1) = 1$ et $P(3, 2) = 1$ Donc : $P(5, 2) = 2$

3. **Partitions en parts impaires :** On note $P(I, n)$ le nombre de partitions de n dont toutes les parts sont impaires. Par exemple :

$$P(I, 7) = 5, \quad P(I, 5) = 2, \quad P(I, 4) = 3.$$

Remarque 1.5.4 Toute partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ de l'entier n est en correspondance bijective avec une suite $(m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $\sum_{i=1}^n i m_i = n$. La partition peut alors s'écrire sous la forme multiplicative : $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}$, où m_i désigne la multiplicité de la part i .

Exemple : La partition $\lambda = (8, 6, 5, 5, 1, 1, 1)$ de 27 s'écrit :

$$\lambda = 1^3 2^0 3^0 4^0 5^2 6^1 7^0 8^1 9^0 \dots 27^0.$$

1.6 Diagrammes de ferrers

Pour une analyse plus détaillée et exhaustive, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de [22, 29, 34]

Définition 1.6.1 Un diagramme de Ferrers F pour une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ de n est défini comme une collection de n points dans le plan avec des coordonnées entières (i, j) , telles que :

$$(i, j) \in F \quad \text{si et seulement si} \quad 1 \leq j \leq k \text{ et } 1 \leq i \leq \lambda_j.$$

On note :

$$F = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq \lambda_j, 1 \leq j \leq k\}.$$

Définition 1.6.2 La partition conjuguée d'une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ est la partition dont le diagramme de Ferrers représente les colonnes du diagramme correspondant à λ . La notation multiplicative de la partition conjuguée est donnée par :

$$1^{\lambda_1 - \lambda_2} 2^{\lambda_2 - \lambda_3} \dots (k-1)^{\lambda_{k-1} - \lambda_k} k^{\lambda_k}.$$

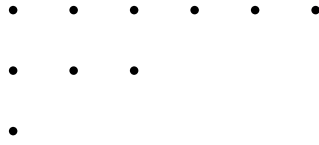


FIGURE 1.2 – Le diagramme de Ferrers.

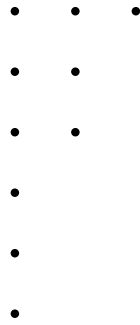


FIGURE 1.3 – Le diagramme de Ferrers conjugué.

Exemple 1.6.1 Le diagramme de Ferrers associé à la partition $\lambda = (6, 3, 1)$ et à la partition conjuguée $\tilde{\lambda} = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$ pour $n = 10$ est le suivant :

1.6.1 Tableau de young

Définition 1.6.3 Une fonction $T : Y(\lambda) \rightarrow [n]$ est une représentation d'un tableau de Young d'une partition λ qui prend des valeurs dans $[n]$, où (i, j) correspond à $T(i, j) = T_{i,j}$. On construit un tableau de Young à partir du diagramme de Young en remplissant ses cases avec des éléments de l'ensemble $[n]$. L'indexation se fait ainsi :

$$T = \{T(i, j) \mid 1 \leq i \leq l(\lambda), 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Exemple 1.6.2 Le tableau de Young pour $n = 13$ et $\lambda = (5, 4, 4, 2, 2)$ est :

12	13			
10	11			
6	7	8	9	
1	2	3	4	5

TABLE 1.3 – Tableau de Young standard

Définition 1.6.4 1) Un tableau de Young est dit semi-standard si les entiers placés dans ses cases sont ordonnés de manière croissante le long de chaque ligne et strictement croissante le long de chaque colonne. Autrement dit, pour tout couple d'indices (i, j) , on a

$$T(i, j) \leq T(i, j + 1) \quad \text{et} \quad T(i, j) < T(i + 1, j).$$

2) Un tableau de Young est dit standard s'il est semi-standard et si chacun des éléments de l'ensemble $[n]$ apparaît exactement une seule fois dans le tableau.

Exemple 1.6.3 Tableau de Young semi-standard pour $n = 13$ et $\lambda = (5, 4, 2, 2)$ sont :

8	8			
4	4			
2	2	12	7	
1	1	3	4	9

TABLE 1.4 – Tableau de Young semi-standard

1.6.2 Formule des équerres

Définition 1.6.5 [23] L'équerre associée à une case (i, j) d'un diagramme est l'ensemble $H_{i,j}$ formé par la case (i, j) elle-même, ainsi que par toutes les cases du diagramme situées sur la même ligne à droite de celle-ci et sur la même colonne en dessous d'elle.

La longueur de l'équerre issue de la case (i, j) est notée $h_{i,j}$ et correspond au nombre total de cases appartenant à $H_{i,j}$, c'est-à-dire

$$h_{i,j} = |H_{i,j}|.$$

Théorème 1.6.1 (Formule des équerres) Soient $n \in \mathbb{N}$ et λ une partition de n . Alors, le nombre de tableaux de Young de forme λ est donné par la formule suivante :

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{i,j}},$$

où le produit porte sur toutes les cases (i, j) du diagramme de Ferrers de forme λ .

Exemple 1.6.4 Pour la partition $(3, 2)$, on obtient les longueurs des équerres suivantes

4	3	1
2	1	

On a donc

$$f^{(3,2)} = \frac{5!}{4 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1} = 5.$$

Ainsi, il existe 5 tableaux de Young standards de forme $(3, 2)$.

1.7 Fonctions symétrique

Pour une analyse plus détaillée et exhaustive, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de [5, 10, 11, 22, 33]

Définition 1.7.1 Soit $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction de n variables. On dit que f est une fonction symétrique si elle est invariante par toute permutation de ses variables. Autrement dit, pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}). \quad (1.18)$$

Exemple 1.7.1 1. Soit la fonction

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1.$$

On a

$$f(x_2, x_1) = x_2^3 x_1 + x_1^3 x_2 = f(x_1, x_2),$$

donc f est symétrique.

2. Soit la fonction

$$h(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1^2.$$

Condition d'existence : On suppose que h est définie sur un domaine D stable par permutation des variables, c'est-à-dire que

$$(x_1, x_2) \in D \implies (x_2, x_1) \in D.$$

Alors

$$h(x_2, x_1) = x_2 x_1 + x_2^2 \neq x_1 x_2 + x_1^2 = h(x_1, x_2).$$

Donc h n'est pas symétrique.

1.7.1 Fonctions symétriques monomiale

Définition 1.7.2 Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ une partition telle que $\ell \leq n$. On appelle fonction symétrique monomiale associée à λ le polynôme m_λ défini par

$$m_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\alpha} x^\alpha, \quad (1.19)$$

où $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ et la somme porte sur toutes les permutations distinctes de λ .

Exemple 1.7.2 Pour $n = 4$, on a :

$$m_1(4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

$$\begin{aligned} m_{11}(4) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \\ m_2(4) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \\ m_{1111}(4) &= 0. \end{aligned}$$

Proposition 1.7.1 Pour tout $k \geq 0$, l'ensemble $\{m_\lambda \mid \lambda \vdash k\}$ des fonctions symétriques monomiales forme une base de Z_k . De plus, on a

$$\dim Z_k = P(k),$$

où $P(k)$ désigne le nombre de partitions de k .

1.7.2 Fonctions symétriques élémentaires

Définition 1.7.3 On appelle la k -ième fonction symétrique élémentaire la fonction définie par

$$e_k^{(n)} = e_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \cdots \lambda_n^{i_n}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (1.20)$$

avec $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{0, 1\}$.

Exemple 1.7.3 Pour une équation de degré 3 ($n = 3$) de racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, on a

$$e_k^{(3)} = e_k(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{cases} e_0 = 1, \\ e_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ e_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \\ e_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{cases}$$

Proposition 1.7.2 Soit $e_k^{(n)}$ la fonction symétrique élémentaire, on a :

$$e_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} e_{k-1}^{(n)} + e_k^{(n)}$$

et

$$e_k^{(n)} = \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)} + \lambda_{n-1} e_{k-1}^{(n-2)} + \cdots + \lambda_{n-i} e_{k-1}^{(n-i-1)} + \cdots + \lambda_k e_k^{(k-1)}.$$

Proposition 1.7.3 Les fonctions symétriques élémentaires peuvent également être définies comme les coefficients du développement en série formelle :

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k^{(n)} z^k = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i z),$$

avec $e_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0$ pour $k > n$.

1.7.3 Fonctions symétriques complètes

Définition 1.7.4 On appelle fonction symétrique complète de degré k , associée aux variables $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, la fonction définie par :

$$h_k^{(n)} = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n}, \quad (1.21)$$

où $i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.7.4 Pour une équation de degré 3 ($n = 3$, les racines : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$), on a :

$$h_k^{(3)} = \begin{cases} h_0 = 1, \\ h_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ h_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \\ h_3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_2^2\lambda_1 + \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_3^2\lambda_1 + \lambda_3^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{cases}$$

Proposition 1.7.4 Soit $h_k^{(n)}$ la fonction symétrique complète, on a :

1. $h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)},$
2. $h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1}^k + \lambda_{n+1}^{k-1} h_1^{(n)} + \lambda_{n+1}^{k-2} h_2^{(n)} + \dots + \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n)} + h_k^{(n)}.$

Proposition 1.7.5 Soient $E(z)$ et $H(z)$ deux fonctions symétriques élémentaire et complète respectivement. Alors on a

$$E(-z) \times H(z) = 1.$$

Chapitre 2

Fonctions génératrices et Nombres remarquables en combinatoire

Ce chapitre est consacré aux fonctions génératrices, un outil fondamental pour appréhender la complexité des suites numériques. Nous explorerons ensuite les nombres de Stirling ainsi que les nombres de Bell, indissociables de la théorie des partitions, avant de conclure par une étude des nombres d'Euler et de leurs propriétés remarquables.

2.1 Fonctions génératrices

On peut voir une fonction génératrice comme un moyen élégant de regrouper toute une suite de nombres dans une seule expression. Plus formellement, il s'agit d'une série formelle dont les coefficients appartiennent au corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour manipuler ces objets, on utilise une notation très pratique : si l'on considère la série

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n,$$

on note simplement par $[x^n]f(x) = a_n$ pour extraire le coefficient associé au terme x^n , pour plus de détails voir [25, 8, 43]. Notons que l'ensemble des séries formelles à coefficients dans un corps forme un anneau vis-à-vis des opérations classiques d'addition et de multiplication.

