



N° Réf :.....

Université Abdelhafid Boussouf – Mila

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master  
En: Mathématiques

Spécialité: Modélisation Mathématiques et Techniques de Décision

# Estimation quasi-du maximum de vraisemblance des modèles GARCH avec erreurs suivant une loi de cauchy

Préparé par :

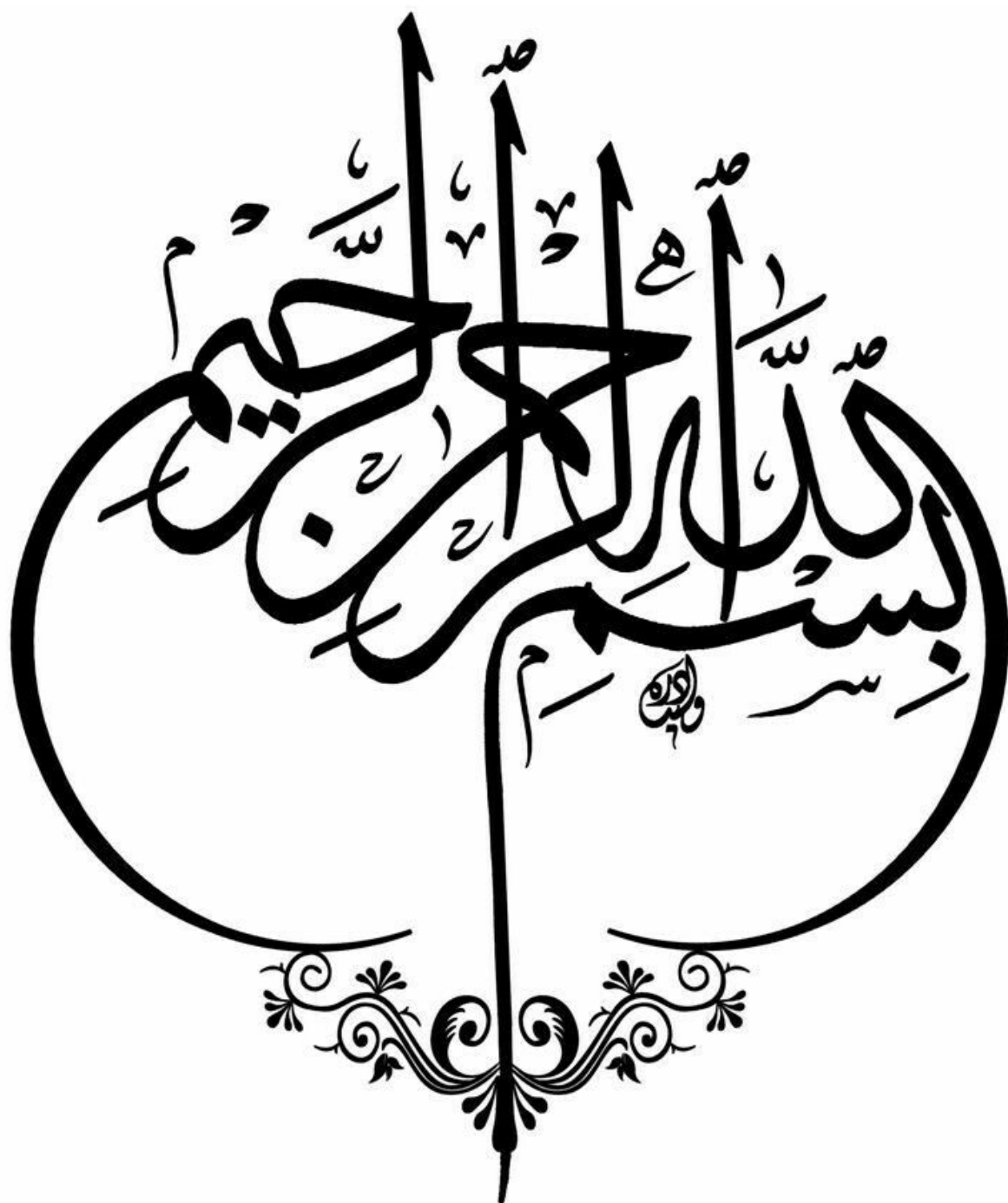
- Abdiche Chaima
- Khalfa Yousra

Soutenue le 22/06/2026

devant le jury

|                  |     |                              |            |
|------------------|-----|------------------------------|------------|
| Rabeh Bououden   | MCA | U. Abdelhafid Boussouf, Mila | Présidente |
| Yakoub Boularouk | MCA | U. Abdelhafid Boussouf, Mila | Rapporteur |
| Samira Boukaf    | MCA | U. Abdelhafid Boussouf, Mila | Examineur  |

Année universitaire : 2025/2026



# Remerciements

Au nom d'Allah, le Tout Miséricordieux, le Très Miséricordieux.

Nous remercions Allah Tout-Puissant de nous avoir accordé la santé, la patience et la volonté nécessaires pour mener à bien ce travail. Que la paix et les bénédictions soient sur le Prophète Mohammed.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements et notre profonde gratitude à notre encadrant, *Dr Boularouk Yakoub*, pour ses orientations précieuses, ses conseils judicieux et son accompagnement tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Nous adressons également nos remerciements à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Nous exprimons enfin notre immense reconnaissance à nos chers parents, pour leur soutien moral, leurs encouragements constants et leurs prières, ainsi qu'à nos familles pour leur aide et leur présence tout au long de notre parcours universitaire.

En conclusion, nous prions Allah de faire de ce travail une œuvre utile et bénéfique, et de guider chacun vers le succès et la réussite.

Louange à Allah, Seigneur de l'univers.

# Dédicace

Avant tout je remercie *Allah* le tout puissant qui m'a donné la santé, le courage et la volonté de réaliser ce travail

*À mon cher père Abderraxek,*

À celui qui m'a appris le sens de l'effort et de la patience, à celui qui a sacrifié beaucoup de son temps, de ses efforts et de son confort pour voir ma réussite et mon bonheur. Que Dieu te protège et fasse de toi une couronne sur ma tête.

*À ma chère mère Namira,*

À mon premier et éternel soutien, à ma force après Allah, et à ce que j'ai de plus précieux. Je remercie Allah de t'avoir choisie comme mère pour moi. Je prie Dieu de te préserver et de t'accorder une santé et un bien-être durables.

*À mes chères sœurs Chadet et Inès,*

À mes compagnes dans ce parcours et partenaires de mes plus beaux souvenirs. Merci pour chaque parole bienveillante et chaque moment de soutien. Je vous souhaite bonheur et réussite.

*À mon cher frère Yasser,*

À celui qui a été pour moi un frère, un soutien et un ami, à celui qui a toujours été à mes côtés avec amour et sincérité. Je prie Dieu que tu demeures toujours un frère cher et une source inépuisable de soutien.

*À mes amies Chaima , Wisal et Farah.*

*Khalifa Yusra*

# Dédicace

Avant tout je remercie *Allah* le tout puissant qui m'a donné la santé, le courage et la volonté de réaliser ce travail

*À mon cher père Ramdane ,*

L'homme dont je porte le nom avec tant de fierté. Merci pour ton soutien inconditionnel, tes sacrifices et tes précieuses prières qui ont éclairé mon chemin. Que Dieu t'accorde une longue vie pleine de santé et de sérénité.

*À ma chère mère Nekhla ,*

Mon havre de paix et ma source d'inspiration. Toi qui as veillé sur moi avec tant d'amour et de patience pour me voir réussir. Que Dieu te préserve, tu es le bien le plus précieux de ma vie.

*À mes chers frères Abdelhadi, Saber, Rida, et Abdelfettah ,*

Mes piliers, mes protecteurs et compagnons de route. Votre présence à mes côtés est ma plus grande force. Merci d'être toujours là pour moi.

*À mes chères sœurs Leila, Souad, Nassima, Warda, et Asma ,*

Les rayons de soleil de notre maison. Votre amour, votre joie et votre soutien apportent de la magie à mon quotidien. Vous êtes mon bonheur.

*À mes amies Yusra, Wissal et Farah.*

*Abdiche Chaima*

# Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude asymptotique de l'estimateur du quasi maximum de vraisemblance (EQMV) pour les modèles GARCH(p,q) lorsque les innovations suivent une loi de Cauchy. Pour cela nous avons présenté les notions fondamentales nécessaires à cette étude (les processus stochastiques, la stationnarité, les séries chronologiques, la loi de Cauchy...). Par suite, nous avons étudié le modèle de GARCH (p,q), la stationnarité stricte, la consistance et la normalité asymptotiques de l'estimateur de quasi-maximum de vraisemblance pour les paramètres de modèle GARCH avec erreurs de Cauchy. En fin Une application numérique sur le modèle de GARCH dans le logiciel R, pour confirmer les résultats théoriques obtenus par des simulations numériques de type Monte-Carlo.

## Mots clés :

Modèle GARCH ,loi de Cauchy , Estimateur Quasi-Maximum de vraisemblance , stationnarité strict ,les séries chronologiques, consistance , Normalité asymptotique .

# Abstract

This thesis is devoted to the asymptotic study of the Quasi-Maximum Likelihood Estimator (QMLE) for GARCH(p,q) models when the innovations follow a Cauchy distribution. To this end, we first introduce the fundamental concepts necessary for this study (stochastic processes, stationarity, time series, the Cauchy distribution ...). Subsequently, we study the GARCH(p,q) model, strict stationarity, consistency, and the asymptotic normality of the QMLE for GARCH model parameters with Cauchy errors. Finally, a numerical application of the GARCH model using the R software is carried out to confirm the theoretical results obtained via Monte Carlo simulations.

**Keywords :**

GARCH model, Cauchy distribution, Quasi-Maximum Likelihood Estimator (QMLE), strict stationarity, time series, consistency, asymptotic normality.

# Table des matières

|                                                                                            |          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Introduction</b>                                                                        | <b>2</b> |
| <b>1 Définitions et notations</b>                                                          | <b>5</b> |
| 1.1 Processus Stochastique . . . . .                                                       | 6        |
| 1.1.1 Stationnarité . . . . .                                                              | 6        |
| 1.1.2 Le processus bruit blanc(BB) . . . . .                                               | 8        |
| 1.1.3 Ergodicité . . . . .                                                                 | 9        |
| 1.1.4 Causalité . . . . .                                                                  | 9        |
| 1.1.5 Classification des processus stochastique . . . . .                                  | 9        |
| 1.1.6 Les séries chronologiques . . . . .                                                  | 10       |
| 1.2 La loi de cauchy . . . . .                                                             | 12       |
| 1.2.1 Densité de probabilité . . . . .                                                     | 12       |
| 1.2.2 La fonction de répartition . . . . .                                                 | 13       |
| 1.2.3 Moments de la loi de cauchy . . . . .                                                | 13       |
| 1.2.4 Difficultés spécifiques de la loi de Cauchy dans l'estimation des<br>GARCH . . . . . | 14       |
| 1.3 Le maximum de vraisemblance . . . . .                                                  | 14       |
| 1.3.1 Estimateur . . . . .                                                                 | 14       |
| 1.3.2 vraisemblance . . . . .                                                              | 15       |
| 1.3.3 l'estimateur de quasi maximum de vraisemblance . . . . .                             | 16       |
| 1.4 Inégalité de cauchy-schwarz . . . . .                                                  | 17       |

|          |                                                                                  |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.5      | Convergence presque sûre des variables aléatoires . . . . .                      | 17        |
| <b>2</b> | <b>processus GARCH (p,q)avec erreurs de Cauchy :Etude asymptotique de l'EQMV</b> | <b>18</b> |
| 2.1      | Le modèle de GARCH(p,q) . . . . .                                                | 18        |
| 2.2      | Stationnarité Stricte . . . . .                                                  | 19        |
| 2.2.1    | Conditions d'existence et de stationnarité stricte . . . . .                     | 19        |
| 2.2.2    | Corollaire pour le cas GARCH(1,1) . . . . .                                      | 28        |
| 2.3      | La forme causale et la décroissance exponentielle . . . . .                      | 29        |
| 2.3.1    | Définition et démonstration de la forme causale . . . . .                        | 29        |
| 2.3.2    | Condition de sommabilité . . . . .                                               | 31        |
| 2.3.3    | Décroissance exponentielle . . . . .                                             | 33        |
| 2.4      | Consistance . . . . .                                                            | 36        |
| 2.4.1    | Détermination de Quasi-vraisemblance . . . . .                                   | 36        |
| 2.4.2    | Propriété Asymptotique de la quasi vraisemblance . . . . .                       | 37        |
| 2.4.3    | consistance . . . . .                                                            | 38        |
| 2.5      | La normalité asymptotique . . . . .                                              | 42        |
| <b>3</b> | <b>Étude numériques</b>                                                          | <b>47</b> |
| 3.1      | La consistance . . . . .                                                         | 47        |
| 3.2      | La normalité asymptotique . . . . .                                              | 50        |
|          | <b>Conclusion</b>                                                                | <b>53</b> |

# Table des figures

|     |                                             |    |
|-----|---------------------------------------------|----|
| 3.1 | Boxplot du paramètre $\alpha$ .             | 49 |
| 3.2 | Boxplot du paramètre $\beta$ .              | 49 |
| 3.3 | Boxplot du paramètre $\omega$ .             | 50 |
| 3.4 | Représentation en histogramme de $\alpha$ . | 50 |
| 3.5 | Représentation en histogramme de $\beta$ .  | 51 |
| 3.6 | Représentation en histogramme de $\omega$ . | 51 |

# Liste des tableaux

|     |                                                                                      |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1 | Résultats des simulations pour le modèle GARCH(1,1) avec erreurs de Cauchy . . . . . | 48 |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------|----|

## Notations générales

### Notations

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  espace de probabilité.

