



Faculté des Mathématiques et Informatique

Numéro de série:

Numéro d'inscription:

Département des Mathématiques

Filière : *Mathématiques*

Spécialité : *Mathématiques Appliquées*

www.univ-mila.dz

Thèse
présentée pour l'obtention du Diplôme de
Doctorat
troisième cycle (LMD)

***Bifurcations et chaos de quelques systèmes
dynamiques discrets d'ordre fractionnaire***

Présenté par: *Bellout Aida*

Encadré par: *Bououden Rabah*

N°	Nom & Prénom	Grade	Université	Désignation
1	Bazeniar Abdelghafour	M.C.A	Université Abdelhafid Boussouf Mila	Président
2	Bououden Rabah	Prof	Université Abdelhafid Boussouf Mila	Rapporteur
3	Halim Yacine	Prof	Université Abdelhafid Boussouf Mila	Examineur
4	Chellouf Yassamine	M.C.A	Université Abdelhafid Boussouf Mila	Examineur
5	Meddour Lotfi	M.C.A	Univeristé Frères Mentouri Constantine1	Examineur
6	Zarour Abdelwahab	M.C.A	Univeristé Frères Mentouri Constantine1	Examineur

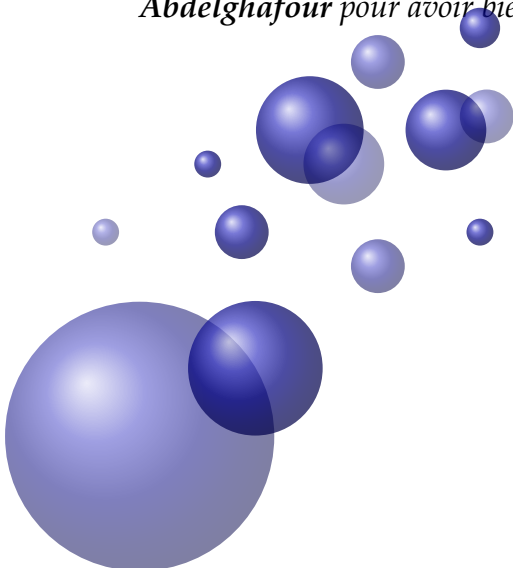
Année universitaire: 2025/2026

REMERCIEMENTS

Louange à Dieu, Seigneur des mondes, une louange digne de la majesté de Son Visage et de la grandeur de Son Autorité. À Lui reviennent les louanges, au commencement comme à la fin, en apparence comme en profondeur. C'est par Sa grâce et Son assistance que ce travail a pu être mené à terme, et il n'aurait pu voir le jour sans Son soutien et Sa bienveillance. À Lui la gratitude pour Ses bienfaits et la reconnaissance pour l'inspiration qu'Il m'a accordée, m'ayant donné la patience, la force et la persévérance nécessaires pour surmonter les difficultés et atteindre cet objectif scientifique.

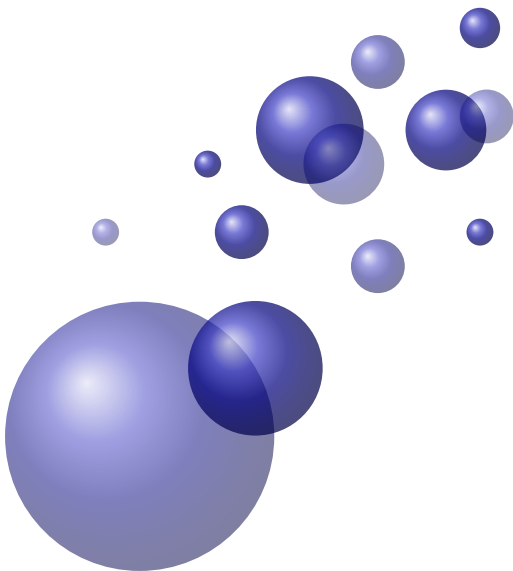
*Après avoir rendu grâce à Dieu le Très-Haut, j'adresse mes plus sincères remerciements et ma profonde reconnaissance à mon directeur de recherche, Monsieur **Bououden Rabah**, Maître de conférences à l'Université Abdelhafid Boussouf de Mila, pour son accompagnement constant, la rigueur de son encadrement scientifique, ainsi que pour ses conseils précieux et son soutien indéfectible tout au long de la réalisation de ce travail. Son encouragement et sa vaste expérience ont joué un rôle déterminant dans la maturation de cette recherche et son aboutissement dans sa forme finale.*

*J'ai également l'honneur d'exprimer mes vifs remerciements à Monsieur **Dr. Bazeniar Abdelghafour** pour avoir bien voulu présider le jury de soutenance de cette thèse.*



*Je tiens aussi à remercier chaleureusement Monsieur **Pr. Halim Yacine, Dr. Chellouf Yassamine**, Monsieur **Dr. Meddour Lotfi** et Monsieur **Dr. Zarour Abdelwahab** pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'examiner ce travail et pour les remarques scientifiques pertinentes qu'ils ont formulées, contribuant ainsi à son enrichissement. J'adresse mes remerciements les plus sincères et les plus profonds à ma chère famille, qui a constitué un soutien essentiel et un refuge constant à chaque étape, grâce à son amour inconditionnel, sa patience et sa compréhension. Son appui indéfectible a été déterminant dans l'achèvement de cette thèse.*

Enfin, je tiens par ailleurs à exprimer ma gratitude à l'ensemble de mes collègues et amis qui m'ont accompagné tout au long de ce parcours scientifique, pour leur soutien moral, leurs encouragements et l'énergie positive qu'ils m'ont transmise.



Dédicace

Je dédie cette œuvre, fruit d'années d'efforts et de persévérance, à la mémoire de mon père bien-aimé, qui nous a quittés quelques jours avant l'aboutissement de ce rêve qu'il a tant espéré voir se réaliser. Son amour, ses sacrifices, ses conseils et ses prières ont éclairé mon chemin et porté mes pas jusqu'à cet accomplissement. Qu'Allah l'enveloppe de Son infinie miséricorde et lui accorde une place parmi les élus du Paradis.

À ma mère bien-aimée, pilier de ma vie et lumière de mon chemin, dont l'amour, la patience et le soutien indéfectible continuent d'être pour moi une source de force et de réconfort. Que Dieu la protège et la comble de Ses bienfaits.

À ma sœur et à mes frères, dont l'affection et le soutien indéfectibles ont été pour moi une source constante de réconfort et de motivation. À ma famille tout entière, refuge d'amour et d'encouragement. À mes véritables amis, pour leur fidélité et leur présence précieuse.

À mes maîtres et enseignants, gardiens du savoir, qui ont nourri en moi le goût de la connaissance et l'exigence de l'excellence.

À tous les cœurs qui ont cru en moi quand j'étais fatiguée, à toutes les mains qui se sont tendues vers moi en silence, sans attendre de remerciement, à ceux qui ont été mon soutien quand le chemin semblait plus long que ma force.

À ceux qui m'ont appris que tomber n'est pas une fin, que l'effort lui-même est une victoire, et que les rêves ne meurent pas : ils demeurent vivants dans le cœur de ceux qui continuent d'y croire.



Ce travail est le fruit de la fatigue, de la patience et d'un espoir qui n'a jamais faibli. Je l'offre à tous ceux qui ont traversé ma vie et y ont laissé une empreinte belle, et plus particulièrement à mon père, dont l'absence rend cet accomplissement plus douloureux, mais dont la présence demeure éternellement gravée dans mon cœur.

Me voici arrivée... avec gratitude, avec foi, et avec le regret immense de ne pouvoir partager cet instant avec toi, mon père. Que cette œuvre soit un humble témoignage de mon amour, de ma reconnaissance et de ma fidélité à ta mémoire.

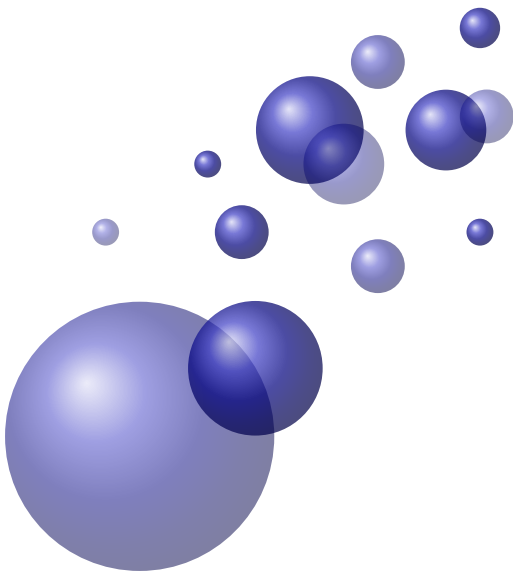


TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	13
1 Systèmes dynamiques discrets d'ordre entier	21
1.1 Introduction	21
1.2 Définitions et notions de bases	22
1.3 Notions de Stabilité	25
1.3.1 Système dynamique linéaire	26
1.3.2 Systèmes dynamiques non linéaires	31
1.4 Théorie de bifurcations	34
1.4.1 Bifurcation de pli :	35
1.4.2 Bifurcation transcritique :	36
1.4.3 Bifurcation Pitchfork :	36
1.4.4 Bifurcation de doublement de période (ou flip)	36
1.4.5 Bifurcation de Neimark-Sacker	37
1.5 Définitions et propriétés du chaos	37
1.5.1 Définitions	37
1.5.2 Caractéristique du chaos	38

1.6	Méthodes de quantification du chaos	40
1.6.1	Exposants de Lyapunov	40
1.6.2	Dimensions fractales des attracteurs étranges	45
1.7	Test 0 – 1	47
1.7.1	Méthodes pour calculer le taux de croissance asymptotique K	48
2	Généralité sur le calcul fractionnaire discret	52
2.1	Introduction	52
2.2	Notions fondamentales et propriétés	54
2.3	Fonction Gamma d'Euler	56
2.4	Somme des différences fractionnaires	59
2.5	l'opérateur de différence fractionnaire de Caputo	62
2.5.1	Problème à valeurs initiales	64
2.6	Différences de Riemann-Liouville	65
2.7	Différences de Grunwald-Letnikov	67
2.8	Opérateur de h-différence d'ordre fractionnaire	68
3	Application des concepts du chaos à l'étude de la dynamique cardiaque	74
3.1	Introduction	75
3.2	Analyse des dynamiques non linéaires du système cardiaque	77
3.2.1	Comportement non linéaire de l'activité électrique cardiaque	78
3.2.2	Activité électrique non linéaire au niveau de la cellule car- diaque	79
3.2.3	Le potentiel de repos	80
3.2.4	Le potentiel d'action	81
3.2.5	La restitution : lien entre dynamique non linéaire et arythmies	83
3.3	Les arythmies cardiaques	84
3.3.1	Le phénomène de réentrée	86

3.3.2	Fibrillation ventriculaire	87
3.3.3	Alternances	88
3.3.4	Défibrillation cardiaque	89
3.4	Le comportement régulier et chaotique dans l'APD sans mémoire et avec mémoire	91
3.5	Le comportement régulier et chaotique de l'APD à mémoire de longueur fixe	98
4	Dynamique de l'application de Gauss fractionnaire à mémoire de lon- gueur fixe	105
4.1	Introduction	105
4.2	Analyse du comportement de l'application de Gauss fractionnaire .	107
4.3	L'application de Gauss fractionnaire à mémoire de longueur fixe .	110
4.4	Comportement chaotique de l'application Gauss fractionnaire à mémoire de longueur fixe	118
	Conclusion générale	121
	Bibliographie	124

LISTE DES FIGURES

1.1	Stabilité par le plan trace-determinant.	29
1.2	Le test 0 – 1 de l’application Gauss : (a)-(b) le comportement des trajectoires P et Q	50
1.3	Le test 0 – 1 de l’application Gauss : (a)-(b) le taux de croissance k	50
3.1	Anatomie du coeur	79
3.2	Un schéma illustrant l’activité électrique dans le muscle cardiaque	80
3.3	Potentiel d’action des cellules myocardiques	83
3.4	Courbe illustrant la restitution de la durée du potentiel d’action du cœur [72]	85
3.5	Diagramme de bifurcation associé à la durée du potentiel d’action du cœur [72]	86
3.6	Potentiel d’action des cellules myocardiques	90
3.7	Défibrillateur cardiaque implantable	90

3.8	Le diagramme de bifurcation révèle la présence d'un rythme d'alternance, d'une bistabilité, ainsi qu'un enchaînement de bifurcations par doublement de période menant au chaos dans l'application (3.2).	93
3.9	(a)) Diagramme de bifurcation dans le plan (APD vs t_s) pour $v = 0,92$, $APD_1 = 200msec$ et t_s variant de 0 à 400.(b) Exposants de Lyapunov correspondant au diagramme de bifurcation.	95
3.10	Vue agrandie du diagramme de bifurcation : (a) Apparition du rythme 2 : 2 (alternance) à $t_s = 308msec$, (b) Dans l'intervalle $t_s = 303.2 - 304.9msec$, on observe une alternance entre les rythmes 5 : 5 et 3 : 3, (c) Dans l'intervalle $t_s = 296.4 - 300.1msec$, alternance entre les rythmes 2 : 1 et 3 : 3.	95
3.11	(a)) Diagramme de bifurcation dans le plan (APD vs t_s) pour $v = 0,92$, $APD_1 = 250msec$ et t_s variant de 0 à 400.(b) Exposants de Lyapunov correspondant au diagramme de bifurcation.	96
3.12	(a) Diagramme de bifurcation illustrant la présence d'un rythme d'alternance et d'une voie de doublement de période vers le chaos dans le modèle de mappage (4.3), avec une longueur de mémoire de $F = 2800$, un ordre fractionnaire de $v = 0,95$ et une condition initiale de $APD_1 = 260msec$, (b) Vue focalisée sur le comportement de l'alternance dans la plage $295msec - 310msec$	99
3.13	Diagramme de bifurcation pour le modèle de cartographie cardiaque (4.3) (APD vs t_s), illustrant la dynamique de la durée du potentiel d'action avec une longueur de mémoire fixe de $F = 2800$, un ordre fractionnaire de $v = 0,95$ et une condition initiale de $APD_1 = 200msec$	100

3.14	Représentation du test 0-1 pour l'application (4.3) avec une longueur de mémoire fixe $F = 2800$, un ordre fractionnaire $v = 0,95$ et une condition initiale $APD_1 = 260msec$	101
3.15	Le test 0 – 1 pour l'application (4.3) (APD vs t_s) avec une longueur de mémoire fixe $F = 2800$, un ordre fractionnaire $v = 0,95$ et une condition initiale $APD_1 = 260msec$, pour : (a) $t_s = 250msec$, (b) $t_s = 150msec$	102
4.1	Diagramme de bifurcation de l'application (4.1) avec $x_0 = 0$ et b dans l'intervalle de -1 à 1 , (a) $a = 4.9$ et (b) $a = 7.5$	107
4.2	(a) Diagramme de bifurcation de l'application de Gauss fractionnaire (4.4) pour $v = 0.9$, $x_0 = 0$, b dans l'intervalle de -1 à 1 et $a = 4.9$, (b) Plus grand exposant de Lyapunov de l'application de Gauss fractionnaire pour $v = 0.9$, $x_0 = 0$, b dans l'intervalle de -1 à 1 et $a = 4.9$, (c) Diagramme de bifurcation de l'application de Gauss fractionnaire (4.4) pour $v = 0.4$, $x_0 = 0$, b dans l'intervalle de -1 à 1 et $a = 7.5$, (d) Plus grand exposant de Lyapunov de l'application de Gauss fractionnaire pour $v = 0.4$, $x_0 = 0$, b dans l'intervalle de -1 à 1 et $a = 7.5$	109
4.3	(a) Diagramme de bifurcation de l'application de Gauss fractionnaire avec mémoire de longueur fixe pour $F = 200$, $v = 0.9$, $x_0 = 0$, $a = 4.9$ et b dans l'intervalle de -1 à 1 , (b) Le plus grand exposant de Lyapunov pour $F = 200$, $v = 0.9$, $x_0 = 0$, $a = 4.9$ et b dans l'intervalle de -1 à 1	112

4.4	(a) Diagramme de bifurcation de l'application de Gauss fractionnaire avec mémoire de longueur fixe pour $F = 50, v = 0.4, x_0 = 0, a = 7.5$ et b dans l'intervalle de -1 à 1 , (b) Le plus grand exposant de Lyapunov pour $F = 50, v = 0.4, x_0 = 0, a = 7.5$ et b dans l'intervalle de -1 à 1	112
4.5	Solutions de l'application de Gauss fractionnaire avec une longueur de mémoire fixe pour $F = 50, v = 0.4, x_0 = 0$: (a) $b = 0.1$, (b) $b = -0.2$, (c) $b = -0.4$, (d) $b = -0.55$, (e) $b = -0.57$, (f) $b = -0.84$, (g) $b = -0.88$, (h) $b = -0.96$ et (i) $b = -1$	113
4.6	Diagramme de bifurcation de l'application de Gauss fractionnaire avec la condition initiale $x_0 = 0.9$ et b dans l'intervalle $[-1, 1]$, où : (a) pour $v = 1$; (b) pour $v = 0.4$; et (c) pour $v = 0.4$ avec une mémoire fixe de longueur $F = 50$	118
4.7	Le test $0 - 1$ de l'application de Gauss fractionnaire avec une mémoire fixe de longueur $F = 50, v = 0.4, x_0 = 0$, (a) (b) pour $b = 0$ et (c), (d) pour $b = -0.7$	119

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'étude du chaos trouve son origine dans les travaux pionniers d'Henri Poincaré à la fin du XIX^e siècle. Dans son ouvrage majeur *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, il démontre que la plupart des systèmes dynamiques ne sont pas intégrables, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de solutions générales permettant de prédire exactement leur évolution. Contrairement aux approches analytiques traditionnelles développées par Cauchy et Weierstrass, fondées sur des solutions locales des équations différentielles, Poincaré adopte une démarche qualitative et topologique, privilégiant l'étude de l'allure globale des trajectoires. Il introduit des outils novateurs comme les sections de Poincaré, permettant de visualiser la disposition des courbes solutions dans l'espace des phases et de comprendre la structure globale des dynamiques.