2.1.1 Fonctions génératrices ordinaire et exponentielle

Définition 2.1.1 Soit A un anneau commutatif, ayant un élément unité. Les séries formelles à coefficients a_n dans A , et en l'indéterminée x , sont les expressions suivantes :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

La série formelle $f(x)$ s'appelle fonction génératrice ordinaire.

La série formelle $g(x)$ s'appelle fonction génératrice exponentielle.

Exemple 2.1.1 Soit

$$\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

On voit bien que $\exp(x)$ est une fonction génératrice exponentielle de la suite constante $a_n = 1$.

Exemple 2.1.2 — La fonction génératrice ordinaire de la suite $(1, 1, 1, \dots)$ est :

$$G(X) = \sum_{n=0}^{\infty} X^n = 1 + X + X^2 + X^3 + \dots = \frac{1}{1-X}.$$

— La fonction génératrice ordinaire de la suite (2^n) est :

$$G(X) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n X^n = 1 + 2X + 2^2 X^2 + \dots + 2^n X^n = \frac{1}{1-2X}.$$

Proposition 2.1.1 Soient $A(X)$ la fonction génératrice ordinaire de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $B(X)$ la fonction génératrice ordinaire de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors :

1. $A(X) + B(X)$ est la FGO de $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. $XA(X)$ est la FGO de $(0, a_0, a_1, a_2, \dots)$.
3. $A'(X)$ est la FGO de $(0, a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$.
4. $A(X)B(X)$ est la FGO de $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.
5. $(1 - X)A(X)$ est la FGO de $(a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, \dots)$.
6. $\int_0^X A(t) dt$ est la FGO de $(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots)$.
7. $\frac{A(X) - a_0}{X}$ est la FGO de $(a_1, a_2, a_3, \dots)$.
8. $\frac{A(X)}{1 - X}$ est la FGO de $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$.

2.1.2 Fonction génératrice double

Définition 2.1.2 Les fonctions génératrices double ordinaire et exponentielle de la suite $(a_{n,m})$ avec $n, m \in \mathbb{N}$ sont données respectivement par :

$$f(t, x) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m \geq 0} a_{n,m} t^m \right) x^n, \quad (2.1)$$

et

$$g(t, x) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m \geq 0} a_{n,m} \frac{t^m}{m!} \right) \frac{x^n}{n!}. \quad (2.2)$$

2.1.3 Techniques de construction d'une fonction génératrice

Construire une fonction génératrice consiste à associer à une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ une série formelle qui encode les termes de la suite sous forme de coefficients. Les étapes principales sont les suivantes [43] :

1. **Identifier la suite** : déterminer la relation de récurrence ou une formule explicite de la suite (a_n) .
2. **Choisir le type de fonction génératrice** :
 - Fonction génératrice ordinaire :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

— Fonction génératrice exponentielle :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

3. **Manipuler la série** : utiliser les opérations sur les séries formelles : addition, produit, dérivation, intégration.
4. **Chercher une forme fermée** : simplifier la fonction génératrice afin de faciliter l'extraction des coefficients a_n .

Méthode 1 : Par analyse directe de la suite

On écrit directement la série à partir de l'expression explicite de a_n .

Par exemple, soit la suite $a_n = n$. Alors FGO se construit comme suit,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

Méthode 2 : Par relation de récurrence

Lorsque la suite (a_n) dénombre une famille d'objets combinatoires (chemins, partitions, configurations, etc.), la fonction génératrice est obtenue en associant à chaque objet de taille n le terme $a_n x^n$. On utilise la relation de récurrence pour construire une équation sur la fonction génératrice.

Exemple 2.1.3 Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par la relation de récurrence,

$$a_0 = 1, \quad a_n = 2a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

On a $A(x)$ s'écrit comme suit,

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

En multipliant cette série par $2x$, on obtient,

$$2xA(x) = 2a_0x + 2a_1x^2 + 2a_2x^3 + \dots$$

D'après la relation de récurrence $a_n = 2a_{n-1}$, on déduit que,

$$A(x) - 2xA(x) = a_0.$$

Comme $a_0 = 1$, il évident que,

$$A(x)(1 - 2x) = 1.$$

Par conséquent,

$$A(x) = \frac{1}{1 - 2x}.$$

2.2 Nombres de Stirling

2.2.1 Nombres de Stirling de première espèce

Les nombres de Stirling de première espèce représentent un outil essentiel en combinatoire énumérative. La richesse de leurs propriétés combinatoires ainsi que leurs nombreuses applications dans divers domaines des mathématiques en font un sujet d'étude particulièrement important. Leur analyse contribue de manière significative au développement des aspects théoriques et appliqués des mathématiques discrètes, pour plus de détails voir [28, 18, 41].

Définition 2.2.1 Les nombres de Stirling de première espèce (non-signés) $c(n, k)$ comptent le nombre de permutations de $[n]$ ayant exactement k cycles.

Exemple 2.2.1 Considérons l'ensemble $[3] = \{1, 2, 3\}$. Les permutations de $[3]$ et leurs décompositions en cycles sont :

$$(1)(2)(3), \quad (1\ 2)(3), \quad (1\ 3)(2), \quad (2\ 3)(1), \\ (1\ 2\ 3), \quad (1\ 3\ 2).$$

On observe que :

- la permutation $(1)(2)(3)$ possède 3 cycles ;
- les permutations $(1\ 2)(3)$, $(1\ 3)(2)$ et $(2\ 3)(1)$ possèdent chacune 2 cycles ;
- les permutations $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$ possèdent chacune 1 cycle.

Par conséquent,

$$c(3, 3) = 1, \quad c(3, 2) = 3, \quad c(3, 1) = 2.$$

Remarque 2.2.1 Dans la littérature, les nombres de Stirling de première espèce sont souvent notés par

$$s(n, k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Remarque 2.2.2 Les nombres de Stirling de première espèce signés et non-signés sont liés par la relation suivante :

$$s(n, k) = (-1)^{n+k} c(n, k). \quad (2.15)$$

Proposition 2.2.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

1. $s(n, 0) = 0$ et $s(n, n) = 1$.
2. $s(n, 1) = (-1)^{n-1} (n-1)!$.
3. $\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$.
4. $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$

Relation de récurrence

Le sens combinatoire des nombres de Stirling de première espèce est relatif à l'ensemble des permutations d'un ensemble fini.

Théorème 2.2.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, avec $k \leq n$, le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments qui possèdent exactement k cycles est donné par $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$.*

Preuve. On applique le principe de l'élément distingué en considérant le dernier élément a_n de l'ensemble $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Deux cas sont à envisager :

Cas 1 : a_n est un point fixe. Dans cette situation, on dénombre les permutations de $[n-1]$ comportant $k-1$ cycles, ce qui correspond à $c(n-1, k-1)$.

Cas 2 : a_n n'est pas un point fixe. Dans ce cas, l'élément a_n est inséré dans un cycle d'une permutation de $[n-1]$ ayant exactement k cycles. Cette insertion peut se faire de $n-1$ manières différentes, d'où le terme $(n-1)c(n-1, k)$.

Par conséquent, le nombre de permutations de $[n]$ en k cycles satisfait la relation de récurrence suivante :

$$c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k). \quad (2.3)$$

avec les conditions initiales :

$$c(0, 0) = 1 \quad \text{et} \quad c(n, 0) = 0 \text{ pour } n > 0.$$

■

À partir de cette relation de récurrence, on peut construire le triangle des nombres de Stirling de première espèce, de forme analogue à celui de Pascal.

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	2	3	1				
4	0	6	11	6	1			
5	0	24	50	35	10	1		
6	0	120	274	225	85	15	1	
7	0	720	1767	1624	735	175	21	1

TABLE 2.1 – Nombres de Stirling de première espèce

Définition 2.2.2 *Les nombres de Stirling de première espèce sont les nombres qui apparaissent comme coefficients dans le développement de la factorielle croissante $x^{\overline{n}}$ selon les*

puissances de x , c'est-à-dire

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n c(n, k) x^k, \quad (2.4)$$

où

$$x^{\bar{n}} = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1).$$

Fonction génératrice

Les fonctions génératrices constituent un outil fondamental en combinatoire. Elles permettent de traduire des problèmes de dénombrement en problèmes analytiques, facilitant ainsi l'étude des suites numériques. Pour les nombres de Stirling de première espèce, on distingue principalement la fonction génératrice ordinaire et la fonction génératrice exponentielle. En raison de la nature de ces nombres, leur fonction génératrice ordinaire possède une expression relativement complexe.

Théorème 2.2.2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=k}^{\infty} s(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}. \quad (2.5)$$

Preuve. On détermine de deux façons différentes le développement (formel) de la fonction $f(x, y) = (1+x)^y$ en série de Taylor en y .

D'une part, d'après la formule du binôme généralisée, on a :

$$(1+x)^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} x^n$$

où $y^n = y(y-1) \cdots (y-n+1)$.

Or,

$$y^n = \sum_{k=0}^n s(n, k) y^k,$$

donc :

$$(1+x)^y = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n s(n, k) y^k \right) \frac{x^n}{n!}.$$

En inversant les sommes :

$$(1+x)^y = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} s(n, k) \frac{x^n}{n!} \right) y^k. \quad (1)$$

D'autre part, en utilisant l'exponentielle :

$$(1+x)^y = \exp(y \ln(1+x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} y^k. \quad (2)$$

En identifiant les coefficients de y^k dans (1) et (2), on obtient :

$$\sum_{n=k}^{\infty} s(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}.$$

Ce qui prouve le résultat. ■

Formule explicite

Théorème 2.2.3 Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, on a :

$$s(n, k) = (-1)^{n+k} \frac{n!}{k!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 1 \\ n_1 + \dots + n_k = n}} \frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_k}. \quad (2.6)$$

Preuve. On part de la fonction génératrice donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} s(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}.$$

On développe :

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} x^m.$$

Donc :

$$(\ln(1+x))^k = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} x^m \right)^k.$$

En développant ce produit, on obtient :

$$(\ln(1+x))^k = \sum_{n \geq k} \left(\sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n \\ n_i \geq 1}} \frac{(-1)^{(n_1 + \dots + n_k) + k}}{n_1 \cdots n_k} \right) x^n.$$

Comme $n_1 + \dots + n_k = n$, cela donne :

$$(\ln(1+x))^k = \sum_{n \geq k} (-1)^{n+k} \left(\sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n \\ n_i \geq 1}} \frac{1}{n_1 \dots n_k} \right) x^n.$$

En divisant par $k!$ et en identifiant avec :

$$\sum_{n=k}^{\infty} s(n, k) \frac{x^n}{n!},$$

on obtient :

$$s(n, k) = (-1)^{n+k} \frac{n!}{k!} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n \\ n_i \geq 1}} \frac{1}{n_1 \dots n_k}.$$

Ce qui prouve le résultat. ■

2.2.2 Nombres de Stirling de deuxième espèce

La notation des nombres de Stirling de deuxième espèce s'est progressivement imposée au cours du XIXe siècle avec le développement de l'analyse combinatoire. Aujourd'hui, la notation $S(n, k)$ est universellement adoptée pour désigner le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k sous-ensembles non vides. Cette normalisation a contribué à unifier la présentation de ces nombres dans la littérature mathématique et à faciliter l'étude de leurs propriétés combinatoires et algébriques, [42, 25].