$\mathcal{F}$  filtration(suite de tribu).

### Ensemble et espace

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$  les entiers positifs, les entiers, les nombres réels.

$\mathbb{R}^d$  espace euclidien de dimension  $d$ .

### Fonction

$\gamma(h)$  la fonction d'autocovariance au retard  $h$ .

### Processus

i.i.d indépendant et identiquement distribué.

$C(0,1)$  loi de Cauchy standard .

p.s presque sûrement.

$\sigma_t^2$  variance conditionnelle.

### Estimation

arg argument.

$\Theta$  ensemble des paramètres.

$\theta$  élément dans l'ensemble des paramètres.

$\hat{\theta}$  estimateur de  $\theta_0$ .

$\theta_0$  la vraie valeur du paramètre.

### Probabilité

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$  convergence en distribution.

$\xrightarrow{\mathcal{P.S.}}$  convergence presque sûre .

# Introduction

L'analyse et la prévision de la volatilité des séries financières constituent un enjeu majeur en économétrie et en gestion des risques. Depuis les travaux fondateurs d'Engle (1982) sur le modèle ARCH, puis leur généralisation par Bollerslev (1986) avec le modèle GARCH (*Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*), une vaste littérature s'est attachée à modéliser la dynamique de la variance conditionnelle. Le modèle GARCH(p,q) est défini par le système suivant :

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \epsilon_t, \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \end{cases}$$

Le modèle GARCH trouve de nombreuses applications dans divers domaines : en économie (taux de chômage, inflation), en finance (cours d'action, taux d'intérêt), en écologie (pollution à l'ozone), dans le secteur des transports (trafic aérien international) ainsi qu'en démographie. Cette large gamme d'applications justifie l'importance d'une modélisation rigoureuse de la variance conditionnelle.

La spécification standard suppose que les innovations (ou chocs) suivent une loi normale centrée réduite, ce qui permet d'utiliser l'estimateur du maximum de vraisemblance. Cependant, de nombreuses études empiriques sur les rendements financiers révèlent des queues de distribution plus épaisses que celles de la loi normale, rendant cette hypothèse inadaptée. Dans ce contexte, l'utilisation de lois à queues lourdes, telle

que la loi de Cauchy, s'impose comme une alternative réaliste.

La loi de Cauchy, bien que classique en théorie des probabilités, présente une particularité remarquable : elle n'admet aucun moment d'ordre un ou supérieur. En particulier, son espérance mathématique n'est pas définie. Cette singularité remet en cause la plupart des résultats asymptotiques standards utilisés pour l'estimation des modèles GARCH, notamment la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Dès lors, l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance (EQMV), qui ne nécessite pas la spécification exacte de la loi des innovations, apparaît comme une méthodologie de choix. L'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance est défini par :

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ell_t(\theta),$$

où

$$\ell_t(\theta) = \ln(\pi) + \ln(\sigma_t(\theta)) + \ln\left(1 + \frac{X_t^2}{\sigma_t^2(\theta)}\right)$$

Le présent mémoire s'inscrit dans cette problématique. Il vise à étudier rigoureusement le comportement asymptotique de l'EQMV pour un processus GARCH( $p, q$ ) dont les innovations sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Cauchy standard  $C(0, 1)$ . Nous nous intéressons plus particulièrement à trois aspects fondamentaux : les conditions de stationnarité stricte du processus, la consistance forte de l'estimateur, et sa normalité asymptotique.

Sur le plan théorique, nous montrons que la condition

$$\sqrt{\sum_{i=1}^q \alpha_i} + \sqrt{\sum_{j=1}^p \beta_j} < 1$$

est suffisante pour garantir l'existence d'une solution strictement stationnaire et ergodique, et qu'elle est également nécessaire dans le cas particulier GARCH(1, 1). Nous établissons ensuite la forme causale du processus et la décroissance exponentielle de ses coefficients. Enfin, sous des hypothèses standards de compacité, d'identifiabilité et

de stationnarité, nous démontrons que l'EQMV est fortement consistant  $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \theta_0$  et asymptotiquement normal  $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, F^{-1}G(\theta_0)F^{-1})$ , où  $F$  est la matrice d'information et  $G$  la matrice de score.

Ce mémoire étudie principalement le QMLE pour le modèle GARCH basé sur la distribution de cauchy (0.1) organisé comme suit :

- Dans le première chapitre nous avons présenté des définitions principaux , propriétés des processus stochastiques des séries chronologiques et quelques notions de base dans le premier chapitre.
- Dans le deuxième chapitre nous avons défini l'estimateur de quasi maximum vraisemblance. En suit, nous étudions la stationnarité stricte de processus GARCH , La forme causale et la décroissance exponentielle. Enfin, nous prouvons la consistance et la normalité asymptotique de cet l'estimateur.
- Dans le troisième chapitre, nous avons effectué une étude numérique à l'aide de langage R pour vérifier les résultats théorique obtenus dans le deuxième chapitre.

## Définitions et notations

Dans ce chapitre, nous présentons les notions fondamentales et les outils mathématiques nécessaires : les processus stochastiques, la stationnarité, le bruit blanc, l'ergodicité et la causalité et les séries chronologiques. Ensuite, nous introduisons la loi de Cauchy en précisant sa densité, sa fonction de répartition ainsi que ses propriétés particulières. Enfin, nous rappelons les notions de maximum de vraisemblance et de quasi-maximum de vraisemblance, qui seront utilisées dans les chapitres suivants pour l'étude asymptotique du processus GARCH avec erreurs de Cauchy

## 1.1 Processus Stochastique

**Définition 1.1.1** Un processus stochastique, également appelé processus aléatoire, est une famille de variables aléatoires  $(X_t)_{t \in T}$  définies sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans un ensemble  $E$ , appelé espace d'états. Pour tout  $t \in T$ , l'application  $\omega \mapsto X_t(\omega)$  est mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F})$  dans  $(E, \mathcal{E})$ . L'ensemble  $T$  représente l'ensemble des instants considérés, et  $X_t$  désigne la valeur de la variable étudiée à l'instant  $t$ .

**Définition 1.1.2 (L'opérateur de retard) :**

L'opérateur de retard  $L$  d'une série temporelle  $X_t$  est défini par :

$$LX_t = X_{t-1}, \quad \text{pour tout } t > 1.$$

De façon générale : l'opérateur est appliqué  $k$  fois, on obtient :

$$L^k X_t = X_{t-k}.$$

### 1.1.1 Stationnarité

La stationnarité joue un rôle central dans la théorie des processus. Elle se définit par une série chronologique qui suppose que le comportement de la série est indépendant du temps. De manière plus précise, on identifie deux formes de stationnarité : au second ordre (faible) et au sens strict (forte)

### Espérance Mathématique

**Définition 1.1.3 :** soit  $X$  une variable aléatoire continue qui admet une densité de probabilité  $f_x$  si :

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x) dx < +\infty$$

L'espérance Mathématique de  $X$  est défini par :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X^r dp$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$$

avec  $\Omega$  l'ensemble des variable aléatoires et  $P$  la loi de probabilité

### Moment d'ordre $r$

**Définition 1.1.4** : Soit  $X$  une variables aléatoires réelle quelconque et  $r \in \mathbb{N}^*$ . On dira que la variable aléatoire réelle  $X$  a un moment d'ordre  $r$  si  $X^r$  a une espérance finie.

— Dans le cas continu :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X^r dp$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x^r f_X(x) dx$$

— Dans le cas discret :

$$\mathbb{E}(X^r) = \sum_i x_i^r \mathbb{P}(X = x_i).$$

Et le moment d'ordre  $r$  **centré** est donné par :

$$E\{X\} = \int_{\Omega} (X - \mu)^r dp,$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^r f_X(x) dx,$$

où  $\mu = E\{X\}$ .

**Remarque 1.1.1** Nous remarquons que :

1. Le moment d'ordre 0 d'une variable aléatoire existe toujours et vaut

$$\mathbb{E}(X^0) = \mathbb{E}(1) = 1.$$

2. Le moment d'ordre 1 est l'espérance de  $X$ .

### La stationnarité au sens strict (forte)

On dit que le processus  $x_t$  est stationnaire au sens strict ou stationnaire au sens fort si pour toute famille finie d'instants  $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in T$  et tout entier  $h$ , la loi de probabilité du vecteur aléatoire  $(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$  est la même que celle du vecteur  $(x_{t_1+h}, x_{t_2+h}, \dots, x_{t_n+h})$

### La stationnarité au second ordre (faible)

Un processus stochastique  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est dit **stationnaire au sens faible** (ou stationnaire d'ordre deux) si ses moments d'ordre un et deux sont invariants dans le temps. si les trois conditions sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}(X_t) = \mu < +\infty, \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \\ \text{Var}(X_t) = \sigma^2 < +\infty, \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \\ \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)] = \gamma(h), \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

**Note cruciale pour ce mémoire :** La loi de Cauchy ne possédant ni espérance ni variance finies au sens classique (comme démontré à la section 1.2.3), un processus GARCH dont les innovations suivent une loi de Cauchy ne peut jamais satisfaire les conditions de cette stationnarité au second ordre. C'est pourquoi le recours exclusif à la stationnarité stricte (forte) et aux outils de l'exposant de Lyapunov est théoriquement indispensable dans notre étude.

## 1.1.2 Le processus bruit blanc(BB)

**Définition 1.1.5 :** Un processus  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un bruit blanc, s'il satisfait les conditions suivantes :

1.  $\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0.$

$$2. \forall t, h \in \mathbb{Z}, \quad \gamma_\varepsilon(h) = \mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 1.1.3 Ergodicité

**Définition 1.1.6 :** Une suite stationnaire  $X_i$  est dite ergodique si les seules variables  $Y = f(X)$  telles que  $Y = TY$  sont presque sûrement constantes.

**Théorème 1.1.1** Soit  $(X_k)$  une suite stationnaire ergodique. Pour toute fonction  $f$  mesurable telle que :

$$\mathbb{E}[|f(X_1)|] < \infty,$$

on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f(X_1)],$$

où la convergence a lieu presque sûrement et dans  $L^1$ .

### 1.1.4 Causalité

Un processus stochastique  $X_t$  est dit *causal* s'il existe une suite de constantes  $(\alpha_k)_{k \geq 0}$  telle que  $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$ , et :

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varepsilon_{t-k}.$$

### 1.1.5 Classification des processus stochastique

Une variable aléatoire  $X$  associée à chaque  $\omega \in \Omega$  une réalisation  $X(\omega)$ , un processus stochastique  $(X_t)_{t \in T}$  associée à chaque  $\omega$  une fonction (ou trajectoire)  $(X_t(\omega))_{t \in T}$  :

$$T \longrightarrow E$$

$$t \longmapsto X_t(\omega)$$

où  $E$  est l'espace d'arrivée des variables aléatoires  $X_t$ . Passer des variables aléatoires aux processus stochastiques revient à passer en analyse des points aux fonctions.

- Lorsque l'ensemble des temps  $T$  est au plus dénombrable (par exemple  $T = \mathbb{N}$ ), on parle de processus stochastiques à temps discret.
- Lorsqu'il est continu (i.e.  $T = [0, t_0]$  ou  $T = \mathbb{R}_+$ ), on parle de processus stochastiques à temps continu.

### 1.1.6 Les séries chronologiques

**Définition 1.1.7** *La théorie des séries chronologiques (ou temporelles) est appliquée de nos jours, qui est actuellement utilisée dans divers domaines tels que l'économétrie, la médecine et la démographie, pour ne mentionner qu'une petite fraction. Nous nous concentrons sur la progression d'un phénomène au fil du temps, afin de le décrire, de l'expliquer puis de l'anticiper dans le futur. On dispose donc d'observations à différents moments, c'est-à-dire d'une série de valeurs numériques indiquées par le temps.*

*Cette suite d'observations d'une famille de variables aléatoires réelles notée  $(X_t)_{t \in \Theta}$  est appelée série chronologique (ou série temporelle). Dans la suite de ce travail, nous la noterons  $(X_t)_{t \in \Theta}$  ou encore  $(X_t, t \in \Theta)$ .*

#### Objectifs principaux

L'étude des séries chronologiques constitue un outil fondamental permettant d'analyser, de décrire et d'expliquer l'évolution d'un phénomène au cours du temps. Elle offre également la possibilité de dégager des implications pratiques utiles à la prise de décision, notamment dans des domaines tels que le marketing ou la gestion. Par ailleurs, elle joue un rôle important dans les activités de contrôle et de suivi, comme la gestion des stocks ou la surveillance des processus industriels et chimiques.

