

N° Réf :.....

Université Abdelhafid Boussouf – Mila

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master
En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Titre

Comportement globl d'une équation aux différences du troisième ordre avec terme quadratique

Préparé par :

- BOULKRINAT ROMAÏSSA
- KAIOUA ABDELLAH

Soutenue le on 22/06/2026

devant le jury

Bourourou Siham	MCB	U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Haddad Nabila	MCB	U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Berkal Massoud	MCB	U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire : 2025/2026

Remerciements

En tout premier lieu, nous remercions **DIEU** le tout puissant de nous avoir donné la force et le courage pour dépasser toutes les difficultés de ce modeste travail.

En deuxième lieu, notre plus grande gratitude va à notre directrice de mémoire, **Madame Haddad Nabila**, pour sa patience, sa disponibilité, sa gentillesse et surtout ses précieux conseils qui ont contribué à alimenter notre réflexion.

Nous adressons également nos remerciements les plus vifs à **Madame Bourouro Siham** pour avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury, et à **Monsieur Berkal Massoud** pour avoir accepté d'examiner notre travail.

Nos remerciements chaleureux à tous les enseignants du département de mathématiques et à tous les étudiants de notre promotion.

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration du présent travail.

Boulkrinat Romaissa et Kaïoua Abdellah

Dédicace

Boulkrinat Romaissa

Après des années d'études, de travail, de persévérance et d'efforts, je présente aujourd'hui ce modeste travail.

Je dédie ce travail à :

À mes chers parents et à ma tante bien-aimée, que j'ai appelée « Mama », qui m'a élevée, symbole d'amour et de générosité, source de ma force, en reconnaissance de leur soutien et de leurs sacrifices pour ma réussite. Que Dieu leur accorde santé et longue vie.

À ma chère soeur et à mes frères pour leur soutien et leur aide.

À mon cher ami pour son soutien indéfectible, sa confiance en moi et ses encouragements précieux tout au long de ce parcours.

À mes chères amies, en témoignage de mon estime pour leur belle amitié et leur soutien .

À ma directrice de mémoire, Dr Haddad, pour ses précieux conseils, ses orientations et son encadrement bienveillant.

À tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation académique et scientifique.

Enfin à toute personne qui m'aime .

Dédicace

Kaioua Abdellah

Avec un énorme plaisir, un coeur ouvert et une immense joie,
que je dédie ce mémoire :

À mes très chers, respectueux et magnifiques parents ma mère **MESSAALI LAATRA** et mon père **KAIOUA SAADI**, qui m'ont soutenus tout au long de ma vie . Par leur amour , leur encouragements , leur patience, et leurs sacrifices. Que Allah les protège.

À mes frères .

À mes soeurs .

À tous les membres de ma famille "**KAIOUA**" .

À tous mes amis, de près ou de loin.

À tous mes enseignants et enseignantes, pour leur utiles conseils et leur persévérance.

À toute la promo "2^{ème} master maths".

Enfin à toute personne qui m 'aime.

Abstract

The main objective of this dissertation is to solve and study the asymptotic behavior of the solutions of a third-order nonlinear difference equation.

In the first chapter, we recall some definitions and known results on the theory of linear and nonlinear difference equations.

In the second chapter, we analyze the global behavior of the studied equation according to the sign of the discriminant, we establish explicit formulas for the solutions and we characterize their convergence.

The last chapter is devoted to the analytical resolution of the proposed equation.

Keywords : Difference equations, asymptotic behavior, forbidden set, invariant set, convergence.

.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est de résoudre et d'étudier le comportement asymptotique des solutions d'une équation aux différences non linéaire du troisième ordre.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats connus sur la théorie des équations aux différences linéaires et non linéaires.

Dans le deuxième chapitre, nous analysons le comportement global de l'équation étudiée en fonction du signe du discriminant, nous établissons des formules explicites pour les solutions et nous caractérisons leur convergence.

Le dernier chapitre est consacré à la résolution analytique de l'équation proposée.

Mots-clés : Équations aux différences, comportement asymptotique, ensemble interdit, ensemble invariant, convergence.

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو حل ودراسة السلوك المقارب لحلول معادلة فرق غير خطية من الرتبة الثالثة .

في الفصل الأول ، نستعرض بعض التعريفات و النتائج المعروفة في نظرية معادلات الفرق الخطية وغير الخطية .

في الفصل الثاني ، نحلل السلوك الكلي للمعادلة المدروسة وفقا لإشارة المميز ، ونستخرج صيغاً صريحة للحلول ونحدد تقاربها .

الفصل الأخير مخصص للحل التحليلي للمعادلة المقترحة .

الكلمات الأساسية: معادلات الفرق ، السلوك المقارب ، المجموعة الممنوعة ، المجموعة الثابتة ، التقارب .

Table des matières

Introduction	2
1 Preliminaries	3
1.1 Équations aux différences	3
1.1.1 Équations aux différences linéaires	3
1.1.2 Équations aux différences linéaires à coefficients constants	6
1.1.3 Équation aux différences linéaire d'ordre 2	8
1.1.4 Équations aux différences non linéaires	10
1.2 Transformation de l'équation aux différences non linéaire à l'équation aux différences linéaire	12
1.2.1 Équation de Riccati homogène et non homogène	12
1.2.2 Équation aux différences de Riccati généralisée	14
2 Comportement global de l'équation aux différences $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{-a x_{n-1} + b x_{n-2}}$	16
2.1 Cas 1 $b^2 > 4a$	16
2.2 Cas 3 $b^2 = 4a$	36
2.3 Cas 3 $b^2 < 4a$	41
3 Résolution analytique de l'équation aux différences : $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{-a x_{n-1} + b x_{n-2}}$	56
3.1 Transformation en équation de Riccati	56
3.2 Transformation en équation linéaire	58
3.3 Forme explicite de la solution générale de l'équation	59
3.3.1 Forme explicite de la solution de l'équation linéaire	59

3.3.2	Forme explicite de la solution de l'équation de Riccati	61
3.3.3	Forme explicite de la solution de notre équation	63
Conclusion		71

Introduction

Les équations aux différences constituent un outil fondamental en analyse appliquée, dont les origines remontent aux travaux pionniers de L. Euler, P.L. Tchebycheff et A.A. Markov. Une équation aux différences est une relation reliant les termes d'une suite (x_n) , où l'inconnue est précisément la suite elle-même. Ces équations apparaissent naturellement dans la modélisation de phénomènes discrets issus de divers domaines scientifiques tels que la biologie, l'économie, la physique et la gestion des ressources.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier le comportement global des solutions d'une classe particulière d'équations aux différences non linéaires du troisième ordre, à savoir :

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{-a x_{n-1} + b x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

où a et b sont des paramètres réels, et les conditions initiales x_{-2}, x_{-1}, x_0 sont données.

Le mémoire se organise de trois chapitres :

Dans le premier Chapitre nous rappelons quelques définitions et résultats fondamentaux concernant les équations aux différences linéaires et non linéaires. Nous présentons également certaines méthodes de linéarisation permettant de transformer certaines équations non linéaires en équations linéaires, notamment les équations de Riccati et leurs généralisations.

Dans le deuxième Chapitre nous analysons en détail le comportement global de l'équation proposée. En fonction du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4a$, nous établissons des formules explicites pour les solutions, nous étudions l'invariance de certains ensembles et nous carac-

térisons la convergence des solutions. Des simulations numériques illustrent les différents cas possibles.

Dans le dernier Chapitre nous présentons succinctement une méthode de résolution analytique de l'équation étudiée. Enfin, une conclusion générale synthétise les principaux résultats obtenus et ouvre des perspectives pour des travaux futurs.

Preliminaries

Dans ce chapitre, nous présentons quelques préliminaires qui nous seront utiles pour la suite de notre mémoire. Dans la première partie, on présente quelques définitions et résultats généraux concernant les équations aux différences. Dans la deuxième partie nous présentons également certaines méthodes de linéarisation permettant de transformer certaines équations non linéaires en équations linéaires, notamment les équations de Riccati et leurs généralisations.

1.1 Équations aux différences

1.1.1 Équations aux différences linéaires

Définition 1.1.1 Une équation aux différences linéaire d'ordre k , est une équation de la forme

$$y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)y_n = g(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \quad (1.1)$$

avec $g(n), p_i(n), i = \overline{1, k}$ sont des fonctions réelles définies sur $\mathbb{N}_{n_0}$ et $p_k(n)$ non nul pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

Remarque 1.1.1 L'équation (1.1) est dite non homogène.

Remarque 1.1.2 En général on associe k valeurs initiales avec l'équation aux différences linéaire (1.1)

$$y_{n_0} = c_0, y_{n_0+1} = c_1, \cdots, y_{n_0+k-1} = c_{k-1} \quad (1.2)$$

où $c_i, i = \overline{0, k-1}$ sont des constantes réelles ou complexes.

Exemple 1.1.1 L'équation suivante est une équation aux différences linéaire d'ordre trois.

$$4y_{n+3} + 2y_{n+1} + y_n = 4n \ln n + n + 1, \quad n \in \mathbb{N}_3. \quad (1.3)$$

Définition 1.1.2 Une suite $\{y_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ est dite solution de l'équation (1.1) si elle satisfait cette équation.

Théorème 1.1.1 (2) L'équation (1.1) avec les conditions initiales (1.2) admet une solution unique $\{y_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$.

Définition 1.1.3 On appelle équation homogène associée à l'équation (1.1) l'équation

$$y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + \dots + p_k(n)y_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (1.4)$$

Théorème 1.1.2 L'ensemble S des solutions de l'équation (1.4) est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition 1.1.4 Un ensemble de k solutions de l'équation (1.4) linéairement indépendantes est dit ensemble fondamental de solutions.

Définition 1.1.5 Soient $\{y_n^i\}_{n=n_0}^{+\infty}, i = \overline{1, k}$ des solutions de l'équation (1.4), on définit le Casoratien $W(n)$ de ces solutions par

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} y_n^1 & y_n^2 & \dots & y_n^k \\ y_{n+1}^1 & y_{n+1}^2 & \dots & y_{n+1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n+k-1}^1 & y_{n+k-1}^2 & \dots & y_{n+k-1}^k \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Lemme 1.1.1 (Lemme d'Abel) Soient $\{y_n^i\}_{n=n_0}^{+\infty}, i = \overline{1, k}$ des solutions de l'équation (1.4) et soit $W(n)$ leurs Casoratien , alors

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (1.6)$$

avec

$$\prod_{i=j}^k a_i = 1, \quad k < j. \quad (1.7)$$

Pour démontrer ce lemme on a besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1.2 *Considérons l'équation aux différences linéaire du premier ordre suivante*

$$y_{n+1} = p(n)y_n, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \quad (1.8)$$

avec $y_{n_0} = y_0$ et $p(n)$ est une fonction non nul définie sur $\mathbb{N}_{n_0}$. Alors la solution générale de l'équation (1.8) est donnée par

$$y_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} p(i) \right] y_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{n_0} \quad (1.9)$$

avec

$$\prod_{i=j}^k a_i = 1, \quad k < j. \quad (1.10)$$

Preuve. Par récurrence.

Pour $n = n_0 + 1$. De l'équation (1.8), on a

$$y_{n_0+1} = p(n_0)y_{n_0} = p(n_0)y_0 = \left[\prod_{i=n_0}^{n_0} p(i) \right] y_0,$$

donc (1.9) est vraie pour $n = n_0 + 1$.

Maintenant supposons que

$$y_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} p(i) \right] y_0,$$

et montrons que

$$y_{n+1} = \left[\prod_{i=n_0}^n p(i) \right] y_0. \quad (1.11)$$

De (1.8) et l'hypothèse on trouve

$$y_{n+1} = p(n)y_n = p(n) \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} p(i) \right] y_0$$

$$= \left[\prod_{i=n_0}^n p(i) \right] y_0.$$

D'où (1.11) ■

Corollaire 1.1.1 Supposons que $p_k(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$, alors $W(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ si et seulement s'il existe $\tilde{n} \in \mathbb{N}_{n_0}$ tel que $W(\tilde{n}) \neq 0$.

Proposition 1.1.1 Soit $\{y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^k\}$ une famille des solutions de l'équation (1.1). Alors ces solutions sont linéairement indépendantes si et seulement si leurs Casoratien est non nul pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

1.1.2 Équations aux différences linéaires à coefficients constants

Considérons l'équation aux différences linéaire homogène d'ordre k à coefficients constants suivante

$$y_{n+k} + p_1 y_{n+k-1} + \dots + p_k y_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \quad (1.12)$$

avec $p_i, i = \overline{1, k}$ sont des constantes réelles et $p_k \neq 0$, avec les valeurs initiales $y_{n_0}, y_{n_0+1}, \dots, y_{n_0+k-1}, n_0 \in \mathbb{Z}$.

Théorème 1.1.3 L'équation (1.12) a des solutions de la forme $y_n = \lambda^n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ si λ est une racine du polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \dots + p_k. \quad (1.13)$$

Preuve. Considérons l'équation (1.12) et soit λ une racine de P . Supposons que $y_n = \lambda^n$, $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$ et montrons que $\{y_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ est une solution de l'équation (1.12).

On a

$$\lambda^{n+k} + p_1 \lambda^{n+k-1} + \dots + p_k \lambda^n = \lambda^n (\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \dots + p_k) = \lambda^n P(\lambda) = 0. \quad (1.14)$$

donc $y_n = \lambda^n$ est une solution de (1.12). ■

Définition 1.1.6 Le polynôme $P(\lambda)$ est appelé polynôme caractéristique associé à l'équation (1.12).

Définition 1.1.7 L'équation $P(\lambda) = 0$, est appelée équation caractéristique associée à l'équation (1.12).

Théorème 1.1.4 Si $\lambda_i, i = \overline{1, k}$ sont des racines distinctes de P , alors l'ensemble $\{\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (1.12).

Preuve. Soient $\lambda_i, i = \overline{1, k}$ les racines distinctes de P , d'après le Théorème 1.1.3 on trouve que $\{\lambda_i^n\}_{n=n_0}^\infty, i = \overline{1, k}$ sont des solutions de l'équation (1.12). Soit $W(n)$ le Casoratien de ces solutions, d'après le Corollaire 1.1.1 suffit de montrer que $W(0) \neq 0$.

On a

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix},$$

c'est le déterminant de Vandermonde, alors

$$W(0) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i). \quad (1.15)$$

Puisque les $\lambda_i, i = \overline{1, k}$ sont distinctes, alors $W(0) \neq 0$, donc $\{\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (1.12). ■

Remarque 1.1.3 Soient $\lambda_i, i = \overline{1, k}$ les racines distinctes de P . Alors la solution générale de l'équation (1.12) est

$$y_n = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^n, \quad c_i \in \mathbb{C}. \quad (1.16)$$

Lemme 1.1.3 (2) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ des racines de $P(\lambda)$ de multiplicités respectives $m_1, m_2, \dots, m_r$ tel que $m_1 + m_2 + \dots + m_r = k$ et $r \leq k$, alors l'ensemble

$$\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \dots, n^{m_1-1}\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, n^{m_2-1}\lambda_2^n, \dots, \lambda_r^n, \dots, n^{m_r-1}\lambda_r^n\}. \quad (1.17)$$

est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (1.12) et la solution générale de cette équation dans ce cas est

$$y_n = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n, \quad c_{i,j} \in \mathbb{C}. \quad (1.18)$$

1.1.3 Équation aux différences linéaire d'ordre 2

Considérons l'équation aux différences linéaire d'ordre 2 suivante

$$y_{n+2} + by_{n+1} + ay_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

L'équation caractéristique correspondante est :

$$\lambda^2 + b\lambda + a = 0 \tag{1.19}$$

donc

$$\Delta = b^2 - 4a$$

Cas 1 $\Delta > 0$: L'équation (1.19) admet deux racines réelles distinctes

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2}$$

. d'ou ,la solution générale est donné par :

$$y_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n$$

, avec C_1 et C_2 sont des constantes définies selon les valeurs initiales y_0 et y_1

Cas 2 $\Delta = 0$:L'équation (1.19) admet une racine double

$$\lambda = -\frac{b}{2}$$

, alors

$$y_n = (C_1 + C_2 n) \lambda^n$$

, avec C_1 et C_2 sont des constantes définies selon les valeurs initiales y_0 et y_1

Cas 3 $\Delta < 0$:L'équation (1.19) admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \frac{-b + i \sqrt{4a - b^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - i \sqrt{4a - b^2}}{2}$$

. On écrit ces racines sous forme trigonométrique :

$$\lambda_1 = \rho e^{i\varphi}, \quad \lambda_2 = \rho e^{-i\varphi}, \quad \text{avec} \quad \rho = \sqrt{a}, \quad \cos \varphi = \frac{b}{2\sqrt{a}}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{4a - b^2}}{2\sqrt{a}}, \quad \varphi \in (0, \pi)$$

. Donc la solution est

$$y_n = \rho^n (C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi))$$

.

Exemple 1.1.2 Considérons l'équation aux différences linéaire homogène suivante

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 3y_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.20)$$

L'équation caractéristique associée à l'équation (1.20) est

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0. \quad (1.21)$$

et les racines de cette équation sont

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}i \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}i \quad (1.22)$$

donc la solution générale est

$$y_n = c_1(1 + \sqrt{2}i)^n + c_2(1 - \sqrt{2}i)^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.23)$$

s'écrit sous la forme trigonométrique :

$$y_n = (\sqrt{3})^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)), \quad n = 0, 1, \dots$$

et

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

, donc

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

Alors

$$\theta = \arctan(\sqrt{2})$$

1.1.4 Équations aux différences non linéaires

Soit $\mathbb{G}$ une partie de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{G}^{k+1} \rightarrow \mathbb{G}$ une fonction continue.