Définition 2.2.3 *Le nombre de partitions de l'ensemble $[n]$ en k blocs est appelé le nombre de Stirling de deuxième espèce et est noté $S(n, k)$.*

Relation de récurrence et interprétation combinatoire

Les nombres de Stirling de deuxième espèce $S(n, k)$ vérifient la relation de récurrence suivante :

$$S(n, k) = k S(n-1, k) + S(n-1, k-1), \quad (2.7)$$

pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$, avec les conditions initiales :

$$S(0, 0) = 1, \quad S(n, 0) = 0, \quad S(0, k) = 0.$$

Preuve. Soit E un ensemble de n éléments et soit $x \in E$ un élément fixé.

- **Premier cas** : l'élément x forme un sous-ensemble à lui seul. Dans ce cas, on partitionne les $n - 1$ éléments restants en $k - 1$ sous-ensembles, ce qui donne :

$$S(n - 1, k - 1).$$

- **Deuxième cas** : l'élément x appartient à l'un des k sous-ensembles existants. On partitionne d'abord les $n - 1$ éléments en k sous-ensembles, puis on choisit l'un des k blocs pour y ajouter x , ce qui donne :

$$k S(n - 1, k).$$

■

En combinant les deux cas, on obtient la relation de récurrence. En se servant de la relation de récurrence (2.7), on obtient le tableau des premières valeurs des nombres de Stirling de deuxième espèce :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

TABLE 2.2 – Nombres de Stirling de deuxième espèce.

Définition 2.2.4 Les nombres de Stirling de deuxième espèce, notés $S(n, k)$, sont définis comme les coefficients apparaissant dans le développement de la puissance ordinaire x^n sur la base des factorielles décroissantes. Plus précisément,

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) x^{\underline{k}}, \quad (2.8)$$

où

$$x^{\underline{k}} = x(x - 1)(x - 2) \cdots (x - k + 1)$$

désigne la factorielle décroissante d'ordre k .

Exemple 2.2.2 Pour $n = 4$, la relation (2.8) donne

$$x^4 = S(4, 1)x^{\underline{1}} + S(4, 2)x^{\underline{2}} + S(4, 3)x^{\underline{3}} + S(4, 4)x^{\underline{4}}.$$

Comme

$$S(4, 1) = 1, \quad S(4, 2) = 7, \quad S(4, 3) = 6, \quad S(4, 4) = 1,$$

on obtient

$$x^4 = x^1 + 7x^2 + 6x^3 + x^4.$$

Cet exemple illustre le rôle des nombres de Stirling de deuxième espèce comme coefficients de changement de base entre les puissances ordinaires et les factorielles décroissantes.

Formules explicites

Théorème 2.2.4 Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, les nombres de Stirling de seconde espèce admettent la formule explicite suivante :

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Preuve. On part de la fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}.$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$(e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i e^{(k-i)x}.$$

Donc :

$$\frac{(e^x - 1)^k}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i e^{(k-i)x}.$$

Or, on sait que :

$$e^{(k-i)x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k-i)^n x^n}{n!}.$$

Ainsi :

$$\frac{(e^x - 1)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \right) \frac{x^n}{n!}.$$

En identifiant avec :

$$\sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{x^n}{n!},$$

on obtient :

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Ce qui prouve le résultat. ■

Fonctions génératrices

Les $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ ont pour fonction génératrice double :

$$\sum_{n, k \geq 0} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \frac{x^n}{n!} u^k = \exp(u(e^x - 1)). \quad (2.9)$$

Pour fonction génératrice ordinaire :

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{n-k} = \prod_{j=0}^k \frac{1}{1-jx}. \quad (2.10)$$

Et pour fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}. \quad (2.11)$$

2.3 Nombres et polynômes de Bell

Les nombres de Bell et les polynômes de Bell sont des outils mathématiques fondamentaux en combinatoire. Ils permettent de compter les façons de regrouper des objets. Pour les lecteurs qui sont intéressés voir [30, 36].

Définition 2.3.1 Pour tout entier $n > 1$, les nombres de Bell, notés Φ_n , sont le nombre total de partitions de l'ensemble $[n]$. Ils sont également définis comme étant la somme des nombres de Stirling de deuxième espèce :

$$\Phi_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}.$$

Exemple 2.3.1 $\Phi_0 = 1$, car la seule partition de $\emptyset$ est $\{\emptyset\}$.

$\Phi_1 = 1$, car la seule partition de $\{1\}$ est $\{\{1\}\}$.

$\Phi_2 = 2$, car les partitions de $\{1, 2\}$ sont

$$\{\{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1, 2\}\}\}.$$

$\Phi_3 = 5$, car les partitions de $[1, 3]$ sont

$$\{\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}\}.$$

2.3.1 Relation de récurrence

Les nombres de Bell vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\phi_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k.$$

Pour établir cette relation, considérons un entier $n \geq 0$ et dénombrons les partitions de l'ensemble $[n + 1]$. Soit k le nombre d'éléments de $[n]$ appartenant au même bloc que l'élément $n + 1$ pour $0 \leq k \leq n$. Le choix de ces k éléments parmi les n éléments de $[n]$ peut être effectué de $\binom{n}{k}$ façons. Une fois ce bloc fixé, il reste $n - k$ éléments à partitionner. Par définition des nombres de Bell, le nombre de partitions possibles de ces $n - k$ éléments est égal à ϕ_{n-k} . Par conséquent, pour une valeur donnée de k , le nombre de partitions de $[n + 1]$ est $\binom{n}{k} \phi_{n-k}$. En sommant sur toutes les valeurs possibles de k , on obtient

$$\phi_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_{n-k}.$$

En effectuant le changement d'indice $j = n - k$, il vient

$$\phi_{n+1} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} \phi_j.$$

Comme $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$, on en déduit finalement la relation de récurrence

$$\phi_{n+1} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \phi_j.$$

Les premières valeurs de ces nombres sont données dans le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ϕ_n	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975	678570	4213597

TABLE 2.3 – Les premières valeurs des nombres de Bell.

2.3.2 Fonctions génératrices

Les fonctions génératrices exponentielle et ordinaire des nombres de Bell sont données respectivement par :

$$\sum_{n \geq 0} \phi_n \frac{x^n}{n!} = \exp(e^x - 1),$$

$$\sum_{n \geq 0} \phi_n x^n = \sum_{k \geq 0} x^k \prod_{j=0}^k (1 - jx)^{-1}.$$

2.3.3 Formule de Dobinski

On a la formule de Dobinski suivante :

$$\phi_n = \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}.$$

Une autre formule explicite, donnée par B.N. Guo et F. Qi [27], en termes de fonction hypergéométrique de Kummer et des nombres de Stirling de deuxième espèce :

$$\phi_n = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} {}_1F_1(k+1; 2; 1). \quad (2.12)$$

Les polynômes de Bell $\phi_n(x)$ sont définis par :

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k. \quad (2.13)$$

Ces polynômes sont appelés les polynômes de Bell à une seule variable ou polynômes exponentiels.

La fonction génératrice exponentielle pour ces polynômes est la suivante :

$$\sum_{n \geq 0} \phi_n(x) \frac{z^n}{n!} = \exp(x(e^z - 1)). \quad (2.14)$$

Les premiers polynômes de Bell sont :

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= 1, & \phi_1(x) &= x, & \phi_2(x) &= x + x^2, \\ \phi_3(x) &= x + 3x^2 + x^3, & \phi_4(x) &= x + 7x^2 + 6x^3 + x^4. \end{aligned}$$

2.4 Nombres d'Euler

Pour approfondir les notions abordées dans cette section et explorer les aspects théoriques, le lecteur pourra se référer aux travaux de [30, 39, 20]

Définition 2.4.1 Pour tous entiers $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n - 1$, le nombre eulérien $A(n, k)$ est défini comme étant le nombre de permutations σ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ ayant exactement k descentes, c'est-à-dire le nombre d'indices i tels que $\sigma(i) > \sigma(i + 1)$.

Exemple 2.4.1 Considérons $n = 3$. Les permutations de S_3 sont :

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

Calculons le nombre de descentes pour chacune :

- $(1, 2, 3)$: 0 descente
- $(1, 3, 2)$: 1 descente
- $(2, 1, 3)$: 1 descente
- $(2, 3, 1)$: 1 descente
- $(3, 1, 2)$: 1 descente
- $(3, 2, 1)$: 2 descentes

Ainsi, on obtient :

$$A(3, 0) = 1, \quad A(3, 1) = 4, \quad A(3, 2) = 1.$$

2.4.1 Interprétation combinatoire

Les nombres eulériens permettent de classifier les permutations selon leur nombre de descentes. Ainsi, pour un entier n fixé, l'ensemble des permutations S_n est partitionné en classes disjointes selon le nombre de descentes. Autrement dit, $A(n, k)$ représente le nombre de permutations de n éléments ayant exactement k descentes. Ces nombres satisfont la relation de récurrence suivante :

$$A(n, k) = (n - k) A(n - 1, k - 1) + (k + 1) A(n - 1, k), \quad (2.15)$$

Pour $1 \leq n$ et $0 \leq k \leq n - 1$, avec la condition initiale : $A(1, 0) = 1$.

Preuve.

Cette relation admet une interprétation combinatoire naturelle en termes de construction des permutations de S_n à partir de celles de S_{n-1} , en étudiant l'évolution du nombre de descentes lors de l'insertion de l'élément n .

- **Premier cas :** On considère une permutation de S_{n-1} possédant exactement k descentes. Une telle permutation se décompose en $k + 1$ segments croissants. Lors de l'insertion de l'élément n , il est possible de l'insérer dans l'une des $k + 1$ positions de fin de ces segments sans créer de

nouvelle descente. Ainsi, le nombre de descentes reste inchangé, Ce qui donne $:(k + 1)A(n - 1, k)$.