De manière générale, l'analyse d'une série chronologique soulève plusieurs problématiques liées à la nature et à la structure des données temporelles. Toutefois, l'un des

objectifs majeurs de cette étude demeure la prévision, qui consiste à estimer les valeurs futures ( $h = 1, 2, 3, \dots$ ) d'une série à partir des observations disponibles jusqu'à l'instant  $T$ , notées  $T : X_1, X_2, \dots, X_T$ .

### **Modélisation d'une série chronologique**

Un modèle peut être défini comme une représentation simplifiée de la réalité, dont l'objectif est de reproduire et d'expliquer les mécanismes de fonctionnement du phénomène étudié, afin d'en faciliter la compréhension et l'analyse. On distingue principalement deux types de modèles :

- **les modèles déterministes** : relèvent de la statistique descriptive et n'intègrent pas explicitement le calcul des probabilités. Ils reposent sur l'hypothèse selon laquelle la valeur d'une série à l'instant  $t$  est une fonction du temps, à laquelle s'ajoute un terme d'erreur centré  $\varepsilon_t$ , représentant l'écart entre la réalité et le modèle : On suppose en outre que les termes d'erreur  $\varepsilon_t$  sont décorrélés. Les deux modèles de ce type les plus usités sont les suivants :

1. **le modèle additif** : Dans un modèle additif. On suppose que les trois composantes :  $C_t$  tendance,  $S_t$  variations saisonnières et  $\varepsilon_t$  variations accidentelles sont indépendantes les unes des autres.

On considère que la série  $X_t$  s'écrit comme la somme des trois composantes :

$$X_t = C_t + S_t + \varepsilon_t$$

2. **le modèle multiplicatif** : La variable  $X_t$  s'écrit au terme d'erreur près comme le produit de la tendance et d'une composante de saisonnalité :

$$X_t = Z_t(1 + S_t)(1 + \varepsilon_t)$$

- **les modèles stochastiques**. Ils sont du même type que les modèles déterministes à ceci près que les variables de bruit  $\varepsilon_t$  ne sont pas iid mais possèdent une

structure de corrélation non nulle :  $\epsilon_t$  est une fonction des valeurs passées ( $\pm$  lointaines suivant le modèle) et d'un terme d'erreur  $\eta_t$  :

$$\epsilon_t = g(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots, \eta_t)$$

## 1.2 La loi de cauchy

La loi de Cauchy, aussi appelée loi de Lorentz dans les livres de physique, est une loi de probabilité qui doit son nom au mathématicien français Augustin Louis Cauchy. C'est une loi célèbre en probabilité car elle constitue un contre-exemple important : si une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Cauchy, alors elle n'a pas d'espérance mathématique définie. Cela signifie que la moyenne attendue de cette variable n'existe pas, ce qui la distingue des lois plus classiques comme la loi normale.

### 1.2.1 Densité de probabilité

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi de cauchy si elle est absolument continue et admet pour densité  $f_x$  : [\[11\]](#)

$$f(x) = \frac{1}{\pi\alpha \left[ 1 + \left( \frac{x-x_0}{\alpha} \right)^2 \right]}, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

$x_0$  : paramètre de position.

$\alpha > 0$  : paramètre d'échelle.

La loi de Cauchy standard correspond au cas  $x_0 = 0$  et  $\alpha = 1$ .

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

### 1.2.2 La fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue  $X$  est définie par [11] :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Dans le cas de la loi de Cauchy standard ( $x_0 = 0$  et  $\alpha = 1$ ), elle est obtenue par intégration de la densité de probabilité et s'écrit :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

La fonction  $F$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

### 1.2.3 Moments de la loi de cauchy

#### L'espérance de la loi de cauchy

La loi de Cauchy n'a pas d'espérance. Démontrons dans le cas standard pour simplifier les calculs (qui resteraient tout de même valables). On a :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

Or, on sait que :

$$\int_0^a \frac{x}{1+x^2} dx = \left[ \ln(1+x^2) \right]_0^a = \ln(1+a^2)$$

et donc :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \ln(1+a^2) = +\infty$$

Les intégrales qui définissent l'espérance de cette loi ne convergent pas, de sorte qu'une variable aléatoire de Cauchy ne possède pas d'espérance.

### **La variance de la loi de Cauchy**

La loi de Cauchy ne possède pas d'espérance et, par conséquent, elle n'a pas de variance. En effet, les queues épaisses de sa densité font que les intégrales nécessaires au calcul de la moyenne et de la variance divergent.

## **1.2.4 Difficultés spécifiques de la loi de Cauchy dans l'estimation des GARCH**

L'absence de moments d'ordre 1 ou supérieur brise l'architecture standard de l'économétrie des séries temporelles du second ordre. Les théorèmes centraux limites classiques (TCL) ne s'appliquent pas directement aux observations brutes du processus. L'estimation par Quasi-Maximum de Vraisemblance (EQMV) doit donc être rigoureusement manipulée via des transformations logarithmiques stables et des propriétés de martingales spécifiques sur la fonction de score pour restaurer la normalité asymptotique de l'estimateur.

## **1.3 Le maximum de vraisemblance**

### **1.3.1 Estimateur**

**Définition 1.3.1** *Une statistique  $k$  est une fonction des observations  $x_1, x_2, \dots, x_n$  issues d'un échantillon. Plus précisément, il s'agit d'une application :*

$$k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \longrightarrow k(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Comme les observations  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont des réalisations des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , la quantité calculée à partir des observations  $k(x_1, x_2, \dots, x_n)$  correspond à une réalisation de la variable aléatoire  $k(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

On note généralement  $k_n = k(x_1, x_2, \dots, x_n)$  la valeur observée de la statistique, tandis que  $K_n = k(X_1, X_2, \dots, X_n)$  désigne la variable aléatoire correspondante.

**Définition 1.3.2** Un estimateur d'une grandeur  $\theta$  est une statistique  $k_n$  à valeurs dans l'ensemble des valeurs possibles de  $\theta$ . Une estimation de  $\theta$  est une réalisation  $k_n$  de l'estimateur  $K_n$ .

### 1.3.2 vraisemblance

**Définition 1.3.3** On appelle **fonction de vraisemblance** (ou plus simplement **vraisemblance**) pour l'échantillon  $(x_1, \dots, x_n)$ , la fonction du paramètre  $\theta$  définie par :

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, \theta) & \text{si les } X_i \text{ sont discrètes} \\ f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n, \theta) & \text{si les } X_i \text{ sont continues} \end{cases}$$

Dans le cas où les variables  $X_i$  sont **indépendantes et identiquement distribuées** (i.i.d.), la fonction de vraisemblance se simplifie et s'écrit comme le produit des lois marginales :

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n P(X = x_i, \theta) & \text{si les } X_i \text{ sont discrètes} \\ \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) & \text{si les } X_i \text{ sont continues} \end{cases}$$

## fonction de log-vraisemblance

**Définition 1.3.4** On appelle fonction de log-vraisemblance pour l'échantillon  $(x_1, \dots, x_n)$ , toute fonction de  $\theta$  définie par :

$$L_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \log (L_n(x_1, \dots, x_n; \theta))$$

Cette fonction n'est définie que pour les valeurs de  $\theta$  telles que  $L(x_1, \dots, x_n; \theta) > 0$ .

Puisque la fonction logarithme népérien est strictement croissante, l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV), noté  $\hat{\theta}_n$ , est celui qui maximise simultanément la vraisemblance et la log-vraisemblance :

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} (L(x_1, \dots, x_n; \theta)).$$

### 1.3.3 l'estimateur de quasi maximum de vraisemblance

En général, la Fonction de vraisemblance exacte pour un processus  $X$  n'est souvent pas calculable car les valeurs passées du phénomène  $(X_0, X_{-1}, \dots)$  sont généralement inconnues. Pour pallier ce problème, on utilise la quasi-vraisemblance, obtenue en remplaçant les observations passées par des valeurs initiales arbitraires (souvent des zéros).

L'estimateur de quasi-vraisemblance maximale (EQMV), noté  $\hat{\theta}_n$ , est alors défini par :

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} \log (QL_{\theta}(X_1, \dots, X_n))$$

## 1.4 Inégalité de cauchy-schwarz

**Définition 1.4.1** Soient  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  et  $(V_1, V_2, \dots, V_n)$  deux suites de nombres réels ou complexes. Alors, on a l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^n |U_k V_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |U_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n |V_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## 1.5 Convergence presque sûre des variables aléatoires

**Définition 1.5.1** Nous disons que la suite  $X_n$  converge presque sûrement vers  $X$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \sup_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon \right) = 0.$$

Ceci est noté  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} X$ .

# processus GARCH (p,q) avec erreurs de Cauchy : Etude asymptotique de l'EQMV

Dans ce chapitre, nous allons traiter l'estimation des paramètres d'un modèle GARCH (p,q) avec erreurs de Cauchy, la méthode de l'estimation la plus utilisée est la méthode du quasi maximum de vraisemblance. nous commençons par établir une condition de stationnarité stricte basée sur l'exposant de Lyapunov. Par suite nous présentons la forme causale du processus et montrons la décroissance exponentielle de ses coefficients. Enfin, nous prouvons les propriétés stationnaires de QMV c'est à dire la consistance et la normalité asymptotique de cet estimateur paramétrique.

## 2.1 Le modèle de GARCH(p,q)

Le modèle de GARCH (p,q) (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) a été introduit ( par Bollerslev (1986) [4] est défini par :

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \cdot \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$  et  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un bruit i.i.d. de densité symétrique par rapport à 0 (par exemple Cauchy(0,1)), non dégénéré et indépendant du passé.

## 2.2 Stationnarité Stricte

La définition du modèle GARCH est simple mais son étude mathématique est difficile notamment le problème de la stationnarité ; La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une unique solution stationnaire est due à Nelson[10] pour le modèle GARCH(1,1) et à Bougerol et Picard [3] pour le modèle GARCH (p,q). On considère d'abord le modèle GARCH (1,1) qui peut être étudié d'une manière plus explicite que le cas général

### 2.2.1 Conditions d'existence et de stationnarité stricte

#### i) Représentation linéaire aléatoire d'ordre 1

Une méthode essentielle pour analyser la stationnarité des modèles GARCH consiste à les reformuler comme un système récurrent linéaire aléatoire d'ordre 1. Cette représentation, introduite par Philippe Bougerol en 1992 [3], permet d'exploiter la théorie des produits aléatoires de matrices.

**Proposition 2.2.1 : (Vecteur d'état)** Pour un modèle GARCH(p, q), on définit le vecteur d'état  $X_t \in \mathbb{R}^m$  où  $m = p + q$  :

$$X_t = \left( \sigma_{t+1}^2, \sigma_t^2, \dots, \sigma_{t-p+2}^2, X_t^2, X_{t-1}^2, \dots, X_{t-q+2}^2 \right)^T.$$

Le vecteur d'état  $X_t$  satisfait une équation de récurrence linéaire aléatoire de la forme :

$$X_t = A(\varepsilon_t)X_{t-1} + b \tag{2.2}$$

où :

- $b = (\omega, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur constant,
- $A(\varepsilon_t)$  est une matrice aléatoire de dimension  $m \times m$  dépendant de  $\varepsilon_t$ .

Construction explicite dans le cas du modèle **GARCH(1,1)**. Dans le cas particulier où  $p = q = 1$ , on a  $m = 2$ . On définit le vecteur d'état par :

$$X_t = \begin{pmatrix} \sigma_{t+1}^2 \\ X_t^2 \end{pmatrix}.$$

Le modèle s'écrit alors :

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha X_t^2 + \beta \sigma_t^2,$$

$$X_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2.$$

Ainsi, on peut écrire le système sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{t+1}^2 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \varepsilon_t^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_t^2 \\ X_{t-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit :  $X_t = A(\varepsilon_t)X_{t-1} + b, A(\varepsilon_t) = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \varepsilon_t^2 & 0 \end{pmatrix}.$

**Remarque 1.1.** Pour des valeurs quelconques de  $p$  et  $q$ , la matrice  $A(\varepsilon_t)$  possède une structure de matrice compagnon par blocs. Sa première ligne contient les coefficients  $\beta_1, \dots, \beta_p, \alpha_1, \dots, \alpha_q$ . Les lignes suivantes sont constituées de 1 sur la sous-diagonale, permettant de décaler les composantes du vecteur d'état, et de 0 ailleurs.