Poincaré démontre notamment que dans le problème des trois corps (et plus généralement pour tout système gravitationnel à N corps ($N \geq 3$)) il n'existe pas d'intégrales de mouvement autres que celles associées à des lois de conservation connues (énergie, moment angulaire, barycentre). Dès lors, les trajectoires peuvent devenir irrégulières et extrêmement sensibles aux conditions initiales : une variation infinitésimale de l'état de départ peut conduire à des évolutions

totallement différentes. Cette observation, bien avant le principe d'incertitude de Heisenberg, remet en question l'idée du déterminisme absolu. Poincaré montre qu'un système peut être parfaitement régi par des lois déterministes tout en étant imprévisible à long terme. Il illustre ce phénomène par l'exemple des trajectoires de cyclones, anticipant ce que l'on appellera plus tard « l'effet papillon ».

Au XX^e siècle, les outils introduits par Poincaré deviennent le fondement de la théorie moderne du chaos. L'étude des systèmes dynamiques distingue alors trois catégories principales :

- les systèmes conservatifs, où l'énergie totale est préservée ;
- les systèmes dissipatifs, où l'énergie se perd ou se transforme ;
- les systèmes stochastiques, où interviennent des phénomènes aléatoires.

Même les systèmes déterministes peuvent présenter un comportement chaotique : leur évolution est gouvernée par des lois précises, mais la prédictibilité quantitative devient impossible. Ainsi, dans un régime chaotique, ce n'est pas la connaissance des lois qui manque, mais la possibilité de prévoir l'évolution exacte du système sur le long terme. En revanche, il reste possible d'obtenir une prédiction qualitative, c'est-à-dire de déterminer le type de comportement que le système pourra adopter. Cette analyse se réalise dans l'espace des phases, où l'on représente toutes les évolutions possibles d'un système.

Dans ce cadre, le chaos n'est pas synonyme de désordre ou d'absence de règles, mais d'une complexité dynamique propre aux phénomènes naturels. Poincaré distingue clairement la complication (liée à la difficulté des calculs) de la complexité réelle (liée à la nature même des processus étudiés). La théorie du chaos montre que certains systèmes simples, décrits par peu d'équations, peuvent pourtant produire des comportements extrêmement riches et difficiles à anticiper.

Les applications de la théorie du chaos sont diverses et influentes, notamment dans des domaines tels que la biologie, l'économie, l'ingénierie et les sciences

sociales [5, 6, 7, 11, 14, 15, 16, 36, 39, 41, 55, 56, 69] Les applications de la théorie du chaos sont diverses et importantes : en médecine, elle contribue à la modélisation des arythmies cardiaques; en écologie, elle explique la dynamique des populations; et en finance, elle éclaire la volatilité des marchés [74]. De plus, la théorie du chaos a stimulé les innovations dans les systèmes de communication sécurisés et l'optimisation des algorithmes [19, 20, 21]. En révélant les schémas complexes sous-jacents à des comportements apparemment erratiques, la théorie du chaos remet en question les notions traditionnelles d'ordre et fournit des outils pour prédire et gérer les phénomènes complexes dans un monde en constante évolution [40]. En cardiologie, la théorie du chaos s'est révélée précieuse pour comprendre la dynamique de la durée du potentiel d'action cardiaque (APD) et ses propriétés de restitution.

Les modèles itérés de faible dimension se sont avérés particulièrement efficaces pour modéliser la relation entre la APD et l'intervalle diastolique précédent. Ces modèles offrent des perspectives essentielles sur l'apparition d'arythmies, telles que l'alternance et les arythmies, en reliant la stabilité du rythme cardiaque à la pente de la courbe de restitution de la APD. Lorsque cette pente dépasse un seuil critique, des instabilités comme l'alternance de la APD peuvent survenir, pouvant potentiellement conduire à une fibrillation auriculaire potentiellement mortelle. Une validation expérimentale approfondie souligne l'utilité de ces modèles, tant pour les cœurs sains que pour les cœurs pathologiques, et ils ont guidé le développement de stratégies thérapeutiques, comme les algorithmes de stimulation cardiaque, pour atténuer les arythmies [53, 66, 71, 77].

Le modèle de APD à mémoire courte suppose que la durée du potentiel d'action actuel n'est influencée que par un nombre limité de cycles cardiaques précédents, permettant ainsi à la dynamique de se concentrer principalement sur les états récents. Ces modèles itérés de faible dimension se sont avérés efficaces pour

capturer les caractéristiques essentielles du rythme cardiaque, notamment dans des conditions spécifiques où l'influence des cycles antérieurs est minimale.

Cependant, ces modèles traditionnels à mémoire courte ou sans mémoire peinent souvent à représenter les dépendances à long terme et les effets cumulatifs inhérents aux systèmes biologiques, en particulier dans la dynamique complexe de la durée du potentiel d'action cardiaque (APD). En réalité, le tissu cardiaque présente un comportement de type mémoire, où les concentrations ioniques, les états des canaux et les excitations antérieures influencent les réponses futures sur des échelles de temps étendues. Négliger ces effets cumulatifs limite la capacité du modèle à prédire des comportements arythmogènes complexes, tels que l'émergence d'alternances, de périodicités complexes et de dynamiques chaotiques. Par conséquent, lorsque les effets de mémoire à long terme deviennent significatifs, des systèmes dynamiques de dimension supérieure ou fractionnaires s'avèrent nécessaires pour prendre en compte avec précision l'influence des cycles passés plus anciens sur la dynamique actuelle [38, 57, 63, 67, 68, 75]. Les modèles d'ordre fractionnaire à mémoire de longueur fixe constituent une alternative performante pour surmonter ces limitations. En intégrant explicitement une durée de mémoire définie, ces modèles s'étendent au-delà des cycles récents et intègrent les influences historiques à court et à long terme sur la durée du potentiel d'action (APD) actuelle. Ceci améliore non seulement la capacité du modèle à reproduire des phénomènes non linéaires tels que les bifurcations et le chaos, mais offre également une compréhension plus approfondie des mécanismes de mémoire sous-jacents aux alternances et arythmies cardiaques. Une telle approche fournit un cadre plus réaliste sur le plan physiologique, améliorant le pouvoir prédictif des modèles informatiques et pouvant orienter des stratégies thérapeutiques plus efficaces pour la prise en charge des troubles du rythme cardiaque. Dans [45], Guel-Cortez et Kim explorent l'application des dérivées d'ordre fractionnaire à

la modélisation du système cardiovasculaire, démontrant leur efficacité pour reproduire diverses anomalies cardiaques, telles que l'insuffisance aortique et la cardiomyopathie ischémique. Stenzinger et Tragtenberg [73] utilisent des modèles basés sur des cartes pour simuler des dynamiques cardiaques complexes, reproduisant avec succès des comportements arythmiques comme les torsades de pointes avec moins de paramètres que les modèles traditionnels basés sur la conductance.

Des études récentes ont de plus en plus souligné le rôle crucial des effets de mémoire et de la dynamique d'ordre fractionnaire dans la modélisation électrophysiologique cardiaque. Par exemple, Wang et al.[76] ont démontré que l'accumulation ionique intracellulaire modifie significativement la dynamique de la durée du potentiel d'action (APD) dans des conditions pathologiques, induisant des comportements non linéaires complexes et un chaos lié à la mémoire dans le tissu cardiaque. De même, Zhao et al.[80] ont perfectionné des modèles cardiaques fractionnaires spatiaux, améliorant la précision de la simulation de la propagation des ondes grâce à l'intégration d'interactions non locales et d'effets de mémoire. Cependant, la plupart des modèles existants supposent soit des noyaux de mémoire infinis, soit n'explorent pas explicitement l'impact de la mémoire sur les bifurcations non linéaires et les comportements chaotiques.

Dans ce travail, nous avons étudié deux systèmes dynamiques distincts : le premier est un modèle de cartographie unidimensionnelle de la durée du potentiel d'action cardiaque à ordre fractionnaire (APD), et le second est le système de Gauss à ordre fractionnaire discret. Par ailleurs, nous avons examiné ces deux systèmes dans leur version à ordre fractionnaire discret avec une mémoire de longueur fixe. Nous avons analysé le comportement dynamique des modèles proposés, étudié leurs caractéristiques et évalué le niveau de chaos présent dans ces systèmes dynamiques fractionnaires.

Ce travail est structuré en quatre chapitres

Le premier chapitre présente les concepts fondamentaux liés aux systèmes dynamiques non linéaires et au chaos. Il inclut la définition des systèmes dynamiques discrets et leur classification, ainsi qu'une explication des notions de points fixes et périodiques, des critères de stabilité et des bifurcations. Il aborde également les principes essentiels de la théorie du chaos, depuis sa définition et les caractéristiques des systèmes chaotiques jusqu'aux principaux outils utilisés pour détecter un comportement chaotique, tels que les exposants de Lyapunov et le test 0–1

Dans le deuxième chapitre, nous explorons les concepts essentiels du calcul fractionnaire discret, en mettant l'accent sur les outils et définitions qui serviront dans les chapitres suivants. Nous commençons par la fonction Gamma d'Euler, fondamentale pour exprimer les différences d'ordre non entier. Ensuite, nous présentons la somme fractionnaire et son rôle dans le calcul discret.

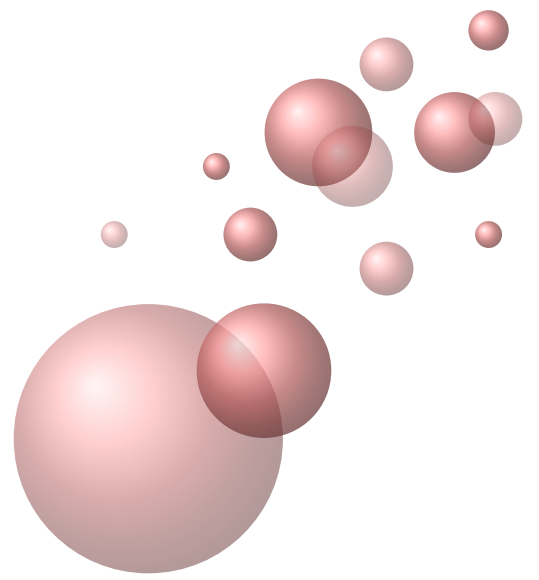
Nous introduisons ensuite les principaux opérateurs de différences fractionnaires : l'opérateur de Caputo avec les problèmes à valeurs initiales correspondants, ainsi que les différences de Riemann–Liouville et de Grünwald–Letnikov. Enfin, ce chapitre se termine par la présentation de l'opérateur de h -différence d'ordre fractionnaire, outil clé pour l'analyse des systèmes dynamiques discrets à mémoire fractionnaire.

Le chapitre trois présente une application des concepts de la théorie du chaos à l'étude de la dynamique cardiaque. Il se concentre sur l'analyse du comportement non linéaire du système cardiaque à travers l'activité électrique aux niveaux cellulaire et global. Ce chapitre débute par la description des propriétés non linéaires de l'activité électrique cardiaque, en mettant en évidence les notions de potentiel de repos et de potentiel d'action, ainsi que leur rôle dans la détermination de la réponse dynamique de la cellule cardiaque. Il aborde également le phénomène

de restitution, considéré comme un lien fondamental entre la dynamique non linéaire et l'apparition des troubles du rythme cardiaque.

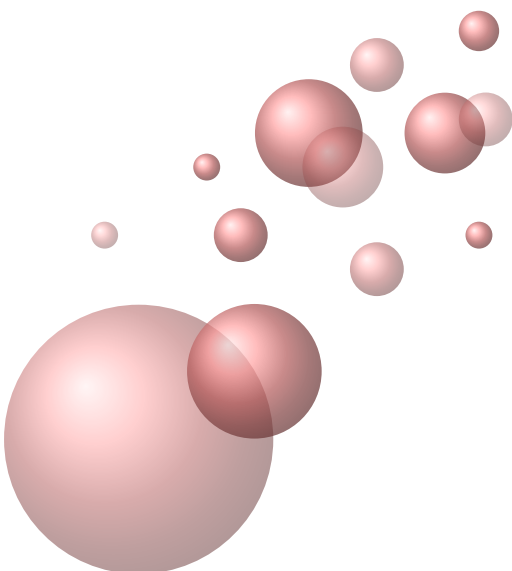
Par la suite, le chapitre traite des principales arythmies cardiaques, telles que le phénomène de réentrée, la fibrillation ventriculaire et les alternances, en mettant en lumière les mécanismes physiologiques et dynamiques responsables de leur apparition, ainsi que le principe de la défibrillation cardiaque. Enfin, une analyse des comportements régulier et chaotique de la durée du potentiel d'action (APD) est menée à l'aide de modèles intégrant la mémoire, qu'elle soit à longueur infinie ou à longueur fixe, afin de mieux comprendre l'influence de la mémoire sur la stabilité dynamique et l'émergence du chaos dans le système cardiaque.

Le dernier chapitre de cette thèse est consacré à l'étude de la version fractionnaire de l'application de Gauss. En outre, une nouvelle étude de l'application de Gauss fractionnaire avec une longueur de mémoire fixe y est présentée. Enfin, cette thèse est conclue par une conclusion générale récapitulant les résultats obtenus, suivie de références portant sur les systèmes dynamiques non linéaires, avec un accent particulier sur les systèmes discrets, chaotiques et d'ordre fractionnaire. Ces travaux abordent les aspects théoriques, la stabilité et les bifurcations de ces systèmes, ainsi que leurs applications dans la modélisation des phénomènes biologiques, notamment les modèles cardiaques, mettant ainsi en évidence l'importance de l'approche chaotique et fractionnaire dans la description des comportements dynamiques complexes.



CHAPITRE 1

Systèmes dynamiques discret d'ordre entier



CHAPITRE 1

SYSTÈMES DYNAMIQUES DISCRETS D'ORDRE ENTIER

1.1 Introduction

Ce premier chapitre vise à établir les bases des systèmes dynamiques discrets d'ordre entier en se concentrant sur leurs concepts fondamentaux et leurs caractéristiques. Il propose une étude simplifiée de la stabilité, tant dans les cas linéaires que non linéaires, afin de comprendre les comportements intrinsèques de ces systèmes. De plus, nous mentionnons différents types de bifurcations, offrant ainsi une vue d'ensemble des transitions qualitatives qui peuvent se produire dans la dynamique des systèmes discrets.