- **Deuxième cas :** On considère maintenant une permutation de S_{n-1} possédant $k - 1$ descentes. L'insertion de l'élément n peut alors augmenter le nombre de descentes d'une unité, en créant exactement une nouvelle descente. Le nombre de positions admissibles pour une telle insertion est égal à $n - k$, ce qui correspond aux positions où l'élément n engendre une nouvelle rupture dans la structure croissante de la permutation, Ce qui donne $:(n - k)A(n - 1, k - 1)$.

■

2.4.2 Fonction génératrice

Les nombres eulériens admettent une fonction génératrice exponentielle donnée par :

$$\sum_{n \geq 0} A_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1 - x}{e^{t(1-x)} - x}.$$

Cette fonction génératrice constitue un outil puissant pour dériver plusieurs propriétés des nombres eulériens. Ces nombres $A(n, k)$ possèdent plusieurs propriétés importantes :

- Positivité :

$$A(n, k) \geq 0, \quad \forall n \geq 1, 0 \leq k \leq n - 1.$$

- Somme des nombres eulériens :

$$\sum_{k=0}^{n-1} A(n, k) = n!.$$

- Symétrie :

$$A(n, k) = A(n, n - 1 - k), \quad 0 \leq k \leq n - 1.$$

- Structure combinatoire riche : Chaque $A(n, k)$ compte le nombre de permutations de n éléments ayant exactement k descentes.

Des généralisation des nombres de Legendre-Stirling

Dans ce chapitre, nous étudions les nombres de Legendre–Stirling en tant que généralisation des nombres de Stirling classiques, en mettant en évidence leurs principales propriétés algébriques et combinatoires. Nous présentons leurs définitions pour les deux types, ainsi que leurs relations de récurrence et leurs conditions initiales.

Nous nous intéressons également aux polynômes associés à ces nombres et à leur organisation en triangles combinatoires, tout en analysant leurs propriétés essentielles. Enfin, nous proposons une généralisation de ces nombres en élargissant leur structure, afin d’obtenir des résultats plus profonds en analyse combinatoire.

3.1 Nombres de Legendre-Stirling de première espèce

Andrews et Littlejohn [1] introduisent les nombres de Legendre–Stirling de première espèce $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ à travers la relation génératrice suivante :

$$\langle x \rangle_n = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j} \left[\begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right] x^j, \quad (3.1)$$

où

$$\langle x \rangle_j = x(x-2)(x-6) \cdots (x-(j-1)j),$$

comme défini précédemment. Toutefois, aucune autre propriété relative à ces nombres n'a été donnée. Dans cette section, nous établissons une définition récursive des nombres $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$, ainsi que de proposer une interprétation combinatoire de ces nombres.

Définition 3.1.1 Pour tout $n, k \in \mathbb{Z}$, on note $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ les nombres de Legendre-Stirling (sans signe) de première espèce, donnés par les conditions initiales :

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \delta_{n,0}, \quad \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ k \end{smallmatrix} \right] = \delta_{k,0}, \quad (3.2)$$

et la relation de récurrence :

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] + n(n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right], \quad (n, k \in \mathbb{Z}). \quad (3.3)$$

Cette récurrence permet de construire le tableau suivant :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	2	1				
3	0	12	8	1			
4	0	144	108	20	1		
5	0	2880	2304	508	40	1	
6	0	86400	72000	17544	1708	70	1

TABLE 3.1 – Premiers nombres de Legendre-Stirling de première espèce.

Exemple 3.1.1 On considère le nombre de Legendre-Stirling de première espèce : $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]$

D'après la relation de récurrence :

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Or on a : } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1, \quad \text{Donc : } \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 + 6 = 8$$

Les nombres de Stirling de première espèce comptent les permutations de $[n]$ ayant exactement k cycles. Nous terminons cette section par une interprétation combinatoire des nombres de Legendre-Stirling de première espèce. À cet effet, on appelle maxima de cycle d'une permutation les éléments maximaux de chacun de ses cycles. À titre d'exemple, pour la permutation $\pi = (5)(4, 6, 1)(9, 2, 3)(7, 8)(10) \in S_{10}$, exprimée en notation cyclique, les maxima de cycle sont 5, 6, 8, 9 et 10.

Définition 3.1.2 Soit (π_1, π_2) un couple de permutations de Legendre-Stirling de taille n . On note que :

1. Le nombre de cycles de π_1 est exactement supérieur de un à celui de π_2 .
2. Les maxima de cycle de π_1 qui sont inférieurs à $n + 1$ coïncident exactement avec les maxima de cycle de π_2 .

Théorème 3.1.1 Soient $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq n$. Le nombre de couples de permutations de Legendre-Stirling (π_1, π_2) de taille n , tels que la permutation π_2 possède exactement k cycles, est égal au nombre de Legendre-Stirling de première espèce $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

Preuve. Soit $a_{n,k}$ le nombre de couples de permutations de Legendre-Stirling (π_1, π_2) de taille n tels que π_2 possède exactement k cycles. On a

$$a_{n,0} = \delta_{n,0} \quad \text{et} \quad a_{0,k} = \delta_{0,k}.$$

Il suffit donc de montrer que, pour $n > 0$ et $k > 0$,

$$a_{n,k} = n(n-1)a_{n-1,k} + a_{n-1,k-1}.$$

On distingue deux cas selon la position de l'élément 1.

- *Premier cas :* 1 est un point fixe de π_2 . D'après la définition, cela équivaut à dire que 1 est aussi un point fixe de π_1 . En supprimant 1 et en réindexant les éléments restants, on obtient un couple de taille $n - 1$ dans lequel π_2 possède $k - 1$ cycles. Réciproquement, toute telle configuration permet de reconstruire un couple de taille n en ajoutant 1 comme point fixe. On obtient ainsi $a_{n-1,k-1}$ possibilités.
- *Deuxième cas :* 1 n'est pas un point fixe de π_2 . On part alors d'un couple de taille $n - 1$ dans lequel π_2 possède k cycles. L'élément 1 peut être

inséré dans les cycles de π_1 et π_2 de $n(n-1)$ façons tout en respectant les conditions imposées. On obtient ainsi $n(n-1)a_{n-1,k}$ couples.

En combinant les deux cas, on obtient la relation de récurrence annoncée. ■

3.2 Nombres de Legendre-Stirling de deuxième espèce

Définition 3.2.1 Les nombres de Legendre-Stirling de la deuxième espèce sont notés : $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ et sont définis par :

Conditions initiales

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = \delta_{n,0}, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \delta_{k,0}. \quad (3.4)$$

Relation de récurrence

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k(k+1) \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}, \quad (n, k \in \mathbb{Z}). \quad (3.5)$$

Cette récurrence permet de construire le tableau suivant :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	2	1				
3	0	4	8	1			
4	0	8	52	20	1		
5	0	16	320	292	40	1	

TABLE 3.2 – Nombres de Legendre-Stirling de deuxième espèce.

Définition 3.2.2 Soit $n \geq 1$. On considère l'ensemble

$$[n]_2 = \{1_1, 1_2, 2_1, 2_2, \dots, n_1, n_2\},$$

qui contient deux copies distinguées de chaque entier de 1 à n . Une partition de Legendre-Stirling de $[n]_2$ en k blocs est une partition de $[n]_2$ en $k+1$ blocs vérifiant les conditions suivantes :

1. Un bloc est distingué et appelé bloc zéro.
2. Le bloc zéro peut être vide, tandis que les autres blocs sont non vides.
3. Le bloc zéro ne contient jamais les deux copies d'un même entier.

4. Chaque bloc non nul contient les deux copies du plus petit entier qu'il contient, mais ne contient pas les deux copies des autres éléments.

Le nombre de telles partitions est appelé nombre de Legendre–Stirling de deuxième espèce et est noté $\left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \right\}$.

Exemple 3.2.1 Pour $n = 3$ et $k = 1$, on a

$$[3]_2 = \{1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2\}.$$

Le bloc non nul contient 1_1 et 1_2 , ainsi qu'une seule copie de 2 et une seule copie de 3. Les partitions possibles sont :

$$\{\{2_1, 3_1\}, \{1_1, 1_2, 2_2, 3_2\}\} \quad \{\{2_1, 3_2\}, \{1_1, 1_2, 2_2, 3_1\}\},$$

$$\{\{2_2, 3_1\}, \{1_1, 1_2, 2_1, 3_2\}\} \quad \{\{2_2, 3_2\}, \{1_1, 1_2, 2_1, 3_1\}\}.$$

Ainsi,

$$\left\{ \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right\} = 4.$$

3.3 Polynômes de Legendre–Stirling

On peut naturellement disposer les nombres de Legendre–Stirling de première espèce sous forme triangulaire ; la Figure au dessous illustre les cinq premières lignes de ce triangle. Nous présentons dans cette section certaines propriétés élémentaires des suites situées parallèlement aux côtés supérieurs droits de ce triangle.

1				
2	1			
12	8	1		
144	108	20	1	
2880	2304	508	40	1

FIGURE 3.1 – Le triangle de Legendre–Stirling de première espèce.

Théorème 3.3.1 Pour tout entier $k \geq 0$, l'expression $\left\| \begin{matrix} n-1 \\ n-k-1 \end{matrix} \right\|$ définit un polynôme en n de degré $3k$, dont le coefficient dominant est $\frac{1}{3^k k!}$. On note ce polynôme $g_k(n)$. De plus,

pour tout $k \geq 1$ et tout entier n , il vérifie la relation de récurrence :

$$g_k(n) = g_k(n-1) + (n-1)(n-2)g_{k-1}(n-1). \quad (3.6)$$

Sous la condition,

$$g_k(0) = g_k(1) = \dots = g_k(k) = g_k(k+1) = 0. \quad (3.7)$$

Preuve. Par définition, on a $\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ n-k-1 \end{smallmatrix} \right]$. En utilisant la relation de récurrence des nombres de Legendre-Stirling de première espèce

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] + n(n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right],$$

on remplace n par $n-1$ et k par $n-k-1$. Ainsi,

$$\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ n-k-1 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} n-2 \\ n-k-2 \end{smallmatrix} \right] + (n-1)(n-2) \left[\begin{smallmatrix} n-2 \\ n-k-1 \end{smallmatrix} \right].$$

Or, d'après la définition de $g_k(n)$, on reconnaît

$$\left[\begin{smallmatrix} n-2 \\ n-k-2 \end{smallmatrix} \right] = g_k(n-1), \quad \text{et} \quad \left[\begin{smallmatrix} n-2 \\ n-k-1 \end{smallmatrix} \right] = g_{k-1}(n-1).$$

Par conséquent,

$$g_k(n) = g_k(n-1) + (n-1)(n-2)g_{k-1}(n-1).$$

■

3.3.1 Permutation de Legendre-Stirling

Nous passons maintenant à l'étude de la fonction génératrice de $g_k(n)$, qui est donnée par

$$G_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_k(n) x^n. \quad (3.8)$$

D'après (3.7) et des résultats classiques concernant les fonctions génératrices rationnelles (voir [17, Cor. 4.6], par exemple), il existe des entiers $B_{k,j}$ tels que

$$G_k(x) = \frac{x^{k+1} \sum_{j=1}^{2k-1} B_{k,3k-2-j} x^j}{(1-x)^{3k+1}}. \quad (3.9)$$

Dans cette section, nous donnons une interprétations combinatoires de $B_{k,j}$. Nous commençons par une relation de récurrence pour $G_k(x)$, que nous utilisons pour obtenir une relation de récurrence pour $B_{k,j}$.