## ii) Processus itéré et théorème ergodique sous-additif

**Démonstration :** On considère la relation récursive suivante :

$$X_t = A(\varepsilon_t)X_{t-1} + b$$

**Première itération :** On a :

$$X_{t-1} = A(\varepsilon_{t-1})X_{t-2} + b$$

En substituant dans l'expression de  $X_t$ , on obtient :

$$\begin{aligned} X_t &= A(\varepsilon_t)(A(\varepsilon_{t-1})X_{t-2} + b) + b \\ &= A(\varepsilon_t)A(\varepsilon_{t-1})X_{t-2} + A(\varepsilon_t)b + b \end{aligned}$$

**Deuxième itération :** On écrit :

$$X_{t-2} = A(\varepsilon_{t-2})X_{t-3} + b$$

En remplaçant dans l'expression précédente, il vient :

$$\begin{aligned} X_t &= A(\varepsilon_t)A(\varepsilon_{t-1})(A(\varepsilon_{t-2})X_{t-3} + b) + A(\varepsilon_t)b + b \\ &= A(\varepsilon_t)A(\varepsilon_{t-1})A(\varepsilon_{t-2})X_{t-3} + A(\varepsilon_t)A(\varepsilon_{t-1})b + A(\varepsilon_t)b + b \end{aligned}$$

En poursuivant ce procédé par récurrence, on obtient l'expression générale suivante :

$$X_t = \left( \prod_{k=1}^t A(\varepsilon_{t+1-k}) \right) X_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \left( \prod_{k=1}^j A(\varepsilon_{t+1-k}) \right) b$$

**1. Propriété de sous-additivité :** La suite définie par  $(\log \|A(\varepsilon_n) \cdots A(\varepsilon_1)\|)_{n \geq 1}$  possède une structure sous-additive (en espérance). Pour tous  $n, m \geq 1$ , on vérifie l'inégalité suivante :

$$\log \|A(\varepsilon_{n+m}) \cdots A(\varepsilon_1)\| \leq \log \|A(\varepsilon_{n+m}) \cdots A(\varepsilon_{n+1})\| + \log \|A(\varepsilon_n) \cdots A(\varepsilon_1)\|$$

En passant à l'espérance, on définit la suite  $u_n = \mathbb{E}[\log \|A(\varepsilon_n) \cdots A(\varepsilon_1)\|]$ . La

structure de la suite garantit que :

$$u_{n+m} \leq u_n + u_m \quad (2.3)$$

**2. Théorème de Exposant de Lyapunov :** D'après le théorème ergodique sous-additif de Kingman (1968) [8], si une suite de variables aléatoires réelles  $(u_n)_{n \geq 1}$  vérifie la propriété (2.3).

Alors la limite suivante existe presque sûrement et dans  $L^1$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[u_n] = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \mathbb{E}[u_n].$$

**Application à notre modèle :** On définit :

$$u_n = \log \left\| \prod_{k=1}^n A(\epsilon_{n+1-k}) \right\| = \log \|A(\epsilon_n)A(\epsilon_{n-1}) \cdots A(\epsilon_1)\|.$$

La sous-additivité de la suite  $(u_n)$  découle de la propriété de la norme matricielle :

$$\|A_{n+m}\| \leq \|A_{n+m} \cdots A_{n+1}\| \cdot \|A_n \cdots A_1\|.$$

En appliquant le théorème de Kingman [8], on obtient l'existence de la limite :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[\log \|A(\epsilon_n) \cdots A(\epsilon_1)\|] = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \mathbb{E}[\log \|A(\epsilon_n) \cdots A(\epsilon_1)\|] \quad (2.4)$$

Cette limite  $\gamma \in ]-\infty, +\infty[$  est définie comme l'**exposant de Lyapunov** supérieur du produit de matrices aléatoires.

**3. Condition suffisante pour GARCH(p,q) avec erreurs de Cauchy :**

**Proposition 2.2.2 :** Soit  $(X_t)$  un processus GARCH(p,q) défini par (2.1), alors, une

*condition suffisante* pour l'existence d'une solution strictement stationnaire et ergodique est :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^q \alpha_i} + \sqrt{\sum_{j=1}^p \beta_j} < 1.$$

De plus, dans le cas particulier GARCH(1,1), cette condition est également *nécessaire*.

### 1. Réduction du GARCH(p,q) à une forme GARCH(1,1) dans l'espérance du log.

D'après la représentation vectorielle d'ordre 1 (2.2), le processus admet une matrice aléatoire companion  $A(\varepsilon_t)$  de taille  $m = p + q$  telle que :

$$X_t = A(\varepsilon_t)X_{t-1} + b$$

où  $X_t$  contient les variances conditionnelles et les carrés des observations passées. L'exposant de Lyapunov supérieur est défini par (2.4) Par sous-multiplicativité de la norme et par une majoration terme à terme (obtenue par inspection de la structure bloc de  $A(\varepsilon_t)$ ), on montre qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\|A(\varepsilon_t)\| \leq C \left( \varepsilon_t^2 \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j \right).$$

On pose :

$$\alpha_{total} = \sum_{i=1}^p \alpha_i, \quad \beta_{total} = \sum_{j=1}^q \beta_j$$

Donc :

$$\|A(\varepsilon_t)\| \leq C \left( \alpha_{total} \varepsilon_t^2 + \beta_{total} \right)$$

\* Passage au logarithme

$$\log \|A(\varepsilon_t)\| \leq \log C + \log (\alpha_{total} \varepsilon_t^2 + \beta_{total})$$

\* Sommation sur  $t = 1$  à  $n$

$$\sum_{t=1}^n \log \|A(\varepsilon_t)\| \leq n \log C + \sum_{t=1}^n \log (\alpha_{total} \varepsilon_t^2 + \beta_{total})$$

\* Division par  $n$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log \|A(\varepsilon_t)\| \leq \log C + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log (\alpha_{total} \varepsilon_t^2 + \beta_{total})$$

\* Passage à la limite  $n \rightarrow \infty$

Par définition de l'exposant de Lyapunov :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log \|A(\varepsilon_t)\| \quad \text{p.s.}$$

On a  $\log C \rightarrow 0$ . Donc :

$$\gamma \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log (\alpha_{total} \varepsilon_t^2 + \beta_{total}) \quad \text{p.s.}$$

\* Utilisation du théorème ergodique

Si  $(\varepsilon_t)$  est stationnaire et ergodique :

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log (\alpha_{total} \varepsilon_t^2 + \beta_{total}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E} [\log (\alpha_{total} \varepsilon_1^2 + \beta_{total})]$$

\* Résultat final

$$\gamma \leq \mathbb{E} [\log (\alpha_{total} \varepsilon_1^2 + \beta_{total})]$$

**Remarque 2.2.1** *L'inégalité ci-dessus est classique dans la théorie des produits de matrices aléatoires (Bougerol, Picard, (1992))[3]. La constante C disparaît dans la limite car  $\log C \rightarrow 0$ .*

Ainsi, si l'espérance du membre de droite est strictement négative, alors  $\gamma < 0$ , ce qui garantit la stationnarité stricte et l'ergodicité d'après le théorème de (Bougerol, Picard (1992))[3].

## 2. Calcul explicite de l'espérance pour des erreurs de Cauchy.

On doit calculer, pour  $\alpha_{\text{total}} > 0$  et  $\beta_{\text{total}} > 0$  (les cas limites se traitent par continuité) :

$$I(\alpha_{\text{total}}, \beta_{\text{total}}) = \mathbb{E} \left[ \log(\alpha_{\text{total}} \varepsilon_t^2 + \beta_{\text{total}}) \right], \quad \varepsilon_t \sim \text{Cauchy}(0, 1).$$

Par symétrie de la densité de Cauchy et par parité de la fonction  $x \mapsto \alpha_{\text{total}} x^2 + \beta_{\text{total}}$ , on a :

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\log(\alpha_{\text{total}} x^2 + \beta_{\text{total}})}{1 + x^2} dx.$$

Supposons  $\alpha_{\text{total}} > 0$ . En factorisant  $\alpha_{\text{total}}$  :

$$\log(\alpha_{\text{total}} x^2 + \beta_{\text{total}}) = \log(\alpha_{\text{total}}) + \log\left(x^2 + \frac{\beta_{\text{total}}}{\alpha_{\text{total}}}\right).$$

On pose  $a = \sqrt{\frac{\beta_{\text{total}}}{\alpha_{\text{total}}}} \geq 0$ . Alors :

$$I = \log(\alpha_{\text{total}}) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\log(x^2 + a^2)}{1 + x^2} dx.$$

L'intégrale est une intégrale classique. Pour  $a > 0$ , on a :

$$\int_0^\infty \frac{\log(x^2 + a^2)}{1 + x^2} dx = \pi \log(1 + a).$$

**Justification** : En dérivant par rapport à  $a$  :

$$\frac{d}{da} \int_0^\infty \frac{\log(x^2 + a^2)}{1 + x^2} dx = \int_0^\infty \frac{2a}{(1 + x^2)(x^2 + a^2)} dx.$$

Cette dernière intégrale se calcule par décomposition en éléments simples :

$$\frac{2a}{(1 + x^2)(x^2 + a^2)} = \frac{2a}{a^2 - 1} \left( \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2 + a^2} \right).$$

En intégrant de 0 à  $\infty$ , on obtient  $\frac{\pi}{1+a}$ . Puis en intégrant par rapport à  $a$  de 0 à  $a$  et en utilisant  $\int_0^\infty \frac{\log(x^2)}{1+x^2} dx = 0$ , on obtient le résultat.

donc :

$$I = \log(\alpha_{\text{total}}) + \frac{2}{\pi} \cdot \pi \log(1 + a)$$

Ainsi :

$$I = \log(\alpha_{\text{total}}) + 2 \log \left( 1 + \sqrt{\frac{\beta_{\text{total}}}{\alpha_{\text{total}}}} \right).$$

On simplifie :

$$\begin{aligned} I &= \log(\alpha_{\text{total}}) + 2 \log \left( \frac{\sqrt{\alpha_{\text{total}}} + \sqrt{\beta_{\text{total}}}}{\sqrt{\alpha_{\text{total}}}} \right) \\ &= \log(\alpha_{\text{total}}) + 2 \log(\sqrt{\alpha_{\text{total}}} + \sqrt{\beta_{\text{total}}}) - 2 \log(\sqrt{\alpha_{\text{total}}}). \end{aligned}$$

Comme  $2 \log(\sqrt{\alpha_{\text{total}}}) = \log(\alpha_{\text{total}})$ , les termes se simplifient. Il reste :

$$I = 2 \log(\sqrt{\alpha_{\text{total}}} + \sqrt{\beta_{\text{total}}}).$$

On vérifie que cette formule s'étend par continuité aux cas  $\alpha_{\text{total}} = 0$  ou  $\beta_{\text{total}} = 0$  (en convenant que  $\log(0) = -\infty$  si l'autre paramètre est nul). Par

conséquent :

$$\mathbb{E} \left[ \log \left( \alpha_{\text{total}} \varepsilon_t^2 + \beta_{\text{total}} \right) \right] = 2 \log \left( \sqrt{\alpha_{\text{total}}} + \sqrt{\beta_{\text{total}}} \right).$$

### 3. Obtention de la condition suffisante.

On a donc la majoration :

$$\gamma \leq 2 \log \left( \sqrt{\alpha_{\text{total}}} + \sqrt{\beta_{\text{total}}} \right).$$

Si  $\sqrt{\alpha_{\text{total}}} + \sqrt{\beta_{\text{total}}} < 1$ , alors le membre de droite est strictement négatif (car  $\log(1) = 0$  et  $\log$  est strictement croissante). Par conséquent,  $\gamma < 0$ .

D'après le théorème de Bougerol , Picard (1992[3]), cette condition garantit l'existence et l'unicité d'une solution strictement stationnaire et ergodique pour le processus GARCH(p,q).

### 4. Cas GARCH(1,1) : nécessité de la condition.

Pour GARCH(1,1), on peut montrer (par des arguments plus fins de théorie des produits de matrices aléatoires pour les matrices  $2 \times 2$  à coefficients positifs, cf. Furstenberg, 1963) [6] que l'exposant de Lyapunov est **exactement** donné par :

$$\gamma = \mathbb{E} \left[ \log(\alpha \varepsilon_t^2 + \beta) \right] = 2 \log(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}).$$

Dans ce cas,  $\gamma < 0$  équivaut strictement à  $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} < 1$ . La condition est donc **nécessaire et suffisante**.

### 2.2.2 Corollaire pour le cas GARCH(1,1)

On considère le processus  $GARCH(1,1)$  défini par :

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha X_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{cases}$$

avec  $\omega > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ , et  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un bruit i.i.d. de loi de Cauchy standard  $C(0,1)$ , indépendant du passé.

**On a :**

Si  $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} < 1$  (i.e.  $\gamma < 0$ ), alors le processus  $(X_t)$  admet une unique solution strictement stationnaire et ergodique.