1.2 Définitions et notions de bases

Définition 1.2.1. (Système dynamique discret)

Soit H une fonction continûment différentiable (C^1) sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^m$. Un système dynamique discret noté $(D, \mathbb{N}, H)$ est décrit par la relation suivante :

$$x_{n+1} = H(x_n) \quad (1.1)$$

Cela signifie que l'évolution de l'état du système est déterminée par l'application répétée de H . En effectuant n itérations successives, on obtient :

$$x_n = H^n(x_0) \quad (1.2)$$

où $H^n(x)$ est définie par la composition répétée de H avec elle-même n fois :

$$H^n(x) = \underbrace{H \circ H \circ \dots \circ H(x)}_{n \text{ fois}}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } H^0 = Id.$$

L'application H est appelée récurrence, itération ou transformation ponctuelle. Si le système dynamique discret est inversible, la relation précédente reste valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.2.2. (Systèmes dynamiques discrets autonomes et non-autonomes)

On qualifie un système dynamique discret de non-autonome lorsque la fonction H de l'équation (1.1) dépend explicitement du temps. À l'inverse, si H est indépendante du temps, le système est dit autonome.

Définition 1.2.3. (Trajectoires)

Pour un point initial donné x_0 , la trajectoire ou orbite du système (1.1) est définie comme la suite :

$$O(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1) = H(x(0)), \dots, x(n+1) = H(x(n)), \dots\}.$$

Définition 1.2.4. (Points fixes)

Un point x^* est dit point fixe du système (1.1) (ou de l'application H) s'il vérifie :

$$H(x^*) = x^*.$$

Exemple 1.2.1.

- 1• Les points fixes de l'application $h(x) = 2x^2 - 1$ sont les solutions de l'équation

$$h(x) = x$$

On a

$$h(x) = x \Rightarrow 2x^2 - 1 = x \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$$

Donc le système précédant a deux points fixes $x_1^* = 1$ et $x_2^* = -\frac{1}{2}$.

- 2• Soit le système dynamique défini par

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a |x_n| - b |y_n| \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

Les points fixes de ce systèmes sont les solutions du système

$$\begin{cases} x = 1 - a |x| - b |y| \\ y = x \end{cases}$$

D'où

- a) Si $b < -1 - a$ il n'y a pas de points fixes.
- b) Si $-1 - a < b < 1 - a$ il y a un point fixe $P = (\frac{1}{1+a+b}, \frac{1}{1+a+b})$ avec des coordonnées positifs.
- c) Si $b > 1 - a$ il y a deux points fixes $P_1 = (\frac{1}{1+a+b}, \frac{1}{1+a+b})$ avec des coordonnées positifs et $P_2 = (\frac{1}{1-a-b}, \frac{1}{1-a-b})$ avec des coordonnées négatifs.

Définition 1.2.5. (*Points périodiques*)

Soit H une application de $\mathbb{R}^m$. Un point x est dit périodique s'il existe $k > 1$ tel que

$$H^k(x) = x$$

La période d'un point x est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que

$$H^k(x) = x$$

Un ensemble $\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$ forme un cycle d'ordre k (une orbite périodique d'ordre k ou k -cycle), si

$$\begin{cases} H(x(i)) = x(i+1), & i = 0, 1, 2, \dots, k-1 \\ H(x(k-1)) = x(0) \end{cases}$$

Remarque 1.2.1.

- Si $k = 1$, le point x de H^k est un point périodique de période 1 (un point fixe de H).
- les points de l'orbite périodique de période k sont des points fixes de l'application H^k .

1.3 Notions de Stabilité

Définition 1.3.1.

Soit $H : I \rightarrow I$ une application et x^* un point fixe de H , où I est un intervalle de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Alors :

- (1) Le point fixe x^* est dit stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in I$ vérifiant

$$|x_0 - x^*| < \delta,$$

on a

$$|H^n(x_0) - x^*| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

- (2) Le point fixe x^* est dit attractif s'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|x_0 - x^*| < \eta$$

implique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H^n(x_0) = x^*$$

- (3) Le point fixe x^* est dit asymptotiquement stable s'il est à la fois stable et attractif.

Définition 1.3.2.

Un point fixe x^* qui n'est pas stable est dit instable.

Définition 1.3.3.

Soit H est une application et supposons que $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ est un orbite k périodique.

L'orbite $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ est dite stable si chaque point x_i est un point stable de H^k . L'orbite

de $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ est un orbite instable si chaque point x_i est un point fixe instable de H^k .

1.3.1 Système dynamique linéaire

Considérons les systèmes autonomes, qui sont invariants dans le temps et prennent la forme :

$$x_{n+1} = Cx_n. \quad (1.3)$$

Le théorème suivant résume les résultats clés de stabilité pour de tels systèmes autonomes linéaires.

Nous faisons l'hypothèse que le système (1.3) est à son état d'équilibre, ce qui signifie que : $x^* = Cx^*$. Par conséquent :

$$x^* = (0, 0, \dots, 0) \quad \text{if} \quad \det(I - C) \neq 0.$$

Il existe donc un point fixe unique ($x^* = 0$). Dans le théorème suivant, nous résumons les principaux résultats de stabilité pour les systèmes autonomes linéaires.

Théorème 1.3.1. *(Systèmes linéaires m -dimensionnels)[34]*

Les énoncés suivants s'appliquent à l'équation (1.3) :

- i) La solution nulle de (1.3) est stable si et seulement si $\rho(C) \leq 1$ et les valeurs propres de module un sont semi-simples (Une valeur propre est dite semi-simple si le bloc de Jordan correspondant est diagonal).
- ii) La solution nulle de (1.3) est asymptotiquement stable si et seulement si $\rho(C) < 1$.

où :

$\rho(C) = \max \{ |\lambda| : \lambda \text{ est une valeur propre de } C \}$ est le rayon spectral de C .

Théorème 1.3.2. (Systèmes linéaires à 2-dimensions)[35]

Les énoncés suivants sont valides pour l'équation(1.3) :

- (a) Si $\rho(C) < 1$, alors l'origine est asymptotiquement stable.
- (b) Si $\rho(C) > 1$, alors l'origine est instable.
- (c) Si $\rho(C) = 1$, alors l'origine est instable si la forme de Jordan est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, et stable dans le cas contraire.

— **Critères explicites de stabilité des systèmes bidimensionnels :**

Examinons le système dynamique linéaire bidimensionnel $X_{n+1} = CX_n$. Les caractéristiques qualitatives du système peuvent être catégorisées en fonction des valeurs de $tr(C)$ et $det(C)$. Les valeurs propres de C sont dérivées en résolvant l'équation caractéristique. Les valeurs propres de C sont dérivées en résolvant l'équation caractéristique.

$$\rho(\lambda) = \lambda^2 - tr(C)\lambda + det(C).$$

$$\rho(\lambda) = 0.$$

Proposition 1.3.1.

Considérons le système dynamique linéaire bidimensionnel $X_{n+1} = CX_n$, et soit λ_1 et λ_2 les valeurs propres de C .

1• Si $(\text{tr}(C))^2 > 4\det(C)$ alors $\lambda_{1,2}$ sont réels ($\lambda_1 > \lambda_2$), de plus

i) L'origine est un point selle ($|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_2| < 1$) ou ($|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$)

si et seulement si :

$$\begin{cases} \rho(1) < 0 \quad \text{et} \quad \rho(-1) > 0, \\ \text{ou} \\ \rho(1) > 0 \quad \text{et} \quad \rho(-1) < 0, \end{cases}$$

i.e., si et seulement si :

$$\begin{cases} -\text{tr}(C) - 1 < \det(C) < \text{tr}(C) - 1. \\ \text{ou} \\ \text{tr}(C) - 1 < \det(C) < -\text{tr}(C) - 1. \end{cases}$$

ii) L'origine est un nœud stable ($|\lambda_{1,2}| < 1$) si et seulement si :

$$\rho(1) > 0 \quad \text{et} \quad \rho(-1) > 0,$$

i.e., si et seulement si :

$$\det(C) > \text{tr}(C) - 1 \quad \text{et} \quad \det(C) > -\text{tr}(C) - 1.$$

iii) L'origine est un nœud instable ($|\lambda_{1,2}| > 1$) si et seulement si :

$$\rho(1) < 0 \quad \text{et} \quad \rho(-1) < 0,$$

i.e., si et seulement si :

$$\det(C) < \text{tr}(C) - 1 \quad \text{et} \quad \det(C) < -\text{tr}(C) - 1.$$

2• Si $(\text{tr}(C))^2 < 4\det(C)$ alors $\lambda_{1,2}$ sont complexes, de plus

i) L'origine est un foyer stable si et seulement si $\det(C) < 1$.

ii) L'origine est un foyer instable si et seulement si $\det(C) > 1$.

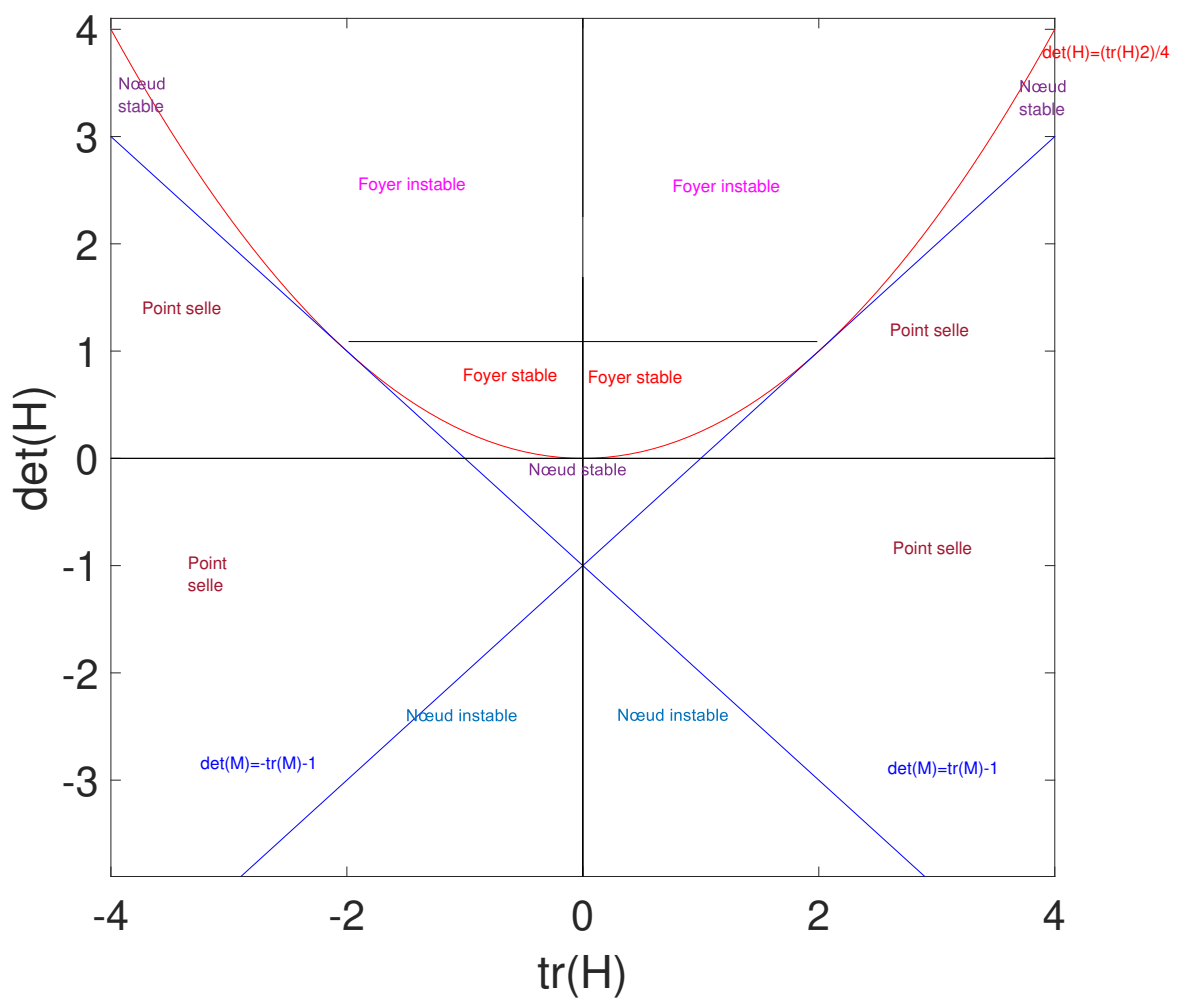


Figure 1.1 – Stabilité par le plan trace-determinant.

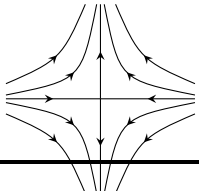
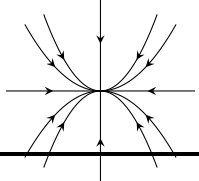
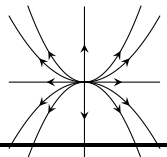
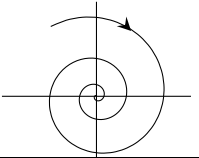
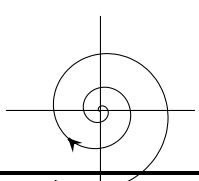
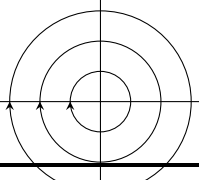
Type	Valeur propre	Portrait de phase
Point selle	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 > 1, \lambda_2 < 1$	
Nœud stable	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, 0 < \lambda_{1,2} < 1$	
Nœud instable	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_{1,2} > 1$	
Foyer stable	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \lambda_{1,2} < 1, \beta \neq 0$	
Foyer instable	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \lambda_{1,2} > 1, \beta \neq 0$	
Centre	$\lambda_{1,2} = \pm i\beta, \lambda = 1, \beta \neq 0$	

Tableau 1.1 – Les types de points fixes pour les systèmes linéaires à deux dimensions et leur portrait de phase

1.3.2 Systèmes dynamiques non linéaires

Méthode indirecte (linéarisation pour les systèmes unidimensionnels) :

Définition 1.3.4.

Soit le système non linéaire suivant :

$$H(x_n) = x_{n+1}. \quad (1.4)$$

Le développement de Taylor du premier ordre de (1.4) autour de point x^ est donné par :*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= H(x^*) + DH(x^*)(x_n - x^*) + O((x_n - x^*)^2), \\ &= x^* + C(x_n - x^*) + O((x_n - x^*)^2). \end{aligned}$$

Mettre $X_n = x_n - x^$.*

Alors :

$$X_{n+1} = CX_n. \quad (1.5)$$

C est le multiplicateur

Théorème 1.3.3.

Soit x^ un point fixe du système (1.4) :*

1. Si $|C| < 1$, alors le point x^* est stable.
2. Si $|C| > 1$, alors le point x^* est instable.
3. Si $|C| = 1$, alors on ne peut pas conclure la stabilité.

Méthode indirecte (linéarisation pour les systèmes multidimensionnels) :

Nous obtenons :

$$X_{n+1} = CX_n.$$

Où :

$$C = DH(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial H_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial H_1(x^*)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial H_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial H_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial H_2(x^*)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial H_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial H_n(x^*)}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Puisque $\|x - x^*\| \rightarrow 0$ dans le voisinage de x^* , en négligeant les termes d'ordre supérieur, le système (1.4) est linéarisé comme suit :

$$x_{n+1} = Cx_n.$$

La transformation $X \rightarrow CX$ est appelée la linéarisation de H dans le voisinage de x^* . Nous disons que le système (1.4) est approximé dans le voisinage du point d'équilibre x^* .

Soit $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, pour déterminer l'attractivité d'un point d'équilibre, nous devons calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne :

$$J(x^*) = DH(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \frac{\partial H_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} & \frac{\partial H_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial H_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_n}{\partial x_1} & \frac{\partial H_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.3.4.

Le point fixe x^* de (1.4) est :

1. Stable si toutes les valeurs propres de $J(x^*) = DH(x^*)$ sont à l'intérieur du cercle unité (leurs modules sont inférieurs à 1).
2. Instable si l'un de ces valeurs propres de $J(x^*) = DH(x^*)$ a un module supérieur à 1 (en dehors du cercle unité).