Définition 1.1.8 Une équation aux différences non linéaire d'ordre $k + 1$ est une équation de la forme

$$x_{n+1} = f(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.24)$$

où f n'est pas de la forme (1.1).

Exemple 1.1.3 Soit

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + x_n}{x_{n-2} - 1}$$

c'est une équation aux différences non linéaire d'ordre 3.

Remarque 1.1.4 L'équation (1.24) est appelée équation aux différences non autonome.

Si on a

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.25)$$

alors l'équation (1.25) est dite autonome.

Définition 1.1.9 Une suite $\{x_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ est dite solution de l'équation (1.25) si elle satisfait cette équation.

Remarque 1.1.5 L'équation (1.25) avec les valeurs initiales $x_0, x_{-1}, \dots, x_{-k}$ admet une solution unique.

Définition 1.1.10 Soit $\{x_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ une solution de l'équation (1.25), la solution est dite

— éventuellement périodique de période p si

$$\exists p \geq 1, \exists n_0 \geq k, x_{n+p} = x_n, \quad \forall n \geq n_0.$$

— périodique de période p si

$$\exists p \geq 1, x_{n+p} = x_n, \quad \forall n \geq -k.$$

Exemple 1.1.4 Soit

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 0$$

Alors

$$x_{n+2} = \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{x_n}} = x_n$$

Donc la solution $\{x_n\}_{n \geq 0}$ est périodique de période 2. D'où la solution est :

$$\begin{cases} x_{2n} = x_0, & \forall n \in \mathbb{N}, \\ x_{2n+1} = \frac{1}{x_0}. \end{cases}$$

Définition 1.1.11 (Ensemble invariant) Soit $f : E^k \rightarrow E$. Un ensemble $A \subseteq E$ est *invariant* pour l'équation aux différences d'ordre k

$$x_{n+k} = f(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}).$$

si, pour tout $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \in A^k$, on a

$$x_n \in A \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

De manière équivalente, en posant le vecteur d'état

$$X_n = (x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}) \in E^k,$$

et l'application $F : E^k \rightarrow E^k$ définie par

$$F(X_n) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k-1}, f(x_n, \dots, x_{n+k-1})),$$

L'ensemble $A \subseteq E$ est invariant si

$$F(A^k) \subseteq A^k.$$

Cela signifie que pour toute condition initiale $(x_0, \dots, x_{k-1}) \in A^k$, la trajectoire vérifie $x_n \in A$ pour tout $n \geq 0$.

Définition 1.1.12 (Ensemble interdit) L'ensemble interdit $\mathcal{F}$ de l'équation (1.24) est l'ensemble des

valeurs initiales $(x_0, x_{-1}, \dots, x_{-k})$ pour lesquelles la solution n'est pas définie à partir d'un certain rang.

On a :

$$\mathcal{F} = \{(x_0, x_{-1}, \dots, x_{-k}) \in \mathbb{R}^{k+1} : \exists n \in \mathbb{N}, x_n \text{ n'existe pas}\}$$

Définition 1.1.13 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, avec $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On dit que u_n et v_n sont *équivalentes à l'infini* lorsque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

On note alors :

$$u_n \sim v_n.$$

1.2 Transformation de l'équation aux différences non linéaire à l'équation aux différences linéaire

Généralement, la majorité des équations aux différences non linéaires ne peuvent pas être résolus explicitement. Cependant, quelques types des équations non linéaires peuvent être résolus selon des changements des variables qui permet de transformer l'équation non linéaire à une équation aux différences linéaire. Dans cette section, nous présentons quelques types des équations aux différences non linéaire qui admet une transformation linéaire.

1.2.1 Équation de Riccati homogène et non homogène

L'équation de Riccati homogène

L'équation homogène de Riccati est donnée par :

$$x_{n+1}x_n + p(n)x_{n+1} + q(n)x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.26)$$

où p et q sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}$.

On pose

$$y_n = \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

alors

$$x_n = \frac{1}{y_n}.$$

Donc l'équation (1.26) devient :

$$\frac{1}{y_{n+1}y_n} + p(n)\frac{1}{y_{n+1}} + q(n)\frac{1}{y_n} = 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.27)$$

On multiplie (1.27) par $y_{n+1}y_n$, on obtient :

$$1 + p(n)y_n + q(n)y_{n+1} = 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.28)$$

c'est une équation aux différences linéaire homogène d'ordre 1.

L'équation de Riccati non homogène

L'équation aux différences non homogène de Riccati est donnée par :

$$x_{n+1}x_n + p(n)x_{n+1} + q(n)x_n = g(n), \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.29)$$

où p, q et g sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}$.

On pose

$$x_n = \left(\frac{y_{n+1}}{y_n} \right) - p(n),$$

on substitue dans l'équation (1.29), on trouve

$$\frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} - \frac{y_{n+1}}{y_n}p(n+1) + q(n)\frac{y_{n+1}}{y_n} - q(n)p(n) = g(n),$$

donc

$$\frac{y_{n+2}}{y_n} - \frac{y_{n+1}}{y_n}p(n+1) + q(n)\frac{y_{n+1}}{y_n} - q(n)p(n) = g(n),$$

on multiplie par y_n , on trouve

$$y_{n+2} - y_{n+1}p(n+1) + q(n)y_{n+1} - q(n)p(n)y_n = g(n)y_n,$$

alors

$$y_{n+2} + (-p(n+1) + q(n))y_{n+1} - (q(n)p(n) + g(n))y_n = 0.$$

c'est une équation aux différences linéaire homogène d'ordre 2.

1.2.2 Équation aux différences de Riccati généralisée

Soit l'équation aux différences de Riccati généralisée suivante

$$x_{n+1} = \frac{a(n)x_n + b(n)}{c(n)x_n + d(n)}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.30)$$

où a, b, c et d sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}$ avec $c(n) \neq 0$ et $a(n)d(n) - b(n)c(n) \neq 0$.

On pose

$$c(n)x_n + d(n) = \frac{y_{n+1}}{y_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

alors

$$x_n = \frac{y_{n+1}}{c(n)y_n} - \frac{d(n)}{c(n)}.$$

on remplace dans l'équation (1.30) on obtient

$$\frac{y_{n+2}}{c(n+1)y_{n+1}} - \frac{d(n+1)}{c(n+1)} = a(n) \left(\frac{y_{n+1}}{c(n)y_n} - \frac{d(n)}{c(n)} \right) \frac{y_n}{y_{n+1}} + b(n) \frac{y_n}{y_{n+1}},$$

donc

$$\frac{y_{n+2}}{c(n+1)y_{n+1}} = \frac{a(n)}{c(n)} - a(n) \frac{d(n)}{c(n)} \frac{y_n}{y_{n+1}} + b(n) \frac{y_n}{y_{n+1}} + \frac{d(n+1)}{c(n+1)},$$

alors

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= \frac{a(n)}{c(n)} c(n+1) y_{n+1} - \frac{a(n)}{c(n)} d(n) y_n c(n+1) + b(n) y_n c(n+1) + d(n+1) y_{n+1}, \\ &= \left(\frac{a(n)}{c(n)} c(n+1) + d(n+1) \right) y_{n+1} + \left(b(n) c(n+1) - \frac{a(n)}{c(n)} d(n) c(n+1) \right) y_n. \end{aligned}$$

d'où

$$y_{n+2} - \left(\frac{a(n)}{c(n)} c(n+1) + d(n+1) \right) y_{n+1} + \left(a(n) d(n) \frac{c(n+1)}{c(n)} - b(n) c(n+1) \right) y_n = 0. \quad (1.31)$$

On pose

$$p_1(n) = -\frac{a(n)c(n+1) + d(n+1)c(n)}{c(n)},$$
$$p_2(n) = (a(n)d(n) - b(n)c(n)) \frac{c(n+1)}{c(n)}.$$

Donc l'équation (1.31) devient

$$y_{n+2} + p_1(n)y_{n+1} + p_2(n)y_n = 0,$$

c'est une équation aux différences linéaire homogène d'ordre 2.

Comportement global de l'équation aux différences $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{-a x_{n-1} + b x_{n-2}}$

Dans ce chapitre, nous détaillons les résultats présentés dans l'article de Abo-zaid [1], plus précisément, on va déterminer la forme de solution et étudier le comportement asymptotique des solutions de l'équation aux différences non linéaire du troisième ordre suivante :

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{-a x_{n-1} + b x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

Nous allons analyser le comportement global des solutions, En fonction du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4a$, De plus, nous déterminant les ensembles invariants et interdits. En fin, Des simulations numériques viendront illustrer les résultats obtenus.

2.1 Cas 1 $b^2 > 4a$

Nous supposons que $b^2 > 4a$.

On pose

$$\theta_j = \frac{\lambda_+^j - \lambda_-^j}{\sqrt{b^2 - 4a}},$$

où $\lambda_- = \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2}$ et $\lambda_+ = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2}$, $j = 0, 1, \dots$

Lemme 2.1.1 *Les identités suivantes sont vraies pour tout $j = 0, 1, 2, \dots$*

1. $-a\theta_j + b\theta_{j+1} = \theta_{j+2}$.
2. $-a(-ax_0\theta_j + x_{-1}\theta_{j+1}) + b(-ax_0\theta_{j+1} + x_{-1}\theta_{j+2}) = -ax_0\theta_{j+2} + x_{-1}\theta_{j+3}$.
3. $-a(-ax_{-1}\theta_j + x_{-2}\theta_{j+1}) + b(-ax_{-1}\theta_{j+1} + x_{-2}\theta_{j+2}) = -ax_{-1}\theta_{j+2} + x_{-2}\theta_{j+3}$.

Preuve.

(1)

Soit

$$\theta_j = \frac{\lambda_+^j - \lambda_-^j}{\sqrt{b^2 - 4a}}, \quad j = 0, 1, \dots$$

$$\begin{aligned} -a\theta_j + b\theta_{j+1} &= \frac{-a(\lambda_+^j - \lambda_-^j) + b(\lambda_+^{j+1} - \lambda_-^{j+1})}{\sqrt{b^2 - 4a}}, \\ &= \frac{-\lambda_+ \lambda_- (\lambda_+^j - \lambda_-^j) + (\lambda_+ + \lambda_-)(\lambda_+^{j+1} - \lambda_-^{j+1})}{\sqrt{b^2 - 4a}}, \\ &= \frac{-\lambda_+^{j+1} \lambda_- + \lambda_+ \lambda_-^{j+1} + \lambda_+^{j+2} - \lambda_+ \lambda_-^{j+1} + \lambda_+^{j+1} \lambda_- - \lambda_-^{j+2}}{\sqrt{b^2 - 4a}}, \\ &= \frac{(-\lambda_+^{j+1} \lambda_- + \lambda_+^{j+1} \lambda_-) + (\lambda_+ \lambda_-^{j+1} - \lambda_+ \lambda_-^{j+1}) + \lambda_+^{j+2} - \lambda_-^{j+2}}{\sqrt{b^2 - 4a}}, \\ &= \frac{0 + 0 + \lambda_+^{j+2} - \lambda_-^{j+2}}{\sqrt{b^2 - 4a}}, \\ &= \frac{\lambda_+^{j+2} - \lambda_-^{j+2}}{\sqrt{b^2 - 4a}}, \\ &= \theta_{j+2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{-a\theta_j + b\theta_{j+1} = \theta_{j+2}, \quad \forall j \geq 0}$$

(2)

On utilise la relation fondamentale

$$\boxed{-a\theta_k + b\theta_{k+1} = \theta_{k+2}}, \quad \forall k \geq 0.$$

1. Pour $k = j$, on multiplie les deux membres par $-ax_0$:

$$-ax_0(-a\theta_j + b\theta_{j+1}) = -ax_0 \theta_{j+2}.$$

2. Pour $k = j + 1$, on multiplie les deux membres par x_{-1} :

$$x_{-1}(-a\theta_{j+1} + b\theta_{j+2}) = x_{-1} \theta_{j+3}.$$

3. On additionne membre à membre les deux égalités :

$$-ax_0(-a\theta_j + b\theta_{j+1}) + x_{-1}(-a\theta_{j+1} + b\theta_{j+2}) = -ax_0 \theta_{j+2} + x_{-1} \theta_{j+3}.$$

Donc

$$\boxed{-a(-ax_0\theta_j + x_{-1}\theta_{j+1}) + b(-ax_0\theta_{j+1} + x_{-1}\theta_{j+2}) = -ax_0\theta_{j+2} + x_{-1}\theta_{j+3}}.$$

(3)

On utilise la relation fondamentale

$$\boxed{-a\theta_k + b\theta_{k+1} = \theta_{k+2}}, \quad \forall k \geq 0.$$

1. Pour $k = j$, on multiplie la relation fondamentale par $-ax_{-1}$

$$-ax_{-1}(-a\theta_j + b\theta_{j+1}) = -ax_{-1} \theta_{j+2}.$$

2. Pour $k = j + 1$, on multiplie la relation fondamentale par x_{-2}

$$x_{-2}(-a\theta_{j+1} + b\theta_{j+2}) = x_{-2} \theta_{j+3}.$$

3. On additionne membre à membre les deux égalités obtenues

$$-ax_{-1}(-a\theta_j + b\theta_{j+1}) + x_{-2}(-a\theta_{j+1} + b\theta_{j+2}) = -ax_{-1} \theta_{j+2} + x_{-2} \theta_{j+3}.$$

En développant les parenthèses dans le membre de gauche, on obtient exactement

$$-a(-ax_{-1}\theta_j + x_{-2}\theta_{j+1}) + b(-ax_{-1}\theta_{j+1} + x_{-2}\theta_{j+2}) = -ax_{-1}\theta_{j+2} + x_{-2}\theta_{j+3}.$$

Alors :

$$-a(-ax_{-1}\theta_j + x_{-2}\theta_{j+1}) + b(-ax_{-1}\theta_{j+1} + x_{-2}\theta_{j+2}) = -ax_{-1}\theta_{j+2} + x_{-2}\theta_{j+3}$$

■

Théorème 2.1.1 Soit $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ une solution admissible de l'équation (2.1). Alors

$$x_n = \begin{cases} \frac{v}{\gamma_0\left(\frac{n-1}{2}\right) \gamma_{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{v}{\gamma_0\left(\frac{n}{2}\right) \gamma_{-1}\left(\frac{n}{2}\right)}, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (2.2)$$

où $v = x_0 x_{-1} x_{-2}$ et

$$\gamma_0(n) = -ax_0\theta_n + x_{-1}\theta_{n+1}$$

$$\gamma_{-1}(n) = -ax_{-1}\theta_n + x_{-2}\theta_{n+1}$$

.

Preuve.