Si  $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} > 1$  (i.e.  $\gamma > 0$ ), alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma_t^2 = +\infty \text{ p.s.}$$

et par conséquent :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t^2 = +\infty \text{ p.s.}$$

#### Preuve du cas explosif ( $\gamma > 0$ )

En itérant l'équation de la variance conditionnelle, on obtient pour tout  $t \geq 2$  :

$$\sigma_t^2 = \omega \sum_{k=0}^{t-2} \prod_{i=1}^k (\alpha \varepsilon_{t-i}^2 + \beta) + \sigma_1^2 \prod_{i=1}^{t-1} (\alpha \varepsilon_{t-i}^2 + \beta)$$

Comme  $\omega > 0$  et  $\sigma_1^2 > 0$ , on a la minoration :

$$\sigma_t^2 \geq \sigma_1^2 \prod_{i=1}^{t-1} (\alpha \varepsilon_i^2 + \beta)$$

En prenant le logarithme et en divisant par  $t$  :

$$\frac{1}{t} \log \sigma_t^2 \geq \frac{1}{t} \log \sigma_1^2 + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t-1} \log(\alpha \varepsilon_i^2 + \beta)$$

La loi forte des grands nombres (applicable car  $(\varepsilon_i)$  est i.i.d.) donne :

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t-1} \log(\alpha \varepsilon_i^2 + \beta) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \gamma > 0$$

Ainsi,  $\frac{1}{t} \log \sigma_t^2$  converge p.s. vers  $\gamma > 0$ , ce qui implique  $\log \sigma_t^2 \rightarrow +\infty$  p.s., et donc  $\sigma_t^2 \rightarrow +\infty$  p.s.

### Remarque

Le cas limite  $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 1$  correspond à  $\gamma = 0$  ; le processus n'est alors pas strictement stationnaire (comportement critique).

Sous cette forme, l'exposant de Lyapunov s'interprète comme la moyenne théorique (espérance) du logarithme du facteur de contraction du système. Ce résultat s'appuie sur les propriétés de convergence des équations de récurrence stochastiques développées par Vervaat (1979) [12] et détaillées dans les travaux de Bougerol (1992)[3].

## 2.3 La forme causale et la décroissance exponentielle

### 2.3.1 Définition et démonstration de la forme causale

**Définition 2.3.1 (Forme causale)** *La forme causale d'un processus GARCH(p, q) est donnée par :*

$$\sigma_t^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j}^2 \quad (2.5)$$

où  $(\pi_j)_{j \geq 1}$  est une suite de coefficients réels positifs.

## Preuve

1- On part du modèle GARCH(p, q) (2.1), On suppose que la forme causale existe pour les instants passés :

$$\sigma_{t-j}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k X_{t-j-k}^2$$

2- On substitue dans l'équation GARCH :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k X_{t-j-k}^2$$

3- On réécrit la double somme comme une seule série. En posant  $m = j + k$  :

$$\sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^{\infty} \beta_j \pi_k X_{t-j-k}^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\min(q,m)} \beta_j \pi_{m-j} \right) X_{t-m}^2$$

avec la convention  $\pi_0 = 0$ .

4- On réécrit le terme  $\sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2$  :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\min(p,m)} \alpha_i \mathbf{1}_{i=m} \right) X_{t-m}^2$$

où  $\mathbf{1}_{i=m}$  vaut 1 si  $i = m$  et 0 sinon.

5- On rassemble tous les termes :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\min(p,m)} \alpha_i \mathbf{1}_{i=m} + \sum_{j=1}^{\min(q,m)} \beta_j \pi_{m-j} \right) X_{t-m}^2$$

6- Pour obtenir une forme causale pure, on suppose  $\omega = 0$  (processus centré) :

$$\sigma_t^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\min(p,m)} \alpha_i \mathbf{1}_{i=m} + \sum_{j=1}^{\min(q,m)} \beta_j \pi_{m-j} \right) X_{t-m}^2$$

7- On définit les coefficients  $\pi_m$  par la récurrence :

$$\pi_m = \sum_{i=1}^{\min(p,m)} \alpha_i \mathbf{1}_{i=m} + \sum_{j=1}^{\min(q,m)} \beta_j \pi_{m-j}$$

8- On obtient finalement la forme causale :

$$\sigma_t^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \pi_m X_{t-m}^2$$

### 2.3.2 Condition de sommabilité

**Définition 2.3.2 (Condition de sommabilité)** La forme causale est dite **bien définie** si la série des coefficients converge :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j < \infty \quad (2.6)$$

**Preuve :**

1- On prend l'espérance de la forme causale :

$$\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \mathbb{E} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j}^2 \right]$$

2- Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \mathbb{E}[X_{t-j}^2]$$

3- Si le processus est stationnaire,  $\mathbb{E}[X_{t-j}^2] = \mathbb{E}[X_t^2] = \sigma_X^2$  (constante positive) :

$$\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \sigma_X^2 \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j$$

4-  $\sigma_t^2$  est une variance conditionnelle, donc son espérance doit être finie :

$$\sigma_X^2 \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j < \infty$$

5- Comme  $\sigma_X^2 > 0$ , on obtient :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j < \infty$$

**Récurrence des coefficients  $\pi_j$**

**Proposition 2.3.1** *Les coefficients  $\pi_j$  de la forme causale satisfont pour tout  $j \geq 1$  :*

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{\min(p,j)} \alpha_i \mathbf{1}_{i=j} + \sum_{k=1}^{\min(q,j)} \beta_k \pi_{j-k} \quad (2.7)$$

**preuve :**

**Étape 1 :** On écrit l'équation GARCH(p, q) en utilisant la forme causale :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \pi_m X_{t-m}^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k X_{t-j-k}^2$$

**Étape 2 :** On réécrit  $\sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2$  comme une série en  $X_{t-m}^2$  :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\min(p,m)} \alpha_i \mathbf{1}_{i=m} \right) X_{t-m}^2$$

**Étape 3 :** On réécrit la double somme comme une série en  $X_{t-m}^2$  :

$$\sum_{j=1}^q \beta_j \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k X_{t-j-k}^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\min(q,m)} \beta_j \pi_{m-j} \right) X_{t-m}^2$$

**Étape 4 :** On suppose  $X_t = 0$  (processus centré). On identifie les coefficients de  $X_{t-m}^2$

pour chaque  $m \geq 1$  :

$$\pi_m = \sum_{i=1}^{\min(p,m)} \alpha_i \mathbf{1}_{i=m} + \sum_{j=1}^{\min(q,m)} \beta_j \pi_{m-j} \quad (2.8)$$

### 2.3.3 Décroissance exponentielle

Sous la condition de stationnarité stricte établie dans la proposition 2.2.2, à savoir :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^q \alpha_i} + \sqrt{\sum_{j=1}^p \beta_j} < 1$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{\sum_{j=1}^p \beta_j} < 1$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^p \beta_j < 1$$

**Proposition 2.3.2** Soient  $0 < q_0 < 1$  et  $0 < q_1 < 1$ . On définit l'ensemble[5] :

$$U = \{\phi \mid \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p \leq q_0\}.$$

Pour tout  $\phi \in U$ , il existe deux constantes positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que :

$$\sup_{\phi \in U} \{\pi_j^-, \pi_j^+\} \leq C_1 q_0^{j/p}, \quad \forall j \geq 0, \quad (2.9)$$

et

$$\sup_{\phi \in U} \left\{ \left| \frac{\partial \pi_j^-}{\partial \phi} \right|, \left| \frac{\partial \pi_j^+}{\partial \phi} \right| \right\} \leq C_2 j q_1^{j/p}, \quad \forall j \geq 0. \quad (2.10)$$

**preuve :**

Preuve de la relation (2.9) par récurrence

Initialisation pour  $i = 0$  :

À partir de la forme causale du modèle GARCH, on a :

$$\pi_0 = \frac{a_0}{1 - \sum_{k=1}^p \beta_k}$$

Puisque  $\sum_{k=1}^p \beta_k \leq q_0 < 1$ , on obtient :

$$\pi_0 \leq \frac{a_0}{1 - q_0} \leq C_1 q_0^{0/p} = C_1$$

Ainsi, la relation (2.9) est vérifiée pour  $i = 0$ .

### Hérédité :

Supposons que la relation (2.9) est vraie pour tout indice jusqu'à  $i$ , avec  $i \geq R = \max(p, q)$ . Montrons qu'elle reste vraie pour  $i + 1$ .

D'après la relation de récurrence des coefficients  $\pi_i$  (équation (2.8)), on a :

$$\pi_{i+1}^+ \leq (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p) \max_{1 \leq k \leq p} \pi_{i-k+1}^+$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence et le fait que  $\sum_{k=1}^p \beta_k \leq q_0$ , on obtient :

$$\pi_{i+1}^+ \leq q_0 \cdot C_1 q_0^{(i+1-p)/p} = C_1 q_0^{(i+1)/p}$$

De la même manière, on montre que :

$$\pi_i^- \leq C_2 q_0^{i/p}$$

Par conséquent :

$$\sup_{\phi \in \mathcal{U}} \{\pi_i^-, \pi_i^+\} \leq C_1 q_0^{i/p}, \quad \forall i \geq 0$$

Ceci achève la démonstration de (2.9).

### Preuve de la relation (2.10)

On commence par observer que pour tout  $i \geq 1$  :

$$\frac{\partial \pi_i^+}{\partial a_0} = 0$$

Montrons maintenant qu'il existe une constante  $C_5 > 0$  telle que :

$$\left| \frac{\partial \pi_i^+}{\partial a_j} \right| \leq C_5, \quad \forall i \geq 1, 1 \leq j \leq p \quad (2.11)$$

**Initialisation :** Pour  $i \leq R = \max(p, q)$ , les dérivées  $\frac{\partial \pi_i^+}{\partial a_j}$  sont bornées car ce sont des fonctions polynomiales en  $a_1, \dots, a_p, \beta_1, \dots, \beta_q$  à coefficients positifs, définies sur un compact  $U$ . Donc (2.11) est vérifiée pour  $i \leq R$ , à condition de choisir  $C_5$  suffisamment grand.

**Hérédité :** Pour  $i > R$ , en dérivant la relation de récurrence par rapport à  $a_j$ , on obtient :

$$\frac{\partial \pi_i^+}{\partial a_j} = \beta_1 \frac{\partial \pi_{i-1}^+}{\partial a_j} + \beta_2 \frac{\partial \pi_{i-2}^+}{\partial a_j} + \dots + \beta_q \frac{\partial \pi_{i-q}^+}{\partial a_j}$$

Puisque  $\pi_\ell^+ > 0$  et  $\frac{\partial \pi_\ell^+}{\partial a_j} \geq 0$  (car  $\pi_\ell^+$  est un polynôme à coefficients positifs), on a :

$$0 < \frac{1}{\pi_i^+} \frac{\partial \pi_i^+}{\partial a_j} \leq \max_{1 \leq m \leq q} \left( \frac{1}{\pi_{i-m}^+} \frac{\partial \pi_{i-m}^+}{\partial a_j} \right)$$

Ainsi, si l'hypothèse de récurrence est vraie pour tous les indices inférieurs à  $i$ , elle reste vraie pour  $i$ .

On montre de manière analogue, par récurrence, qu'il existe une constante  $C_6 > 0$  telle que :

$$\left| \frac{\partial \pi_i^+}{\partial \beta_j} \right| \leq C_6 i, \quad \forall i \geq 1, 1 \leq j \leq q$$

Ceci achève la démonstration de la relation (2.10).