Fonction de Lyapunov :

La théorie de Lyapunov repose sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov associée à un système dynamique d'ordre entier.

Théorème 1.3.5.

Soit $H : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ est localement Lipschitzienne dans $E \in \mathbb{R}^m$ et x^* un point fixe du système (1.4) tel que $x^* \in E$.

Supposons qu'il existe une fonction $V : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue tel que :

$$V(x^*) = 0, \text{ et } V(x) > 0, \forall x \in E - x^*, \quad (1.6)$$

$$V(H(x)) - V(x) \leq 0, \forall x \in E, \quad (1.7)$$

donc x^* est stable. De plus si

$$V(H(x)) - V(x) < 0, \forall x \in E, \quad (1.8)$$

alors x^* est asymptotiquement stable.

Exemple 1.3.1.

Dans cet exemple, nous appliquons la méthode des fonctions de Lyapunov afin d'analyser

la stabilité du point fixe du système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{y(n)}{1+y(n)^2} \\ y(n+1) = \frac{x(n)}{1+y(n)^2} \end{cases}$$

Le point fixe de ce système est :

$$\begin{cases} x^* = \frac{y^*}{1+(y^*)^2} \\ y^* = \frac{x^*}{1+(y^*)^2} \end{cases} \Leftrightarrow x^* = 0 \text{ et } y^* = 0$$

Pour étudier la stabilité du point fixe en utilisant la fonction de Lyapunov suivante $V(x, y) = x^2 + y^2$. On a : $V(x^*, y^*) = V(0, 0) = 0$ et $V(x(n), y(n)) > 0; \forall (x(n), y(n)) \neq (0, 0)$. De plus on a

$$\begin{aligned} V(x(n+1), y(n+1)) &= x(n+1)^2 + y(n+1)^2 \\ &= \frac{y(n)^2}{(1+y(n)^2)^2} + \frac{x(n)^2}{(1+y(n)^2)^2} \\ &= \frac{y(n)^2 + x(n)^2}{(1+y(n)^2)^2} \\ &= \frac{V(x(n), y(n))}{(1+y(n)^2)^2} \\ &\leq V(x(n), y(n)) \end{aligned}$$

Donc $V(x(n+1), y(n+1)) - V(x(n), y(n)) = \Delta V(x(n), y(n)) < 0$ alors le point $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

1.4 Théorie de bifurcations

Un système non linéaire se caractérise par sa capacité à changer radicalement son comportement dynamique lorsqu'un de ses paramètres est modifié. Le système peut se transformer d'un modèle à un autre, entraînant l'émergence ou la disparition d'attracteurs, ou un changement dans la stabilité des orbites. Dans cer-

tains cas, le système peut passer d'un état périodique régulier à un comportement complètement chaotique. Lorsque cette transition se produit pour une valeur critique d'un paramètre, on dit que le système atteint un point de bifurcation.

Plus précisément, considérons le système dynamique discret

$$x_{n+1} = H(x_n, \mu), \quad (1.9)$$

où μ est un paramètre réel et $H(x, \mu)$ une fonction continue de la variable réelle x (dans le cas général, x est un vecteur de $\mathbb{R}^m$) et du paramètre μ . S'il existe un $\varepsilon > 0$, aussi petit que l'on veut, tel que la structure des singularités (points fixes, orbites périodiques) du système soit différente pour $\mu < \mu_0$ et pour $\mu > \mu_0$, avec $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$, alors la valeur μ_0 est appelée point de bifurcation.

Les systèmes dynamiques discrets peuvent manifester plusieurs formes de bifurcations. Chaque type de bifurcation est associé à une forme normale (équation standard), qui permet de décrire mathématiquement la transition observée. Ainsi, on distingue plusieurs types de bifurcations caractéristiques dans l'étude des systèmes dynamiques discrets.

1.4.1 Bifurcation de pli :

Ce type de bifurcation se produit lorsqu'un paramètre dépasse un seuil critique, entraînant l'apparition ou la disparition soudaine de plusieurs solutions d'équilibre stables ou instables. Il satisfait aux critères suivants :

1. $\frac{\partial^2 H(x, \mu)}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} \neq 0.$
2. $\frac{\partial H(x, \mu)}{\partial \mu} \Big|_{(0,0)} \neq 0.$

1.4.2 Bifurcation transcritique :

Ce type de bifurcation implique un échange de stabilité entre deux solutions d'équilibre. Au départ, l'une des solutions est stable tandis que l'autre est instable. Lorsqu'un paramètre varie et atteint une valeur critique, la solution stable devient instable, et celle qui était instable devient stable. Il satisfait aux conditions suivantes :

1. $\frac{\partial H}{\partial \mu}(0,0) = 0$.
2. $\frac{\partial H}{\partial x}(0,0) = 1$.
3. $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$.

1.4.3 Bifurcation Pitchfork :

En général, une bifurcation en fourche se produit à proximité du point de bifurcation (x_0, μ_0) . Dans le plan (x_n, μ) , le système présente deux courbes de points fixes qui passent par le point de bifurcation, dont l'une s'étend de part et d'autre de la ligne $\mu = \mu_0$. Elle satisfait aux conditions suivantes :

1. $\frac{\partial H}{\partial \mu}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 H}{\partial \mu^2}(0,0) = 0$.
2. $\frac{\partial H}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0,0) = 0$.

1.4.4 Bifurcation de doublement de période (ou flip)

Cette bifurcation se produit lorsqu'un cycle stable d'ordre k possède un multiplicateur qui franchit la valeur $\lambda = 1$. Ce cycle devient alors instable et donne naissance à un nouveau cycle d'ordre $2k$. Elle satisfait aux conditions suivantes :

1. $\frac{\partial H}{\partial x}(0,0) = -1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}[H(x, \mu) - x]_{(0,0)} \neq 0$.
2. La dérivée de $\frac{\partial H}{\partial x}$ par rapport à λ au point $(0,0)$ est non nulle, c'est-à-dire :
$$\alpha = \left[\frac{\partial^2 H}{\partial \mu \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial \mu} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right]_{(0,0)} \neq 0.$$
3. $\beta = \left[\frac{1}{3!} \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 \right]_{(0,0)} \neq 0$.

1.4.5 Bifurcation de Neimark-Sacker

Définition 1.4.1.

On parle de bifurcation de Neimark-Sacker (ou bifurcation en tore) lorsqu'apparaissent deux valeurs propres complexes conjuguées de la forme $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\Theta)$ avec $0 < \Theta < \pi$.

Remarque 1.4.1.

Les bifurcations de type pli et flip peuvent apparaître dès que $n \geq 1$, tandis que la bifurcation de Neimark-Sacker ne peut survenir que si $n \geq 2$

1.5 Définitions et propriétés du chaos

1.5.1 Définitions

Le chaos constitue un concept fondamental de la théorie des systèmes dynamiques. Ce concept a été formellement introduit en 1975 par Li et Yorke à travers leurs travaux sur les applications itérées, dans lesquels ils ont établi un critère simple permettant de caractériser le chaos dans les équations aux différences unidimensionnelles. Malgré cela, il n'existe à ce jour aucune définition unique faisant l'unanimité au sein de la communauté scientifique, plusieurs définitions mathématiques ayant été proposées pour décrire le chaos selon différents points de vue. Ainsi, la définition de Li et Yorkerepose sur le comportement des orbites, celle de Devaney sur une approche topologique, tandis que celle de Smale s'appuie sur une approche géométrique.

Dans ce qui suit, nous présentons les deux définitions du chaos les plus couramment utilisées, à savoir celles de Li et Yorke et de Devaney.

Définition 1.5.1. (Li-Yorke)

Une application continue $H : I \rightarrow I$ où I est l'intervalle unitaire ($I = [0, 1]$), est chaotique au sens de Li-York s'il y a un ensemble indénombrable $S \subset I$ tel que les trajectoire de deux points distincts x, y dans S sont proximaux et non asymptotique, ie : $\liminf_{n \rightarrow +\infty} d(H^n(x), H^n(y)) = 0$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} d(H^n(x), H^n(y)) > 0$

Définition 1.5.2. (Devaney)

Soit V un ensemble. Une application continue $H : V \rightarrow V$ est dite chaotique sur V si :

- H est topologiquement transitif : pour toute paire d'ensembles ouverts non vides $U, W \subset V$ il existe un $K > 0$ tel que $H^K(U) \cap W \neq \emptyset$.
- Les points périodiques de H sont denses dans V .
- H possède une dépendance sensible aux conditions initiales : il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in V$ et tout voisinage $v(x)$, ils existent un $y \in v(x)$ et un $n \geq 0$ tel que $|H^n(x) - H^n(y)| > \delta$.

1.5.2 Caractéristique du chaos

Les phénomènes chaotiques ne sont pas le fruit du hasard, mais résultent plutôt de lois déterministes qui, dans certains cas, peuvent être décrites par des modèles mathématiques relativement simples. Les phénomènes régis par les lois du chaos se distinguent par un ensemble de propriétés fondamentales, dont la sensibilité aux conditions initiales. Parmi ces caractéristiques, on peut également mentionner les propriétés suivantes :

1. **La non-linéarité du système** : Le chaos apparaît dans certains systèmes dynamiques non linéaires décrits par des équations différentielles ou des processus itératifs. En revanche, les systèmes linéaires ne peuvent pas engendrer de dynamique chaotique.

2. **Déterminisme** : Le caractère déterministe des systèmes chaotiques signifie que leur évolution est gouvernée par des lois mathématiques précises et non par le hasard. Ainsi, même si leur comportement paraît aléatoire et imprévisible, il résulte entièrement d'équations déterministes.
3. **La sensibilité aux conditions initiales** : La sensibilité aux conditions initiales constitue une propriété fondamentale des systèmes chaotiques. En effet, une faible variation des conditions initiales peut provoquer des différences considérables dans l'évolution des variables d'état, ce qui rend le comportement du système difficilement prévisible à long terme.
4. **L'imprévisible** : constitue une caractéristique fondamentale des systèmes chaotiques. En effet, il est difficile, voire impossible, de prévoir leur comportement à long terme. Même en connaissant l'état actuel du système, toute tentative de prédire son évolution immédiate ou future reste très limitée.
5. **Les attracteurs étranges** : il s'agit d'une structure géométrique complexe associée aux systèmes dynamiques chaotiques, caractérisée par les propriétés suivantes :
 - (a) Son volume est nul.
 - (b) Sa dimension est fractale.
 - (c) Il présente une sensibilité aux conditions initiales.

1.6 Méthodes de quantification du chaos

1.6.1 Exposants de Lyapunov

Cas d'une application unidimensionnelle

Dans le cadre d'une application unidimensionnelle, considérons une fonction $x_{m+1} = H(x_m)$, et prenons deux conditions initiales proches, x_0 et $x_0 + \epsilon$, où ϵ est un très petit écart. Nous étudions l'évolution des trajectoires correspondant à ces deux conditions initiales. Supposons que ces trajectoires se séparent exponentiellement en moyenne, c'est-à-dire qu'il existe un réel λ tel que, après n itérations, la différence entre les trajectoires très proche est donnée par :

$$|H^n(x_0 + \epsilon) - H^n(x_0)| \simeq \epsilon e^{n\lambda}$$

D'où il en découle que :

$$\lambda \simeq \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|H^n(x_0 + \epsilon) - H^n(x_0)|}{\epsilon} \right)$$

Lorsque ϵ tend vers zéro alors :

$$\lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|H^n(x_0 + \epsilon) - H^n(x_0)|}{\epsilon} \right)$$

, Pour n tend vers l'infini, alors :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|H^n(x_0 + \epsilon) - H^n(x_0)|}{\epsilon} \right)$$

donc :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \frac{dH^n(x_0)}{dx_0} \right| \right)$$

alors,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left(|(H^n)'(x_0)| \right) \quad (1.10)$$

on note que $x_i = H^i(x_0)$, et on sait,

$$\begin{aligned} \text{pour } i = 1 : x_1 &= H^1(x_0) = H(x_0) \\ \\ \text{pour } i = 2 : x_2 &= H(x_1) = H(H(x_0)) = H^2(x_0) \\ &\vdots \\ \text{pour } i = m-1 : x_{m-1} &= H(x_{m-2}) = H(H^{m-2}(x_0)) = H^{m-1}(x_0) \\ \\ \text{pour } i = m : x_m &= H(x_{m-1}) = H(H^{m-1}(x_0)) = H^m(x_0) \end{aligned}$$

En appliquant la règle de la chaîne, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dH^n(x_0)}{dx} &= (H^n)'(x_0) = (H(H^{n-1}))'(x_0) \\ &= H'(H^{n-1}(x_0)) \cdot (H^{n-1})'(x_0) \\ &= H'(H^{n-1}(x_0)) \cdot H'(H^{n-2}(x_0)) \cdot (H^{n-2})'(x_0) \\ &\vdots \\ &= H'(H^{n-1}(x_0)) \cdot H'(H^{n-2}(x_0)) \cdot H'(H^{n-3}(x_0)) \cdot \dots \cdot H'(H(x_0)) \cdot H'(x_0) \\ &= H'(H^{n-1}(x_0)) \cdot H'(H^{n-2}(x_0)) \cdot H'(H^{n-3}(x_0)) \cdot \dots \cdot H'(H(x_0)) \cdot H'(x_0) \\ &= H'(x_{n-1}) \cdot H'(x_{n-2}) \cdot H'(x_{n-3}) \cdot \dots \cdot H'(x_1) \cdot H'(x_0) \end{aligned}$$

Donc,

$$(H^n)'(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} H'(x_i) \quad (1.11)$$

On substituant (1.11) dans (1.12) on obtient :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \prod_{i=0}^{n-1} H'(x_i) \right| \right) \quad (1.12)$$

Finalement, l'exposant de Lyapunov de l'application discrète en dimension un au point x_0 est défini par :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(|H'(x_i)| \right) \quad (1.13)$$

Cas d'une application multidimensionnelle

Considérons un système de dimension m , défini par une application itérative :

$$H : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad x_{n+1} = H(x_n), \quad x_n \in \mathbb{R}^m. \quad (1.14)$$

Soit x_0 un point initial dans le portrait de phase, et considérons un voisinage $v(x_0)$ autour de cette position. Prenons un second point $x_0 + \Delta x_0 \in v(x_0)$, représentant une perturbation infinitésimale autour de point x_0 . Ces deux points initiaux génèrent deux trajectoires distinctes dans le système, que l'on peut décrire par :

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_N, \dots$$

et

$$x_0 + \Delta x_0, x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_N + \Delta x_N, \dots$$

.

Les itérations sont gouvernées par les relations de récurrence suivantes :

$$x_i = H(x_{i-1}) \text{ et } x_i + \Delta x_i = H(x_{i-1} + \Delta x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N, \dots$$

En linéarisant autour de point x_{i-1} , la variation entre les trajectoires peut être

approximée par la différentielle de H , ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 \Delta x_1 &= \simeq DH(x_0)\Delta x_0 \\
 \Delta x_2 &= \simeq DH(x_1)\Delta x_1 \\
 \Delta x_3 &= \simeq DH(x_2)\Delta x_2 \\
 &\vdots \\
 \Delta x_{N-1} &= \simeq DH(x_{N-2})\Delta x_{N-2} \\
 \Delta x_N &= \simeq DH(x_{N-1})\Delta x_{N-1}
 \end{aligned}$$

Par composition successive des Jacobiennes, on obtient

$$\Delta x_N \approx DH(x_{N-1}) DH(x_{N-2}) \dots DH(x_1) DH(x_0) \Delta x_0 = D_N \Delta x_0 \quad (1.15)$$

où la matrice de transition D_N est définie par

$$D_N = DH(x_{N-1}) DH(x_{N-2}) \dots DH(x_1) DH(x_0)$$

, Cette matrice représente le propagation de la perturbation initiale à travers N itérations du système. Pour analyser la dynamique dans l'espace des phases, on introduit les vecteurs propres $e_i(N)$ et les valeurs propres $v_i(N)$ de la matrice D_N , satisfaisant :

$$D_N e_i^{(N)} = v_i^{(N)} e_i^{(N)} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.16)$$

Ces vecteurs propres peuvent être choisis comme base orthonormée de l'espace, et les valeurs propres sont obtenues via l'équation caractéristique :

$$\det(D_N - v I) = 0 \quad (1.17)$$

Où I est la matrice identité de dimension N .