Preuve par récurrence de la forme explicite des solutions

On peut écrire la formule (2.2) comme suite

$$\begin{cases} x_{2m+1} = \frac{v}{\gamma_0(m) \gamma_{-1}(m+1)}; & \text{si : } n = 2m + 1 \\ x_{2m+2} = \frac{v}{\gamma_0(m+1) \gamma_{-1}(m+1)}; & \text{si : } n = 2m + 2. \end{cases} \quad (2.3)$$

si $m = 0$ donc

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{v}{\gamma_0(0) \gamma_{-1}(1)}, \\ &= \frac{x_0 x_{-1} x_{-2}}{(-ax_0\theta_0 + x_{-1}\theta_1)(-ax_{-1}\theta_1 + x_{-2}\theta_2)}, \\ &= \frac{x_0 x_{-1} x_{-2}}{(x_{-1})(-ax_{-1} + bx_{-2})} \quad (\theta_0 = 0, \theta_1 = 1, \theta_2 = b), \\ &= \frac{x_0 x_{-2}}{-ax_{-1} + bx_{-2}}, \\ &= x_1. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{v}{\gamma_0(1)\gamma_{-1}(1)}, \\
 &= \frac{x_0 x_{-1} x_{-2}}{(-ax_0 \theta_1 + x_{-1} \theta_2)(-ax_{-1} \theta_1 + x_{-2} \theta_2)}, \\
 &= \frac{x_0 x_{-1} x_{-2}}{(-ax_0 + bx_{-1})(-ax_{-1} + bx_{-2})} \quad (\theta_1 = 1, \theta_2 = b), \\
 &= \frac{x_1 x_{-1}}{-ax_0 + bx_{-1}} \quad (\text{en utilisant } -ax_{-1} + bx_{-2} = \frac{x_0 x_{-2}}{x_1}), \\
 &= x_2.
 \end{aligned}$$

Les formules sont vraies pour $m = 0$ (c'est-à-dire pour x_1 et x_2). On suppose que la formule 2.2 est vraie pour un certain $m \geq 0$. On a donc :

$$x_{2m+1} = \frac{v}{\gamma_0(m)\gamma_{-1}(m+1)}, \quad x_{2m-1} = \frac{v}{\gamma_0(m-1)\gamma_{-1}(m)}, \quad x_{2m} = \frac{v}{\gamma_0(m)\gamma_{-1}(m)}.$$

alors

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{x_{2m+1}x_{2m-1}}{-ax_{2m} + bx_{2m-1}} \\
 &= \frac{\frac{v}{\gamma_0(m)\gamma_{-1}(m+1)} \cdot \frac{v}{\gamma_0(m-1)\gamma_{-1}(m)}}{-a \cdot \frac{v}{\gamma_0(m)\gamma_{-1}(m)} + b \cdot \frac{v}{\gamma_0(m-1)\gamma_{-1}(m)}}, \\
 &= \frac{\frac{v^2}{\gamma_0(m)\gamma_{-1}(m+1)\gamma_0(m-1)\gamma_{-1}(m)}}{\frac{v}{\gamma_{-1}(m)} \left(\frac{-a}{\gamma_0(m)} + \frac{b}{\gamma_0(m-1)} \right)}, \\
 &= \frac{v}{\gamma_0(m)\gamma_{-1}(m+1)\gamma_0(m-1)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{-a}{\gamma_0(m)} + \frac{b}{\gamma_0(m-1)} \right)}, \\
 &= \frac{v}{\gamma_0(m)\gamma_{-1}(m+1)\gamma_0(m-1)} \cdot \frac{1}{\frac{-a\gamma_0(m-1) + b\gamma_0(m)}{\gamma_0(m)\gamma_0(m-1)}}, \\
 &= \frac{v}{\gamma_0(m)\gamma_{-1}(m+1)\gamma_0(m-1)} \cdot \frac{\gamma_0(m)\gamma_0(m-1)}{-a\gamma_0(m-1) + b\gamma_0(m)}, \\
 &= \frac{v}{\gamma_{-1}(m+1)(-a\gamma_0(m-1) + b\gamma_0(m))}.
 \end{aligned}$$

d'après le Lemma 2.1.1, on a

$$-a\gamma_0(m-1) + b\gamma_0(m) = \gamma_0(m+1)$$

Donc

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{v}{\gamma_{-1}(m+1)\gamma_0(m+1)} \\
 &= x_{2m+2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{x_{2m+2} x_{2m}}{-a x_{2m+1} + b x_{2m}}, \\
 &= \frac{\frac{v}{\gamma_0(m+1)\gamma_{-1}(m+1)} \cdot \frac{v}{\gamma_0(m)\gamma_{-1}(m)}}{-a \cdot \frac{v}{\gamma_0(m)\gamma_{-1}(m+1)} + b \cdot \frac{v}{\gamma_0(m)\gamma_{-1}(m)}}, \\
 &= \frac{v^2}{\frac{\gamma_0(m+1)\gamma_{-1}(m+1)\gamma_0(m)\gamma_{-1}(m)}{\frac{v}{\gamma_0(m)} \left(\frac{-a}{\gamma_{-1}(m+1)} + \frac{b}{\gamma_{-1}(m)} \right)}}, \\
 &= \frac{v}{\gamma_0(m+1)\gamma_{-1}(m+1)\gamma_{-1}(m)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{-a}{\gamma_{-1}(m+1)} + \frac{b}{\gamma_{-1}(m)} \right)}, \\
 &= \frac{v}{\gamma_0(m+1)\gamma_{-1}(m+1)\gamma_{-1}(m)} \cdot \frac{1}{\frac{-a\gamma_{-1}(m) + b\gamma_{-1}(m+1)}{\gamma_{-1}(m)\gamma_{-1}(m+1)}}, \\
 &= \frac{v}{\gamma_0(m+1)\gamma_{-1}(m+1)\gamma_{-1}(m)} \cdot \frac{\gamma_{-1}(m)\gamma_{-1}(m+1)}{-a\gamma_{-1}(m) + b\gamma_{-1}(m+1)}, \\
 &= \frac{v}{\gamma_0(m+1)(-a\gamma_{-1}(m) + b\gamma_{-1}(m+1))}.
 \end{aligned}$$

D'après le Lemma 2.1.1, on a :

$$-a\gamma_{-1}(m) + b\gamma_{-1}(m+1) = \gamma_{-1}(m+2),$$

alors :

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{v}{\gamma_0(m+1)(-a\gamma_{-1}(m) + b\gamma_{-1}(m+1))}, \\
 &= \frac{v}{\gamma_0(m+1)\gamma_{-1}(m+2)}, \\
 &= x_{2m+3}.
 \end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.2 les ensembles D_1 et D_2 sont dits invariants pour l'équation (2.1)

$$D_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{\lambda_+^2/a^2} = \frac{y}{\lambda_+/a} = z \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{\lambda_-^2/a^2} = \frac{y}{\lambda_-/a} = z \right\}$$

Preuve. supposons que $(x_{-2}, x_{-1}, x_0) \in D_1$ alors :

$$\frac{x_0}{\lambda_+^2/a^2} = \frac{x_{-1}}{\lambda_+/a} = x_{-2},$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{\lambda_+^2/a^2} &= \frac{x_{-1}}{\lambda_+/a}, \\ x_0 \cdot \frac{\lambda_+}{a} &= x_{-1} \cdot \frac{\lambda_+^2}{a^2}, \\ x_0 &= x_{-1} \cdot \frac{\lambda_+^2}{a^2} \cdot \frac{a}{\lambda_+}, \\ x_0 &= \frac{\lambda_+}{a} x_{-1}. \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} \frac{x_{-1}}{\lambda_+/a} &= x_{-2}, \\ x_{-2} &= \frac{a}{\lambda_+} x_{-1}. \end{aligned}$$

montrons que $(x_{-1}, x_0, x_1) \in D_1$ Tout d'abord ,en simplifier x_1

$$x_1 = \frac{x_0 x_{-2}}{-ax_{-1} + bx_{-2}}$$

On remplace x_0 et x_{-2} :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\left(\frac{\lambda_+}{a}x_{-1}\right)\left(\frac{a}{\lambda_+}x_{-1}\right)}{-ax_{-1} + b\left(\frac{a}{\lambda_+}x_{-1}\right)}, \\ &= \frac{\frac{\lambda_+}{a} \cdot \frac{a}{\lambda_+} \cdot x_{-1}^2}{-ax_{-1} + \frac{ab}{\lambda_+}x_{-1}}, \\ &= \frac{x_{-1}^2}{x_{-1}\left(-a + \frac{ab}{\lambda_+}\right)}, \\ &= \frac{x_{-1}}{-a + \frac{ab}{\lambda_+}} \\ &= \frac{x_{-1}}{a\left(-1 + \frac{b}{\lambda_+}\right)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_{-1}}{a \cdot \frac{\lambda_-}{\lambda_+}}, \\ &= \frac{\lambda_+}{a\lambda_-}x_{-1}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\lambda_+}{a \cdot \frac{a}{\lambda_+}}x_{-1}, \\ &= \frac{\lambda_+^2}{a^2}x_{-1}. \end{aligned}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{\lambda_+^2}{a^2}x_{-1}}$$

en montré que $(x_{-1}, x_0, x_1) \in D_1$

$$\frac{x_1}{\lambda_+^2/a^2} = \frac{\lambda_+^2/a^2 x_{-1}}{\lambda_+^2/a^2} = x_{-1},$$

$$\frac{x_0}{\lambda_+/a} = \frac{\frac{\lambda_+}{a}x_{-1}}{\lambda_+/a} = x_{-1},$$

alors

$$\frac{x_1}{\lambda_+^2/a^2} = \frac{x_0}{\lambda_+/a} = x_{-1}.$$

Ceci implique que $(x_1, x_0, x_{-1}) \in D_1$. Maintenant, On suppose que $(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \in D_1$, et on

montre que $(x_{n+1}, x_n, x_{n-1}) \in D_1$ Supposons que $(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \in D_1$ donc

$$\frac{x_n}{\lambda_+^2/a^2} = \frac{x_{n-1}}{\lambda_+/a} = x_{n-2}.$$

On en déduit

$$x_n = \frac{\lambda_+}{a} x_{n-1}, \quad x_{n-2} = \frac{a}{\lambda_+} x_{n-1}$$

L'équation (1) donne

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{-ax_{n-1} + bx_{n-2}}$$

En remplaçant

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{\left(\frac{\lambda_+}{a} x_{n-1}\right) \left(\frac{a}{\lambda_+} x_{n-1}\right)}{-ax_{n-1} + b\left(\frac{a}{\lambda_+} x_{n-1}\right)}, \\ &= \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1} \left(-a + \frac{ab}{\lambda_+}\right)}, \\ &= \frac{x_{n-1}}{a \left(-1 + \frac{b}{\lambda_+}\right)}, \\ &= \frac{x_{n-1}}{a \cdot \frac{\lambda_-}{\lambda_+}}, \\ &= \frac{\lambda_+}{a \lambda_-} x_{n-1}, \end{aligned}$$

alors

$$x_{n+1} = \frac{\lambda_+}{a \cdot \frac{\lambda_-}{\lambda_+}} x_{n-1} = \frac{\lambda_+^2}{a^2} x_{n-1},$$

ainsi :

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{\lambda_+^2}{a^2} x_{n-1}}$$

ona :

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{\lambda_+/a} &= \frac{\frac{\lambda_+}{a} x_{n-1}}{\lambda_+/a} = x_{n-1}, \\ x_{n+1} &= \frac{\lambda_+^2}{a^2} x_{n-1}, \quad x_n = \frac{\lambda_+}{a} x_{n-1}. \end{aligned}$$

On vérifie alors

$$\frac{x_{n+1}}{\lambda_+^2/a^2} = \frac{\frac{\lambda_+^2}{a^2} x_{n-1}}{\lambda_+^2/a^2} = x_{n-1},$$

$$\frac{x_n}{\lambda_+/a} = \frac{\frac{\lambda_+}{a} x_{n-1}}{\lambda_+/a} = x_{n-1}.$$

Ainsi

$$\frac{x_{n+1}}{\lambda_+^2/a^2} = \frac{x_n}{\lambda_+/a} = x_{n-1}.$$

Donc

$$(x_{n+1}, x_n, x_{n-1}) \in D_1.$$

Par conséquent, D_1 est un ensemble invariant pour l'équation (2.1). Supposons que $(x_0, x_{-1}, x_{-2}) \in D_2$, alors

$$\frac{x_0}{\lambda_-^2/a^2} = \frac{x_{-1}}{\lambda_-/a} = x_{-2}.$$

D'où

$$x_0 = \frac{\lambda_-}{a} x_{-1}, \quad x_{-2} = \frac{a}{\lambda_-} x_{-1}.$$

Montrons que $(x_1, x_0, x_{-1}) \in D_2$ Tout d'abord, en simplifier x_1

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_0 x_{-2}}{-a x_{-1} + b x_{-2}}, \\ &= \frac{\left(\frac{\lambda_-}{a} x_{-1}\right) \left(\frac{a}{\lambda_-} x_{-1}\right)}{-a x_{-1} + b \left(\frac{a}{\lambda_-} x_{-1}\right)}, \\ &= \frac{x_{-1}^2}{a x_{-1} \left(-1 + \frac{b}{\lambda_-}\right)}, \\ &= \frac{x_{-1}}{a \left(-1 + \frac{b}{\lambda_-}\right)}, \\ &= \frac{x_{-1}}{a \cdot \frac{\lambda_+}{\lambda_-}}, \\ &= \frac{\lambda_-}{a \lambda_+} x_{-1} = \frac{\lambda_-}{a \cdot \frac{a}{\lambda_-}} x_{-1}, \\ &= \frac{\lambda_- \cdot \lambda_-}{a \cdot a} x_{-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$x_1 = \frac{\lambda_-^2}{a^2} x_{-1}$$

$$\frac{x_0}{\lambda_-/a} = \frac{\frac{\lambda_-}{a} x_{-1}}{\lambda_-/a} = x_{-1}.$$

$$\frac{x_1}{\lambda_-^2/a^2} = \frac{\frac{\lambda_-}{a\lambda_+} x_{-1}}{\lambda_-^2/a^2} = \frac{\lambda_-}{a\lambda_+} \cdot \frac{a^2}{\lambda_-^2} x_{-1} = \frac{a}{\lambda_+ \lambda_-} x_{-1} = x_{-1}.$$

Donc

$$\frac{x_1}{\lambda_-^2/a^2} = \frac{x_0}{\lambda_-/a} = x_{-1},$$

ainsi

$$(x_1, x_0, x_{-1}) \in D_2$$

On suppose que $(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \in D_2$, c'est-à-dire

$$\frac{x_n}{\lambda_-^2/a^2} = \frac{x_{n-1}}{\lambda_-/a} = x_{n-2}.$$

On en déduit

$$x_n = \frac{\lambda_-}{a} x_{n-1}, \quad x_{n-2} = \frac{a}{\lambda_-} x_{n-1}.$$

En remplaçant

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= \frac{x_n x_{n-2}}{-ax_{n-1} + bx_{n-2}} \\
 &= \frac{\left(\frac{\lambda_-}{a} x_{n-1}\right) \left(\frac{a}{\lambda_-} x_{n-1}\right)}{-ax_{n-1} + b \left(\frac{a}{\lambda_-} x_{n-1}\right)}, \\
 &= \frac{x_{n-1}^2}{ax_{n-1} \left(-1 + \frac{b}{\lambda_-}\right)}, \\
 &= \frac{x_{n-1}}{a \left(-1 + \frac{b}{\lambda_-}\right)} \\
 x_{n+1} &= \frac{x_{n-1}}{a \cdot \frac{\lambda_+}{\lambda_-}}, \\
 &= \frac{\lambda_-}{a \lambda_+} x_{n-1}, \\
 &= \frac{\lambda_-}{a \cdot \frac{a}{\lambda_-}} x_{n-1}, \\
 &= \frac{\lambda_-^2}{a^2} x_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \frac{x_n}{\lambda_-/a} &= \frac{\frac{\lambda_-}{a} x_{n-1}}{\lambda_-/a} = x_{n-1}, \\
 \frac{x_{n+1}}{\lambda_-^2/a^2} &= \frac{\frac{\lambda_-^2}{a^2} x_{n-1}}{\lambda_-^2/a^2} = x_{n-1},
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{x_{n+1}}{\lambda_-^2/a^2} = \frac{x_n}{\lambda_-/a} = x_{n-1},$$

donc

$$\boxed{(x_{n+1}, x_n, x_{n-1}) \in D_2}$$

Alors D_2 est un ensemble invariant pour l'équation (2.1). ■

Théorème 2.1.3 Soit $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ une solution admissible de l'équation (2.1). Les affirmations suivantes sont vraies

1. Si $b > a + 1$, alors la solution $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ converge vers zéro.
2. Si $b = a + 1$, alors nous avons les cas suivants :
 - (a) Si $b < 2$, alors la solution $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ converge vers une limite finie.

(b) Si $b > 2$, alors la solution $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ converge vers zéro.

3. Si $b < a + 1$, alors nous avons les cas suivants :

(a) Si $b < 2$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

(b) Si $b > 2$, alors la solution $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ converge vers zéro.

Preuve. Nous avons

$$\lambda_+ = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2}, \quad \lambda_- = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2}.$$

Alors

$$0 < \frac{\lambda_-}{\lambda_+} < 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^j = 0.$$

et on peut écrire θ_j comme suite :

$$\theta_j = \lambda_+^j \left(\frac{1 - \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^j}{\sqrt{b^2 - 4a}} \right),$$

D'où

$$\theta_j \sim \frac{\lambda_+^j}{\sqrt{b^2 - 4a}}. \quad (2.4)$$

Premier cas : $b > a + 1$. Nous commençons par montrer que : $\lambda_+ > 1$. On a

$$\begin{aligned} \lambda_+ - 1 &= \frac{b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2} - 1, \\ &= \frac{b + \sqrt{b^2 - 4a} - 2}{2}, \end{aligned}$$

comme

$$b > a + 1 > 0,$$

alors

$$b^2 - 4a > (a + 1)^2 - 4a = (a - 1)^2.$$

Ainsi

$$\sqrt{b^2 - 4a} > |a - 1|,$$

donc

$$b + \sqrt{b^2 - 4a} - 2 > b + |a - 1| - 2.$$

or

$$b > a + 1.$$

Ainsi

$$b + |a - 1| - 2 > a + 1 + |a - 1| - 2,$$

donc

$$b + |a - 1| - 2 > a - 1 + |a - 1| \geq 0.$$

Par conséquent

$$\lambda_+ > 1.$$

D'après (2.4) alors

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \theta_j = +\infty.$$

Ainsi de suite

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \gamma_0(m) = +\infty,$$

Et

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \gamma_{-1}(m) = +\infty$$

Par conséquent , comme

$$x_{2m+1} = \frac{v}{\gamma_0(m)\gamma_{-1}(m+1)},$$

Et

$$x_{2m+2} = \frac{v}{\gamma_0(m+1)\gamma_{-1}(m+1)}.$$

Alors

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_{2m+1} = 0,$$

Et

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_{2m+2} = 0.$$

c'est a dire , les deux sous suites paire et impaire sont convergentes vers 0 , Donc la solution $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ converge vers zéro .

Deuxième cas : $b = a + 1$. **Si :** $b > 2$ Nous avons $b > 2$ et $b = a + 1$,

alors $a > 1$.

D'autre part

$$b^2 - 4a = (a - 1)^2,$$

ainsi

$$\sqrt{b^2 - 4a} = |a - 1| = a - 1,$$

alors

$$\lambda_+ = \frac{a + 1 + a - 1}{2} = a,$$

donc

$$\lambda_+ > 1.$$

D'où, la suite de la démonstration est similaire que à la partie précédente .