### Conclusion :

Les relations (2.9) et (2.10) sont démontrées pour tout  $i \geq 0$ . La condition  $q_0 < 1$  garantit

la décroissance exponentielle des coefficients  $\pi_i$ , car  $q_0^{i/p} = (q_0^{1/p})^i = \rho^i$  avec  $\rho = q_0^{1/p} < 1$ .  
Ainsi :

$$\pi_i \leq C_1 \rho^i, \quad \forall i \geq 0$$

## 2.4 Consistance

### 2.4.1 Détermination de Quasi-vraisemblance

**1. Densité jointe initiale** Soit un échantillon de  $n$  variables aléatoires indépendantes  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  suivant une loi de Cauchy standard. En raison de l'indépendance des variables, la fonction de densité jointe est définie par le produit des densités marginales :

$$f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \prod_{t=1}^n f(\varepsilon_t) \quad (2.12)$$

**2. Changement de variable** Considérons la transformation linéaire suivante pour passer de  $\varepsilon_t$  à  $X_t$  :

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t \implies \varepsilon_t = \frac{X_t}{\sigma_t}$$

Le Jacobien de cette transformation pour chaque variable est donné par :

$$|J| = \left| \frac{d\varepsilon_t}{dX_t} \right| = \sigma_t^{-1}$$

**3. Densité de la loi de Cauchy transformée** La densité d'une loi de Cauchy standard est  $f(\varepsilon) = \frac{1}{\pi(1+\varepsilon^2)}$ . En substituant  $\varepsilon_t$  et en multipliant par le Jacobien, la densité de  $X_t$  devient :

$$f(x_t; \sigma_t) = \frac{1}{\sigma_t \pi \left( 1 + \left( \frac{x_t}{\sigma_t} \right)^2 \right)}$$

**4. Fonction de vraisemblance et Log-vraisemblance** La fonction de vraisemblance

$L$  pour l'ensemble de l'échantillon est le produit des densités individuelles :

$$L(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \prod_{t=1}^n \left[ \frac{1}{\sigma_t \pi \left( 1 + \frac{x_t^2}{\sigma_t^2} \right)} \right] \quad (2.13)$$

Pour faciliter l'optimisation, on applique le logarithme népérien ( $\ln$ ) pour obtenir la log-vraisemblance :

$$\begin{aligned} \ln L &= \sum_{t=1}^n \ln \left( \frac{1}{\sigma_t \pi \left( 1 + \frac{x_t^2}{\sigma_t^2} \right)} \right) \\ &= \sum_{t=1}^n \left[ -\ln(\sigma_t) - \ln(\pi) - \ln \left( 1 + \frac{x_t^2}{\sigma_t^2} \right) \right] \end{aligned}$$

**5. Expression finale** L'expression finale de la log-vraisemblance simplifiée est :

$$\ln L = -n \ln(\pi) - \sum_{t=1}^n \ln(\sigma_t) - \sum_{t=1}^n \ln \left( 1 + \frac{x_t^2}{\sigma_t^2} \right) \quad (2.14)$$

## 2.4.2 Propriété Asymptotique de la quasi vraisemblance

On considère le processus  $GARCH(p, q)$  défini en (2.1) avec des innovations  $(\epsilon_t)$  i.i.d. suivant une loi de Cauchy standard  $C(0, 1)$ . L'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance (EQMV) est donné par :

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ell_t(\theta) \quad (2.15)$$

et :

$$L_n(\theta) = -\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ell_t(\theta)$$

où :

$$\ell_t(\theta) = \ln(\pi) + \ln(\sigma_t(\theta)) + \ln\left(1 + \frac{X_t^2}{\sigma_t^2(\theta)}\right) \quad (2.16)$$

et  $\theta = (\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p)^\top \in \Theta \subset \mathbb{R}^{1+p+q}$ .

### Hypothèses nécessaire pour la convergence d'EQMV :

On suppose que :

**H1** :  $\Theta$  est un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^{1+p+q}$  (avec  $p, q \geq 1$ ), contenant  $\theta_0$ .

**H2** :  $\omega_0 > 0, \alpha_{i,0} \geq 0, \beta_{j,0} \geq 0$  et  $\sqrt{\sum_{i=1}^q \alpha_{i,0}} + \sqrt{\sum_{j=1}^p \beta_{j,0}} < 1$  (condition de stationnarité stricte).

**H3** :  $(\epsilon_t)$  est i.i.d. de loi de Cauchy standard  $C(0, 1)$ , indépendant du passé.

**H4 (Identifiabilité)** : La fonction  $\sigma_t(\theta)$  est telle que pour tout  $\theta \in \Theta$  :

$$\sigma_t(\theta) = \sigma_t(\theta_0) \quad \text{p.s.} \implies \theta = \theta_0$$

**H5** :  $\mathbb{E}_{\theta_0}[|\ell(\theta)|] < \infty$  pour tout  $\theta \in \Theta$ .

### 2.4.3 consistance

**Théorème 2.4.1** : Sous les hypothèses **(H1)et(H5)**, l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_n$  converge presque sûrement vers la vraie valeur  $\theta_0$  :

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \theta_0 \quad (2.17)$$

**preuve :**

Nous prouvons ce théorème en deux étapes. Dans la première étape, une loi forte uniforme des grands nombres sur  $\theta$  satisfaite par  $\frac{1}{n}\hat{L}_n(\theta)$  qui converge vers  $L(\theta) =$

$-\mathbb{E}[\ell(\theta)]$  est établie. Par suite, dans la deuxième étape, nous prouvons que  $L(\theta)$  admet un maximum unique en  $\theta_0$ .

### Étape 1 : Convergence uniforme de la quasi-vraisemblance

L'objectif de cette étape est de montrer que l'effet des valeurs initiales sur la log-vraisemblance s'estompe uniformément sur  $\Theta$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Nous devons prouver que :

$$\sup_{\theta \in \Theta} |L_n(\theta) - \hat{L}_n(\theta)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0 \quad (2.18)$$

Pour cela, nous introduisons la fonction auxiliaire  $h$  définie pour tout  $\sigma > 0$  par :

$$\ell(\sigma) = \ln(\pi) + \ln(\sigma) + \ln\left(1 + \frac{X_t^2}{\sigma^2}\right) \quad (2.19)$$

Le terme générique de la différence  $|\ell_t(\theta) - \hat{\ell}_t(\theta)|$  est analysé selon les points suivants :

#### 1. Application du Théorème des Accroissements Finis (TAF) :

La fonction  $\ell$  est continûment dérivable sur  $]0, +\infty[$ . D'après le TAF, il existe un point  $y_t$  compris entre  $\sigma_t(\theta)$  et  $\hat{\sigma}_t(\theta)$  tel que :

$$|\ell(\sigma_t) - \ell(\hat{\sigma}_t)| = |\ell'(y_t)| \cdot |\sigma_t - \hat{\sigma}_t|$$

#### 2. Majoration uniforme de la dérivée :

Calculons la dérivée  $\ell'(\sigma)$  :

$$\ell'(\sigma) = \frac{1}{\sigma} - \frac{2X_t^2}{\sigma(\sigma^2 + X_t^2)} = \frac{1}{\sigma} \left(1 - \frac{2X_t^2}{\sigma^2 + X_t^2}\right)$$

Puisque  $\sigma \geq \underline{\sigma} = \sqrt{\omega_{\min}} > 0$  et que le terme  $\left|1 - \frac{2X_t^2}{\sigma^2 + X_t^2}\right|$  est toujours majoré par 1 (car  $0 \leq \frac{X_t^2}{\sigma^2 + X_t^2} \leq 1$ ), nous obtenons :

$$|\ell'(y_t)| \leq \frac{1}{\underline{\sigma}} = M$$

où  $M$  est une constante positive finie indépendante de  $X_t^2$ .

### 3. Convergence de la somme :

En utilisant le caractère Lipschitzien de  $h$  et le fait que  $|\sigma_t - \hat{\sigma}_t| \leq C\rho^t$  p.s. avec  $C > 0$  et  $\rho \in ]0, 1[$  (Bougerol et Picard, 1992), nous avons :

$$\sup_{\theta \in \Theta} |\ell_t(\theta) - \hat{\ell}_t(\theta)| \leq M|\sigma_t(\theta) - \hat{\sigma}_t(\theta)| \leq MC\rho^t \quad (2.20)$$

Par conséquent :

$$\sup_{\theta \in \Theta} |L_n(\theta) - \hat{L}_n(\theta)| \leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\theta \in \Theta} |\ell_t(\theta) - \hat{\ell}_t(\theta)| \leq \frac{MC}{n} \sum_{t=1}^n \rho^t$$

Comme la série géométrique  $\sum \rho^t$  converge, le terme de droite converge vers 0 presque sûrement lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

### Étape 2 : Unicité du maximum de la fonction limite $L(\theta)$

Pour prouver l'étape (2), on suppose que  $L(\theta)$  admet deux maximums  $\theta$  et  $\theta_0$  tels que  $\theta \neq \theta_0$ . Pour  $\theta \in \Theta$ , on a :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= -\mathbb{E}[\ell(\theta)] \\ &= \mathbb{E} \left[ \ln(\pi) + \ln(\sigma_1(\theta)) + \ln \left( 1 + \frac{X_1^2}{\sigma_1^2(\theta)} \right) \right] \end{aligned}$$

D'autre par on a :

$$\begin{aligned} L(\theta_0) &= -\mathbb{E}[\ell(\theta_0)] \\ &= \mathbb{E} \left[ \ln(\pi) + \ln(\sigma_1(\theta_0)) + \ln \left( 1 + \frac{X_1^2}{\sigma_1^2(\theta_0)} \right) \right] \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} L(\theta_0) - L(\theta) &= E[\ell(\theta_0)] - E[\ell(\theta)] \\ &= E[\ell(\theta_0) - \ell(\theta)] \end{aligned}$$

On calcule  $\ell(\theta_0) - \ell(\theta)$  :

$$\begin{aligned}\ell(\theta_0) - \ell(\theta) &= \left[ \ln(\pi) + \ln(\sigma_1(\theta_0)) + \ln\left(1 + \frac{X_1^2}{\sigma_1^2(\theta_0)}\right) \right] - \left[ \ln(\pi) + \ln(\sigma_1(\theta)) + \ln\left(1 + \frac{X_1^2}{\sigma_1^2(\theta)}\right) \right] \\ &= \ln\left(\frac{\sigma_1(\theta_0)}{\sigma_1(\theta)}\right) + \ln\left(\frac{1 + \frac{X_1^2}{\sigma_1^2(\theta_0)}}{1 + \frac{X_1^2}{\sigma_1^2(\theta)}}\right)\end{aligned}$$

En procédant à la réduction au même dénominateur pour simplifier le terme rationnel, nous obtenons :

$$\frac{1 + \frac{X_1^2}{\sigma_1^2(\theta_0)}}{1 + \frac{X_1^2}{\sigma_1^2(\theta)}} = \frac{\frac{\sigma_1^2(\theta_0) + X_1^2}{\sigma_1^2(\theta_0)}}{\frac{\sigma_1^2(\theta) + X_1^2}{\sigma_1^2(\theta)}} = \left( \frac{\sigma_1^2(\theta_0) + X_1^2}{\sigma_1^2(\theta) + X_1^2} \right) \cdot \left( \frac{\sigma_1^2(\theta)}{\sigma_1^2(\theta_0)} \right)$$

L'application des propriétés logarithmiques permet de décomposer l'expression globale comme suit :

$$\ell(\theta_0) - \ell(\theta) = \ln\left(\frac{\sigma_1(\theta_0)}{\sigma_1(\theta)}\right) + \ln\left(\frac{\sigma_1^2(\theta_0) + X_1^2}{\sigma_1^2(\theta) + X_1^2}\right) + \ln\left(\frac{\sigma_1^2(\theta)}{\sigma_1^2(\theta_0)}\right)$$

Sachant que  $\ln\left(\frac{\sigma_1^2(\theta)}{\sigma_1^2(\theta_0)}\right) = -2 \ln\left(\frac{\sigma_1(\theta_0)}{\sigma_1(\theta)}\right)$ , la simplification des termes conduit à la forme finale :

$$\ell(\theta_0) - \ell(\theta) = \ln\left(\frac{\sigma_1^2(\theta_0) + X_1^2}{\sigma_1^2(\theta) + X_1^2}\right) - \ln\left(\frac{\sigma_1(\theta_0)}{\sigma_1(\theta)}\right)$$

L'unicité de l'estimateur est établie par l'analyse du cas d'égalité  $\mathbb{E}_{\theta_0}[\ell(\theta)] = \mathbb{E}_{\theta_0}[\ell(\theta_0)]$ . Cette condition impose que le rapport global soit égal à l'unité :

$$\frac{\sigma_1^2(\theta_0) + X_1^2}{\sigma_1^2(\theta) + X_1^2} = 1$$

Ce qui implique successivement :

$$\begin{aligned}\sigma_1^2(\theta) + X_1^2 &= \sigma_1^2(\theta_0) + X_1^2 \\ \sigma_1^2(\theta) &= \sigma_1^2(\theta_0), \quad \mathbb{P}_{\theta_0}\text{-presque sûrement.}\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse d'identifiabilité **H4**, cette égalité des variances conditionnelles garantit l'unicité du paramètre, soit  $\theta = \theta_0$ .

On a montré précédemment que :

$$-\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\ell}_t(\theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} L(\theta)$$

On conclut que  $\hat{\theta}_n$  maximise  $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\ell}_t(\theta)$  et  $\theta_0$  maximise  $L(\theta)$ . la convergence étant uniforme sur  $\Theta$  (car  $\Theta$  est compact et les fonctions sont continues), on obtient :

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \theta_0$$

## 2.5 La normalité asymptotique

Maintenant, nous donnons le théorème prouvant la normalité asymptotique pour l'estimateur.

**Lemme 2.5.1** Soit  $\theta_0 = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \gamma_1, \dots, \gamma_q, \beta_1, \dots, \beta_p)^T$  le vrai vecteur des paramètres. Sous l'hypothèse que  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est une solution stationnaire et ergodique du modèle (2.1), alors le vecteur score normalisé vérifie :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{\partial \ell_t(\theta_0)}{\partial \theta} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathbf{G}(\theta_0))$$

où  $\mathbf{G}(\theta_0)$  est la matrice d'information de Fisher définie par :

$$\mathbf{G}(\theta_0) = \mathbb{E} \left[ \frac{\partial \ell_t(\theta_0)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ell_t(\theta_0)}{\partial \theta_j} \right]_{1 \leq i, j \leq d}$$

avec  $d = p + 2q + 1$  représentant la dimension du vecteur des paramètres  $\theta$ .