Théorème 3.3.2 On a :

$$G_1(x) = \frac{1}{1-x} \quad (3.10)$$

et, pour tout $k \geq 1$,

$$G_k(x) = \frac{x^3}{1-x} \frac{d^2}{dx^2} (G_{k-1}(x)). \quad (3.11)$$

Preuve. On part de la relation de récurrence :

$$g_k(n) = g_k(n-1) + (n-1)(n-2) g_{k-1}(n-1), \quad (n \geq 1).$$

On multiplie chaque membre par x^n et on somme pour $n \geq 1$:

$$\sum_{n \geq 1} g_k(n) x^n = \sum_{n \geq 1} g_k(n-1) x^n + \sum_{n \geq 1} (n-1)(n-2) g_{k-1}(n-1) x^n.$$

On traite chaque somme séparément.

1. Premier terme :

$$\sum_{n \geq 1} g_k(n-1) x^n = x \sum_{n \geq 1} g_k(n-1) x^{n-1} = x \sum_{m \geq 0} g_k(m) x^m = x G_k(x).$$

2. Deuxième terme : Posons $m = n-1$, alors

$$\sum_{n \geq 1} (n-1)(n-2) g_{k-1}(n-1) x^n = x \sum_{m \geq 0} m(m-1) g_{k-1}(m) x^m.$$

Or, on utilise l'identité classique :

$$\sum_{m \geq 0} m(m-1) a_m x^m = x^2 A''(x), \quad \text{où } A(x) = \sum_{m \geq 0} a_m x^m.$$

Donc :

$$\sum_{m \geq 0} m(m-1) g_{k-1}(m) x^m = x^2 G_{k-1}''(x).$$

Ainsi, le deuxième terme devient :

$$x \cdot x^2 G_{k-1}''(x) = x^3 G_{k-1}''(x).$$

On obtient :

$$G_k(x) - g_k(0) = xG_k(x) + x^3 G''_{k-1}(x).$$

Or, pour $k \geq 1$, on a $g_k(0) = 0$, donc :

$$G_k(x) = xG_k(x) + x^3 G''_{k-1}(x).$$

On isole $G_k(x)$:

$$(1 - x)G_k(x) = x^3 G''_{k-1}(x),$$

d'où :

$$G_k(x) = \frac{x^3}{1 - x} G''_{k-1}(x).$$

Enfin, pour $k = 1$, on vérifie directement que :

$$G_1(x) = \sum_{n \geq 0} g_1(n)x^n = \frac{1}{1 - x}.$$

■

Définition 3.3.1 Pour tout entier $n \geq 1$, on considère le multi-ensemble

$$M_n = \{1, 1, \bar{1}, 2, 2, \bar{2}, \dots, n, n, \bar{n}\},$$

dans lequel chaque entier $j \in \{1, \dots, n\}$ apparaît trois fois : deux occurrences non barrées et une occurrence barrée. Une permutation de Legendre–Stirling de taille n est une permutation π de M_n telle que, pour tous indices $i < j < k$, si $\pi(i) = \pi(k)$ correspondent aux deux occurrences non barrées d'un même entier, alors $\pi(j) > \pi(i)$. Par ailleurs, une descente de π est tout indice i , avec $1 \leq i \leq 3n$, tel que $i = 3n$ ou bien $\pi(i) > \pi(i + 1)$.

Théorème 3.3.3 Le nombre de permutations de Legendre–Stirling de M_k ayant exactement j descentes est égal à $B_{k,j}$.

Preuve. Soit $b_{k,j}$ le nombre de permutations de Legendre–Stirling de M_k ayant exactement j descentes, il suffit de montrer que $b_{k,j}$ satisfait la même relation de récurrence et les mêmes conditions initiales que $B_{k,j}$. Les deux seules permutations de Legendre–Stirling de M_1 sont $\bar{1}11$ et $11\bar{1}$, chacune possède une seule descente, donc $b_{1,j} = 2\delta_{j,1}$.

Supposons maintenant $k > 1$. Toute permutation de Legendre–Stirling de M_k peut être construite en choisissant une permutation de Legendre–Stirling de M_{k-1} , en insérant $\bar{k}$ entre deux entrées, puis en insérant le couple kk entre deux entrées de cette nouvelle permutation. On peut obtenir une permutation ayant exactement j descentes de quatre façons. La première façon consiste à choisir une permutation de M_{k-1} ayant j descentes, à insérer $\bar{k}$ immédiatement après une descente, puis à insérer kk immédiatement après une descente ou immédiatement avant $\bar{k}$. Dans

ce cas, il existe $b_{k-1,j}$ choix pour la permutation initiale, j façons d'insérer $\bar{k}$, et $j+1$ façons d'insérer kk . La deuxième façon consiste à choisir une permutation de M_{k-1} ayant $j-1$ descentes, à insérer $\bar{k}$ immédiatement après une descente, et à insérer kk immédiatement après une non-descente, mais pas immédiatement à gauche de $\bar{k}$. Dans ce cas, il existe $b_{k-1,j-1}$ choix pour la permutation initiale, $j-1$ façons d'insérer $\bar{k}$, et $3k-1-j$ façons d'insérer kk . La troisième façon consiste à choisir une permutation de M_{k-1} ayant $j-1$ descentes, à insérer $\bar{k}$ immédiatement après une non-descente, puis à insérer kk immédiatement après une descente ou immédiatement à gauche de $\bar{k}$. Dans ce cas, il existe $b_{k-1,j-1}$ façons de choisir la permutation initiale, $3k-1-j$ façons d'insérer $\bar{k}$, et $j+1$ façons d'insérer kk . La quatrième façon consiste à choisir une permutation de M_{k-1} ayant $j-2$ descentes, à insérer $\bar{k}$ immédiatement après une non-descente, puis à insérer kk immédiatement après une non-descente, mais pas immédiatement à gauche de $\bar{k}$. Dans ce cas, il existe $b_{k-1,j-2}$ façons de choisir la permutation initiale, $3k-j$ façons d'insérer $\bar{k}$, et $3k-1-j$ façons d'insérer kk . En combinant tous ces cas, on obtient :

$$b_{k,j} = j(j+1)b_{k-1,j} + 2j(3k-1-j)b_{k-1,j-1} + (3k-j)(3k-1-j)b_{k-1,j-2},$$

. ■

Exemple 3.3.1 *Considérons le multi-ensemble*

$$M_2 = \{1, 1, \bar{1}, 2, 2, \bar{2}\}.$$

En appliquant la relation de récurrence

$$B_{k,j} = j(j+1)B_{k-1,j} + 2j(3k-1-j)B_{k-1,j-1} + (3k-j)(3k-1-j)B_{k-1,j-2},$$

avec les conditions initiales

$$B_{1,1} = 2, \quad B_{1,0} = B_{1,2} = 0,$$

on obtient

$$B_{2,1} = 4, \quad B_{2,2} = 24, \quad B_{2,3} = 12.$$

Par conséquent,

$$(B_{2,1}, B_{2,2}, B_{2,3}) = (4, 24, 12).$$

Ces coefficients correspondent au nombre de permutations de Legendre–Stirling de taille 2 possédant respectivement 1, 2 et 3 descentes, ce qui illustre la validité de la relation de récurrence précédente.

3.4 Généralisation des nombres de Legendre-Stirling

3.4.1 Nombres de Legendre-Stirling associés aux triplets de permutations

Dans la suite de notre travail, nous passons des paires de permutations aux triplets de permutations. Cette généralisation permet d'enrichir la structure combinatoire considérée et d'introduire de nouveaux paramètres d'analyse.

Définition 3.4.1 Pour tout $n, k \in \mathbb{Z}$, on note $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ les nombres de Legendre-Stirling (sans signe) de première espèce, donnés par les conditions initiales :

$$\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = \delta_{n,0}, \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ k \end{Bmatrix} = \delta_{k,0}, \quad \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{pour } k > n. \quad (3.12)$$

et la relation de récurrence :

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + n(n-1)(n+1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}, \quad (n, k \in \mathbb{Z}). \quad (3.13)$$

Cette récurrence permet de construire le tableau suivant :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	0	6	1			
3	0	144	30	1		
4	0	8640	1947	90	1	
5	0	1036800	242280	12747	210	1

TABLE 3.3 – premiers nombres de triplets permutation de première espèce

Définition 3.4.2 (Triplet de permutations de Legendre-Stirling) Soit $n \geq 0$. Un triplet de permutations de Legendre-Stirling de longueur n est un triplet ordonné (π_1, π_2, π_3) , où $\pi_1 \in S_{n+2}$, $\pi_2 \in S_{n+1}$ et $\pi_3 \in S_n$, satisfaisant les conditions suivantes :

1. Les nombres de cycles vérifient $C(\pi_1) = k + 2$, $C(\pi_2) = k + 1$, $C(\pi_3) = k$.
2. Les maxima cycliques de π_1 strictement inférieurs à $n + 2$ sont exactement les maxima cycliques de π_2 .
3. Les maxima cycliques de π_2 qui sont strictement inférieurs à $n + 1$ sont exactement les maxima cycliques de π_3 .

Théorème 3.4.1 Pour tout $n \geq 0$ et tout k avec $0 \leq k \leq n$, le nombre de triplet

de permutations de Legendre-Stirling (π_1, π_2, π_3) de longueur n dans lesquelles π_3 a exactement k cycles est $\begin{vmatrix} n \\ k \end{vmatrix}$.