Si la perturbation initiale Δx_0 est décomposée dans la base propre de D_N :

$$\Delta x_0 = \sum_{i=1}^n c_i e_i^{(N)}, \quad (1.18)$$

alors la perturbation après N est donnée par :

$$\Delta x_N = \sum_{i=1}^n c_i D_N e_i^{(N)} = \sum_{i=1}^n c_i v_i^{(N)} e_i^{(N)}. \quad (1.19)$$

Ces résultat montre que la séparation entre deux trajectoires initialement proches évolue de manière exponentielle, avec un facteur d'amplification déterminé par les valeurs propres de la matrice D_N .

Pour chaque direction i , on définit l'exposant de Lyapunov λ_i comme la limite du taux de croissance logarithmique moyen :

$$|v_i(N)| \simeq e^{\lambda_i N} \Rightarrow \lambda_i = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \ln(|v_i(N)|), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.20)$$

Donc pour un système multidimensionnel on a :

1. **Estimation des exposants de Lyapunov** : L'équation (1.20) permet de fournir une estimation des exposants de Lyapunov du système, qui caractérisent la vitesse de divergence ou de convergence des trajectoires voisines dans l'espace des phase.
2. **Nombre d'exposants de Lyapunov** : Le nombre d'exposants de Lyapunov d'un système multidimensionnel est égal à la dimension de l'espace des phases.
3. **Signification des exposants de Lyapunov** : Le système présente des états fixes et périodiques stables pour une valeur négative de l'exposant de Lyapunov, tandis qu'un état chaotique ou instable est observé dans le

système pour une valeur positive de l'exposant de Lyapunov est zéro, alors le système reste dans un état neutre. Ainsi, la valeur de l'exposant de Lyapunov est utilisée pour explorer les états stables et instables du système.

1.6.2 Dimensions fractales des attracteurs étranges

1) Dimension de Kaplan et Yorke [61]

Soit j_0 un entier positif tel que :

$$\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i < 0. \quad (1.21)$$

On définit alors la dimension de Kaplan et Yorke par la relation suivante :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|}. \quad (1.22)$$

2) Dimension de Mori [3]

Soient m_0 le nombre des exposants de Lyapunov qui sont nuls, m_+ le nombre d'exposants positifs, $\bar{\lambda}_+$ la moyenne des exposants positifs et $\bar{\lambda}_-$ celle des exposants négatifs.

La dimension de Mori est donnée par la relation suivante :

$$D_m = m_0 + m_+ \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_+}{|\bar{\lambda}_-|}\right). \quad (1.23)$$

Dans le tableau suivant on donne les différentes cas possible après le calcul des exposants de Lyapunov.

État	Attracteur	Dimension	Exposants de Lyapunov
Point d'équilibre	Point	0	$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n < 0$
Périodique	Cercle	1	$\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n < 0$
Période d'ordre 2	Tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n < 0$
Période d'ordre k	k-Tore	k	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ et $\lambda_{k+1} \leq \dots \leq \lambda_n < 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyper chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

Tableau 1.2 – Exposant de Lyapunov et dimension

Le tableau suivant présente un exemple numérique sur les cas précédent.

Système	Équations	Paramètres	Exposants de Lyapunov	Dimension de Lyapunov et Mori
Hénon	$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + by_n;$ $y_{n+1} = x_n$	$a = 1.4, b = 0.3$	$\lambda_1 = 0.42205,$ $\lambda_2 = -1.626$	1.2596
Lozi	$x_{n+1} = 1 - a x_n + by_n;$ $y_{n+1} = x_n$	$a = 1.7, b = 0.6$	$\lambda_1 = 0.69314,$ $\lambda_2 = -1.204$	1.5757
Ikeda	$x_{n+1} = 1 - u(x_n \cos \theta_n - y_n \sin \theta_n),;$ $y_{n+1} = u(x_n \sin \theta_n + y_n \cos \theta_n)$ $\theta_n = a - b/(1 + x_n^2 + y_n^2)$	$a = 0.4, b = 0.6,$ $u = 0.9$	$\lambda_1 = 0.50752,$ $\lambda_2 = -0.71824$	1.7066

Tableau 1.3 – Exemple numérique sur les exposants de Lyapunov et les dimensions fractale des systèmes : Hénon, Lozi, Ikeda

1.7 Test 0 – 1

Le test 0-1 est une méthode de détection du chaos introduite pour la première fois par *Gottwald* et *Melbourne* pour l'analyse des systèmes dynamiques déterministes [42]. Contrairement à la méthode de l'exposant de Lyapunov, le test 0-1 utilise des séries temporelles pour distinguer entre les dynamiques régulières et chaotiques sans avoir besoin de reconstruire l'espace des phases. Le résultat final de ce méthode est **un** ou **zéro**, indiquant respectivement la présence ou l'absence du chaos.

La procédure de la méthode de test 0-1 peut être résumée par le calcul des quantités suivantes :

Pour une série temporelle discrète $\phi(j)$ où $j \in [1, n]$, les variables $P_c(n)$ et $Q_c(n)$ sont calculées comme suit :

$$\begin{cases} P_c(n) = \sum_{j=1}^n \phi(j) \cos(cj) \\ Q_c(n) = \sum_{j=1}^n \phi(j) \sin(cj) \end{cases} \quad (1.24)$$

c est une constante strictement positive.

Le comportement des trajectoires dans le plan $(P - Q)$ permet de caractériser la nature du système dynamique analysé. Plus précisément :

1. Si les trajectoires restent bornées dans le plan $(P - Q)$, le système est régulier(non chaotique).
 2. Si les trajectoires se comportent comme un mouvement brownien, le système dynamique est chaotique.
- alors .

Calcul du déplacement quadratique moyen

Pour une série temporelle $\phi(j)$ où $j = 1, \dots, N$, le déplacement quadratique moyen $M_c(n)$ des deux variables $P_c(n)$ et $Q_c(n)$ définis dans (1.24), est donné par :

$$M_c(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left((P_c(j+n) - P_c(j))^2 + (Q_c(j+n) - Q_c(j))^2 \right). \quad (1.25)$$

1.7.1 Méthodes pour calculer le taux de croissance asymptotique

K

Il existe deux méthodes principales pour calculer le taux de croissance asymptotique K :

Méthode de régression linéaire

Le taux de croissance asymptotique k peut être déterminé numériquement en régressant $\log M(n)$ par rapport à $\log(n)$. Cela donne la relation suivante :

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M(n)}{\log(n)}. \quad (1.26)$$

Méthode de corrélation

Une autre approche consiste à calculer le taux de croissance asymptotique à partir de la méthode de corrélation. Ici, on utilise la valeur médiane du coefficient de corrélation k , défini par :

$$K = \text{median}(K_c).$$

où K_c est donné par :

$$K_c = \frac{\text{cov}(\xi, \Delta)}{\sqrt{\text{var}(\xi)\text{var}(\Delta)}} \in [-1, 1],$$

avec

$$\xi = (1, 2, \dots, n_{cut})$$

et

$$\Delta = (D_c(1), D_c(2), \dots, D_c(n_{cut})), \quad n_{cut} = \text{round}(N/10),$$

La variance et la covariance des vecteurs x et y sont données par :

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q (x(j) - \bar{x})(y(j) - \bar{y}),$$

$$\bar{x} = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q x(j),$$

$$\text{var}(x) = \text{cov}(x, x).$$

Le taux K prend une valeur binaire 0 ou 1 qui permet de distinguer si le système dynamique testé est chaotique ou non chaotique.

Un $K \simeq 0$ signifie que la dynamique est non chaotique.

Un $K \simeq 1$ signifie que la dynamique est chaotique.

Exemple

Dans cet exemple, nous illustrons la méthode du test 0 – 1 pour détecter le chaos en appliquant cette approche au l'application Gauss $x_{n+1} = e^{-ax_n^2} + b$.

La dynamique chaotique(voir 1.2(a)) de l'application Gauss est quantifiée avec une valeur médiane du coefficient de corrélation ($k = 0.9875$) par le test 0 – 1, et le graphique dans les coordonnées (P, Q) (voir 1.2(b)) montre des trajectoires de type Brownien.

La dynamique non chaotique (voir 1.3(a)) de l'application Gauss est quantifiée avec une valeur médiane du coefficient de corrélation ($k = 0.0152$) par le test 0-1,

et le graphique dans les coordonnées (P, Q) (voir 1.3(b)) illustre des trajectoires de type borné.

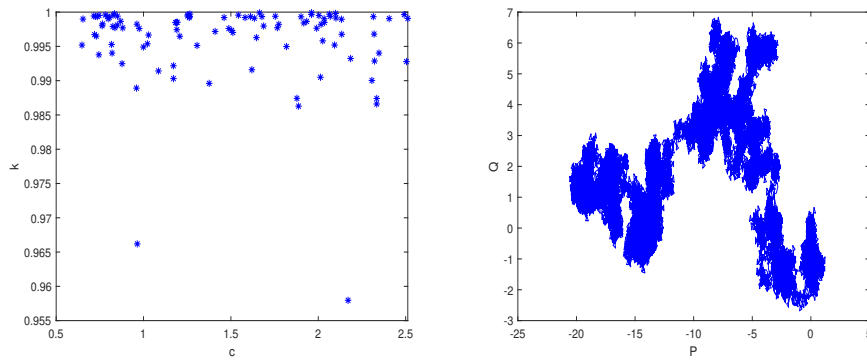


Figure 1.2 – Le test 0 – 1 de l'application Gauss : (a)-(b) le comportement des trajectoires P et Q .

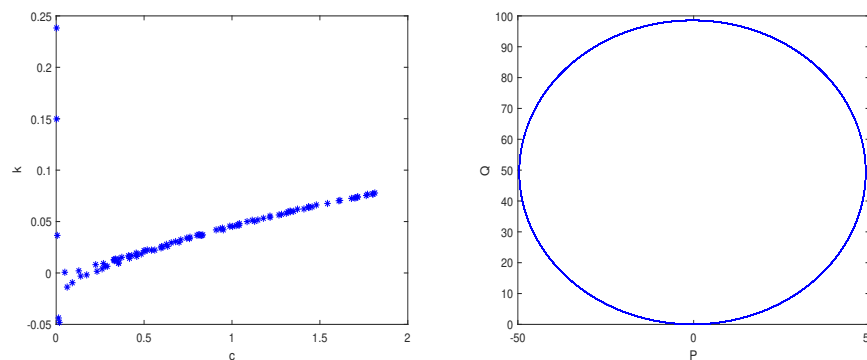
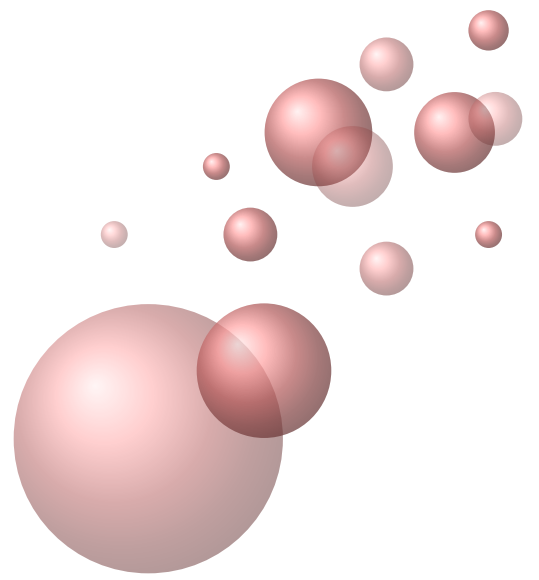
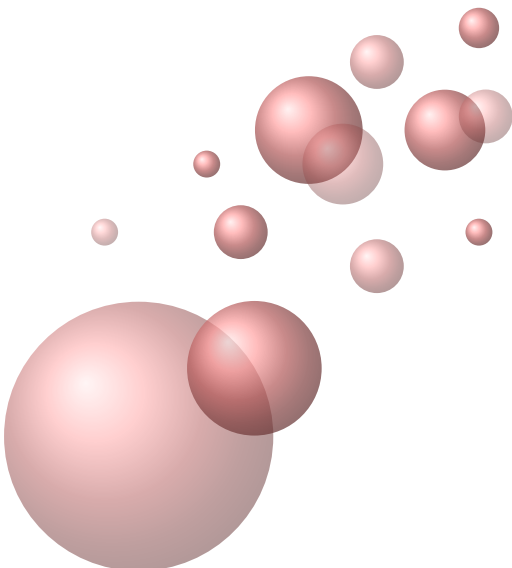


Figure 1.3 – Le test 0 – 1 de l'application Gauss : (a)-(b) le taux de croissance k .



CHAPITRE 2

Généralité sur le calcul fractionnaire discret



CHAPITRE 2

GÉNÉRALITÉ SUR LE CALCUL FRACTIONNAIRE DISCRET

2.1 Introduction

Ce chapitre vise à présenter les bases du calcul fractionnaire discret, qui constitue une extension du calcul traditionnel et permet d'étudier avec plus de précision les systèmes dynamiques présentant une mémoire longue et des comportements non linéaires. Le chapitre se concentre sur les concepts fondamentaux, les opérations mathématiques et les fonctions spéciales nécessaires à la compréhension et à l'application des modèles fractionnaires discrets dans différents domaines scientifiques et techniques.

Le chapitre aborde les principaux outils mathématiques du calcul fractionnaire, en commençant par les fonctions de base permettant de définir les opérations fractionnaires, en passant par l'étude de la somme des différences fractionnaires et des opérateurs de différences de différents types, jusqu'aux applications

pratiques aux problèmes à valeurs initiales. Il traite également des définitions et des propriétés des différences bien connues, offrant ainsi un cadre complet pour comprendre les opérations fractionnaires discrètes et les utiliser dans l'analyse des modèles mathématiques.

2.2 Notions fondamentales et propriétés

Définition 2.2.1.

Soit $g : \mathbb{N}_b \longrightarrow \mathbb{R}$. $\mathbb{N}_b$ est l'échelle de temps où $\mathbb{N}_b = \{b, b+1, b+2, \dots\}$ $b \in \mathbb{R}$,
L'opérateur de différence Δ de la fonction $g(t)$ est définie comme suit :

$$\Delta g(t) = g(t+1) - g(t), \quad t \in \mathbb{N}_b, \quad (2.1)$$

1. En utilisant l'équation (2.1) deux fois, on obtient l'opérateur de différence du second degré pour la fonction $g(t)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta^2 g(t) &= \Delta g(t+1) - \Delta g(t), \\ &= g(t+2) - g(t+1) - g(t+1) + g(t), \\ &= g(t+2) - 2g(t+1) + g(t) \end{aligned}$$

2. En utilisant l'équation (2.1) trois fois, on obtient l'opérateur de différence du troisième degré pour la fonction $g(t)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta^3 g(t) &= \Delta^2 g(t+1) - \Delta^2 g(t), \\ &= g(t+3) - 2g(t+2) + g(t+1) - (g(t+2) - 2g(t+1) + g(t)), \\ &= g(t+3) - 3g(t+2) + 3g(t+1) - g(t). \end{aligned}$$

3. On peut alors exprimer une formule générale pour l'opérateur de différence d'ordre n de la fonction $g(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ comme suit :

$$\Delta^n g(t) = \Delta(\Delta^{n-1} g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} g(t+k), \quad t \in \mathbb{N}_b$$

où $\binom{n}{k}$ est un coefficient binomial et pour les valeurs positive de n , il est défini par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Nous retrouvons dans le théorème ci-dessous les propriétés de base les plus importantes de l'opérateur de différence Δ

Théorème 2.2.1.

Soient $x_1, x_2 : \mathbb{N}_b^c \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

- $\Delta c = 0$, si c est une constante ;
- $\Delta \beta x_1(t) = \beta \Delta x_1(t)$;
- $\Delta^n \Delta^m x_1(t) = \Delta^{m+n} x_1(t)$, m et n sont des nombres entiers positifs ;
- $\Delta[x_1 + x_2](t) = \Delta x_1(t) + \Delta x_2(t)$;
- $\Delta \beta^{t+\alpha} = (\beta - 1)\beta^{t+\alpha}$;
- $\Delta[x_1.x_2](t) = x_1(t+1)\Delta x_2(t) + \Delta x_1(t)x_2(t)$;
- $\Delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right)(t) = \frac{x_2(t)\Delta x_1(t) - x_1(t)\Delta x_2(t)}{x_2(t)x_2(\delta(t))}$, pour $x_2(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{N}_b^c$.