Si : $b < 2$

Comme $b = a + 1 < 2$, Donc $a < 1$ et alors

$$|a - 1| = 1 - a.$$

Ainsi

$$\lambda_+ = \frac{a + 1 + 1 - a}{2} = 1,$$

donc d'après (2.4),

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \theta_j = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4a}}.$$

Par conséquent, les suites intermédiaires sont convergentes. Ainsi

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_{2m+1} = \frac{x_0 x_{-1} x_{-2} (b^2 - 4a)}{(-ax_0 + x_{-1})(-ax_{-1} + x_{-2})},$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_{2m+2} = \frac{x_0 x_{-1} x_{-2} (b^2 - 4a)}{(-ax_0 + x_{-1})(-ax_{-1} + x_{-2})}.$$

Donc les deux sous suites paire et impaire convergent vers la même limite ,alors

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_n = \frac{x_0 x_{-1} x_{-2} (b^2 - 4a)}{(-ax_0 + x_{-1})(-ax_{-1} + x_{-2})}.$$

Donc

La suite $\{x_n\}$ converge vers une limite finie .

Troisième cas : $b < a + 1$

Nous avons $b < a + 1$, donc

$$b^2 - 4a < (b - 2)^2$$

Par conséquent $\sqrt{b^2 - 4a} < |b - 2|$.

Si : $b < 2$ alors

$$|b - 2| = 2 - b,$$

Ainsi

$$\sqrt{b^2 - 4a} < 2 - b$$

D'où

$$b + \sqrt{b^2 - 4a} < 2$$

Donc

$$\lambda_+ = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2} < 1.$$

Donc d'après (2.4) on a

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \theta_j = 0,$$

ainsi de suite

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \gamma_0(m) = 0, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \gamma_{-1}(m) = 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_{2m+1} = +\infty, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} x_{2m+2} = +\infty.$$

D'où

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

c'est à dire La solution $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ est diverge .

Si : $b > 2$ alors

$$\lambda_+ = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2} > \frac{b}{2},$$

donc

$$\lambda_+ > 1.$$

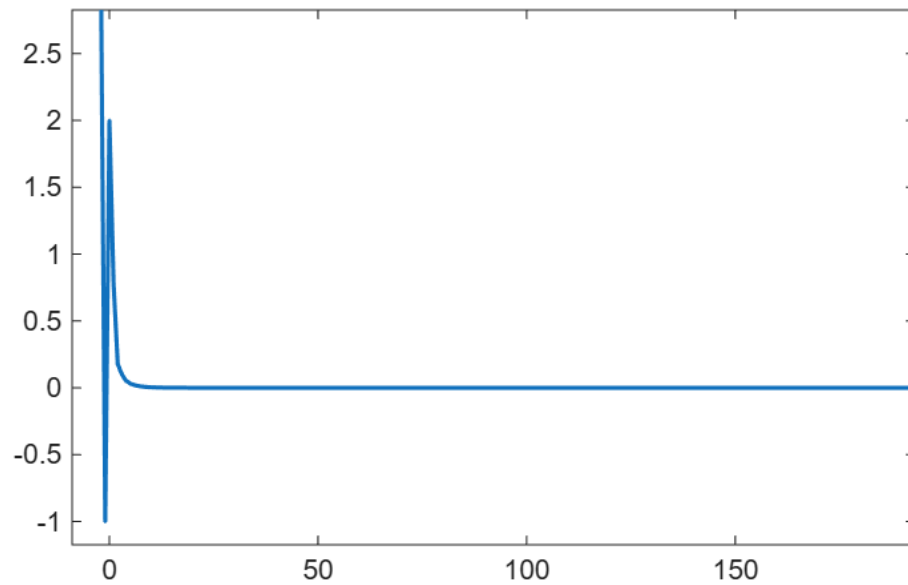


FIGURE 2.1 – Comportement de la solution pour $a = 1.1$ et $b = 2.2$.

D'où, la suite de la démonstration est similaire que à la partie précédente . ■

Exemple 2.1.1 Soit $a = 1.1$ et $b = 2.2$. Nous avons

$$b > a + 1,$$

Pour les conditions initiales :

$$x_{-2} = 3, \quad x_{-1} = -1, \quad x_0 = 2.$$

La Figure 2.1 montre que la solution admissible $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ de l'équation (3.1) converge vers zéro.

Exemple 2.1.2 Soit $a = 0.7$ et $b = 1.7$. Nous avons :

$$b = a + 1 \quad \text{et} \quad b < 2.$$

Pour les conditions initiales :

$$x_{-2} = 3, \quad x_{-1} = -1, \quad x_0 = 2.$$

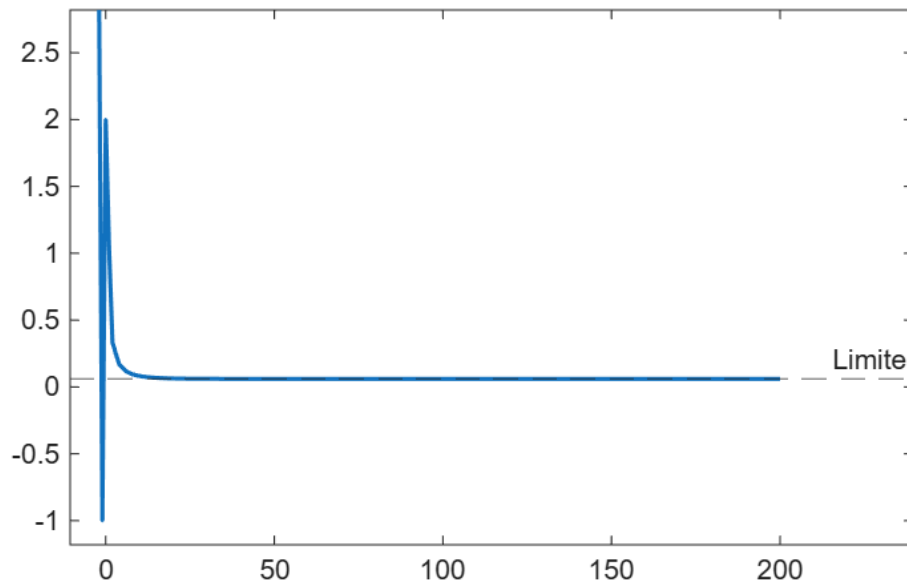


FIGURE 2.2 – Comportement de la solution pour $a = 0.7$ et $b = 1.7$.

La Figure 2.2 montre que la solution admissible $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ de l'équation (3.1) converge vers la limite finie .

$$\frac{v(b^2 - 4a)}{(-ax_0 + x_{-1})(-ax_{-1} + x_{-2})} \simeq 0.06081.$$

Exemple 2.1.3 Soit $a = 0.2$ et $b = 1$. Nous avons :

$$b < a + 1 \quad \text{et} \quad b < 2,$$

pour les conditions initiales :

$$x_{-2} = 3, \quad x_{-1} = -1, \quad x_0 = 2.$$

La Figure 2.3 montre que la solution admissible $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ de l'équation (3.1) est non bornée.

Exemple 2.1.4 Soit $a = 3$ et $b = 3.7$. Nous avons

$$b < a + 1 \quad \text{et} \quad b > 2$$

Pour les conditions initiales

$$x_{-2} = 3, \quad x_{-1} = -1, \quad x_0 = 2$$

La Figure 2.4 montre que la solution admissible $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ de l'équation (3.1) converge vers zéro.

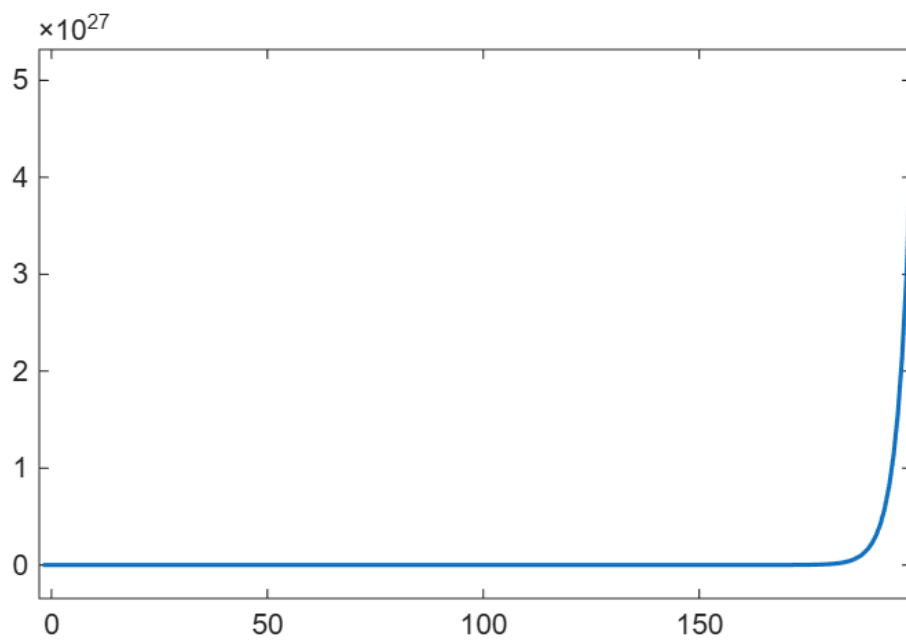


FIGURE 2.3 – Comportement de la solution pour $a = 0.2$ et $b = 1$.

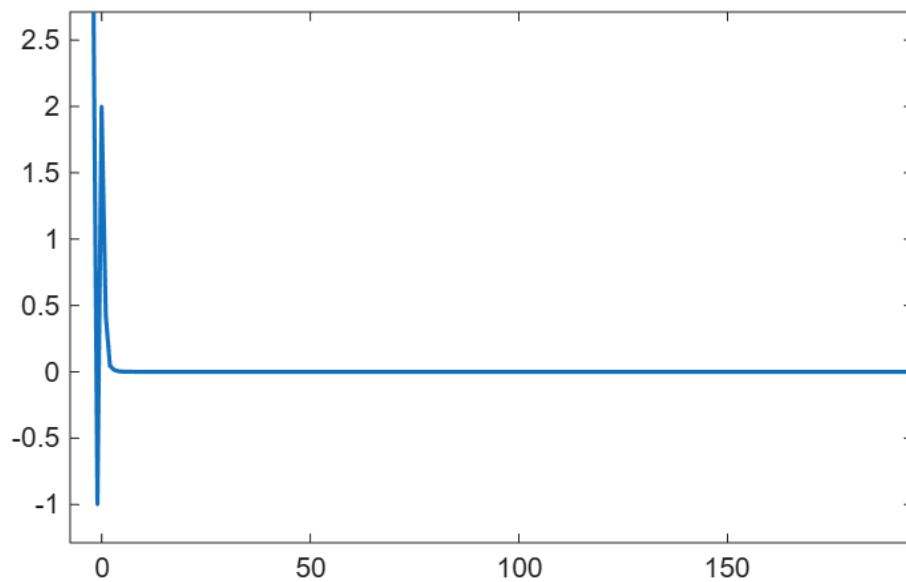


FIGURE 2.4 – Comportement de la solution pour $a = 3$ et $b = 3.7$.

2.2 Cas 3 $b^2 = 4a$

Dans cette section, nous supposons que : $b^2 = 4a$.

Théorème 2.2.1 Soit $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ une solution admissible de l'équation (2.1). Alors

$$x_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{b}\right)^n \frac{4v}{\mu_0\left(\frac{n-1}{2}\right)\mu_{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & n = 1, 3, \dots, \\ \left(\frac{2}{b}\right)^n \frac{4v}{\mu_0\left(\frac{n}{2}\right)\mu_{-1}\left(\frac{n}{2}\right)}, & n = 2, 4, \dots, \end{cases} \quad (2.5)$$

où

$$v = x_0 x_{-1} x_{-2}, \quad , \quad \mu_{-i}(n) = -bn x_{-i} + 2(1+n)x_{-i-1} \quad , \quad i = 0, 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

Preuve. Il suffit de réécrire la formule (2.5) sous la forme :

$$x_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{b}\right)^{2m+1} \frac{4v}{\mu_0(m)\mu_{-1}(m+1)}, & \text{si : } n = 2m+1, \\ \left(\frac{2}{b}\right)^{2m+2} \frac{4v}{\mu_0(m+1)\mu_{-1}(m+1)}, & \text{si : } n = 2m+2. \end{cases} \quad (2.6)$$

où les suites auxiliaires $\mu_0(m)$ et $\mu_{-1}(m)$ sont données par :

$$\begin{cases} \mu_0(m) = m(-bx_0 + 2x_{-1}) + 2x_{-1}, \\ \text{et} \\ \mu_{-1}(m) = m(-bx_{-1} + 2x_{-2}) + 2x_{-2}. \end{cases}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 2.2.1 Nous avons

$$x_{2m+1} = \left(\frac{2}{b}\right)^{2m+1} \frac{4v}{\mu_0(m)\mu_{-1}(m+1)}$$

et

$$x_{2m+2} = \left(\frac{2}{b}\right)^{2m+2} \frac{4v}{\mu_0(m+1)\mu_{-1}(m+1)}.$$

Supposons que

$$-bx_0 + 2x_{-1} = -bx_{-1} + 2x_{-2} = 0.$$

Alors, pour tout m , nous avons

$$\begin{aligned}\mu_0(m) &= -bm x_0 + 2(1+m)x_{-1}, \\ &= m(-bx_0 + 2x_{-1}) + 2x_{-1}, \\ &= 2x_{-1}.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\mu_{-1}(m) &= -bm x_{-1} + 2(1+m)x_{-2}, \\ &= m(-bx_{-1} + 2x_{-2}) + 2x_{-2}, \\ &= 2x_{-2}.\end{aligned}$$

Donc

$$x_{2m+1} \left(\frac{2}{b}\right)^{2m+1} \frac{4v}{2x_{-1} 2x_{-2}} = \left(\frac{2}{b}\right)^{2m+1} x_0,$$

et

$$x_{2m+2} = \left(\frac{2}{b}\right)^{2m+2} \frac{4v}{2x_{-1} 2x_{-2}} = \left(\frac{2}{b}\right)^{2m+2} x_0.$$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \left(\frac{2}{b}\right)^n x_0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \begin{cases} x_0, & \text{si } b = 2, \\ 0, & \text{si } b > 2, \\ +\infty, & \text{si } b < 2. \end{cases}$$

D'où :

- Si $b = 2$, la solution converge vers x_0 .
- Si $b > 2$, la solution converge vers 0.
- Si $b < 2$, la solution est divergente.

Théorème 2.2.2 Soit $\{x_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.1). Supposons que :

$$-bx_0 + 2x_{-1} \neq 0,$$

or

$$-bx_{-1} + 2x_{-2} \neq 0.$$

Alors les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si $b \geq 2$, alors la solution $\{x_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ converge vers zéro.
2. Si $b < 2$, alors la solution $\{x_n\}_{n=-2}^{+\infty}$ est divergente.

Preuve. Nous avons

$$x_{2m+1} = \left(\frac{2}{b}\right)^{2m+1} \frac{4v}{\mu_0(m)\mu_{-1}(m+1)},$$

et

$$x_{2m+2} = \left(\frac{2}{b}\right)^{2m+2} \frac{4v}{\mu_0(m+1)\mu_{-1}(m+1)}.$$

De plus,

$$\mu_0(m) = -bm x_0 + 2(m+1)x_{-1},$$

et

$$\mu_{-1}(m+1) = -b(m+1)x_{-1} + 2(m+2)x_{-2}.$$

On peut écrire μ_0 et μ_{-1} comme suite :

$$\mu_0(m) = m(-bx_0 + 2x_{-1}) + 2x_{-1},$$

et

$$\mu_{-1}(m) = m(-bx_{-1} + 2x_{-2}) + 2x_{-2}.$$

Alors,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |\mu_0(m)| = \begin{cases} |2x_{-1}|, & \text{si } -bx_0 + 2x_{-1} = 0, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |\mu_{-1}(m)| = \begin{cases} |2x_{-2}|, & \text{si } -bx_{-1} + 2x_{-2} = 0, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où, lorsque

$$-bx_0 + 2x_{-1} \neq 0 \quad \text{or} \quad -bx_{-1} + 2x_{-2} \neq 0,$$

nous avons, pour $i = 0$ or $i = 1$,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |\mu_0(m) \mu_{-1}(m+i)| = +\infty.$$

Si : $b > 2$, alors :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m+1} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{b}\right)^{2m+1} \frac{4v}{\mu_0(m) \mu_{-1}(m+1)} = 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m+2} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{b}\right)^{2m+2} \frac{4v}{\mu_0(m+1) \mu_{-1}(m+1)} = 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Si : $b = 2$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m+1} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{4v}{\mu_0(m) \mu_{-1}(m+1)} = 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m+2} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{4v}{\mu_0(m+1) \mu_{-1}(m+1)} = 0. \end{aligned}$$

De même,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0.$$

Si : $b < 2$, on peut écrire μ_0 et μ_{-1} comme suite :

$$\begin{aligned}\mu_0(m) &= m \left[-b x_0 + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) x_{-1} \right], \\ \mu_{-1}(m+1) &= m \left[-b \left(1 + \frac{1}{m} \right) x_{-1} + 2 \left(1 + \frac{2}{m} \right) x_{-2} \right].\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}|x_{2m+1}| &= \left(\frac{2}{b} \right)^{2m+1} \frac{4|v|}{m^2 \left| \left[-b x_0 + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) x_{-1} \right] \left[-b \left(1 + \frac{1}{m} \right) x_{-1} + 2 \left(1 + \frac{2}{m} \right) x_{-2} \right] \right|}, \\ \text{Alors } |x_{2m+1}| &\sim \left(\frac{2}{b} \right)^{2m+1} \frac{4|v|}{|m^2(-b x_0 + 2 x_{-1})(-b x_{-1} + 2 x_{-2})|}.\end{aligned}$$

De même,

$$|x_{2m+2}| = \left(\frac{2}{b} \right)^{2m+2} \frac{4|v|}{m^2 \left| \left[-b \left(1 + \frac{1}{m} \right) x_0 + 2 \left(1 + \frac{2}{m} \right) x_{-1} \right] \left[-b \left(1 + \frac{1}{m} \right) x_{-1} + 2 \left(1 + \frac{2}{m} \right) x_{-2} \right] \right|}.$$

Alors,

$$|x_{2m+2}| \sim \frac{\left(\frac{2}{b} \right)^{2m+2}}{m^2} \frac{4|v|}{|(-b x_0 + 2 x_{-1})(-b x_{-1} + 2 x_{-2})|}.$$

Comme $b < 2$, alors :

$$\frac{2}{b} > 1,$$

ainsi

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{b} \right)^{2m+1}}{m^2} = +\infty,$$

donc

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |x_{2m+1}| = +\infty.$$

De même,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |x_{2m+2}| = +\infty.$$

Par conséquent

$$\boxed{\{x_n\}_{n=-2}^{+\infty} \text{ est divergente lorsque } b < 2}.$$

■

Exemple 2.2.1 La Figure 2.5 montre que, pour $a = 0.64$ et $b = 1.6$ ($b^2 = 4a$ et $b < 2$), une solution de l'équation (3.1), avec les conditions initiales $x_{-2} = 3$, $x_{-1} = -1$ et $x_0 = 2$, diverge.