Preuve. Soit $s_{n,k}$ le nombre de triplet de permutations de Legendre-Stirling (π_1, π_2, π_3) de longueur n dans lesquelles π_3 a exactement k cycles. Il est clair que $s_{n,0} = \delta_{n,0}$ et $s_{0,k} = \delta_{k,0}$, donc en vertu de (3.2), il suffit de montrer que si $n > 0$ et $k > 0$ alors $s_{n,k} = n(n-1)(n+1)s_{n-1,k} + s_{n-1,k-1}$.

Pour ce faire, remarquons d'abord que, par la condition (2,3) de la Définition (3.1.2), si (π_1, π_2, π_3) est une triplet de permutations de Legendre-Stirling de longueur n , alors 1 est un point fixe dans π_1 si et seulement si c'est un point fixe dans π_2, π_3 . Les triplet (π_1, π_2, π_3) dans lesquelles 1 est un point fixe sont en bijection avec les triplet $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de longueur $n-1$ dans lesquelles σ_3 a $k-1$ cycles, en supprimant le 1 de chaque permutation et en diminuant toutes les autres entrées de 1. Chaque triple (π_1, π_2, π_3) dans laquelle 1 n'est pas un point fixe peut être construite uniquement en choisissant une triplet $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de longueur $n-1$ dans laquelle σ_3 a k cycles, en augmentant chaque entrée de chaque permutation de 1, puis en insérant 1 après une entrée de chaque permutation. Il y a $s_{n-1,k}$ triplet $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, il y a $n+1$ façons d'insérer une nouvelle entrée dans σ_1 , il y a n façons d'insérer une nouvelle entrée dans σ_2 , et $n-1$ façons d'insérer une nouvelle entrée dans σ_3 . ■

Exemple 3.4.1 Considérons le cas $n = 2$. Pour $k = 1$, les triplets de permutations de Legendre-Stirling vérifiant les conditions de la définition sont

$$\begin{aligned} &((12)(3)(4), (12)(3), (12)), \\ &((13)(2)(4), (13)(2), (13)), \\ &((14)(2)(3), (14)(2), (14)), \\ &((23)(1)(4), (23)(1), (23)), \\ &((24)(1)(3), (24)(1), (24)), \\ &((34)(1)(2), (34)(1), (34)). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Pour $k = 2$, il existe un unique triplet :

$$((1)(2)(3)(4), (1)(2)(3), (1)(2)).$$

Par conséquent,

$$\left\| \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right\| = 1.$$

Exemple 3.4.2 Soit $n = 3$. On considère les triplets de permutations de Legendre–Stirling

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3),$$

où

$$\pi_1 \in S_5, \quad \pi_2 \in S_4, \quad \pi_3 \in S_3,$$

vérifiant les conditions de la définition.

Pour $k = 3$. Le seul triplet admissible est

$$((1)(2)(3)(4)(5), (1)(2)(3)(4), (1)(2)(3)).$$

Ainsi,

$$\left\| \begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right\| = 1.$$

Ce résultat coïncide avec la relation de récurrence.

Pour $k = 2$. Par exemple, on obtient les triplets suivants :

$$\begin{aligned} &((12)(3)(4)(5), (12)(3)(4), (12)(3)), \\ &((13)(2)(4)(5), (13)(2)(4), (13)(2)), \\ &((23)(1)(4)(5), (23)(1)(4), (23)(1)), \\ &\dots \end{aligned}$$

Le nombre total de triplets admissibles est

$$\left\| \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right\| = 30.$$

Pour $k = 1$. Le nombre total de triplets admissibles est

$$\left\| \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right\| = 144.$$

On vérifie également que cette valeur satisfait la relation de récurrence.

Par conséquent,

$$\begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} = 144, \quad \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} = 30, \quad \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix} = 1.$$

La suite (n, k) est entièrement déterminée par une construction combinatoire ; ainsi, pour tout n , la valeur obtenue coïncide avec celle générée par le code correspondant :

3.4.2 Polynômes des nombres de Legendre-Stirling associés aux triplets de permutations

Théorème 3.4.2 Pour tout $k \geq 0$, la quantité $\begin{vmatrix} n-1 \\ n-k-1 \end{vmatrix}$ est un polynôme en n de degré $4k$ dont le coefficient dominant est $\frac{1}{4^k k!}$. On note ce polynôme $g_k^{(3)}(n)$. Alors, pour tout $k \geq 1$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$g_k^{(3)}(n) = g_k^{(3)}(n-1) + (n-1)(n-2)(n-3) g_{k-1}^{(3)}(n-1). \quad (3.14)$$

Remarque 3.4.1 La quantité $\begin{vmatrix} n-1 \\ n-k-1 \end{vmatrix}$ admet une interprétation combinatoire : elle compte le nombre de triplets de permutations de type Legendre–Stirling satisfaisant certaines conditions sur leurs cycles. Ainsi, l'introduction de la notation $g_k^{(3)}(n)$ ne modifie pas la quantité étudiée ; elle permet simplement de la considérer comme un polynôme en n , tout en conservant son sens combinatoire.

Théorème 3.4.3 Pour tout $k \geq 1$, on a

$$g_k^{(3)}(0) = g_k^{(3)}(1) = g_k^{(3)}(2) = \cdots = g_k^{(3)}(k+1) = g_k^{(3)}(k+2) = 0. \quad (3.15)$$

Preuve. On raisonne par récurrence sur k . Pour $k = 1$, le résultat est immédiat d'après l'expression explicite de $g_1^{(3)}(n)$.

Supposons maintenant le résultat vrai pour un certain entier $k-1 \geq 1$. En utilisant la relation de récurrence

$$g_k^{(3)}(n) = g_k^{(3)}(n-1) + (n-1)(n-2)(n-3) g_{k-1}^{(3)}(n-1).$$

On obtient

$$g_k^{(3)}(n) - g_k^{(3)}(n-1) = (n-1)(n-2)(n-3) g_{k-1}^{(3)}(n-1).$$

Par hypothèse de récurrence,

$$g_{k-1}^{(3)}(0) = g_{k-1}^{(3)}(1) = \cdots = g_{k-1}^{(3)}(k) = 0.$$

Ainsi, pour $1 \leq n \leq k+2$, on a $g_{k-1}^{(3)}(n-1) = 0$, donc $g_k^{(3)}(n) = g_k^{(3)}(n-1)$.

Comme $g_k^{(3)}(0) = 0$, alors

$$g_k^{(3)}(1) = g_k^{(3)}(2) = \cdots = g_k^{(3)}(k+2) = 0.$$

■

3.4.3 Etude combinatoire des triples de permutations

D'après (3.15) et des résultats classiques concernant les fonctions génératrices rationnelles, il existe des entiers $B_{k,j}$ tels que

$$G_k^{(3)}(x) = \frac{x^{k+1} \sum_{j=1}^{3k-1} B_{k,4k-2-j}^{(3)} x^j}{(1-x)^{4k+1}}. \quad (3.16)$$

Nous donnons maintenant une interprétation combinatoire des coefficients $B_{k,j}$. À cet effet, nous introduisons une nouvelle famille de permutations, que nous appelons permutations de Legendre-Stirling triples. Comme dans le cas classique, notre objectif est d'interpréter les coefficients $B_{k,j}$ à l'aide de la statistique des descentes sur ces permutations.

Théorème 3.4.4 On a :

$$G_1^{(3)}(x) = \frac{1}{1-x}$$

et, pour tout $k \geq 1$,

$$G_k^{(3)}(x) = \frac{x^4}{1-x} \frac{d^3}{dx^3} (G_{k-1}^{(3)}(x)).$$

Preuve.

On a :

$$g_k^{(3)}(n) = g_k^{(3)}(n-1) + (n-1)(n-2)(n-3) g_{k-1}^{(3)}(n-1)$$

On multiplie chaque terme par x^n et on somme pour $n \geq 0$:

$$\sum_{n \geq 0} g_k^{(3)}(n) x^n = \sum_{n \geq 0} g_k^{(3)}(n-1) x^n + \sum_{n \geq 0} (n-1)(n-2)(n-3) g_{k-1}^{(3)}(n-1) x^n$$

On pose :

$$G_k^{(3)}(x) = \sum_{n \geq 0} g_k^{(3)}(n) x^n$$

On traite chaque terme séparément.

— **Premier terme :**

$$\sum_{n \geq 0} g_k^{(3)}(n-1)x^n = x \sum_{n \geq 0} g_k^{(3)}(n-1)x^{n-1} = x \sum_{n \geq 0} g_k^{(3)}(n)x^n = xG_k^{(3)}(x)$$

— **Deuxième terme :** Posons $m = n - 1$, alors :

$$\sum_{n \geq 0} (n-1)(n-2)(n-3) g_{k-1}^{(3)}(n-1)x^n$$

devient,

$$x \sum_{m \geq 0} m(m-1)(m-2) g_{k-1}^{(3)}(m)x^m$$

Or,

$$\sum_{m \geq 0} m(m-1)(m-2) a_m x^m = x^3 \frac{d^3}{dx^3} \left(\sum_{m \geq 0} a_m x^m \right) = x^4 \frac{d^3}{dx^3} G_{k-1}^{(3)}(x)$$

Ce qui donne,

$$G_k^{(3)}(x) = xG_k^{(3)}(x) + x^4 \frac{d^3}{dx^3} G_{k-1}^{(3)}(x)$$

Donc :

$$(1-x)G_k^{(3)}(x) = x^4 \frac{d^3}{dx^3} G_{k-1}^{(3)}(x)$$

Finalement :

$$G_k^{(3)}(x) = \frac{x^4}{1-x} \frac{d^3}{dx^3} G_{k-1}^{(3)}(x)$$

■

Déterminer les coefficients $B_{k,j}^{(3)}$

En utilisant maintenant la relation (3.16) pour éliminer $G_k^{(3)}(x)$, puis en réduisant au même dénominateur on obtient

$$G_{k-1}^{(3)}(x) = \frac{x^k \sum_{j=1}^{3k-4} B_{k-1, 4k-6-j}^{(3)} x^j}{(1-x)^{4k-3}}.$$