Remarque 2.2.1.

$\mathbb{N}_b = \{b, b+1, b+2, \dots, c\}$ où $b, c \in \mathbb{R}$ et $c - b$ est un entier integer.

Démonstration.

Nous allons juste prouver la dernière propriété :

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right)(t) &= \frac{x_1(t+1)}{x_2(t+1)} - \frac{x_1(t)}{x_2(t)} \\ &= \frac{x_1(t+1)x_2(t) - x_1(t)x_2(t+1)}{x_2(t)x_2(t+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x_2(t)(x_1(t+1) - x_1(t)) - x_1(t)(x_2(t+1) - x_2(t))}{x_2(t)x_2(\delta(t))} \\
 &= \frac{x_2(t)\Delta x_1(t) - x_1(t)\Delta x_2(t)}{x_2(t)x_2(\delta(t))}
 \end{aligned}$$

■

2.3 Fonction Gamma d'Euler

Définition 2.3.1.

La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \text{Re}(\alpha) > 0. \quad (2.2)$$

Nous mentionnons quelques propriétés de la fonction Gamma :

Proposition 2.3.1.

- $\Gamma(v) > 0$ pour $v > 0$.
- $\Gamma(v+1) = v\Gamma(v)$ pour $v \in \mathbb{C}$ avec $\Gamma(1) = 1$.
- $\Gamma(n+1) = n!$, n est un entier.

Définition 2.3.2.

Pour un entier positif n , nous définissons la puissance factorielle décroissante par

$$t^{(n)} = \prod_{j=0}^{n-1} (t - j) = \Gamma(t + 1) / \Gamma(t + 1 - n), \quad (2.3)$$

De manière générale, Pour un v quelconque, on définit la fonction factorielle décroissante généralisée comme

$$t^{(v)} = \Gamma(t + 1) / \Gamma(t + 1 - v). \quad (2.4)$$

Nous présenterons plusieurs propriétés de la fonction factorielle décroissante dans le théorème suivant :

Théorème 2.3.1.

- i) $\Delta t^{(v)} = v t^{(v-1)}$, où Δ représente l'opérateur de différence.
- ii) $(t - \mu) t^{(\mu)} = t^{(\mu+1)}$, où $\mu \in \mathbb{R}$.
- iii) $\mu^{(\mu)} = \Gamma(\mu + 1)$.
- vi) Si $t \leq \mu$, alors $t^{(v)} \leq \mu^{(v)}$ pour tout $v > \mu$.
- iv) Si $0 < v < 1$, alors $t^{(\beta v)} \geq (t^{(\beta)})^v$.
- v) $t^{(\alpha+\beta)} = (t - \beta)^{(\alpha)} t^{(\beta)}$.

Démonstration.

Les preuves de (i), (ii), (iii), (vi) sont claires. La preuve de (iv) découle du produit infini d'Euler :

$$\Gamma(u) = \frac{1}{u} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^u}{1 + \left(\frac{u}{n}\right)}$$

La preuve de (v) comme suit :

$$\begin{aligned}
 t^{(\alpha v)} &= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha v)} \\
 &= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(v(t+1-\alpha) + (1-v)(t+1))} \\
 &\geq \frac{\Gamma(t+1)}{(\Gamma(t+1-\alpha))^v (\Gamma(t+1))^{1-v}} \\
 &= \left(t^{(\alpha)}\right)^v
 \end{aligned}$$

■

Remarquez que lorsque $n \geq k \geq 0$, alors le coefficient binomial peut être écrit comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n^{(k)}}{\Gamma(k+1)}.$$

Cette relation entre les coefficients binomiaux et la puissance factorielle décroissante suggère la définition suivante d'un coefficient binomial généralisé.

Définition 2.3.3.

Le coefficient binomial généralisé est défini par :

$$\binom{t}{r} = \frac{t^{(r)}}{\Gamma(r+1)}$$

Remarque que les relations suivantes :

- $\binom{t}{r} = \binom{t}{t-r},$
- $\binom{t}{r} = \frac{t}{r} \binom{t-1}{r-1},$
- $\binom{t}{r} = \binom{t-1}{r} + \binom{t-1}{r-1}.$

Ici, nous utilisons également la convention selon laquelle si le dénominateur est indéfini, mais le numérateur est défini, alors $\binom{n}{k} = 0$.

Théorème 2.3.2.*Les éléments suivants sont valables*

- $\Delta_t t^{(r)} = r t^{(r-1)}.$
- $\Delta_t \binom{t}{r} = \binom{t}{r-1}, \quad (r \neq 0).$
- $\Delta_t \binom{r+t}{t} = \binom{r+t}{t+1}.$

2.4 Somme des différences fractionnaires

Dans cette section, nous présentons l'opérateur inverse à droite de l'opérateur de différence fractionnaire, qui est appelé la somme fractionnaire. Pour exprimer la définition de la somme fractionnaire, nous considérerons d'abord la définition de la somme entière d'ordre n . L'idée de base derrière la définition est intimement liée à la solution unique du problème de valeur initiale d'ordre n de la forme :

$$\begin{cases} \Delta^n Y(t) = g(t), \\ Y(b+j-1) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.5)$$

De manière similaire à l'intégrale indéfinie en calcul différentiel, on peut définir la solution $Y(t) = \Delta^{-n} g(t)$ du problème à conditions initiales 2.5 comme :

$$Y(t) = \Delta^{-n} g(t) = \sum_{s=b}^{t-1} \sum_{\delta_1=b}^{s-1} \cdots \sum_{\delta_{n-1}=b}^{\delta_{n-2}-1} g(\delta_{n-1}) = \sum_{s=b}^{t-1} \frac{(t-\sigma(s))^{(n-1)}}{(n-1)!} g(s), \quad (2.6)$$

cela se prouve facilement par induction. Puisque la fonction de Cauchy $\frac{(t-s-1)^{(n-1)}}{(n-1)!}$ est égal à zéro pour $s = t-1, t-2, \dots, t-n+1$, la n -ième somme entière de la fonction $g(t)$ est exprimé à partir de l'équation (2.6) comme suit :

$$\Delta_b^{-n} g(t) = \sum_{s=b}^{t-n} \frac{(t - \sigma(s))^{(n-1)}}{(n-1)!} g(s), \quad t \in \mathbb{N}_b. \quad (2.7)$$

Il est évident que le côté droit de l'équation (2.7) peut être généralisé pour tout nombre réel positif $\nu > 0$ en utilisant la fonction Gamma pour éliminer la nature discrète de la factorielle. Sur la base de cette observation, nous donnons la définition de la somme fractionnaire de ν -ième ordre comme suit.

Définition 2.4.1.

Supposons que $g : \mathbb{N}_b \rightarrow \mathbb{R}$ et $\nu > 0$, alors la ν -ième somme fractionnaire de g est définie par

$$\Delta_b^{-\nu} g(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=b}^{t-\nu} (t - \sigma(s))^{(\nu-1)} g(s), \quad \text{pour } t \in \mathbb{N}_{b+\nu} \quad (2.8)$$

Discutons de cette définition. Nous voyons à partir de l'équation (2.8) que la somme fractionnaire $\Delta_b^{-\nu}$ avec $n-1 < \nu \leq n$ est identiquement nulle sous l'hypothèse que :

$$\Delta_b^{-\nu} g(b + \nu - n) = \Delta_b^{-\nu} g(b + \nu - n + 1) = \dots = \Delta_b^{-\nu} g(b + \nu - 1) = 0, \quad (2.9)$$

parce que la somme pertinente disparaît à ce point. Nous concluons que le domaine de $\Delta_b^{-\nu}$ est $\mathbb{N}_{b+\nu}$, ce qui signifie que la somme fractionnaire (2.7) transforme chaque fonction définie sur $\mathbb{N}_b$ en une fonction définie sur $\mathbb{N}_{b+\nu}$. Conformément à la définition de la fonction factorielle, la somme fractionnaire donné dans la Définition 2.4.1 peut être réécrit sous la forme de la formule binomiale suivante.

Proposition 2.4.1.

Pour une fonction $g : \mathbb{N}_b \rightarrow \mathbb{R}$ et $\nu > 0$ donnée avec $n - 1 < \nu \leq n$. Pour chaque $t \in \mathbb{N}_{b+\nu}$, la somme fractionnaire est définie comme

$$\Delta_b^{-\nu} g(t) = \sum_{k=0}^{-\nu+t-b} (-1)^k \binom{-\nu}{k} g(t - \nu - k) \quad (2.10)$$

Démonstration.

Soit g, ν et n donnés comme dans l'énoncé du théorème et soit $t \in \mathbb{N}_{b+\nu}$ donné par $t = b + \nu + n$, pour $n \in \mathbb{N}_0$. Rappelons que l'expression binomiale

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \quad (2.11)$$

peut être généralisé pour $\nu > 0$ à

$$\binom{-\nu}{k} = (-1)^k \binom{\nu+k-1}{k} \quad (2.12)$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta_b^{-\nu} g(t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=b}^{t-\nu} (t - \sigma(s))^{(\nu-1)} g(s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=b}^{t-\nu} \frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t-s-\nu+1)} g(s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=b}^{b+n} \frac{\Gamma(b+\nu+n-s)}{\Gamma(b+n-s+1)} g(s) \\ &= \sum_{s=0}^n \frac{\Gamma(\nu+n-s)}{\Gamma(\nu)\Gamma(n+1-s)} g(s+b) \\ &= \sum_{s=0}^n \binom{n-s+\nu-1}{n-s} g(s+b) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{-\nu}{j} g(b-j) \end{aligned}$$

pour $t = b + \nu + n, n \in \mathbb{N}_0$. Pour chaque $t \in \mathbb{N}_{b+\nu}$, nous avons :

$$\Delta_b^{-\nu} g(t) = \sum_{k=0}^{-\nu+t-b} (-1)^k \binom{\nu}{k} g(t + \nu - k) \quad (2.13)$$

■

2.5 l'opérateur de différence fractionnaire de Caputo

Partant du besoin d'outils plus adaptés à la modélisation des phénomènes dynamiques de nature non locale, l'opérateur fractionnaire aux différences de Caputo (Caputo fractional difference operator) constitue un concept modifié introduit dans le cadre du calcul aux différences fractionnaires. Par analogie avec le calcul fractionnaire classique, la différence fractionnaire gauche d'ordre ν peut être définie selon la formulation de Caputo.

La première définition de cet opérateur a été présentée dans la référence [2], où il a été obtenu par une discrétisation naturelle de l'opérateur continu proposé initialement par Caputo en 1967 [25], dans le contexte du calcul fractionnaire.

Le principal avantage de cet opérateur réside dans sa capacité à permettre la résolution d'équations aux différences sans exiger la spécification de conditions initiales d'ordre fractionnaire, ce qui le rend particulièrement pertinent pour la modélisation des systèmes à mémoire ou à effets cumulatifs.

Définition 2.5.1. [2]

Soit $g : \mathbb{N}_b \rightarrow \mathbb{R}$, $v > 0$, et $n-1 < v < n$ $n \in \mathbb{N}$. Alors, la différence d'ordre fractionnaire v de type Caputo de la fonction g en b est définie par :

$${}_b^C \Delta^v g(t) = \Delta_d^{-(n-v)} \Delta^n g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-v)} \sum_{s=b}^{t+v-n} (t-s-1)^{n-v-1} \Delta^n g(s), \quad (2.14)$$

où $t \in \mathbb{N}_{b+n-v}$, $n = [v] + 1$.

Si l'ordre $v = n$, où $n \in \mathbb{N}$, cette différence fractionnaire est définie par :

$${}_b^C \Delta^v g(t) = \Delta^n g(t). \quad (2.15)$$

Remarque 2.5.1.

La différence fractionnaire de type Caputo d'une fonction $g(t) = k$, où k est une constante, est :

$${}_b^C \Delta^v k = 0, \quad v > 0, \quad b \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Propriété de l'opérateur de différence fractionnaire de Caputo [2]

Supposons que $v > 0$ et que g est défini sur des domaines appropriés $\mathbb{N}_b$. Alors

$$\Delta_{b+n-v}^{-v} {}_b^C \Delta^v g(t) = g(t) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(t-b)^{(k)}}{k!} \Delta^k g(b).$$

En particulier, si $0 < v \leq 1$, alors :

$$\Delta_{b+n-v}^{-v} \Delta_b^v g(t) = g(t) - g(b).$$

2.5.1 Problème à valeurs initiales

Nous examinons la résolubilité des problèmes de valeurs initiales pour les systèmes d'ordre fractionnaire basés sur des équations aux différences avec l'opérateur de type Caputo. Après un rappel des théorèmes d'existence et d'unicité, nous transformons le problème en une équation de différence de Volterra (Théorème 2.5.1) avant de démontrer l'existence et l'unicité de la solution. La version de Caputo est privilégiée pour les modèles physiques en raison de ses conditions initiales cohérentes avec celles des équations d'ordre entier.

Considérons le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} {}^C\Delta_b^v = g(t+v-1, x(t+v-1)), & t \in \mathbb{N}_{b-v+1}, \\ x_0(t) = x(b), \end{cases} \quad (2.17)$$

où $0 < v \leq 1$ et g est une fonction continue définie par :

$g : [0, +\infty) \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, avec $\mathbb{X}$ est un espace de Banach.

Théorème 2.5.1. [26]

Soit x est une fonction définie sur $\mathbb{N}_b$, pour $v > 0$, $v \notin \mathbb{N}$, $m = [v]$ désigne la partie entière de v , alors la formule de différence de Taylor fractionnaire est donnée par :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-d)^k}{k!} \Delta g(b) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=b+n-v}^{t-v} (t-s-1)^{(v-1)} \Delta_*^v g(s), \quad (2.18)$$

en particulier, lorsque $0 < v < 1$ et $d = 0$, nous avons

$$g(t) = g(0) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=1-v}^{t-v} (t-s-1)^{(v-1)} \Delta_*^v g(s). \quad (2.19)$$

Où Δ_*^v est l'opérateur de différence fractionnaire de Caputo d'ordre v .

Théorème 2.5.2. [8]

$x(t) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{X}$ est une solution du problème à valeur initiale (2.17) si et seulement si $x(t)$ est une solution de l'équation de la formule de Taylor fractionnaire suivante discrète suivante

$$x(t) = x_0(t) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=1-v}^{t-v} (t - \sigma(s))^{(v-1)} \times g(s + v - 1, x(s + v - 1)), \quad t \in \mathbb{N}_{b+n}, \quad (2.20)$$

où $0 < v \leq 1$ et

$$x_0(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-d)^{(d)}}{k!} \Delta^k x(k). \quad (2.21)$$

2.6 Différences de Riemann-Liouville

Considérons la définition de l'opérateur de différence de Riemann à gauche.

La description de cet opérateur est disponible dans [2].

Définition 2.6.1.

Soit $v > 0$, $g : \mathbb{N}_b \rightarrow \mathbb{R}$ et $n - 1 < v$, où n désigne un entier positif. L'opérateur fractionnaire gauche de Riemann est défini comme

$${}^{RL}\Delta_b^v g(t) = \Delta^n \Delta_b^{-(n-v)} g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-v)} \Delta^n \left(\sum_{s=b}^{t-(n-v)} (t - \sigma(s))^{(n-v-1)} g(s) \right) \quad (2.22)$$

Remarque 2.6.1.

On a :

- En nommant ce fonctionnel l'opérateur de différence de Riemann-gauche, dans le cas où v est un entier, $v = n$, il coïncide avec l'opérateur de différence d'ordre n .
- Du domaine de la somme fractionnaire, il est clair que l'opérateur de Riemann fractionnaire mappe chaque fonction définie sur $\mathbb{N}_b$ en des fonctions définies sur $\mathbb{N}_{b+n-v}$.

Théorème 2.6.1.