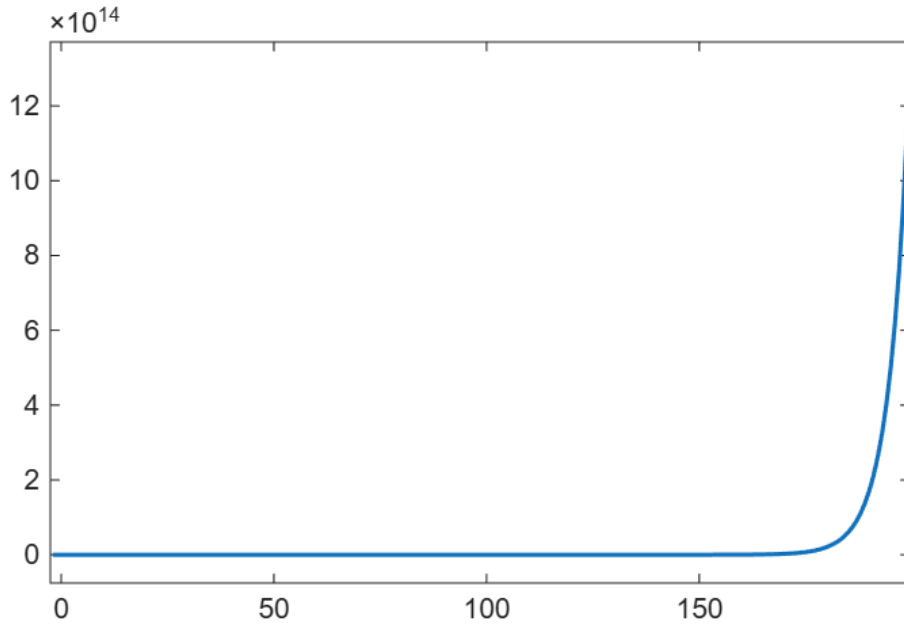


FIGURE 2.5 – Comportement de la solution pour $a = 0.64$ et $b = 1.6$.

Exemple 2.2.2 La Figure 2.6 montre que, pour $a = 2.25$ et $b = 3$ ($b^2 = 4a$ et $b > 2$), une solution de l'équation (3.1), avec les conditions initiales $x_{-2} = 3$, $x_{-1} = -1$ et $x_0 = 2$, converge vers zéro.

2.3 Cas 3 $b^2 < 4a$

Théorème 2.3.1 ($\Delta < 0$) Soit $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ une solution admissible de l'équation (2.1). Alors, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$x_n = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{a^{n-\frac{1}{2}}} \frac{v}{\beta_0\left(n - \frac{1}{2}\right) \beta_{-1}\left(n + \frac{1}{2}\right)} \\ \frac{\sin^2 x}{a^n} \frac{v}{\beta_0(n) \beta_{-1}(n)}, \end{cases} \quad (2.7)$$

où $v = x_0 x_{-1} x_{-2}$,

et

$$\beta_{-i}(n) = x_{-i} \sin(n\alpha) - x_{-i-1} \sin((n+1)\alpha) \quad \text{pour } i = 0, 1.$$

Donc

$$\beta_0(n) = \sqrt{a} x_0 \sin(n\alpha) - x_{-1} \sin((n+1)\alpha),$$

$$\beta_{-1}(n) = \sqrt{a} x_{-1} \sin(n\alpha) - x_{-2} \sin((n+1)\alpha).$$

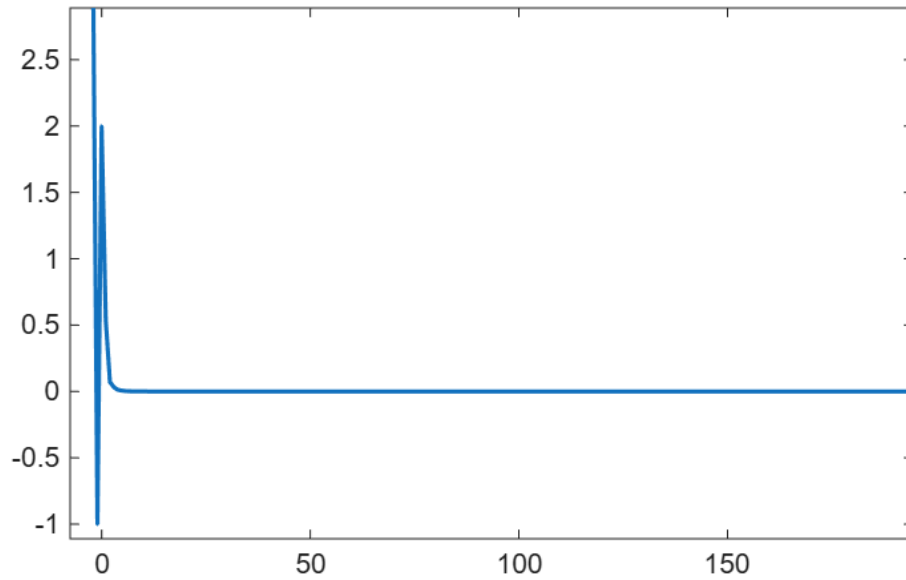


FIGURE 2.6 – Comportement de la solution pour $a = 2.25$ et $b = 3$.

et

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\sqrt{4a - b^2}}{b} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

Preuve.

Preuve par récurrence de la forme explicite des solutions

On peut écrire la formule (2.7) comme suite

$$\begin{cases} x_{2m+1} = \frac{\sin^2 x}{a^{2m+\frac{1}{2}}} \frac{v}{\beta_0(m) \beta_{-1}(m+1)} & \text{si : } n = 2m+1, \\ x_{2m+2} = \frac{\sin^2 x}{a^{2m+2}} \frac{v}{\beta_0(m+1) \beta_{-1}(m+1)} & \text{si : } n = 2m+2. \end{cases} \quad (2.8)$$

À partir de la définition de α :

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{4a - b^2}}{b}.$$

Considérons le triangle rectangle suivant :

$$\begin{cases} \text{Côté opposé à } \alpha : \sqrt{4a - b^2}, \\ \text{Côté adjacent à } \alpha : b, \\ \text{Hypoténuse : } \sqrt{(\sqrt{4a - b^2})^2 + b^2} = \sqrt{4a - b^2 + b^2} = \sqrt{4a} = 2\sqrt{a}. \end{cases}$$

Donc

$$\cos \alpha = \frac{b}{2\sqrt{a}}, \quad \text{et } \sin \alpha = \frac{\sqrt{4a - b^2}}{2\sqrt{a}}.$$

On utilise l'identité :

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

alors

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha = 2 \cdot \frac{b}{2\sqrt{a}} = \frac{b}{\sqrt{a}}$$

$$\boxed{\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sqrt{a}}}$$

Pour $m = 0$:

$$\beta_0(0) = \sqrt{a} x_0 \sin(0) - x_{-1} \sin(\alpha) = 0 - x_{-1} \sin \alpha = -x_{-1} \sin \alpha,$$

$$\beta_{-1}(1) = \sqrt{a} x_{-1} \sin \alpha - x_{-2} \sin 2\alpha,$$

Et

$$\beta_0(1) = \sqrt{a} x_0 \sin \alpha - x_{-1} \sin 2\alpha.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{\sin^2 \alpha}{\sqrt{a}} \cdot \frac{v}{\beta_0(0) \beta_{-1}(1)}, \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha}{\sqrt{a}} \cdot \frac{v}{(-x_{-1} \sin \alpha) \cdot (\sqrt{a} x_{-1} \sin \alpha - x_{-2} \sin 2\alpha)}, \\
 &= \frac{\sin \alpha}{\sqrt{a}} \cdot \frac{v}{-x_{-1} (\sqrt{a} x_{-1} \sin \alpha - x_{-2} \sin 2\alpha)}, \\
 &= \frac{\sin \alpha}{\sqrt{a}} \cdot \frac{v}{-x_{-1} \cdot \sin \alpha \left(\sqrt{a} x_{-1} - \frac{b}{\sqrt{a}} x_{-2} \right)}, \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{v}{-x_{-1} \left(\sqrt{a} x_{-1} - \frac{b}{\sqrt{a}} x_{-2} \right)}, \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{v}{-x_{-1} \cdot \frac{ax_{-1} - bx_{-2}}{\sqrt{a}}}, \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{v \sqrt{a}}{-x_{-1} (ax_{-1} - bx_{-2})}, \\
 &= \frac{x_0 x_{-1} x_{-2}}{-x_{-1} (ax_{-1} - bx_{-2})}, \\
 &= \frac{x_0 x_{-2}}{-ax_{-1} + bx_{-2}}.
 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{\sin^2 \alpha}{a} \cdot \frac{v}{\beta_0(1) \beta_{-1}(1)}, \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha}{a} \cdot \frac{v}{\left(\sqrt{a} x_0 \sin \alpha - x_{-1} \sin 2\alpha\right) \left(\sqrt{a} x_{-1} \sin \alpha - x_{-2} \sin 2\alpha\right)}, \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha}{a} \cdot \frac{v}{\sin^2 \alpha \left(\sqrt{a} x_0 - \frac{b}{\sqrt{a}} x_{-1}\right) \left(\sqrt{a} x_{-1} - \frac{b}{\sqrt{a}} x_{-2}\right)}, \\
 &= \frac{1}{a} \cdot \frac{v}{\left(\sqrt{a} x_0 - \frac{b}{\sqrt{a}} x_{-1}\right) \left(\sqrt{a} x_{-1} - \frac{b}{\sqrt{a}} x_{-2}\right)}, \\
 &= \frac{1}{a} \cdot \frac{v}{(ax_0 - bx_{-1})(ax_{-1} - bx_{-2})}, \\
 &= \frac{1}{a} \cdot \frac{v \cdot a}{(ax_0 - bx_{-1})(ax_{-1} - bx_{-2})}, \\
 &= \frac{v}{(ax_0 - bx_{-1})(ax_{-1} - bx_{-2})}, \\
 &= \frac{v}{(-ax_0 + bx_{-1})(-ax_{-1} + bx_{-2})}, \\
 &= \frac{x_1 x_{-1}}{-ax_0 + bx_{-1}}.
 \end{aligned}$$

Les formules sont vraies pour $m = 0$ (c'est-à-dire pour x_1 et x_2). On suppose que la formule (2.8) est vraie pour un certain $m \geq 0$. On a donc :

$$\begin{aligned}
 x_{2m-1} &= \frac{\sin^2 \alpha}{a^{m-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{v}{\beta_0(m-1) \beta_{-1}(m)}, \\
 x_{2m} &= \frac{\sin^2 \alpha}{a^m} \cdot \frac{v}{\beta_0(m) \beta_{-1}(m)}, \\
 \text{et } x_{2m+1} &= \frac{\sin^2 \alpha}{a^{m+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{v}{\beta_0(m) \beta_{-1}(m+1)}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 x_{2m+1} \cdot x_{2m-1} &= \frac{\sin^2 \alpha}{a^{m+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{v}{\beta_0(m) \beta_{-1}(m+1)} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{a^{m-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{v}{\beta_0(m-1) \beta_{-1}(m)}, \\
 &= \frac{\sin^4 \alpha \cdot v^2}{a^{2m} \cdot \beta_0(m-1) \beta_0(m) \beta_{-1}(m) \beta_{-1}(m+1)}.
 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 -a x_{2m} + b x_{2m-1} &= -a \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a^m} \cdot \frac{v}{\beta_0(m) \beta_{-1}(m)} \right) + b \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a^{m-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{v}{\beta_0(m-1) \beta_{-1}(m)} \right), \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha \cdot v}{a^{m-\frac{1}{2}} \beta_{-1}(m)} \left(-\frac{a}{a^{\frac{1}{2}} \beta_0(m)} + \frac{b}{\beta_0(m-1)} \right), \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha \cdot v}{a^{m-\frac{1}{2}} \beta_{-1}(m)} \left(-\frac{\sqrt{a}}{\beta_0(m)} + \frac{b}{\beta_0(m-1)} \right), \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha \cdot v}{a^{m-\frac{1}{2}} \beta_{-1}(m)} \cdot \frac{-\sqrt{a} \beta_0(m-1) + b \beta_0(m)}{\beta_0(m-1) \beta_0(m)}.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{x_{2m+1} x_{2m-1}}{-a x_{2m} + b x_{2m-1}}, \\
 &= \frac{\sin^4 \alpha \cdot v^2}{a^{2m} \cdot \beta_0(m-1) \beta_0(m) \beta_{-1}(m) \beta_{-1}(m+1)} \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha \cdot v}{a^{m-\frac{1}{2}} \beta_{-1}(m)} \cdot \frac{-\sqrt{a} \beta_0(m-1) + b \beta_0(m)}{\beta_0(m-1) \beta_0(m)}, \\
 &= \frac{\sin^4 \alpha \cdot v^2}{a^{2m} \cdot \beta_0(m-1) \beta_0(m) \beta_{-1}(m) \beta_{-1}(m+1)} \times \frac{a^{m-\frac{1}{2}} \beta_{-1}(m) \cdot \beta_0(m-1) \beta_0(m)}{\sin^2 \alpha \cdot v \cdot (-\sqrt{a} \beta_0(m-1) + b \beta_0(m))}, \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha \cdot v}{a^{m+\frac{1}{2}} \cdot \beta_{-1}(m+1) \cdot (-\sqrt{a} \beta_0(m-1) + b \beta_0(m))}, \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha \cdot v}{a^{m+\frac{1}{2}} \cdot \beta_{-1}(m+1) \cdot \sqrt{a} \beta_0(m+1)} \quad \left(\text{d'après : } b \beta_0(m) - \sqrt{a} \beta_0(m-1) = \sqrt{a} \beta_0(m+1) \right), \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha}{a^{m+1}} \cdot \frac{v}{\beta_0(m+1) \beta_{-1}(m+1)}, \\
 &= x_{2m+2}.
 \end{aligned}$$

On a aussi

$$x_{2m+2} \cdot x_{2m} = \frac{\sin^4 \alpha v^2}{a^{2m+1} \beta_0(m) \beta_0(m+1) \beta_{-1}(m) \beta_{-1}(m+1)},$$

Et

$$\begin{aligned}
 -a x_{2m+1} + b x_{2m} &= -a \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{a^{m+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{v}{\beta_0(m) \beta_{-1}(m+1)} + b \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{a^m} \cdot \frac{v}{\beta_0(m) \beta_{-1}(m)}, \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha v}{a^m \beta_0(m)} \left(-\frac{a}{a^{\frac{1}{2}} \beta_{-1}(m+1)} + \frac{b}{\beta_{-1}(m)} \right), \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha v}{a^m \beta_0(m)} \left(-\frac{\sqrt{a}}{\beta_{-1}(m+1)} + \frac{b}{\beta_{-1}(m)} \right), \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha v}{a^m \beta_0(m)} \cdot \frac{-\sqrt{a} \beta_{-1}(m) + b \beta_{-1}(m+1)}{\beta_{-1}(m) \beta_{-1}(m+1)}.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{x_{2m+2} x_{2m}}{-a x_{2m+1} + b x_{2m}}, \\
 &= \frac{\sin^4 \alpha v^2}{\frac{a^{2m+1} \beta_0(m) \beta_0(m+1) \beta_{-1}(m) \beta_{-1}(m+1)}{\frac{\sin^2 \alpha v}{a^m \beta_0(m)} \cdot \frac{-\sqrt{a} \beta_{-1}(m) + b \beta_{-1}(m+1)}{\beta_{-1}(m) \beta_{-1}(m+1)}}}, \\
 &= \frac{\sin^4 \alpha v^2}{a^{2m+1} \beta_0(m) \beta_0(m+1) \beta_{-1}(m) \beta_{-1}(m+1)} \times \frac{a^m \beta_0(m) \beta_{-1}(m) \beta_{-1}(m+1)}{\sin^2 \alpha v (-\sqrt{a} \beta_{-1}(m) + b \beta_{-1}(m+1))}, \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha v}{a^{m+1} \beta_0(m+1) (-\sqrt{a} \beta_{-1}(m) + b \beta_{-1}(m+1))}, \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha v}{a^{m+1} \beta_0(m+1) \sqrt{a} \beta_{-1}(m+2)} \quad \left(\text{d'après : } -\sqrt{a} \beta_{-1}(m) + b \beta_{-1}(m+1) = \sqrt{a} \beta_{-1}(m+2) \right), \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha}{a^{m+\frac{3}{2}}} \cdot \frac{v}{\beta_0(m+1) \beta_{-1}(m+2)}, \\
 &= x_{2m+3}.
 \end{aligned}$$

alors elles sont vraies pour $m+1$ (c'est-à-dire pour x_{2m+2} et x_{2m+3}).