En appliquant trois dérivations successives et en utilisant la règle de Leibniz, on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{d^3}{dx^3} G_{k-1}^{(3)}(x) &= \frac{\sum_{j=1}^{3k-4} j(j+1)(j+2) B_{k-1,4k-6-j}^{(3)} x^{j+k-3}}{(1-x)^{4k-3}} \\
 &+ \frac{3(4k-3) \sum_{j=1}^{3k-4} (j+1)(j+2) B_{k-1,4k-6-j}^{(3)} x^{j+k-2}}{(1-x)^{4k-2}} \\
 &+ \frac{3(4k-3)(4k-2) \sum_{j=1}^{3k-4} (j+2) B_{k-1,4k-6-j}^{(3)} x^{j+k-1}}{(1-x)^{4k-1}} \\
 &+ \frac{(4k-3)(4k-2)(4k-1) \sum_{j=1}^{3k-4} B_{k-1,4k-6-j}^{(3)} x^{j+k}}{(1-x)^{4k}}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$G_k^{(3)}(x) = \frac{x^4}{1-x} \frac{d^3}{dx^3} G_{k-1}^{(3)}(x),$$

d'où

$$\begin{aligned}
 G_k^{(3)}(x) &= \frac{\sum_{j=1}^{3k-4} j(j+1)(j+2) B_{k-1,4k-6-j}^{(3)} x^{j+k+1}}{(1-x)^{4k-2}} \\
 &+ \frac{3(4k-3) \sum_{j=1}^{3k-4} (j+1)(j+2) B_{k-1,4k-6-j}^{(3)} x^{j+k+2}}{(1-x)^{4k-1}} \\
 &+ \frac{3(4k-3)(4k-2) \sum_{j=1}^{3k-4} (j+2) B_{k-1,4k-6-j}^{(3)} x^{j+k+3}}{(1-x)^{4k}} \\
 &+ \frac{(4k-3)(4k-2)(4k-1) \sum_{j=1}^{3k-4} B_{k-1,4k-6-j}^{(3)} x^{j+k+4}}{(1-x)^{4k+1}}.
 \end{aligned}$$

En utilisant ensuite (3.16) pour éliminer $G_k^{(3)}(x)$ et en multipliant les deux membres par $(1-x)^{4k+1}/x^{k+1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{3k-1} B_{k,4k-2-j}^{(3)} x^j &= (1-x)^3 \sum_{j=1}^{3k-4} j(j+1)(j+2) B_{k-1,4k-6-j}^{(3)} x^j \\
 &+ 3(4k-3)(1-x)^2 \sum_{j=1}^{3k-4} (j+1)(j+2) B_{k-1,4k-6-j}^{(3)} x^{j+1} \\
 &+ 3(4k-3)(4k-2)(1-x) \sum_{j=1}^{3k-4} (j+2) B_{k-1,4k-6-j}^{(3)} x^{j+2} \\
 &+ (4k-3)(4k-2)(4k-1) \sum_{j=1}^{3k-4} B_{k-1,4k-6-j}^{(3)} x^{j+3}.
 \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de x^j , on obtient la relation de récurrence vérifiée par les coefficients $B_{k,j}^{(3)}$.

Définition 3.4.3 Pour chaque entier $n \geq 1$, soit

$$M_n^{(3)} = \{1, 1, 1, \bar{1}, 2, 2, 2, \bar{2}, \dots, n, n, n, \bar{n}\},$$

dans lequel nous avons trois copies non barrées et une copie barrée de chaque entier j , avec $1 \leq j \leq n$. Une triple permutation de Legendre–Stirling est une permutation π de $M_n^{(3)}$ telle que, si $i < j < k$ et si $\pi(i)$ et $\pi(k)$ sont deux copies non barrées d'un même entier, alors $\pi(j) > \pi(i)$. Une descente d'une triple permutation de Legendre–Stirling π est un entier i , $1 \leq i \leq 4n$, tel que $i = 4n$ ou bien $\pi(i) > \pi(i+1)$.

Théorème 3.4.5 On note $B_{k,j}^{(3)}$ le nombre de triplet permutations de type Legendre–Stirling ayant exactement j descentes.

Preuve. Soit $b_{k,j}$ le nombre de triples permutations de Legendre–Stirling de M_k ayant exactement j descentes. Comme dans la preuve du Théorème 3.2.5, il suffit de montrer que $b_{k,j}$ satisfait la même relation de récurrence.

Supposons $k > 1$. Toute triple permutation de Legendre–Stirling de M_k peut être obtenue en choisissant une triple permutation de Legendre–Stirling de M_{k-1} , en insérant d'abord la copie barrée $\bar{k}$ entre deux entrées, puis en insérant le bloc kkk entre deux entrées de cette nouvelle permutation.

Nous pouvons obtenir exactement j descentes de trois façons.

Dans le premier cas, on choisit une permutation de M_{k-1} ayant j descentes, on insère $\bar{k}$ immédiatement après une descente, puis on insère le bloc kkk immédiatement après une descente ou immédiatement avant $\bar{k}$. Dans ce cas, il y a $b_{k-1,j}$ façons de choisir la permutation initiale, j façons d'insérer $\bar{k}$ et $j+1$ façons d'insérer le bloc kkk . Ainsi, on obtient $j(j+1)b_{k-1,j}$.

Dans le deuxième cas, on choisit une permutation de M_{k-1} ayant $j - 1$ descentes, on insère $\bar{k}$ immédiatement après une descente, puis on insère le bloc kkk immédiatement après une non-descente, mais pas immédiatement à gauche de $\bar{k}$. Le nombre de telles constructions est $2j(4k - 1 - j)b_{k-1,j-1}$.

Dans le troisième cas, on choisit une permutation de M_{k-1} ayant $j - 2$ descentes, on insère $\bar{k}$ immédiatement après une non-descente, puis on insère le bloc $kkkk$ immédiatement après une non-descente. Le nombre total de telles constructions est :

$$(4k - j)(4k - 1 - j)b_{k-1,j-2}.$$

En combinant ces trois cas, on obtient

$$b_{k,j} = j(j + 1)b_{k-1,j} + 2j(4k - 1 - j)b_{k-1,j-1} + (4k - j)(4k - 1 - j)b_{k-1,j-2}.$$

■

3.5 s –Legendre-Stirling de première espèce

Dans cette partie, nous proposons une généralisation des nombres de Legendre-Stirling de première espèce en utilisant la fonction génératrice définie dans (3.8), à laquelle on donne une récurrence et une fonction génératrice ordinaire.

Définition 3.5.1 On définit les nombres s –Legendre-Stirling de première espèce, notés $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(s)}$ pour tous entiers $n, k \in \mathbb{Z}$, par

Conditions initiales

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right]^{(s)} = \delta_{n,0}, \quad \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(s)} = \delta_{k,0}.$$

Relation de récurrence

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(s)} = \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]^{(s)} + (n-1) \prod_{i=1}^{s-1} (n)^{\bar{i}} \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(s)}.$$

avec $(n)^{\bar{i}} = n(n+1) \cdots (n+i-1)$. est un factoriel croissant.

Définition 3.5.2 Soit $s \geq 2$. On appelle s -uplets de permutations de type Legendre-Stirling de longueur n tout s -uplets ordonné $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s)$ vérifiant les conditions suivantes :

1. pour tout $i = \overline{1, s}$, on a $\pi_i \in S_{n+i-1}$
2. La permutation π_{i+1} possède exactement une cycle de plus que π_i .
3. Les maxima des cycles de π_{i+1} strictement inférieurs à $n+i$ coïncident exactement avec les maxima des cycles de π_i .

Exemple 3.5.1 Soit $n = 3$ et $s = 2$. On considère le couple de permutations $(\pi_1, \pi_2) \in S_3 \times S_3$ défini par :

$$\pi_1 = (1)(2)(3), \quad \pi_2 = (1\ 2)(3).$$

On vérifie les conditions :

— Le nombre de cycles :

$$c(\pi_1) = 3 \quad \text{et} \quad c(\pi_2) = 2,$$

donc

$$c(\pi_1) \geq c(\pi_2).$$

— Les maxima des cycles sont :

$$\text{Max}(\pi_1) = \{1, 2, 3\}, \quad \text{Max}(\pi_2) = \{2, 3\},$$

donc :

$$\text{Max}(\pi_2) \subseteq \text{Max}(\pi_1).$$

Ainsi, le couple (π_1, π_2) est un exemple valide de s -uplets de permutations.

Théorème 3.5.1 Pour $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq sn$, le nombre des s -uplets de permutations de Legendre–Stirling $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s)$ de taille n , tels que la permutation (π_s) possède exactement k cycles, est donné par $\left\| \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\|^{(s)}$.

Preuve. Soit $a_{n,k}^{(s)}$ le nombre de permutations de Legendre–Stirling $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s)$ de taille n tels que π_s possède exactement k cycles.

On a clairement

$$a_{n,0}^{(s)} = \delta_{n,0}, \quad a_{0,k}^{(s)} = \delta_{k,0}.$$

Ainsi, il suffit de montrer que pour $n > 0$ et $k > 0$,

$$a_{n,k}^{(s)} = (n-1) \left[n(n+1) \cdots (n+s-1) \right] a_{n-1,k}^{(s)} + a_{n-1,k-1}^{(s)}.$$

Considérons un s -uplets de permutations de Legendre–Stirling $(\pi_1, \dots, \pi_s)$ de taille n . D’après la condition généralisée sur les points fixes, l’élément 1 est un point fixe de π_1 si et seulement s’il est un point fixe dans toutes les permutations $\pi_2, \dots, \pi_s$.

- **Premier cas :** 1 est un point fixe dans toutes les permutations. En supprimant 1 de chaque permutation et en diminuant de 1 toutes les autres valeurs, on obtient un s -uplet $(\sigma_1, \dots, \sigma_s)$ de taille $n-1$, où σ_s possède $k-1$ cycles. Cela établit une bijection avec $a_{n-1,k-1}^{(s)}$.
- **Deuxième cas :** 1 n’est un point fixe dans aucune permutation. On part d’un s -uplets $(\sigma_1, \dots, \sigma_s)$ de taille $n-1$ tel que σ_s possède k cycles. On augmente toutes les valeurs de 1, puis on insère 1 dans chaque permutation.

Le nombre de possibilités d'insertion est : $n + s - 1$ choix pour π_1 , n choix pour $\pi_2, \dots, n - 1$ choix pour π_s . Ainsi, on obtient

$$(n - 1) \left[n(n + 1) \cdots (n + s - 1) \right] a_{n-1,k}^{(s)}.$$

En combinant les deux cas, on obtient

$$a_{n,k}^{(s)} = (n - 1) \left[n(n + 1) \cdots (n + s - 1) \right] a_{n-1,k}^{(s)} + a_{n-1,k-1}^{(s)}.$$

■

3.5.1 Polynômes et fonctions génératrices de s -permutations

L'étude des paires puis des triplets de permutations nous conduit naturellement à une généralisation des objets combinatoires classiques. Dans ce cadre, nous introduisons les polynômes généralisés afin de décrire plus finement ces nouvelles structures.