Soit $g : \mathbb{N}_b \rightarrow \mathbb{R}$ et $v > 0$ donnés, avec $n - 1 < v \leq n$. La formule suivante pour la différence fractionnaire est équivalente à (4.5).

$${}^{RL}\Delta_b^v g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-v)} \sum_{s=b}^{t+v} (t - \sigma(s))^{-v-1} g(s), & n - 1 < v < n \\ \Delta^n g(t), & v = n \end{cases} \quad (2.23)$$

Proposition 2.6.1. (see [48])

Pour une fonction $g : \mathbb{N}_b \rightarrow \mathbb{R}$, l'opérateur de type Riemann d'ordre $v > 0$ est donné par

$$\Delta_b^v g(t) = \sum_{k=0}^{v+u-b} (-1)^k \binom{v}{k} g(t + v - k) \quad (2.24)$$

avec $t \in \mathbb{N}_{b+n-v}$.

Remarque 2.6.2.

Notez que lorsque $v = n$, la formule (2.24) se réduit à la formule binomiale traditionnelle :

$$\Delta^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} g(t + n - k), \quad \text{pour } t \in \mathbb{N}_b \quad (2.25)$$

Dans le prochain théorème de cette section, nous discutons d'une autre propriété importante des opérateurs de différence fractionnaire, à savoir la continuité par rapport à l'ordre des opérateurs.

Théorème 2.6.2.

Soit $g : \mathbb{N}_b \rightarrow \mathbb{R}$, $v > 0$ et soit $t_{v,m} = b + \lceil v \rceil - v + m$ un point fixé mais arbitraire dans le domaine de l'opérateur $\Delta_b^v f$ où $m \in \mathbb{N}_0$. Alors, pour chaque m fixé dans $\mathbb{N}_0$, $v \rightarrow \Delta_b^v g(t_t, m)$ est continu sur $[0, \infty)$.

2.7 Différences de Grunwald-Letnikov

Dans ce paragraphe, il convient de noter que la définition suivante de l'ordre fractionnaire de Grünwald-Letnikov sera utilisée comme définition de l'opérateur de différence discrète fractionnaire.

Définition 2.7.1.

L'ordre fractionnaire de Grunwald-Letnikov est donné par

$$\Delta^v g(t) = \frac{1}{h^v} \sum_{j=0}^t (-1)^j \binom{v}{j} g(t-j), \quad (2.26)$$

où $v > 0$ est l'ordre fractionnaire, h est le temps d'échantillonnage.

Les coefficients $\binom{v}{j}$ sont définis comme

$$\binom{v}{j} = \begin{cases} 1 & \text{pour } j = 0, \\ \frac{v(v-1)\cdots(v-j+1)}{j!} & \text{pour } j > 0. \end{cases}$$

2.8 Opérateur de h-différence d'ordre fractionnaire

Dans cette section, nous résumons brièvement certains concepts fondamentaux associés aux opérateurs de différence fractionnelle h . À cette fin, nous commençons par présenter quelques définitions et notations. Soit $h > 0$ et posons $(h\mathbb{N})_b = \{b, b+h, b+2h, \dots\}$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Définition 2.8.1.

Soit h un nombre réel strictement positif et $f : (h\mathbb{N})_b \rightarrow \mathbb{R}$, l'opérateur de différence avancée h est introduit comme suit :

$$\Delta_h g(t) = \frac{g(\sigma_h(t)) - g(t)}{h}, \quad (2.27)$$

où $\sigma_h(t) = (t+1)h$.

Définition 2.8.2.

La fonction factorielle décroissante h d'ordre réel v est définie par

$$t_h^{(v)} = h^v \frac{\Gamma\left(\frac{t}{h} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{t}{h} + 1 - v\right)}, \quad (2.28)$$

dans lequel $t \in \mathbb{R}$. Comme on peut le voir, lorsque $h = 1$, la fonction factorielle décroissante h est équivalente à la fonction factorielle décroissante définie par l'équation (2.4). On s'attend également à voir que $t_h^{(v)}$ converge vers t^v lorsque h tend vers zéro. Cela est illustré dans la prochaine proposition.

Proposition 2.8.1. [65]

Pour $t \geq 0$ et $v \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} t_h^{(v)} = t^v \quad (2.29)$$

Définition 2.8.3. [65]

Soit $g : (h\mathbb{N})_b \rightarrow \mathbb{R}$ et $0 < v$ donnés. b est un point de départ. La h -sommation fractionnaire d'ordre v est donnée par

$${}_h\Delta_b^{-v} g(t) = \frac{h}{\Gamma(v)} \sum_{s=\frac{b}{h}}^{\frac{t}{h}-v} (t - \sigma(sh))_h^{(v-1)} g(sh), \quad \sigma(sh) = (s+1)h, b \in \mathbb{R}, t \in (h\mathbb{N})_{b+vh}, \quad (2.30)$$

où la fonction factorielle décroissante h ,

dans laquelle $(h\mathbb{N})_{b+(1-v)h} = \{b + (1-v)h, b + (2-v)h, \dots\}$.

Remarque 2.8.1.

La sommation fractionnaire des différences h -différentielles ${}_h\Delta_b^{-\nu}$ mappe chaque fonction définie sur $(h\mathbb{N})_b$ en une fonction définie sur $(h\mathbb{N})_{b+\nu h}$. Conformément à la définition de la fonction h -factorielle, la formule donnée dans la définition 2.8.3 peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} ({}_h\Delta_b^{-\nu}g)(t) &= h^\nu \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\nu+n-k)}{\Gamma(\nu)\Gamma(n-k+1)} g(b+kh) \\ &= h^\nu \sum_{k=0}^n \binom{n-k+\nu-1}{n-k} g(b+kh) \\ &= h^\nu \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{-\nu}{j} g(b-jh) \end{aligned} \quad (2.31)$$

pour $t = b + (\nu + n)h, n \in \mathbb{N}_0$. Ensuite, la règle de puissance h et la propriété commutative de l'opérateur de sommation de différence fractionnaire h sont rapportées.

Lemme 2.8.1.

Soit ν un nombre réel tel que. Alors

$${}_b\Delta_h^{-\nu}(t-b+\mu h)_h^{(\mu)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu-1)}(t-b+\mu h)_h^{(\mu+\nu)}. \quad (2.32)$$

Proposition 2.8.2.

Soit g une fonction à valeurs réelles définie sur $(h\mathbb{N})_b$, où $b, h \in \mathbb{R}, h > 0$. Pour $\nu, \mu > 0$, les égalités suivantes tiennent

$${}_h\Delta_{b+\mu h}^{-\nu}{}_h\Delta_b^{-\mu}g(t) = {}_h\Delta_b^{-(\nu+\mu)}g(t) = {}_h\Delta_{b+\nu h}^{-\mu}{}_h\Delta_b^{-\nu}g(t), \quad t \in (h\mathbb{N})_{b+(\nu+\mu)h} \quad (2.33)$$

Sur la base de la définition ci-dessus de la somme h -fractionnelle, il est possible de définir les opérateurs de différence h -fractionnelle.

Définition 2.8.4.

Soit $\nu \in (0, 1]$, l'opérateur de différence fractionnaire h -Riemann

$${}^{RL}_b \Delta_h^\nu g(t) = \left(\Delta_h \left(h_b^{-(1-\nu)} g \right) \right)(t), \quad t \in (h\mathbb{N})_{b+(1-\nu)h} \quad (2.34)$$

Remarque 2.8.2.

Ce n'est pas que l'opérateur h -différentiel fractionnaire de type Riemann applique chaque fonction définie sur $(h\mathbb{N})_b$ dans $(h\mathbb{N})_{b+(1-\nu)h}$.

Définition 2.8.5. [2]

Pour $g(t)$ défini sur $(h\mathbb{N})_b$ et $0 < \nu, \mu \notin \mathbb{N}$, la différence de type Caputo est définie par

$${}_h^C \Delta_b^\mu g(t) = \Delta_b^{-(n-\mu)} \Delta^n g(t), \quad t \in (h\mathbb{N})_{b+(n-\mu)h} \quad (2.35)$$

où $n = \lceil \nu \rceil + 1$. Si $\nu = 1$, alors nous avons :

$${}_h^C \Delta_b^\nu g = \Delta^n g, \quad t \in (h\mathbb{N})_b \quad (2.36)$$

Le dernier opérateur que nous prenons en considération est un opérateur de différence fractionnaire h . Opérateur de type Grunwald-Letnikov.

Définition 2.8.6.

Soit $\nu \in \mathbb{R}$, l'opérateur de différence h -différentiel de type Grunwald-Letnikov Δ_h^ν d'ordre ν pour une fonction $g : (h\mathbb{N})_b \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par

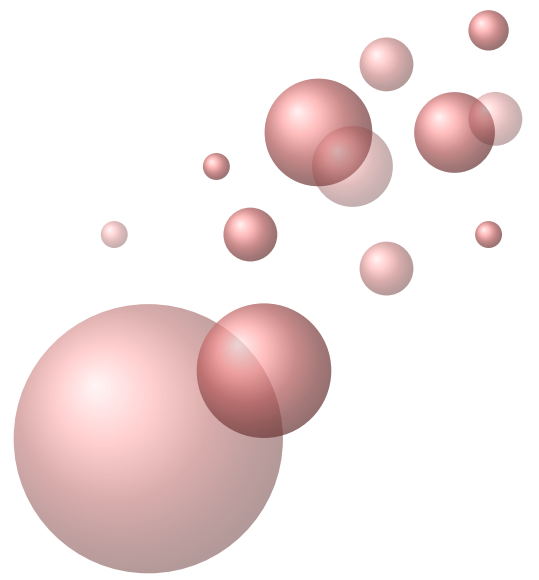
$$\Delta_h^\nu g(t) = \frac{1}{h^\nu} \sum_{s=0}^{\frac{t-b}{h}} (-1)^s \binom{\nu}{s} g(t - sh) \quad (2.37)$$

où le terme $\binom{\nu}{s}$ peut être obtenu à partir de la relation suivante

$$\binom{\nu}{s} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \\ s = 0 \\ \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-s+1)}{s!} & \text{pour} \\ s \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.38)$$

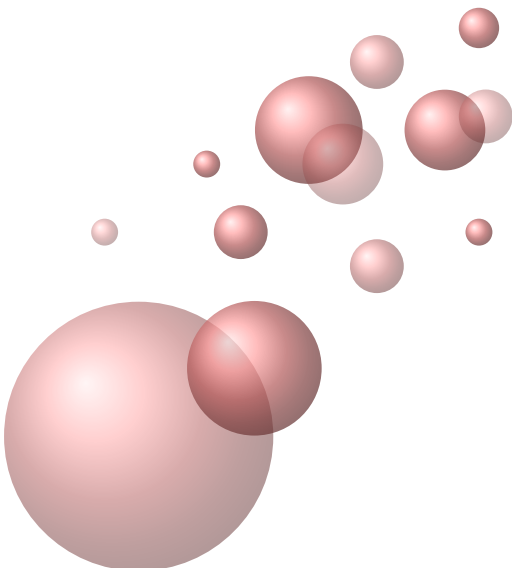
Remarque 2.8.3.

L'opérateur de différence h de type Grunwald-Letnikov mappe chaque fonction définie à partir de $(h\mathbb{N})_b$ dans le même domaine $(h\mathbb{N})_b$.



CHAPITRE 3

Application des concepts du chaos à l'étude de la dynamique cardiaque



CHAPITRE 3

APPLICATION DES CONCEPTS DU CHAOS À L'ÉTUDE DE LA DYNAMIQUE CARDIAQUE



3.1 Introduction

Le cœur humain constitue un système dynamique complexe régi par des interactions non linéaires résultant de l'activité électrique des cellules myocardiques et des mécanismes de régulation physiologique. Des études ont montré que de nombreux troubles du rythme cardiaque, tels que l'alternance et la fibrillation ventriculaire, sont étroitement liés à ces dynamiques non linéaires ainsi qu'aux transitions soudaines entre différents motifs rythmiques. Bien que la plupart des maladies cardiaques se développent progressivement, les troubles du rythme peuvent apparaître de manière brusque à la suite de modifications mineures des paramètres du système, phénomène qui s'explique dans le cadre de la théorie des bifurcations.

Pour comprendre ces comportements complexes, les modèles mathématiques se sont imposés comme un outil fondamental pour analyser les mécanismes conduisant aux troubles du rythme cardiaque. Cette approche n'est pas nouvelle : des recherches menées depuis le début du XX^e siècle ont montré que la modification des paramètres des modèles mathématiques du cœur pouvait générer des rythmes similaires à ceux observés cliniquement. Parmi les modèles les plus utilisés, les cartes itératives de faible dimension se distinguent, notamment celles basées sur la restitution de la durée du potentiel d'action (APD restitution), en raison de l'efficacité de ce cadre pour étudier l'instabilité dynamique et l'évolution du rythme cardiaque.

Cependant, ces modèles supposent souvent que l'effet de la mémoire est limité ou négligeable, alors que les systèmes biologiques — en particulier les cellules cardiaques excitables — présentent un comportement clairement influencé par leur histoire passée. Cela résulte de l'interaction de réseaux complexes de canaux ioniques et de voies de signalisation opérant sur plusieurs échelles temporelles, ce qui rend la dynamique actuelle dépendante des états antérieurs. Plusieurs

études ont confirmé que la mémoire joue un rôle significatif dans la modulation de la réponse cardiaque et peut influencer des phénomènes tels que l'alternance associée aux troubles du rythme.

Dans ce contexte, le calcul fractionnaire s'est imposé comme un cadre mathématique approprié pour intégrer les effets de mémoire dans les modèles dynamiques, grâce à sa capacité à représenter les effets cumulés du passé et à fournir une description plus précise des systèmes complexes comparativement aux modèles d'ordre entier. En s'appuyant sur le modèle de carte unidimensionnelle proposé par Lewis et Guevara [59], ce chapitre vise à étendre ce modèle en proposant une version fractionnaire utilisant l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo, avec une mémoire longue, ainsi qu'une version à mémoire de longueur fixe, permettant une représentation plus réaliste de la dynamique cardiaque et la capture de comportements complexes tels que l'instabilité et le chaos.

Pour analyser les propriétés du modèle proposé, nous nous appuyons sur des diagrammes de bifurcation afin de suivre les transitions des motifs rythmiques et détecter les débuts de l'instabilité dynamique, ainsi que sur le test de chaos 0 – 1 pour distinguer avec précision les comportements réguliers des comportements chaotiques.

3.2 Analyse des dynamiques non linéaires du système cardiaque

Le cœur est un système physiologique complexe, caractérisé par une dynamique fortement non linéaire. Sa fonction essentielle est de servir de pompe pour assurer la circulation sanguine. Cette activité est régulée par une séquence précise d'impulsions électriques qui stimulent les cellules cardiaques à chaque battement. Toute perturbation de cette activité électrique peut provoquer des arythmies cardiaques.

L'électrophysiologie cardiaque, qui s'est développée depuis le début du XXe siècle grâce à l'électrocardiographe, permet d'analyser ces phénomènes à l'échelle cellulaire et moléculaire. Les avancées dans ce domaine ont permis de mieux comprendre les mécanismes des arythmies et d'améliorer les approches diagnostiques et thérapeutiques, telles que les électrocardiogrammes, les explorations intracavitaires, les stimulateurs et les défibrillateurs.

La dynamique électrique du cœur se manifeste à différentes échelles — du niveau cellulaire jusqu'au niveau ionique. Elle est générée non par des électrons mais par le déplacement d'ions (Na^+ , K^+ , Ca^{2+} , Cl^-) à travers des canaux ioniques membranaires. Ces flux ioniques produisent des potentiels d'action, qui sont à l'origine des contractions cardiaques. L'ECG reflète, à la surface du corps, la somme de ces potentiels produits par l'ensemble des cellules cardiaques.

Les arythmies sont actuellement traitées par médicaments, dispositifs implantables ou électrostimulation. Le traitement classique par défibrillation repose sur un choc électrique intense pour réinitialiser l'activité cardiaque. Toutefois, une alternative plus ciblée consiste à appliquer des stimulations électriques de faible intensité, guidées par des algorithmes fondés sur la dynamique non linéaire du cœur, considéré ici comme un système complexe mais déterministe.

3.2.1 Comportement non linéaire de l'activité électrique cardiaque

Le coeur, organe essentiel de l'organisme, fonctionne comme une pompe naturelle qui assure la circulation sanguine. Il est composé de quatre cavités : deux oreillettes et deux ventricules (Fig 3.1). Son activité mécanique est déclenchée par un phénomène bioélectrique complexe, caractérisé par une dynamique non linéaire.