Par le principe de récurrence, les formules sont vraies pour tout $m \geq 0$, c'est-à-dire pour tous les termes de la suite $\{x_n\}_{n \geq 1}$.

Ceci achève la preuve du Théorème. ■

Théorème 2.3.2 Soit $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ une solution admissible de l'équation (2.1) et posons $a = 1$. Si $\alpha = \frac{l}{k} \pi$ est un multiple rationnel de π (avec $0 < l < \frac{k}{2}$), alors $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ est périodique de période principale $2k$.

Preuve. Supposons que $a = 1$ et $\alpha = \frac{l}{k} \pi$, où $l, k \in \mathbb{Z}$, $0 < l < k/2$. En utilisant la formule (2.8) (qui

donne une expression de x_{2m+1} en fonction des fonctions β), on peut écrire :

$$x_{2m+2k+1} = \sin^2 \alpha \frac{v}{\beta_0(m+k) \beta_{-1}(m+1+k)} \quad (10)$$

Calculons $\beta_{-i}(m+k)$:

$$\begin{aligned} \beta_{-i}(m+k) &= x_{-i} \sin((m+k)\alpha) - x_{-i-1} \sin((m+1+k)\alpha), \\ &= x_{-i} \sin(m\alpha + k\alpha) - x_{-i-1} \sin((m+1)\alpha + k\alpha), \\ &= x_{-i} \sin(m\alpha + l\pi) - x_{-i-1} \sin((m+1)\alpha + l\pi) \quad (\text{Puisque } k\alpha = l\pi), \\ &= x_{-i} [(-1)^l \sin(m\alpha)] - x_{-i-1} [(-1)^l \sin((m+1)\alpha)] \quad (\text{En utilisant } \sin(\theta + l\pi) = (-1)^l \sin \theta), \\ &= (-1)^l [x_{-i} \sin(m\alpha) - x_{-i-1} \sin((m+1)\alpha)], \\ &= (-1)^l \beta_{-i}(m). \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré

$$\boxed{\beta_{-i}(m+k) = (-1)^l \beta_{-i}(m)}$$

Donc

$$\begin{aligned} \beta_0(m+k) &= (-1)^l \beta_0(m), \\ \beta_0(m+k+1) &= (-1)^l \beta_0(m+1), \\ \beta_{-1}(m+1+k) &= (-1)^l \beta_{-1}(m+1). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\beta_0(m+k) \beta_{-1}(m+1+k) = (-1)^l \beta_0(m) \cdot (-1)^l \beta_{-1}(m+1) = (-1)^{2l} \beta_0(m) \beta_{-1}(m+1)$$

. Alors

$$\begin{aligned} x_{2m+2k+1} &= \sin^2 \alpha \frac{v}{\beta_0(m+k) \beta_{-1}(m+1+k)}, \\ &= \sin^2 \alpha \cdot \frac{v}{(-1)^{2l} \beta_0(m) \beta_{-1}(m+1)} \quad \text{comme } (-1)^{2l} = 1, \\ &= \sin^2 \alpha \frac{v}{\beta_0(m) \beta_{-1}(m+1)}, \\ &= x_{2m+1}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 x_{2(m+k)+2} &= x_{2m+2k+2} = \sin^2 \alpha \cdot \frac{v}{\beta_0(m+k+1) \beta_{-1}(m+k+1)}, \\
 &= \sin^2 \alpha \cdot \frac{v}{[(-1)^l \beta_0(m+1)] \cdot [(-1)^l \beta_{-1}(m+1)]}, \\
 &= \sin^2 \alpha \cdot \frac{v}{(-1)^{2l} \beta_0(m+1) \beta_{-1}(m+1)} \quad \text{comme } (-1)^{2l} = 1, \\
 &= \sin^2 \alpha \cdot \frac{v}{\beta_0(m+1) \beta_{-1}(m+1)} \\
 &= x_{2m+2}.
 \end{aligned}$$

Cela implique que pour tout entier n :

$$x_{n+2k} = x_n$$

. ■

Théorème 2.3.3 Soit $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ une solution admissible de l'équation (2.1). Les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si $a < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.
2. Si $a > 1$, alors la solution $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ converge vers zéro.

Preuve.

On dispose des formules explicites suivantes pour la solution :

$$x_{2m+1} = \frac{\sin^2 \alpha}{a^{m+\frac{1}{2}}} \beta_0(m) \beta_{-1}(m+1)$$

$$x_{2m+2} = \frac{\sin^2 \alpha}{a^{m+1}} \beta_0(m+1) \beta_{-1}(m+1)$$

où $\beta_{-i}(n) = x_{-i} \sin(n\alpha) - x_{-i-1} \sin((n+1)\alpha)$

Donc

$$\begin{aligned}
 |x_{2m+1}| &= \frac{|\sin^2 \alpha| \cdot |\beta_0(m) \beta_{-1}(m+1)|}{a^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{|\sin^2 \alpha| \cdot |\beta_0(m) \beta_{-1}(m+1)|}{a^{1/2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^m \\
 |x_{2m+2}| &= \frac{|\sin^2 \alpha| \cdot |\beta_0(m+1) \beta_{-1}(m+1)|}{a^{m+1}} = \frac{|\sin^2 \alpha| \cdot |\beta_0(m+1) \beta_{-1}(m+1)|}{a^{1/2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^m
 \end{aligned}$$

Les fonctions β sont bornées car $|\sin(\cdot)| \leq 1$ et les valeurs initiales x_{-2}, x_{-1}, x_0 sont des constantes fixées.

Cas 1 : si $a < 1$ Alors $\frac{1}{a} > 1$, donc

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x_{2m+1}| = \infty$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x_{2m+2}| = \infty$$

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty$.

Cas 2 : si $a > 1$ Alors $\frac{1}{a} < 1$, donc

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x_{2m+1}| = 0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x_{2m+2}| = 0$$

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$. Les deux sous-suites (indices impairs et indices pairs) convergent vers 0, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Ceci achève la démonstration. ■

Exemple 2.3.1 (7) La figure 7 montre que, si

$$a = 1, \quad b = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \quad (\text{avec } b^2 < 4a \text{ et } \alpha = \frac{2\pi}{5}),$$

alors une solution $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ de l'équation (2.1) avec les conditions initiales

$$x_{-2} = 3, \quad x_{-1} = -1, \quad x_0 = 2$$

est périodique de période principale 10.

Exemple 2.3.2 (8) La figure 8 montre que, si

$$a = 1, \quad b = \sqrt{3} \quad (\text{avec } b^2 < 4a \text{ et } \alpha = \frac{\pi}{6}),$$

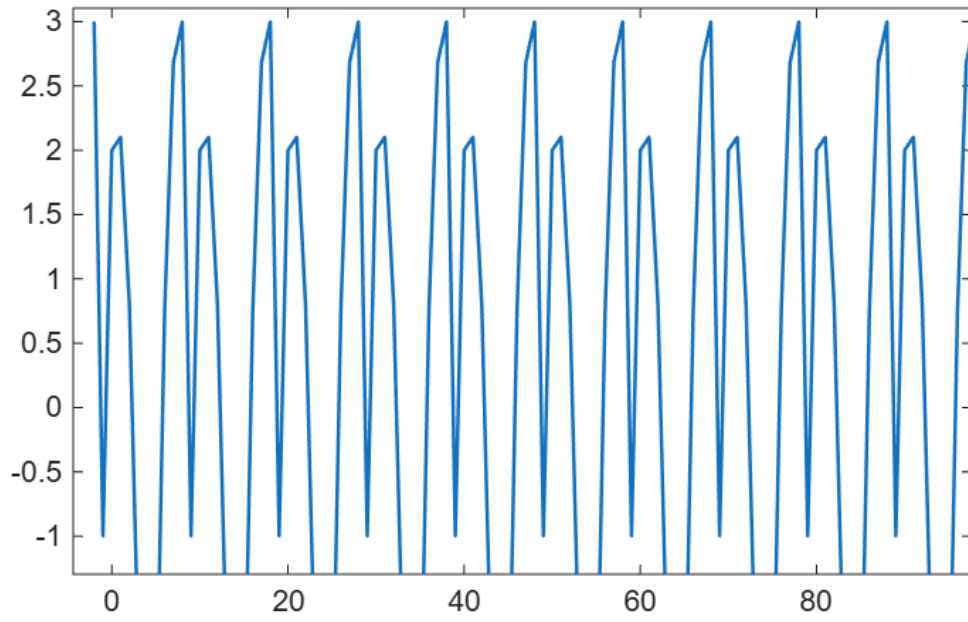


Fig. 7 $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{-x_{n-1} + \sqrt{\frac{1-\sqrt{3}}{2}} x_{n-2}}$

alors une solution $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ de l'équation (2.1) avec les mêmes conditions initiales

$$x_{-2} = 3, \quad x_{-1} = -1, \quad x_0 = 2$$

est périodique de période principale 12.

Théorème 2.3.4 Les énoncés suivants sont vrais :

(1) Si $b^2 > 4a$, alors l'ensemble interdit de l'équation (2.1) est

$$\begin{aligned} F_1 &= \bigcup_{i=0}^2 \{(u_0, u_{-1}, u_{-2}) \in \mathbb{R}^3 : u_{-i} = 0\} \\ &\cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ (u_0, u_{-1}, u_{-2}) \in \mathbb{R}^3 : u_0 = \frac{u_{-1}}{a} \frac{\theta_{m+1}}{\theta_m} \right\} \\ &\cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ (u_0, u_{-1}, u_{-2}) \in \mathbb{R}^3 : u_{-1} = \frac{u_{-2}}{a} \frac{\theta_{m+1}}{\theta_m} \right\}. \end{aligned}$$

(2) Si $b^2 = 4a$, alors l'ensemble interdit de l'équation (2.1) est

$$F_2 = \bigcup_{i=0}^2 \{(u_0, u_{-1}, u_{-2}) \in \mathbb{R}^3 : u_{-i} = 0\}$$

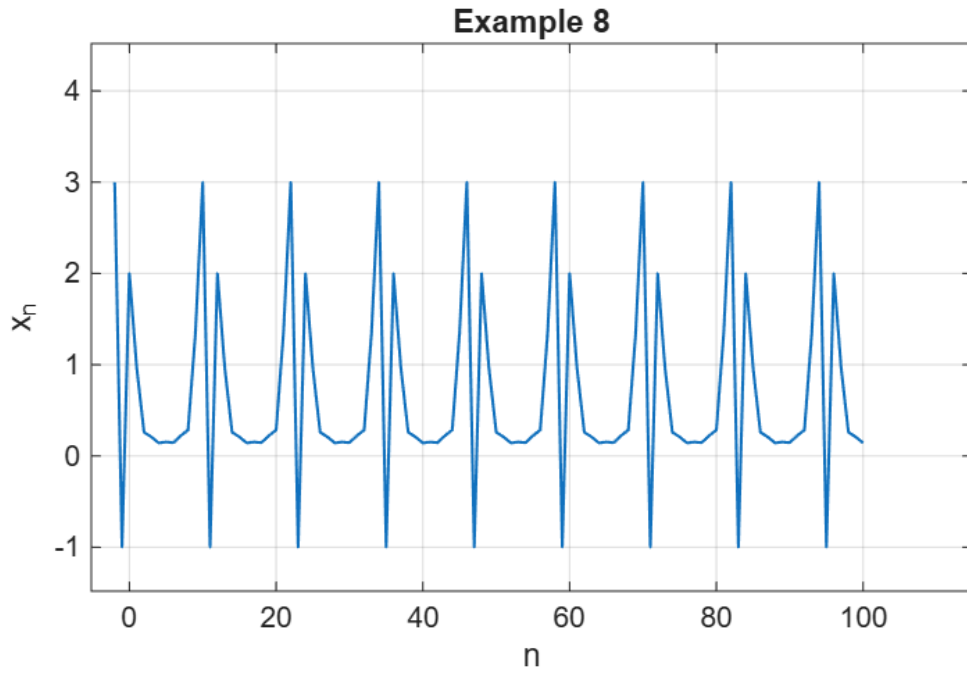


Fig. 8 $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{-x_{n-1} + \sqrt{3} x_{n-2}}$

$$\cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ (u_0, u_{-1}, u_{-2}) \in \mathbb{R}^3 : u_0 = 2 \frac{1+m}{m} u_{-1} \right\}$$

$$\cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ (u_0, u_{-1}, u_{-2}) \in \mathbb{R}^3 : u_{-1} = 2 \frac{1+m}{m} u_{-2} \right\}.$$

(3) Si $b^2 > 4a$, alors l'ensemble interdit de l'équation (2.1) est

$$F_3 = \bigcup_{i=0}^2 \{ (u_0, u_{-1}, u_{-2}) \in \mathbb{R}^3 : u_{-i} = 0 \}$$

$$\cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ (u_0, u_{-1}, u_{-2}) \in \mathbb{R}^3 : u_0 = \frac{\sin(m+1)\alpha}{\sqrt{a} \sin m\alpha} u_{-1} \right\}$$

$$\cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ (u_0, u_{-1}, u_{-2}) \in \mathbb{R}^3 : u_{-1} = \frac{\sin(m+1)\alpha}{\sqrt{a} \sin m\alpha} u_{-2} \right\}.$$

Preuve. On considère l'équation aux différences (2.1) avec $b^2 > 4a$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n u_{n-2}}{-a u_{n-1} + b u_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

L'ensemble interdit $\mathcal{F}$ est l'ensemble des conditions initiales (u_0, u_{-1}, u_{-2}) pour lesquelles la

solution n'est pas définie à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que le dénominateur s'annule :

$$-au_{n-1} + bu_{n-2} = 0$$

ou que l'une des conditions initiales soit nulle.

Cas 1 : $b^2 > 4a$

1. Conditions initiales nulles

Si $u_{-1} = 0$ ou $u_{-2} = 0$, la solution n'est pas définie. Ainsi :

$$\bigcup_{i=0}^2 \{(u_0, u_{-1}, u_{-2}) \in \mathbb{R}^3 : u_{-i} = 0\}$$

2. Annulation du dénominateur

D'après la (2.3), on a les formules explicites :

$$u_{2m+1} = \frac{v}{\gamma_0(m)\gamma_{-1}(m+1)}, \quad u_{2m+2} = \frac{v}{\gamma_0(m+1)\gamma_{-1}(m+1)}$$

. où $v = u_0 u_{-1} u_{-2}$, $\gamma_0(n) = -au_0 \theta_n + u_{-1} \theta_{n+1}$ et $\gamma_{-1}(n) = -au_{-1} \theta_n + u_{-2} \theta_{n+1}$.

La solution n'est pas définie si l'un des dénominateurs $\gamma_0(m)$, $\gamma_{-1}(m)$ ou $\gamma_{-1}(m+1)$ s'annule pour un certain $m \geq 0$.

— Si $\gamma_0(m) = 0$:

$$-au_0 \theta_m + u_{-1} \theta_{m+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = \frac{u_{-1}}{a} \cdot \frac{\theta_{m+1}}{\theta_m}, \quad m \geq 1$$

— Si $\gamma_{-1}(m) = 0$:

$$-au_{-1} \theta_m + u_{-2} \theta_{m+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{-1} = \frac{u_{-2}}{a} \cdot \frac{\theta_{m+1}}{\theta_m}, \quad m \geq 1$$

Le cas $m = 0$ correspond aux conditions initiales nulles déjà traitées.

Cas 2 : $b^2 = 4a$

1. Conditions initiales nulles

Si $u_{-1} = 0$ ou $u_{-2} = 0$, la solution n'est pas définie. Ainsi :

$$\bigcup_{i=0}^2 \{(u_0, u_{-1}, u_{-2}) \in \mathbb{R}^3 : u_{-i} = 0\}.$$

2. Annulation du dénominateur on a les formules explicites suivantes :

$$u_{2m+1} = \left(\frac{2}{b}\right)^{2m+1} \frac{4v}{\mu_0(m)\mu_{-1}(m+1)}, \quad u_{2m+2} = \left(\frac{2}{b}\right)^{2m+2} \frac{4v}{\mu_0(m+1)\mu_{-1}(m+1)}$$

où $v = u_0 u_{-1} u_{-2}$, $\mu_{-i}(n) = -bnu_{-i} + 2(1+n)u_{-i-1}$, pour $i = 0, 1$.

La solution n'est pas définie si l'un des dénominateurs $\mu_0(m)$, $\mu_{-1}(m)$ ou $\mu_{-1}(m+1)$ s'annule pour un certain $m \geq 0$.