Théorème 3.5.2 Soit $g_k^{(s)}(n)$ le polynôme considéré. Pour tout $k \geq 1$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$g_k^{(s)}(n) = g_k^{(s)}(n - 1) + (n - 1) [(n - 2)(n - 3) \cdots (n - s - 1)] g_{k-1}^{(s)}(n - 1).$$

Dans la continuité de l'étude des cas des paires et des triplets, nous définissons une fonction génératrice généralisée $G_k^{(s)}(x)$ pour les nombres de Legendre-Stirling associés aux s -uplets de permutations, qui est donnée par $G_k^{(s)}(x) = \sum_{n \geq 0} g_k^{(s)}(n) x^n$

Théorème 3.5.3

$$G_1^{(s)}(x) = \frac{1}{1 - x}$$

et, pour tout $k \geq 1$,

$$G_k^{(s)}(x) = \frac{x^{s+2}}{1 - x} \cdot \frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}} (G_{k-1}(x)).$$

Preuve.

On a :

$$g_k^{(s)}(n) = g_k^{(s)}(n - 1) + (n - 1) [(n - 2)(n - 3) \cdots (n - s - 1)] g_{k-1}^{(s)}(n - 1).$$

On multiplie chaque membre par x^n et on somme pour $n \geq 0$:

$$\sum_{n \geq 0} g_k^{(s)}(n) x^n = \sum_{n \geq 0} g_k^{(s)}(n - 1) x^n + \sum_{n \geq 0} (n - 1)(n - 2) \cdots (n - s - 1) g_{k-1}^{(s)}(n - 1) x^n.$$

On pose,

$$G_k^{(s)}(x) = \sum_{n \geq 0} g_k^{(s)}(n) x^n.$$

— Premier terme : $\sum_{n \geq 0} g_k^{(s)}(n-1) x^n = x G_k^{(s)}(x)$.

— Deuxième terme : Posons $m = n - 1$, alors

$$\sum_{n \geq 0} (n-1) \cdots (n-s-1) g_{k-1}^{(s)}(n-1) x^n = x \sum_{m \geq 0} m(m-1) \cdots (m-s) g_{k-1}^{(s)}(m) x^m,$$

Or, on sait que

$$\sum_{m \geq 0} m(m-1) \cdots (m-s) a_m x^m = x^{s+1} \frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}} \left(\sum_{m \geq 0} a_m x^m \right).$$

Donc,

$$= x \cdot x^{s+1} \frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}} G_{k-1}^{(s)}(x) = x^{s+2} \frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}} G_{k-1}^{(s)}(x).$$

On obtient l'équation fonctionnelle suivante :

$$G_k^{(s)}(x) = x G_k^{(s)}(x) + x^{s+2} \frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}} G_{k-1}^{(s)}(x).$$

Donc,

$$(1-x) G_k^{(s)}(x) = x^{s+2} \frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}} G_{k-1}^{(s)}(x).$$

Finalement,

$$G_k^{(s)}(x) = \frac{x^{s+2}}{1-x} \frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}} G_{k-1}^{(s)}(x).$$

■

Conclusion générale

En terme de conclusion, ce travail nous a permis de comprendre certains principes de la combinatoire énumérative à travers l'étude des nombres de Stirling et de leurs diverses généralisations. Ce parcours tire l'intention à la puissance des fonctions génératrices et des structures combinatoires, véritables clés pour modéliser, comprendre et énumérer avec rigueur de vastes familles d'objets discrets.

L'étude des nombres de Legendre-Stirling a montré qu'ils constituent une extension naturelle des nombres de Stirling classiques tout en possédant des propriétés combinatoires particulièrement riches. Les différentes interprétations combinatoires présentées ont permis de mieux comprendre leur structure et les liens qu'ils entretiennent avec les permutations et les partitions.

L'un des principaux objectifs de ce mémoire était d'examiner certaines généralisations de ces nombres. Dans ce cadre, nous avons étudié les nombres de Legendre-Stirling associés aux triplets de permutations ainsi que leurs polynômes et leurs fonctions génératrices. Cette approche a conduit à l'obtention de nouvelles relations de récurrence et à l'élaboration d'interprétations combinatoires adaptées à ces nouvelles structures. Nous avons également étalé notre généralisation de première espèce aux s -uplets de permutations, ce qui a permis d'étendre davantage le cadre classique des nombres de Legendre-Stirling.

Les résultats obtenus mettent en évidence la richesse des structures étudiées et confirment l'intérêt des généralisations combinatoires dans le développement de nouvelles familles de nombres et de polynômes.

Bibliographie

- [1] G. E. Andrews and L. L. Littlejohn, *A Combinatorial Interpretation of the Legendre-Stirling Numbers*, Proceedings of the American Mathematical Society, **137** (2009), 2581–2590.
- [2] B. Baumslag and B. Chandler, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Group Theory*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [3] A. Bazenair, *Log-concavité et fonctions symétriques pour des triangles généralisés et leurs analogues*, Thèse de Doctorat en Sciences, Université Mohamed Seddik Benyahia, Jijel, 2021.
- [4] H. Belbachir, S. Bouroubi and A. Khelladi, *Connection between Ordinary Multinomials, Fibonacci Numbers, Bell Polynomials and Discrete Uniform Distribution*, Annales Mathematicae et Informaticae, **35** (2008), 21–30.
- [5] A. Benyattou, *Congruences pour quelques suites de nombres combinatoires*, Thèse de Doctorat, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Alger, 2018.
- [6] F. Bergeron, *Introduction à la combinatoire algébrique*, Université du Québec à Montréal, Montréal, 2015.
- [7] B. Bondarenko, *Generalized Pascal Triangles and Pyramids, Their Fractals, Graphs and Applications*, The Fibonacci Association, Santa Clara, 1993.
- [8] K. Boubellouta, *Fonctions symétriques et leurs applications à certains nombres et polynômes*, Thèse de Doctorat, Université Mohamed Seddik Benyahia, Jijel, 2020.
- [9] I. E. Bousbaa, *Combinatoire de suites de Stirling généralisées*, Thèse de Doctorat, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Alger, 2016.
- [10] M. Bouzeraïb, *Combinatoire et fonctions symétriques généralisées*, Thèse de Doctorat, Université Mohamed Seddik Benyahia, Jijel, 2020.
- [11] M. Boulyere and M. Ghedjan, *Les fonctions symétriques pour la généralisation des polynômes orthogonaux*, Université Mohamed Seddik Benyahia, Jijel, 2015.
- [12] R. A. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, 5th Edition, Pearson Education, Boston, 2010.
- [13] P. Delahaye, *Le groupe symétrique*, Cours MPSI, Prytanée National Militaire, 2017.

- [14] A. De Moivre, *Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis*, J. Tonson and J. Watts, London, 1731.
- [15] A. De Moivre, *The Doctrine of Chances*, 3rd Edition, London, 1756.
- [16] E. S. Egge, *Legendre-Stirling Permutations*.
- [17] L. Enseignement, *Algèbre pour l'arithmétique et la géométrie*, Cours, 2013.
- [18] M. J. Erickson, *Introduction to Combinatorics*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2013.
- [19] W. N. Everitt, L. L. Littlejohn and R. Wellman, *Legendre Polynomials, Legendre-Stirling Numbers, and the Left-Definite Spectral Analysis of the Legendre Differential Expression*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **148** (2002), 213–238.
- [20] P. Flajolet and R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [21] A. Fontaine, *Groupe des permutations d'un ensemble fini. Application*, Cours, 2013.
- [22] D. Foata and G. Han, *Principes de combinatoire classique : cours et exercices corrigés*, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 2008.
- [23] P. Gassiat and M. Schwarz, *Deux démonstrations de la formule des équerres*, Paris, 2005.
- [24] I. M. Gessel and R. P. Stanley, *Stirling Polynomials*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **24** (1978), 24–33.
- [25] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2nd Edition, Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.
- [26] G. Guettai, *Autour de certaines propriétés analytiques des polynômes classiques*, Thèse de Doctorat, USTHB, Alger, 2021.
- [27] B.-N. Guo and F. Qi, *An Explicit Formula for Bell Numbers in Terms of Stirling Numbers and Hypergeometric Functions*, Global Journal of Mathematical Analysis, **2**(4) (2014), 243–248.
- [28] O. Haddouche, *Une généralisation sur les nombres de Stirling*, Mémoire de Magister, USTHB, Alger, 2008.
- [29] G. Hains, *Groupe symétrique et tableaux de Young*, Bulletin AMQ, 1983.
- [30] A. Junod, *Congruences par l'analyse p-adique et le calcul symbolique*, Thèse de Doctorat, Université de Neuchâtel, 2003.
- [31] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming, Volume 1 : Fundamental Algorithms*, 3rd Edition, Addison-Wesley, 1997.
- [32] P. Lissy, *Groupe symétrique. Application*, Cours, 2010.
- [33] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, Oxford, 1979.
- [34] M. Mansuy, *Tableaux de Young et bases cristallines de $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$* , 2012.
- [35] R. Merris, *Combinatorics*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 2003.
- [36] I. Mező, *The r-Bell Numbers*, Journal of Integer Sequences, **14**(1) (2011).
- [37] K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 7th Edition, McGraw-Hill, New York, 2012.

- [38] J. Rouget, *Le groupe symétrique*, Cours, 2018.
- [39] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Volume 1*, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [40] R. P. Stanley, *Generating Functions*, In *Studies in Combinatorics*, Mathematical Association of America, 1979.
- [41] J. Stirling, *Methodus Differentialis : Sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum*, London, 1730.
- [42] S. O. Warnaar, *The Andrews–Gordon Identities and q -Multinomial Coefficients*, *Communications in Mathematical Physics*, **184** (1997), 203–232.
- [43] H. S. Wilf, *Generatingfunctionology*, 3rd Edition, A K Peters, Wellesley, MA, 2006.
- [44] H. Zerroug, *Fonctions génératrices de certains produits de nombres et polynômes*, Thèse de Doctorat en Sciences, Université Mohamed Seddik Benyahia, Jijel, 2022.