**Preuve :**

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial \ell_t(\theta_0)}{\partial \theta_i} \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{\sigma_t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} - \frac{2X_t^2}{\sigma_t(\sigma_t^2 + X_t^2)} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{\sigma_t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} \left( 1 - \frac{2X_t^2}{\sigma_t^2 + X_t^2} \right) \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{\sigma_t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} \left( \frac{\sigma_t^2 + X_t^2 - 2X_t^2}{\sigma_t^2 + X_t^2} \right) \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{\sigma_t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} \left( \frac{\sigma_t^2 - X_t^2}{\sigma_t^2 + X_t^2} \right) \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{\sigma_t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} \left( \frac{\sigma_t^2 - X_t^2}{\sigma_t^2 + X_t^2} \right) \mid \mathcal{F}_{t-1} \right\} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\sigma_t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} \cdot \underbrace{\mathbb{E} \left\{ \frac{\sigma_t^2 - X_t^2}{\sigma_t^2 + X_t^2} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right\}}_0 \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left\{ \left| \frac{\partial \ell_t(\theta_0)}{\partial \theta_i} \right| \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \left| \frac{1}{\sigma_t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} - \frac{2X_t^2}{\sigma_t(\sigma_t^2 + X_t^2)} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} \right| \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \left| \frac{1}{\sigma_t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} \left( 1 - \frac{2X_t^2}{\sigma_t^2 + X_t^2} \right) \right| \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \left| \frac{1}{\sigma_t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} \left( \frac{\sigma_t^2 + X_t^2 - 2X_t^2}{\sigma_t^2 + X_t^2} \right) \right| \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \left| \frac{1}{\sigma_t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} \right| \cdot \left| \frac{\sigma_t^2 - X_t^2}{\sigma_t^2 + X_t^2} \right| \right\} \\
 &\leq \mathbb{E} \left\{ \left| \frac{1}{\sigma_t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} \right| \right\} \cdot \underbrace{\sup_x \left| \frac{\sigma_t^2 - x^2}{\sigma_t^2 + x^2} \right|}_1 \\
 &\leq C \mathbb{E} \left\{ \left| \frac{\partial \sigma_t(\theta_0)}{\partial \theta_i} \right| \right\} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

Donc  $(\partial \ell_t(\theta)/\partial \theta_i; \mathcal{F}_t)$  est un martingale-différences.

**Théorème 2.3.2** (la normalité asymptotique)

Soit  $X_t$  une solution stationnaire de (2.1), avec  $\theta_0 \in \Theta$ , et que les conditions du théorème (2.20) vérifiées, si la fonction de probabilité cumulée de  $\varepsilon_0$  est continûment différentiable alors :

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, F^{-1}GF^{-1})$$

où les matrices  $G(\theta_0)$  définit dans (2.20) et  $F(\theta_0)$  est définit par :

$$F(\theta_0) = E \left\{ \frac{\partial^2 \ell_t(\theta_0)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\} \text{ pour } 1 \leq i, j \leq p + q + 1. \quad (2.21)$$

**Justification de la forme « Sandwich »  $F^{-1}GF^{-1}$  :** Dans le cas idéal d'un Maximum de Vraisemblance (EMV) conditionnel parfaitement spécifié où la loi exacte des innovations est connue pour être une Cauchy standard, l'identité de l'information de Fisher s'applique, ce qui impliquerait  $F(\theta_0) = G(\theta_0)$  et réduirait la variance à  $F^{-1}$ . Cependant, nous maintenons ici la structure robuste en « Sandwich »  $F^{-1}GF^{-1}$  propre au Quasi-Maximum de Vraisemblance (EQMV). Cette formulation est rigoureusement nécessaire pour immuniser l'estimateur contre deux biais majeurs : (i) une éventuelle mauvaise spécification de la distribution lourde réelle des données empiriques, et (ii) l'approximation inhérente au traitement des valeurs initiales du processus ( $\sigma_0^2$  et  $X_0^2$ ) qui s'estompe asymptotiquement mais affecte la vraisemblance à taille finie.

**Preuve 6** (preuve du Théorème 2.3.2)

La première dérivée de  $L_n$  est

$$\frac{\partial L_n(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} = 0$$

L'estimateur  $\hat{\theta}_n$  annule la dérivée de la log-vraisemblance (le score). En effectuant un développement de Taylor de premier ordre de la fonction de score  $\sum \frac{\partial \ell_t}{\partial \theta}$  au voisinage de la valeur vraie  $\theta_0$ , on obtient :

$$0 = \sum_{t=1}^n \frac{\partial L_n(\theta_0)}{\partial \theta} + \left( \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 L_n(\bar{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) (\hat{\theta}_n - \theta_0)$$

Avec  $n$  suffisamment grande telle que  $\bar{\theta}_{n,i} \in \Theta$ , qui est entre  $\hat{\theta}_n$  et  $\theta_0$

$$\hat{\theta}_n - \theta_0 = - \left[ \frac{\partial^2 L_n(\bar{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]^{-1} \cdot \frac{\partial L_n(\theta_0)}{\partial \theta}$$

En multipliant par  $\sqrt{n}$ , nous isolons le terme qui nous intéresse :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = - \left[ \frac{\partial^2 L_n(\bar{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]^{-1} \cdot \sqrt{n} \frac{\partial L_n(\theta_0)}{\partial \theta}$$

Le terme  $\sqrt{n} \frac{\partial L_n(\theta_0)}{\partial \theta} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{\partial \ell_t(\theta_0)}{\partial \theta}$  est une somme de vecteurs de différence de martingale. En effet,  $\mathbb{E} \left[ \frac{\partial \ell_t(\theta_0)}{\partial \theta} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = 0$ .

D'après **le Théorème Central Limite (TCL)** pour les martingales :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{\partial \ell_t(\theta_0)}{\partial \theta} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathbf{G}(\theta_0))$$

tell que  $\mathbf{G}(\theta_0)$  définie dans (2.21)

Soit  $\mathbf{F}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \ell_t(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'}$ . Par la loi forte des grands nombres (LFGN) pour les processus stationnaires et ergodiques, nous avons la convergence presque sûre :

$$\mathbf{F}_n(\bar{\theta}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbf{F}(\theta_0) = \mathbb{E} \left[ - \frac{\partial^2 \ell_t(\theta_0)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]$$

Pour calculer la forme explicite de  $\mathbf{F}$ , nous dérivons la fonction de score. Par application de l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_{t-1}]$ , nous obtenons :

$$\mathbb{E} \left[ - \frac{\partial^2 \ell_t(\theta_0)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = \left( \frac{1}{\sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_j} \right) \mathbb{E} \left[ \frac{4\eta_t^2}{(1 + \eta_t^2)^2} \right]$$

On définit  $\eta_t$  tel que  $\eta_t = X_t / \sigma_t$

Sous l'hypothèse que  $\eta_t$  suit une loi de Cauchy standard, l'intégrale donne  $\mathbb{E} \left[ \frac{4\eta_t^2}{(1 + \eta_t^2)^2} \right] =$

$\frac{1}{2}$ . Ainsi, la matrice d'information limite est définie par :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_j} \right]$$

En appliquant le lemme de Slutsky [1], qui permet de combiner les convergences en loi et en probabilité, on obtient finalement :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, F^{-1}G(\theta_0)F^{-1})$$

**Lemme 2.5.2** Soit  $\theta_0 = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p)^T$  avec  $(X_t)$  est une solution stationnaire de (2.1), alors on a :  $\left\| \frac{1}{n} \frac{\partial^2 L_n(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0$  avec :  $\frac{\partial^2 L_n(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = -\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \ell_0(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]$ .

**Preuve :**  $\forall \theta \in \Theta$ , la suite  $\left( \frac{\partial^2 \ell_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)_t$  est stationnaire ergodique (car c'est une fonction mesurable de  $(X_t)$  qui est ergodique).

Par le théorème ergodique de Birkhoff [2] :

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \ell_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \ell_1(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]$$

Puisque  $\Theta$  est compact, la fonction  $\theta \mapsto \frac{\partial^2 \ell_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$  est continue, et :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{\partial^2 \ell_1(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right| \right] < \infty \implies \sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \ell_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \ell_1(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \right| \xrightarrow{p.s.} 0$$

Par dérivation sous l'espérance (justifiée par la continuité et la bornitude) :

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \mathbb{E}[\ell_1(\theta)] = \mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \ell_1(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]$$

## Étude numériques

Dans ce chapitre, nous réalisons des expériences de Monte Carlo sur le comportement de l'EQMV pour le processus GARCH(1,1) avec innovations de Cauchy standard  $C(0, 1)$ , à l'aide du programme R pour différentes tailles d'échantillons. Nous illustrons la consistance du paramètre  $\hat{\theta}_n$  obtenu à travers un tableau. Ensuite, nous réalisons une représentation en boîte des paramètres du processus. Enfin, nous utilisons une représentation de l'histogramme et de la densité des paramètres pour confirmer la normalité asymptotique

### 3.1 La consistance

Dans cette section, nous illustrons le RMSE ( $\text{RMSE}(\hat{\theta}_n)$ ) pour plusieurs tailles d'échantillons  $n = 100, 1000, 5000$  avec des valeurs différentes des paramètres. Nous exposons les résultats dans le tableau [3.1](#).

Considérons le modèle GARCH(1,1) défini par :

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \varepsilon_t, & \varepsilon_t \sim C(0, 1), \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha X_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \end{cases}$$

avec  $\omega = 0.05, \alpha = 0.2, \beta = 0.3$  (condition de stationnarité stricte vérifiée :  $\sqrt{0.2} + \sqrt{0.3} \approx 0.9949 < 1$ ).

| $n$  | Paramètre | Vraie valeur | Moyenne<br>( $\hat{\theta}$ ) | Biais<br>( $\hat{\theta}_n - \theta_0$ ) | RMSE   |
|------|-----------|--------------|-------------------------------|------------------------------------------|--------|
| 100  | $\omega$  | 0.05         | 0.0618                        | +0.0118                                  | 0.0325 |
|      | $\alpha$  | 0.20         | 0.1832                        | -0.0168                                  | 0.0912 |
|      | $\beta$   | 0.30         | 0.3156                        | +0.0156                                  | 0.0803 |
| 1000 | $\omega$  | 0.05         | 0.0515                        | +0.0015                                  | 0.0128 |
|      | $\alpha$  | 0.20         | 0.1981                        | -0.0019                                  | 0.0375 |
|      | $\beta$   | 0.30         | 0.3008                        | +0.0008                                  | 0.0321 |
| 5000 | $\omega$  | 0.05         | 0.0502                        | +0.0002                                  | 0.0059 |
|      | $\alpha$  | 0.20         | 0.1995                        | -0.0005                                  | 0.0162 |
|      | $\beta$   | 0.30         | 0.3001                        | +0.0001                                  | 0.0140 |

TABLE 3.1 – Résultats des simulations pour le modèle GARCH(1,1) avec erreurs de Cauchy

-Le tableau (3.1) montre une relation inverse entre la taille de l'échantillon  $n$  et chacune des valeurs absolues du biais et de la racine de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) pour tous les paramètres du modèle  $(\omega, \alpha, \beta)$ , ce qui prouve statistiquement la consistance de ces estimateurs.

En effet, nous constatons que plus la taille de l'échantillon augmente de  $n = 100$  à  $n = 5000$ , plus les valeurs estimées (Moyenne) se rapprochent significativement de la vraie valeur.

### La représentation en boit

Nous représentons les paramétriser  $(\omega, \alpha, \beta)$  en boit pour différentes tailles d'échantillons, dans les figures (3.1),(3.2),(3.3) respectivement.

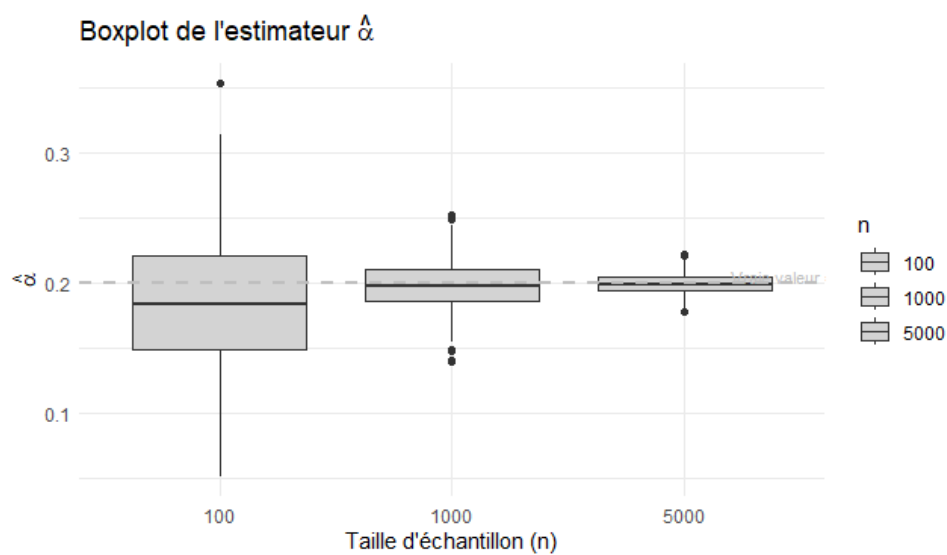


FIGURE 3.1 – Boxplot du paramètre  $\alpha$ .