— Si $\mu_0(m) = 0$ pour $m \geq 1$:

$$-bmu_0 + 2(1+m)u_{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = 2 \cdot \frac{1+m}{m} u_{-1}$$

— Si $\mu_{-1}(m) = 0$ pour $m \geq 1$:

$$-bmu_{-1} + 2(1+m)u_{-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{-1} = 2 \cdot \frac{1+m}{m} u_{-2}$$

Le cas $m = 0$ correspond aux conditions initiales nulles déjà traitées.

Cas 3 : $b^2 < 4a$

1. Conditions initiales nulles

Si $u_{-1} = 0$ ou $u_{-2} = 0$, la solution n'est pas définie. Ainsi :

$$\bigcup_{i=0}^2 \{(u_0, u_{-1}, u_{-2}) \in \mathbb{R}^3 : u_{-i} = 0\}$$

2. Annulation du dénominateur

D'après la (2.8), on a les formules explicites suivantes :

$$u_{2m+1} = \frac{\sin^2 \alpha}{a^{m+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{v}{\beta_0(m)\beta_{-1}(m+1)}, \quad u_{2m+2} = \frac{\sin^2 \alpha}{a^{m+1}} \cdot \frac{v}{\beta_0(m+1)\beta_{-1}(m+1)}$$

. Où $v = u_0 u_{-1} u_{-2}$, $\beta_{-i}(n) = \sqrt{a} u_{-i} \sin(n\alpha) - u_{-i-1} \sin((n+1)\alpha)$, pour $i = 0, 1$, et

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\sqrt{4a - b^2}}{b} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

,

La solution n'est pas définie si l'un des dénominateurs $\beta_0(m)$, $\beta_{-1}(m)$ ou $\beta_{-1}(m+1)$ s'annule pour un certain $m \geq 0$.

— Si $\beta_0(m) = 0$ pour $m \geq 1$:

$$\sqrt{a} u_0 \sin(m\alpha) - u_{-1} \sin((m+1)\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = \frac{\sin((m+1)\alpha)}{\sqrt{a} \sin(m\alpha)} u_{-1}$$

.

— Si $\beta_{-1}(m) = 0$ pour $m \geq 1$:

$$\sqrt{a} u_{-1} \sin(m\alpha) - u_{-2} \sin((m+1)\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{-1} = \frac{\sin((m+1)\alpha)}{\sqrt{a} \sin(m\alpha)} u_{-2}$$

.

Le cas $m = 0$ correspond aux conditions initiales nulles déjà traitées. ■

Résolution analytique de l'équation aux différences : $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{-ax_{n-1} + bx_{n-2}}$

Dans ce dernier chapitre, à l'aide de quelques transformations, nous recherchons analytiquement l'expression explicite des solutions de l'équation aux différences suivante

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{-ax_{n-1} + bx_{n-2}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

où $a, b > 0$ et les valeurs initiales x_{-2} , x_{-1} et x_0 sont des nombres réels.

3.1 Transformation en équation de Riccati

Par le changement de variable

$$y_n = \frac{x_{n-1}}{x_n} \quad \text{avec} \quad y_{-1} = \frac{x_{-2}}{x_{-1}}, \quad y_0 = \frac{x_{-1}}{x_0}, \quad (3.2)$$

on obtient d'après l'équation (3.1)

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_{n-2}}{-ax_{n-1} + bx_{n-2}},$$

donc

$$y_{n+1} = -a \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} + b,$$

alors, l'équation (3.1) devient

$$\boxed{y_{n+1} = b - \frac{a}{y_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots} \quad (3.3)$$

L'équation (3.3) est une équation aux différences du second ordre. On remarque que les termes d'indices pairs sont séparés des termes d'indices impairs, par conséquent, on obtient deux sous-suites indépendantes. En effet :

Pour $n = 2n$, on obtient

$$y_{2n+1} = b - \frac{a}{y_{2n-1}},$$

on pose

$$z_n = y_{2n-1}, \quad (3.4)$$

alors

$$\boxed{z_{n+1} = b - \frac{a}{z_n}, \quad n = 0, 1, \dots} \quad (3.5)$$

D'autres part, pour $n = 2n + 1$, on obtient

$$y_{2n+2} = b - \frac{a}{y_{2n}},$$

on pose

$$h_n = y_{2n}, \quad (3.6)$$

alors

$$\boxed{h_{n+1} = b - \frac{a}{h_n}, \quad n = 0, 1, \dots} \quad (3.7)$$

L'équation (3.5) est de la même forme que l'équation (3.7) (c'est des équations de Riccati), mais elles sont différentes en raison des valeurs initiales distinctes.

3.2 Transformation en équation linéaire

Considérant l'équation (3.5), on pose :

$$z_n = \frac{\theta_{n+1}}{\theta_n}, \quad \theta_0 = 1, \quad \theta_1 = z_0, \quad (3.8)$$

alors :

$$z_{n+1} = \frac{\theta_{n+2}}{\theta_{n+1}},$$

en remplaçant dans l'équation (3.5), on obtient

$$\frac{\theta_{n+2}}{\theta_{n+1}} = b - \frac{a}{\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n}},$$

donc :

$$\frac{\theta_{n+2}}{\theta_{n+1}} = b - a \frac{\theta_n}{\theta_{n+1}},$$

en multipliant par θ_{n+1} , on obtient l'équation aux différence linéaire homogène d'ordre 2 suivante

$$\boxed{\theta_{n+2} - b\theta_{n+1} + a\theta_n = 0, \quad \theta_0 = 1, \quad \theta_1 = z_0.} \quad (3.9)$$

Maintenant, considérant l'équation (3.7), on pose :

$$h_n = \frac{\theta'_{n+1}}{\theta'_n}, \quad \theta'_0 = 1, \quad \theta'_1 = h_0, \quad (3.10)$$

alors

$$\boxed{\theta'_{n+2} - b\theta'_{n+1} + a\theta'_n = 0, \quad \theta'_0 = 1, \quad \theta'_1 = h_0.} \quad (3.11)$$

3.3 Forme explicite de la solution générale de l'équation

3.3.1 Forme explicite de la solution de l'équation linéaire

L'équation caractéristique de (3.9) est

$$\lambda^2 - b\lambda + a = 0,$$

Cas $b^2 - 4a > 0$

Dans ce cas la solution générale de l'équation (3.9) est donnée par :

$$\theta_n = c_1 \lambda_+^n + c_2 \lambda_-^n$$

où λ_+ et λ_- sont les racines de l'équation caractéristique

$$\lambda_+ = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2}, \quad \lambda_- = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2},$$

et les constantes c_1 et c_2 sont déterminer selon les valeurs initiales comme suite

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \theta_0 = 1 \\ c_1 \lambda_+ + c_2 \lambda_- = \theta_1 = z_0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} c_2 = 1 - c_1 \\ \lambda_+ - z_0 = c_2(\lambda_+ - \lambda_-) \end{cases}$$

alors

$$c_2 = \frac{\lambda_+ - z_0}{\lambda_+ - \lambda_-}$$

et

$$c_1 = 1 - c_2 = 1 - \frac{\lambda_+ - z_0}{\lambda_+ - \lambda_-} = \frac{z_0 - \lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-}$$

d'où la forme explicite de la solution générale de l'équation (3.9) est

$$\theta_n = \frac{z_0 - \lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-} \lambda_+^n + \frac{\lambda_+ - z_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \lambda_-^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.12)$$

De même, la forme explicite de la solution générale de l'équation (3.11) est

$$\theta'_n = \frac{h_0 - \lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-} \lambda_+^n + \frac{\lambda_+ - h_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \lambda_-^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.13)$$

Remarque 3.3.1

$$\lambda_+ + \lambda_- = b, \quad \lambda_+ \lambda_- = a$$

$$\frac{b}{\lambda_+} = 1 + \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \Rightarrow -1 + \frac{b}{\lambda_+} = \frac{\lambda_-}{\lambda_+}$$

Cas $b^2 - 4a = 0$ Dans ce cas, l'équation caractéristique possède une racine double :

$$\lambda = \frac{b}{2}.$$

La solution générale de l'équation (3.9) est donnée par :

$$\theta_n = (c_1 + c_2 n) \lambda^n.$$

Les constantes c_1 et c_2 sont déterminées à l'aide des conditions initiales $\theta_0 = 1$ et $\theta_1 = z_0$:

$$\begin{cases} \theta_0 = c_1 = 1 \\ \theta_1 = (c_1 + c_2) \lambda = z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = \frac{z_0}{\lambda} - 1. \end{cases}$$

Ainsi, la forme explicite de la solution est :

$$\theta_n = \left(1 + \left(\frac{z_0}{\lambda} - 1 \right) n \right) \lambda^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

De même, pour l'équation (3.11) avec $\theta'_0 = 1$ et $\theta'_1 = h_0$:

$$\theta'_n = \left(1 + \left(\frac{h_0}{\lambda} - 1 \right) n \right) \lambda^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Cas $b^2 - 4a < 0$ Dans ce cas, les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées :

$$\lambda_+ = \frac{b + i\sqrt{4a - b^2}}{2}, \quad \lambda_- = \frac{b - i\sqrt{4a - b^2}}{2} = \overline{\lambda_+}.$$

On écrit ces racines sous forme trigonométrique :

$$\lambda_+ = r e^{i\varphi}, \quad \lambda_- = r e^{-i\varphi},$$

avec

$$r = \sqrt{a}, \quad \cos \varphi = \frac{b}{2\sqrt{a}}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{4a - b^2}}{2\sqrt{a}}, \quad \varphi \in (0, \pi).$$

La solution générale de l'équation (3.9) s'écrit alors :

$$\theta_n = r^n (A \cos(n\varphi) + B \sin(n\varphi)).$$

Les conditions initiales $\theta_0 = 1$ et $\theta_1 = z_0$ donnent :

$$\begin{cases} \theta_0 = A = 1 \\ \theta_1 = r(A \cos \varphi + B \sin \varphi) = z_0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1 \\ B = \frac{z_0/r - \cos \varphi}{\sin \varphi}. \end{cases}$$

Par conséquent, la forme explicite de la solution est :

$$\theta_n = r^n \left(\cos(n\varphi) + \frac{z_0/r - \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin(n\varphi) \right), \quad n = 0, 1, \dots$$

De la même manière, pour l'équation (3.11) avec $\theta'_0 = 1$ et $\theta'_1 = h_0$:

$$\theta'_n = r^n \left(\cos(n\varphi) + \frac{h_0/r - \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin(n\varphi) \right), \quad n = 0, 1, \dots$$

3.3.2 Forme explicite de la solution de l'équation de Riccati

Nous avons d'après (3.4) et (3.8)

$$y_{2n-1} = \frac{\theta_{n+1}}{\theta_n}, \quad \theta_0 = 1, \quad \theta_1 = y_{-1}, \quad (3.14)$$

aussi, d'après (3.6) et (3.10), on obtient

$$y_{2n} = \frac{\theta'_{n+1}}{\theta'_n}, \quad \theta'_0 = 1, \quad \theta'_1 = y_0, \quad (3.15)$$

Cas $b^2 - 4a > 0$ Dans ce cas la forme de solution de l'équation (3.3) est

$$y_{2n-1} = \frac{(y_{-1} - \lambda_-) \lambda_+^{n+1} + (\lambda_+ - y_{-1}) \lambda_-^{n+1}}{(y_{-1} - \lambda_-) \lambda_+^n + (\lambda_+ - y_{-1}) \lambda_-^n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$y_{2n} = \frac{(y_0 - \lambda_-) \lambda_+^{n+1} + (\lambda_+ - y_0) \lambda_-^{n+1}}{(y_0 - \lambda_-) \lambda_+^n + (\lambda_+ - y_0) \lambda_-^n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Cas $b^2 - 4a = 0$ Dans ce cas, l'équation caractéristique possède une racine double :

$$\lambda = \frac{b}{2}.$$

D'après (3.14) et la solution de l'équation linéaire dans le cas $\Delta = 0$, on a :

$$\theta_n = \left(1 + \left(\frac{y_{-1}}{\lambda} - 1\right)n\right) \lambda^n.$$

Par conséquent,

$$y_{2n-1} = \frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} = \frac{\left(1 + \left(\frac{y_{-1}}{\lambda} - 1\right)(n+1)\right) \lambda^{n+1}}{\left(1 + \left(\frac{y_{-1}}{\lambda} - 1\right)n\right) \lambda^n} = \lambda \frac{1 + \left(\frac{y_{-1}}{\lambda} - 1\right)(n+1)}{1 + \left(\frac{y_{-1}}{\lambda} - 1\right)n}.$$

Ainsi,

$$y_{2n-1} = \lambda \frac{1 + \left(\frac{y_{-1}}{\lambda} - 1\right)(n+1)}{1 + \left(\frac{y_{-1}}{\lambda} - 1\right)n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

De même, pour la sous-suite paire :

$$y_{2n} = \lambda \frac{1 + \left(\frac{y_0}{\lambda} - 1\right)(n+1)}{1 + \left(\frac{y_0}{\lambda} - 1\right)n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Cas $b^2 - 4a < 0$ Dans ce cas, les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées :

$$\lambda_+ = r e^{i\varphi}, \quad \lambda_- = r e^{-i\varphi},$$

avec

$$r = \sqrt{a}, \quad \cos \varphi = \frac{b}{2\sqrt{a}}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{4a - b^2}}{2\sqrt{a}}, \quad \varphi \in (0, \pi).$$

La solution de l'équation linéaire s'écrit :

$$\theta_n = r^n \left(\cos(n\varphi) + \frac{y_{-1}/r - \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin(n\varphi) \right).$$

D'après (3.14), on obtient :

$$y_{2n-1} = \frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} = r \frac{\cos((n+1)\varphi) + \frac{y_{-1}/r - \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin((n+1)\varphi)}{\cos(n\varphi) + \frac{y_{-1}/r - \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin(n\varphi)}.$$

Ainsi,

$$y_{2n-1} = r \frac{\cos((n+1)\varphi) + \left(\frac{y_{-1}}{r} - \cos \varphi \right) \frac{\sin((n+1)\varphi)}{\sin \varphi}}{\cos(n\varphi) + \left(\frac{y_{-1}}{r} - \cos \varphi \right) \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

De même pour la sous-suite paire :

$$y_{2n} = r \frac{\cos((n+1)\varphi) + \left(\frac{y_0}{r} - \cos \varphi \right) \frac{\sin((n+1)\varphi)}{\sin \varphi}}{\cos(n\varphi) + \left(\frac{y_0}{r} - \cos \varphi \right) \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

3.3.3 Forme explicite de la solution de notre équation

Nous avons d'après (3.2)

$$x_n = \frac{1}{y_n} x_{n-1}, \quad n = -1, 0, 1, \dots,$$

alors

$$\begin{aligned} x_{2n} &= \frac{1}{y_{2n}} x_{2n-1}, \\ x_{2n+1} &= \frac{1}{y_{2n+1}} x_{2n}, \end{aligned}$$

Donc

$$x_{2n} = \frac{1}{y_{2n} y_{2n-1}} x_{2n-2},$$

$$x_{2n+1} = \frac{1}{y_{2n+1} y_{2n}} x_{2n-1},$$

D'où

$$x_{2n} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{y_{2i} y_{2i-1}} x_0, \quad (3.16)$$

$$x_{2n+1} = \prod_{i=0}^n \frac{1}{y_{2i+1} y_{2i}} x_{-1}. \quad (3.17)$$

Maintenant, d'après (3.14) et (3.15), on obtient

$$\prod_{i=1}^n y_{2i-1} = \prod_{i=1}^n \frac{\theta_{i+1}}{\theta_i} = \frac{\theta_{n+1}}{\theta_1}$$

$$\prod_{i=1}^n y_{2i} = \prod_{i=1}^n \frac{\theta'_{i+1}}{\theta'_i} = \frac{\theta'_{n+1}}{\theta'_1}$$

$$\prod_{i=0}^n y_{2i+1} = \prod_{i=0}^n \frac{\theta_{i+2}}{\theta_{i+1}} = \frac{\theta_{n+2}}{\theta_1}$$

$$\prod_{i=0}^n y_{2i} = \prod_{i=0}^n \frac{\theta'_{i+1}}{\theta'_i} = \frac{\theta'_{n+1}}{\theta'_0}$$

Donc

$$x_{2n} = \frac{\theta_1}{\theta_{n+1}} \frac{\theta'_1}{\theta'_{n+1}} x_0, \quad (3.18)$$

$$x_{2n+1} = \frac{\theta_1}{\theta_{n+2}} \frac{\theta'_0}{\theta'_{n+1}} x_{-1}. \quad (3.19)$$

Cas $b^2 - 4a > 0$ Dans ce cas, d'après (3.12) et (3.13), on obtient

$$x_{2n} = \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{(y_{-1} - \lambda_-) \lambda_+^{n+1} + (\lambda_+ - y_{-1}) \lambda_-^{n+1}} \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{(y_0 - \lambda_-) \lambda_+^{n+1} + (\lambda_+ - y_0) \lambda_-^{n+1}} y_{-1} y_0 x_0,$$

$$x_{2n+1} = \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{(y_{-1} - \lambda_-) \lambda_+^{n+2} + (\lambda_+ - y_{-1}) \lambda_-^{n+2}} \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{(y_0 - \lambda_-) \lambda_+^{n+1} + (\lambda_+ - y_0) \lambda_-^{n+1}} y_{-1} x_{-1}.$$

Donc

$$x_{2n} = \frac{b^2 - 4a}{\left[\left(\frac{x_{-2}}{x_{-1}} - \lambda_{-}\right) \lambda_{+}^{n+1} + \left(\lambda_{+} - \frac{x_{-2}}{x_{-1}}\right) \lambda_{-}^{n+1}\right] \left[\left(\frac{x_{-1}}{x_0} - \lambda_{-}\right) \lambda_{+}^{n+1} + \left(\lambda_{+} - \frac{x_{-1}}{x_0}\right) \lambda_{-}^{n+1}\right]} x_{-2},$$

$$x_{2n+1} = \frac{b^2 - 4a}{\left[\left(\frac{x_{-2}}{x_{-1}} - \lambda_{-}\right) \lambda_{+}^{n+2} + \left(\lambda_{+} - \frac{x_{-2}}{x_{-1}}\right) \lambda_{-}^{n+2}\right] \left[\left(\frac{x_{-1}}{x_0} - \lambda_{-}\right) \lambda_{+}^{n+1} + \left(\lambda_{+} - \frac{x_{-1}}{x_0}\right) \lambda_{-}^{n+1}\right]} x_{-2}.$$

alors

$$x_{2n} = \frac{(b^2 - 4a) x_{-2} x_{-1} x_0}{\left[(x_{-2} - x_{-1} \lambda_{-}) \lambda_{+}^{n+1} + (\lambda_{+} x_{-1} - x_{-2}) \lambda_{-}^{n+1}\right] \left[(x_{-1} - x_0 \lambda_{-}) \lambda_{+}^{n+1} + (\lambda_{+} x_0 - x_{-1}) \lambda_{-}^{n+1}\right]},$$

$$x_{2n+1} = \frac{(b^2 - 4a) x_{-2} x_{-1} x_0}{\left[(x_{-2} - x_{-1} \lambda_{-}) \lambda_{+}^{n+2} + (\lambda_{+} x_{-1} - x_{-2}) \lambda_{-}^{n+2}\right] \left[(x_{-1} - x_0 \lambda_{-}) \lambda_{+}^{n+1} + (\lambda_{+} x_0 - x_{-1}) \lambda_{-}^{n+1}\right]}.$$

Cas $b^2 - 4a = 0$ Dans ce cas, l'équation caractéristique possède une racine double :

$$\lambda = \frac{b}{2}.$$

D'après les solutions de l'équation linéaire pour $\Delta = 0$, on a :

$$\theta_n = \left(1 + \left(\frac{y_{-1}}{\lambda} - 1\right)n\right) \lambda^n, \quad \theta'_n = \left(1 + \left(\frac{y_0}{\lambda} - 1\right)n\right) \lambda^n.$$

En utilisant les relations (3.18) et (3.19), on obtient :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= y_{-1}, \quad \theta'_1 = y_0, \quad \theta'_0 = 1, \\ \theta_{n+1} &= \left(1 + \left(\frac{y_{-1}}{\lambda} - 1\right)(n+1)\right) \lambda^{n+1}, \\ \theta_{n+2} &= \left(1 + \left(\frac{y_{-1}}{\lambda} - 1\right)(n+2)\right) \lambda^{n+2}, \\ \theta'_{n+1} &= \left(1 + \left(\frac{y_0}{\lambda} - 1\right)(n+1)\right) \lambda^{n+1}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$x_{2n} = \frac{y_{-1}}{\left(1 + \left(\frac{y_{-1}}{\lambda} - 1\right)(n+1)\right) \lambda^{n+1}} \cdot \frac{y_0}{\left(1 + \left(\frac{y_0}{\lambda} - 1\right)(n+1)\right) \lambda^{n+1}} x_0,$$

$$x_{2n+1} = \frac{y_{-1}}{\left(1 + \left(\frac{y_{-1}}{\lambda} - 1\right)(n+2)\right) \lambda^{n+2}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{y_0}{\lambda} - 1\right)(n+1)\right) \lambda^{n+1}} x_{-1}.$$

En simplifiant et en remplaçant $y_{-1} = \frac{x_{-2}}{x_{-1}}$, $y_0 = \frac{x_{-1}}{x_0}$, on obtient :

$$x_{2n} = \frac{y_{-1}}{\left(1 + \left(\frac{y_{-1}}{\lambda} - 1\right)(n+1)\right)\lambda^{n+1}} \cdot \frac{y_0}{\left(1 + \left(\frac{y_0}{\lambda} - 1\right)(n+1)\right)\lambda^{n+1}} \cdot x_0$$

$$x_{2n+1} = \frac{y_{-1}}{\left(1 + \left(\frac{y_{-1}}{\lambda} - 1\right)(n+2)\right)\lambda^{n+2}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{y_0}{\lambda} - 1\right)(n+1)\right)\lambda^{n+1}} \cdot x_{-1}$$

$$x_{2n} = \frac{\frac{x_{-2}}{x_{-1}} \cdot \frac{x_{-1}}{x_0} \cdot x_0}{\lambda^{2(n+1)}} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x_{-2}}{x_{-1}\lambda} - 1\right)(n+1)\right] \left[1 + \left(\frac{x_{-1}}{x_0\lambda} - 1\right)(n+1)\right]}$$

$$x_{2n} = \frac{x_{-2}}{\lambda^{2(n+1)}} \cdot \frac{1}{\frac{(n+1)x_{-2} - nx_{-1}\lambda}{x_{-1}\lambda} \cdot \frac{(n+1)x_{-1} - nx_0\lambda}{x_0\lambda}}$$

$$x_{2n} = \frac{x_{-2}}{\lambda^{2(n+1)}} \cdot \frac{x_{-1}x_0\lambda^2}{\left[(n+1)x_{-2} - n\lambda x_{-1}\right] \left[(n+1)x_{-1} - n\lambda x_0\right]}$$

$$\boxed{x_{2n} = \frac{x_{-2} x_{-1} x_0}{\lambda^{2n} \left[(n+1)x_{-2} - n\lambda x_{-1}\right] \left[(n+1)x_{-1} - n\lambda x_0\right]}}$$

$$x_{2n+1} = \frac{\frac{x_{-2}}{x_{-1}} \cdot x_{-1}}{\lambda^{2n+3}} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x_{-2}}{x_{-1}\lambda} - 1\right)(n+2)\right] \left[1 + \left(\frac{x_{-1}}{x_0\lambda} - 1\right)(n+1)\right]}$$

$$x_{2n+1} = \frac{x_{-2}}{\lambda^{2n+3}} \cdot \frac{1}{\frac{(n+2)x_{-2} - (n+1)\lambda x_{-1}}{x_{-1}\lambda} \cdot \frac{(n+1)x_{-1} - nx_0\lambda}{x_0\lambda}}$$

$$x_{2n+1} = \frac{x_{-2}}{\lambda^{2n+3}} \cdot \frac{x_{-1}x_0\lambda^2}{\left[(n+2)x_{-2} - (n+1)\lambda x_{-1}\right] \left[(n+1)x_{-1} - n\lambda x_0\right]}$$

$$\boxed{x_{2n+1} = \frac{x_{-2} x_{-1} x_0}{\lambda^{2n+1} \left[(n+2)x_{-2} - (n+1)\lambda x_{-1}\right] \left[(n+1)x_{-1} - n\lambda x_0\right]}}$$

Cas $b^2 - 4a < 0$ Dans ce cas, les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées :

$$\lambda_+ = re^{i\varphi}, \quad \lambda_- = re^{-i\varphi},$$

avec

$$r = \sqrt{a}, \quad \cos \varphi = \frac{b}{2\sqrt{a}}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{4a - b^2}}{2\sqrt{a}}, \quad \varphi \in (0, \pi).$$

Les solutions de l'équation linéaire s'écrivent :

$$\theta_n = r^n \left(\cos(n\varphi) + \frac{y_{-1}/r - \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin(n\varphi) \right),$$

$$\theta'_n = r^n \left(\cos(n\varphi) + \frac{y_0/r - \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin(n\varphi) \right).$$

où $y_{-1} = \frac{x_{-2}}{x_{-1}}$ et $y_0 = \frac{x_{-1}}{x_0}$.

En utilisant les relations (3.18) et (3.19), on obtient :

$$x_{2n} = \frac{\theta_1}{\theta_{n+1}} \cdot \frac{\theta'_1}{\theta'_{n+1}} x_0.$$

Sachant que $\theta_1 = y_{-1}$ et $\theta'_1 = y_0$, on obtient :

$$x_{2n} = \frac{y_{-1}}{r^{n+1}P} \cdot \frac{y_0}{r^{n+1}Q} \cdot x_0,$$

où l'on a posé :

$$P = \cos((n+1)\varphi) + \frac{y_{-1}/r - \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin((n+1)\varphi),$$

$$Q = \cos((n+1)\varphi) + \frac{y_0/r - \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin((n+1)\varphi).$$

Ainsi,

$$x_{2n} = \frac{y_{-1}y_0x_0}{r^{2(n+1)}PQ}. \quad (3.20)$$

On a

$$\frac{y_{-1}}{r} = \frac{x_{-2}}{x_{-1}r}.$$

Donc

$$\frac{y_{-1}/r - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\frac{x_{-2}}{x_{-1}r} - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{x_{-2} - x_{-1}r \cos \varphi}{x_{-1}r \sin \varphi}.$$

Par conséquent

$$P = \cos((n+1)\varphi) + \frac{x_{-2} - x_{-1}r \cos \varphi}{x_{-1}r \sin \varphi} \sin((n+1)\varphi).$$

En réduisant au même dénominateur

$$P = \frac{x_{-1}r \sin \varphi \cos((n+1)\varphi) + (x_{-2} - x_{-1}r \cos \varphi) \sin((n+1)\varphi)}{x_{-1}r \sin \varphi}.$$

Séparons le numérateur en deux parties :

$$N_P = x_{-1}r \sin \varphi \cos((n+1)\varphi) - x_{-1}r \cos \varphi \sin((n+1)\varphi) + x_{-2} \sin((n+1)\varphi).$$

On factorise $x_{-1}r$ dans les deux premiers termes

$$N_P = x_{-1}r \left[\sin \varphi \cos((n+1)\varphi) - \cos \varphi \sin((n+1)\varphi) \right] + x_{-2} \sin((n+1)\varphi).$$

En utilisant l'identité trigonométrique

$$\sin \varphi \cos((n+1)\varphi) - \cos \varphi \sin((n+1)\varphi) = \sin(\varphi - (n+1)\varphi) = \sin(-n\varphi) = -\sin(n\varphi),$$

on obtient

$$N_P = -x_{-1}r \sin(n\varphi) + x_{-2} \sin((n+1)\varphi).$$

Ainsi,

$$P = \frac{x_{-2} \sin((n+1)\varphi) - x_{-1}r \sin(n\varphi)}{x_{-1}r \sin \varphi}.$$

De la même manière, on trouve

$$Q = \frac{x_{-1} \sin((n+1)\varphi) - x_0 r \sin(n\varphi)}{x_0 r \sin \varphi}.$$

Alors

$$PQ = \frac{(x_{-2} \sin((n+1)\varphi) - x_{-1}r \sin(n\varphi))(x_{-1} \sin((n+1)\varphi) - x_0 r \sin(n\varphi))}{x_{-1}x_0 r^2 \sin^2 \varphi}. \quad (3.21)$$

On a $y_{-1}y_0x_0 = \frac{x_{-2}}{x_{-1}} \cdot \frac{x_{-1}}{x_0} \cdot x_0 = x_{-2}$. En remplaçant dans (3.20) :

$$x_{2n} = \frac{x_{-2}}{r^{2n+2}} \cdot \frac{1}{PQ}.$$

Puis en utilisant (3.21) :

$$x_{2n} = \frac{x_{-2}}{r^{2n+2}} \cdot \frac{x_{-1} x_0 r^2 \sin^2 \varphi}{\left(x_{-2} \sin((n+1)\varphi) - x_{-1} r \sin(n\varphi)\right) \left(x_{-1} \sin((n+1)\varphi) - x_0 r \sin(n\varphi)\right)}.$$

$$x_{2n} = \frac{x_{-2} x_{-1} x_0 \sin^2 \varphi}{r^{2n} \left[x_{-2} \sin((n+1)\varphi) - x_{-1} r \sin(n\varphi) \right] \left[x_{-1} \sin((n+1)\varphi) - x_0 r \sin(n\varphi) \right]}. \quad (3.22)$$

Si l'on pose

$$A_n = \frac{x_{-2} \sin((n+1)\varphi) - x_{-1} r \sin(n\varphi)}{\sin \varphi}, \quad B_n = \frac{x_{-1} \sin((n+1)\varphi) - x_0 r \sin(n\varphi)}{\sin \varphi},$$

alors (3.22) devient

$$x_{2n} = \frac{x_{-2} x_{-1} x_0}{r^{2n} A_n B_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

et on a :

$$x_{2n+1} = \frac{\theta_1}{\theta_{n+2}} \cdot \frac{\theta'_0}{\theta'_{n+1}} x_{-1}.$$

En utilisant les solutions de l'équation linéaire, on obtient :

$$x_{2n+1} = \frac{y_{-1}}{r^{n+2} P_2} \cdot \frac{1}{r^{n+1} Q} \cdot x_{-1},$$

où

$$P_2 = \cos((n+2)\varphi) + \frac{y_{-1}/r - \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin((n+2)\varphi),$$

$$Q = \cos((n+1)\varphi) + \frac{y_0/r - \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin((n+1)\varphi).$$

Ainsi,

$$x_{2n+1} = \frac{y_{-1} x_{-1}}{r^{2n+3} P_2 Q}. \quad (3.23)$$

Après simplification, on trouve :

$$P_2 = \frac{x_{-2} \sin((n+2)\varphi) - x_{-1} r \sin((n+1)\varphi)}{x_{-1} r \sin \varphi},$$

$$Q = \frac{x_{-1} \sin((n+1)\varphi) - x_0 r \sin(n\varphi)}{x_0 r \sin \varphi}.$$

Par conséquent,

$$P_2 Q = \frac{(x_{-2} \sin((n+2)\varphi) - x_{-1} r \sin((n+1)\varphi))(x_{-1} \sin((n+1)\varphi) - x_0 r \sin(n\varphi))}{x_{-1} x_0 r^2 \sin^2 \varphi}. \quad (3.24)$$

En substituant (3.24) dans (3.23) et sachant que $y_{-1} x_{-1} = x_{-2}$, on obtient :

$$x_{2n+1} = \frac{x_{-2}}{r^{2n+3}} \cdot \frac{x_{-1} x_0 r^2 \sin^2 \varphi}{(x_{-2} \sin((n+2)\varphi) - x_{-1} r \sin((n+1)\varphi))(x_{-1} \sin((n+1)\varphi) - x_0 r \sin(n\varphi))}.$$

$$x_{2n+1} = \frac{x_{-2} x_{-1} x_0 \sin^2 \varphi}{r^{2n+1} [x_{-2} \sin((n+2)\varphi) - x_{-1} r \sin((n+1)\varphi)] [x_{-1} \sin((n+1)\varphi) - x_0 r \sin(n\varphi)]}. \quad (3.25)$$

Si l'on pose

$$C_n = \frac{x_{-2} \sin((n+2)\varphi) - x_{-1} r \sin((n+1)\varphi)}{\sin \varphi}, \quad D_n = \frac{x_{-1} \sin((n+1)\varphi) - x_0 r \sin(n\varphi)}{\sin \varphi},$$

alors (3.25) devient

$$x_{2n+1} = \frac{x_{-2} x_{-1} x_0}{r^{2n+1} C_n D_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous proposons d'examiner en détail les résultats établis dans l'article d'Abou Zaid. Plus précisément, nous vérifions l'expression explicite des solutions, puis nous analysons leur comportement asymptotique à travers l'étude de leur convergence et de leur divergence. En outre, nous enrichissons cette étude par de nouveaux résultats relatifs aux ensembles interdits, à l'existence de solutions périodiques et par la présentation de plusieurs exemples permettant d'illustrer les résultats obtenus. Comme perspective de recherche, la démarche analytique adoptée dans le troisième chapitre pour obtenir pas à pas l'expression explicite de la solution pourrait être généralisée et appliquée à d'autres classes d'équations aux différences non linéaires d'ordre supérieur, ouvrant ainsi la voie à de futures études consacrées à la détermination de solutions explicites et à l'analyse de leur comportement dynamique.

Bibliographie

- [1] R. Abo-Zeid, H. Kamal, *Global behavior of a third order difference equation with quadratic term*, Bol. Soc. Mat. Mex. **27**, 23 (2021). <https://doi.org/10.1007/s40590-021-00337-z>
- [2] R. Abo-Zeid, M. A. Al-Shabi, *Global behavior of a third order difference equation*, Tamk. J. Math. **3(43)** (2012), 375–383.
- [3] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, 3rd ed, Springer, New York, 2005.
- [4] E. A. Grove, G. Ladas, *Periodicities in Nonlinear Difference Equations*, Advances in Discrete Mathematics and Applications, Volume 4, Chapman and Hall, CRC Press, 2005.
- [5] V. L. Kocic, G. Ladas, *Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications*, Kluwer Academic Publishers, Kingston, 1993.
- [6] R. Abo-Zeid, *Global Behavior of a Fourth Order Difference Equation with Quadratic Term*, Bol. Soc. Mat. Mex. **25**(1) (2019), 187–194.
- [7] R. Abo-Zeid, *Behavior of Solutions of a Higher Order Difference Equation*, Ala. J. Math. **42** (2018), 1–10.
- [8] R. Abo-Zeid, *On the Solutions of a Higher Order Difference Equation*, Georgian Math. J. <https://doi.org/10.1515/gmj-2018-0008>