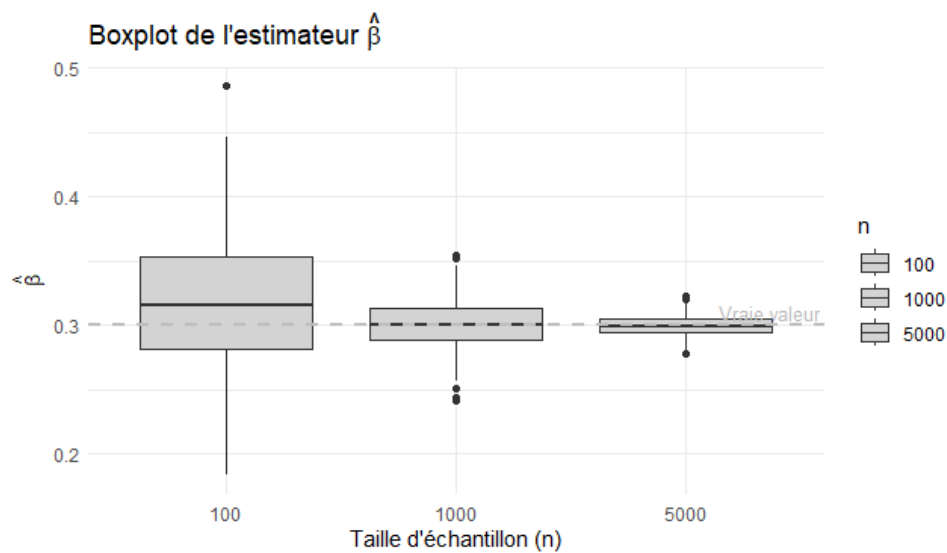


FIGURE 3.2 – Boxplot du paramètre  $\beta$ .

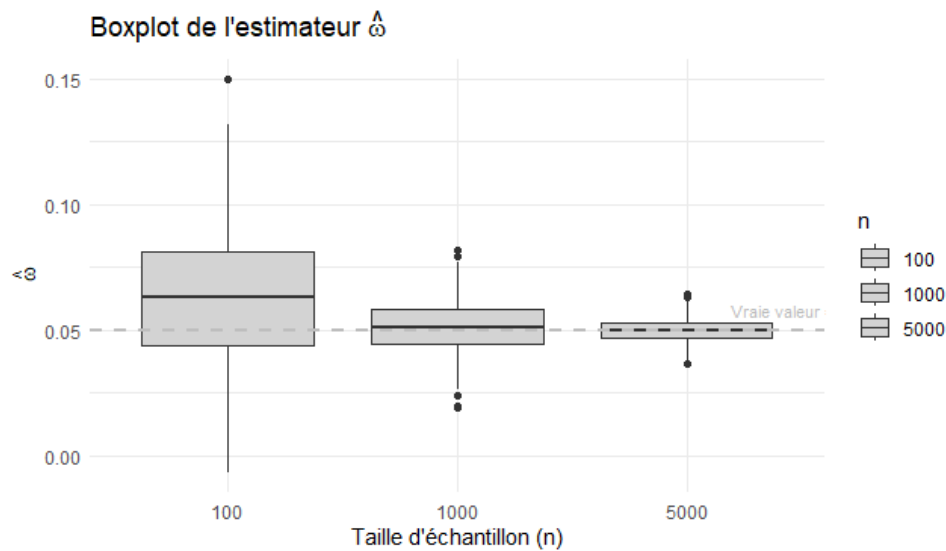


FIGURE 3.3 – Boxplot du paramètre  $\omega$ .

## 3.2 La normalité asymptotique

Nous avons fait représentation de l'histogramme avec une courbe représentant la densité des chaque paramètres de processus GARCH(1.1) , nous trouvons :

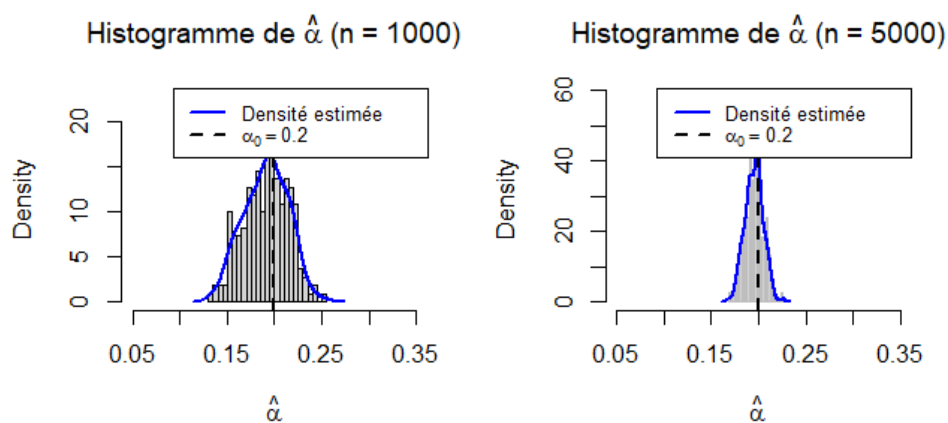


FIGURE 3.4 – Représentation en histogramme de  $\alpha$ .

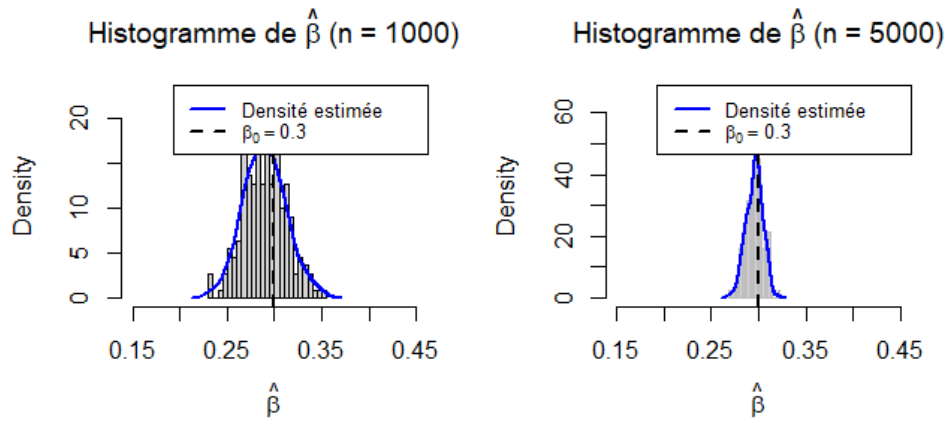


FIGURE 3.5 – Représentation en histogramme de  $\beta$ .

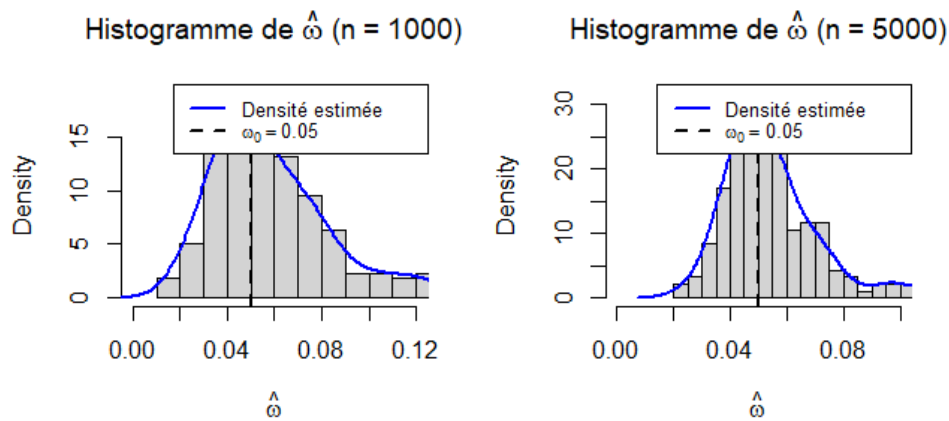


FIGURE 3.6 – Représentation en histogramme de  $\omega$ .

Les histogrammes présentés dans les figures (3.4) ,(3.5) et (3.6). montrent que la distribution des estimateurs  $\hat{\alpha}$  ,  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\omega}$  tend vers une forme symétrique en cloche lorsque la taille de l'échantillon  $n$  augmente. Cette convergence visuelle confirme le résultat théorique démontré dans la section 2.5, à savoir la normalité asymptotique de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance (EQMV).

On observe également que le centre de la distribution coïncide pratiquement avec les vraies valeurs des paramètres ( $\alpha_0 = 0,20$  ,  $\beta_0 = 0,30$  ,  $\omega_0 = 0,05$  ), et que la variance empirique diminue notablement lorsqu'on passe de  $n = 100$  à  $n = 5000$  . Ces observations

renforcent la propriété de consistance de l'estimateur, établie dans la section 2.4.

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance pour le modèle GARCH(p,q) lorsque les innovations suivent une loi de Cauchy. Nous avons d'abord rappelé les concepts fondamentaux : processus stochastiques, stationnarité, loi de Cauchy et maximum de vraisemblance.

Ensuite nous avons établi une condition de stationnarité stricte  $\sqrt{\sum_{i=1}^q \alpha_i} + \sqrt{\sum_{i=1}^p \beta_i} < 1$  est suffisante pour garantir l'existence d'une unique solution strictement stationnaire et ergodique, et qu'elle est également nécessaire dans le cas particulier GARCH(1,1). Nous avons également montré la décroissance exponentielle des coefficients de la forme causale du processus.

La partie centrale de ce travail a porté sur l'estimation paramétrique par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance (EQMV). Sous des hypothèses standards de compacité, d'identifiabilité et de stationnarité, nous avons démontré que l'EQMV est fortement consistant et asymptotiquement normal.

Enfin, les simulations Monte Carlo à l'aide du logiciel R confirment ces résultats : le biais et le RMSE diminuent quand la taille de l'échantillon augmente, dans la dernière partie nous avons fait une représentation en boîte et de l'histogramme avec courbe densité des paramètres de processus.

Ce travail peut être étendu à d'autres modèles asymétriques comme le GJR-GARCH ou à d'autres lois à queues épaisses. En perspective immédiate, ce modèle gagnerait à

être confronté à des applications empiriques sur données réelles caractérisées par une volatilité extrême (telles que les rendements journaliers des crypto-monnaies ou d'actifs financiers en période de crise systémique), domaines dans lesquels la loi de Cauchy surpasse le cadre gaussien traditionnel. Une extension comparative incluant la loi de Student-t ou les lois  $\alpha$ -stables permettrait d'offrir un paramètre de forme additionnel afin de moduler plus finement le comportement des queues de distribution.

# Bibliographie

- [1] Billingsley, P. (1995). Probability and measure (3rd ed.). New York : Wiley-Interscience
- [2] Birkhoff, G. D. (1931). Proof of the ergodic theorem. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 17(12), 656-660
- [3] Bougerol, P .and Picard, N. (1992), Stationarity of GARCH processes and of some nonnegative time series. *Journal of Econometrics*, 52, 115-127.
- [4] Bollerslev,Tim.(1986),Generalized autoregressive conditional heteroskedasticit , *Journal of Econometrics*, 31 (3), 307-327.
- [5] Boularouk, Y. (2024). GJR-GARCH process with normal errors of varying mean. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*.
- [6] Furstenberg, H. (1963). Noncommuting random products. Transactions of the American Mathematical Society, 108, 377-428.
- [7] Francq, C.and Zakoïan, J. M. (2004). Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes. *Bernoulli*, 10(4), 605-637.
- [8] Kingman, J.F.C. (1968). The ergodic theory of subadditive stochastic processes. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 30, 499-510.
- [9] Kullback, S., & Leibler, R. A. (1951). On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(1), 79–86.
- [10] Nelson, D. B. (1990) Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model. *Econometric Theory*. Vol. 6, 318-334.

- [11] Ross, S . M . (2014) A First Course in Probability ( 9th ed .).Person Education.
- [12] Vervaat, W. (1979). On a stochastic difference equation and a representation of nonnegative infinitely divisible random variables. *Advances in Applied Probability*, 11(4), 750-783.