La contraction du muscle cardiaque dépend d'un processus appelé couplage excitation-contraction, où une stimulation électrique précède chaque contraction [17]. Cette stimulation débute dans le nœud sinusal, considéré comme le *pacemaker* naturel du cœur. Elle résulte d'un changement transitoire du potentiel membranaire des cellules, connu sous le nom de potentiel d'action [72].

Le signal électrique se propage ensuite vers le nœud auriculo-ventriculaire, puis circule à travers le faisceau de His, les branches de Tawara, et les fibres de Purkinje (Fig 3.1), activant les différentes régions du cœur de manière séquentielle et coordonnée. Cette organisation précise permet un fonctionnement efficace, mais peut être perturbée, entraînant des troubles du rythme comme les arythmies.

La nature non linéaire de cette activité réside dans le fait qu'une petite perturbation ionique ou électrique peut engendrer des réponses disproportionnées, rendant la dynamique du système cardiaque particulièrement sensible et complexe à modéliser.

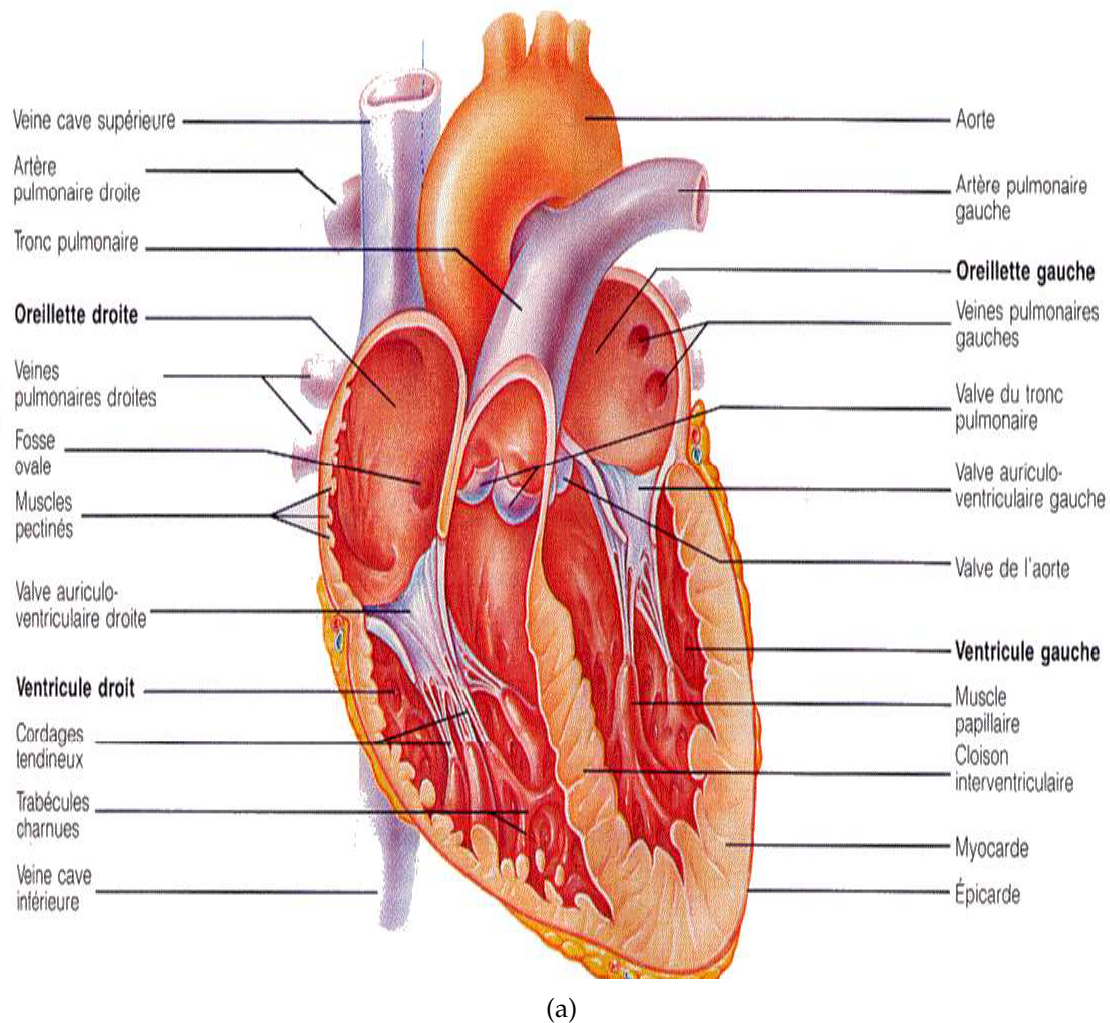


Figure 3.1 – Anatomie du coeur

3.2.2 Activité électrique non linéaire au niveau de la cellule cardiaque

Le tissu cardiaque est composé de deux types principaux de cellules excitables : les cellules myocardiques contractiles et les cellules automatiques. Ces cellules baignent dans un milieu riche en ions, notamment le sodium (Na^+), le potassium (K^+) et le calcium (Ca^{2+}), essentiels à la génération de l'activité électrique. Lorsqu'une cellule est stimulée par une impulsion électrique, elle subit une dépolarisation, marquée par une inversion rapide du potentiel membranaire. S'ensuit une période réfractaire absolue, durant laquelle la cellule ne peut pas répondre à

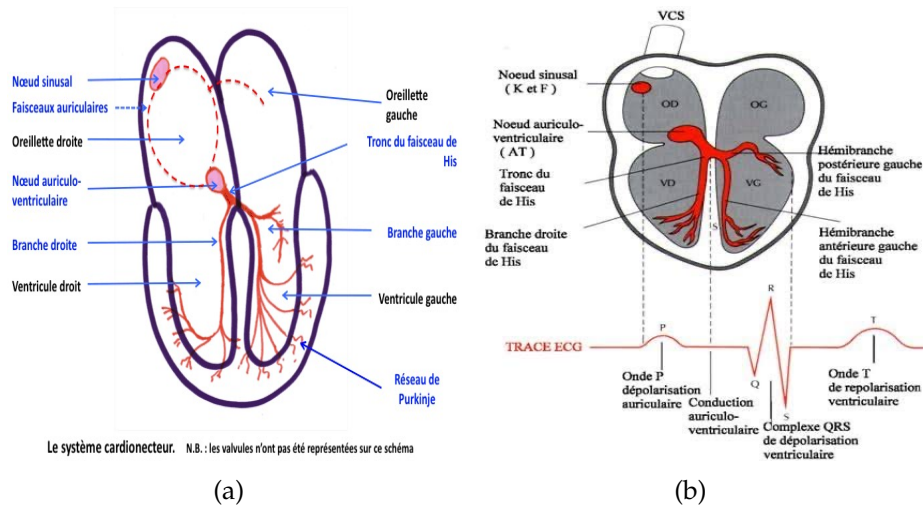


Figure 3.2 – Un schéma illustrant l'activité électrique dans le muscle cardiaque une nouvelle stimulation. La repolarisation permet ensuite à la cellule de revenir à son potentiel de repos. L'ensemble de ce cycle constitue le potentiel d'action (PA), qui reflète les différences de voltage entre l'intérieur et l'extérieur de la cellule au cours de l'activité électrique.

Ce potentiel d'action est produit par le passage sélectif d'ions à travers des canaux ioniques situés dans la membrane cellulaire. L'ouverture et la fermeture de ces canaux, qui varient selon le voltage, font que la réponse électrique de la cellule est non linéaire. Autrement dit, la relation entre l'entrée (stimulation) et la réponse (potentiel d'action) n'est pas proportionnelle. Par exemple, un effet de seuil doit être atteint pour déclencher une dépolérisation : un petit changement du voltage peut produire une réponse nulle ou, au contraire, une activation complète, ce qui est typique des systèmes non linéaires.

3.2.3 Le potentiel de repos

Le potentiel de repos correspond à la différence de voltage mesurée entre l'intérieur et l'extérieur d'une cellule cardiaque non stimulée. Sa valeur est généralement comprise entre -80 et -90 millivolts (mV). À l'état de repos, l'intérieur

de la cellule est électriquement négatif par rapport à l'extérieur, ce qui signifie que la membrane est polarisée : négative à l'intérieur et légèrement positive à l'extérieur.

Cette polarisation est maintenue par plusieurs mécanismes physiologiques clés :

- La pompe sodium-potassium (Na^+/K^+), qui expulse activement trois ions Na^+ hors de la cellule pour chaque deux ions K^+ qu'elle fait entrer, maintenant ainsi une forte concentration intracellulaire de potassium.
- La perméabilité sélective de la membrane, beaucoup plus grande pour le potassium que pour le sodium ($K^+ \gg Na^+$), ce qui favorise une sortie passive de K^+ . Cette tendance est compensée par l'action continue de la pompe Na^+/K^+ pour éviter une dépolarisation permanente.
- La présence de protéines et de phosphates organiques chargés négativement à l'intérieur de la cellule, qui contribuent également à maintenir un potentiel membranaire négatif.

Ces mécanismes collaborent pour stabiliser le potentiel de repos et préparer la cellule à répondre à une future stimulation. Le maintien de cette différence de potentiel est indispensable à la génération des potentiels d'action et, par conséquent, au bon fonctionnement de l'activité électrique cardiaque.

3.2.4 Le potentiel d'action

Le potentiel d'action est une variation transitoire de la polarisation membranaire d'une cellule cardiaque, provoquée par des mouvements d'ions (Na^+ , K^+ , Ca^{2+})

à travers des canaux ioniques spécifiques. Ce phénomène précède chaque contraction du myocarde et constitue l'élément fondamental du couplage excitation-contraction.

Il comprend cinq phases successives observables sur un tracé électrophysiologique (Fig 3.3) :

- Phase 0 (dépolariation) : Entrée rapide de Na^+ , faisant passer le potentiel de -90 mV à $+30$ mV.
- Phase 1 (repolarisation initiale) : Fermeture des canaux sodiques et début de la sortie de K^+ , ramenant le potentiel proche de 0 mV.
- Phase 2 (plateau) : Équilibre relatif entre l'entrée de Ca^{2+} (essentiel à la contraction) et la sortie de K^+ , prolongeant la dépolariation.
- Phase 3 (repolarisation terminale) : Fermeture des canaux calciques et activation des canaux potassiques, ce qui rétablit la négativité intracellulaire.
- Phase 4 (retour au repos) : Stabilisation du potentiel de repos autour de -90 mV, préparant la cellule à une nouvelle stimulation.

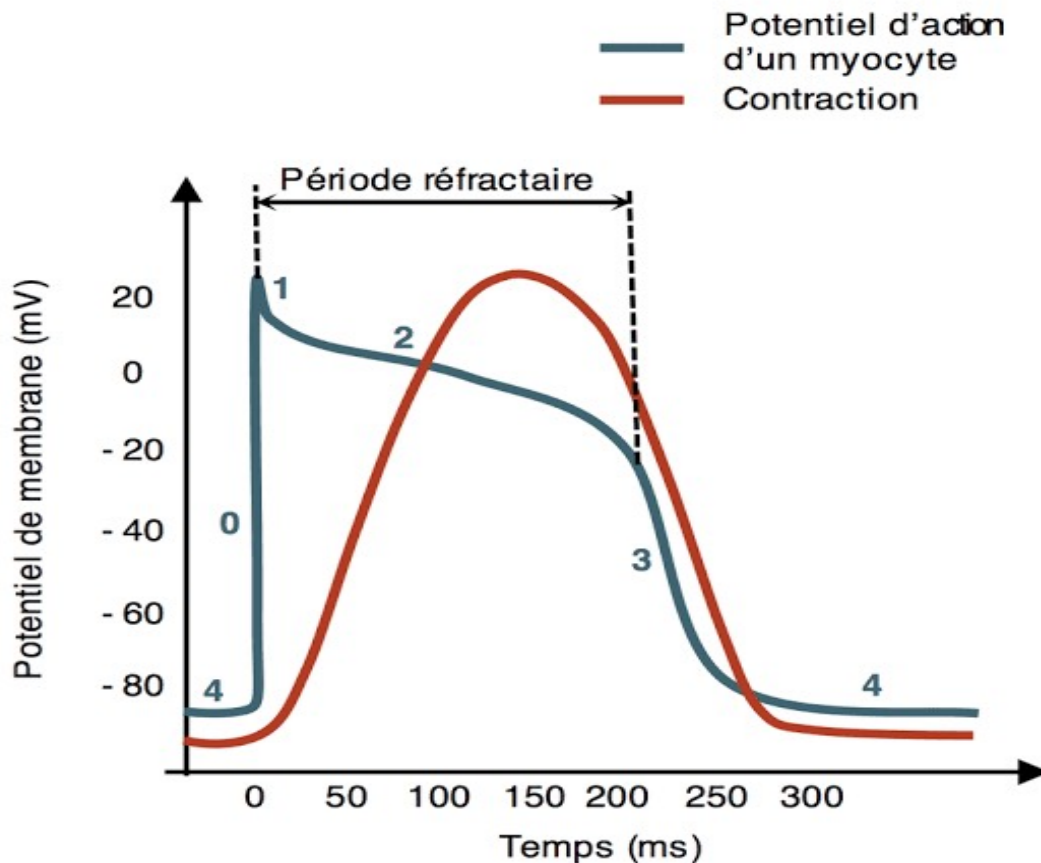
La période réfractaire, durant laquelle la cellule ne peut pas être re-stimulée, suit immédiatement la dépolariation. Elle comprend deux phases :

La période réfractaire absolue (PRA), pendant laquelle aucune nouvelle excitation n'est possible, et qui correspond à la phase 1 et au début de la phase 3.

La période réfractaire relative (PRR), qui suit la PRA, durant laquelle une stimu-

lation plus forte que la normale peut déclencher un nouveau potentiel d'action si le voltage est suffisamment négatif.

Cette réfractarité protège le cœur contre les contractions soutenues anormales (spasmes) qui perturberaient la circulation sanguine et mettraient en danger la



(a)

Figure 3.3 – Potentiel d'action des cellules myocardiques

3.2.5 La restitution : lien entre dynamique non linéaire et arythmies

La restitution désigne la dépendance non linéaire du fonctionnement des canaux ioniques vis-à-vis du potentiel d'action (PA) et du temps. Elle se mesure à travers la courbe de restitution, qui exprime la durée du potentiel d'action (APD) en fonction de l'intervalle diastolique (DI), c'est-à-dire le délai entre deux activa-

tions successives (Fig 3.4).

Cette courbe simplifie la dynamique complexe des cellules cardiaques en une modélisation unidimensionnelle, souvent décrite par l'équation itérative :

$$APD_{n+1} = f(DI_n) \quad (3.1)$$

où f est une fonction non linéaire, généralement de type exponentiel. Ce modèle a permis de démontrer que des alternances de repolarisation c'est-à-dire des successions de potentiels d'action courts et longs peuvent émerger à partir d'une bifurcation de type doublement de période [66, 44].

La pente de la courbe de restitution est un paramètre crucial. Lorsque cette pente est inférieure à 1, la cellule répond de manière stable à chaque stimulation (rythme 1 : 1). En revanche, si la fréquence de stimulation augmente au point où la pente dépasse 1, une alternance apparaît (rythme 2 : 2), caractérisée par deux PA de durées différentes en réponse à deux stimuli identiques (Fig 3.5).

Cette alternance est souvent précipitée par une contraction prématurée et peut mener à une fibrillation ventriculaire, cause potentielle d'arrêt cardiaque soudain [58, 28]. Ainsi, la restitution, par sa nature non linéaire, joue un rôle clé dans l'initiation des arythmies cardiaques.

Le paragraphe suivant abordera plus en détail les conséquences cliniques de l'alternance de l'APD dans les troubles du rythme ventriculaire.

3.3 Les arythmies cardiaques

Les arythmies cardiaques désignent l'ensemble des troubles affectant la fréquence, la régularité ou l'intensité du rythme cardiaque. En situation normale, le coeur bat suivant un rythme sinusal régulier 1 : 1. Toutefois, ce rythme peut être perturbé, donnant lieu à différentes formes d'arythmies.

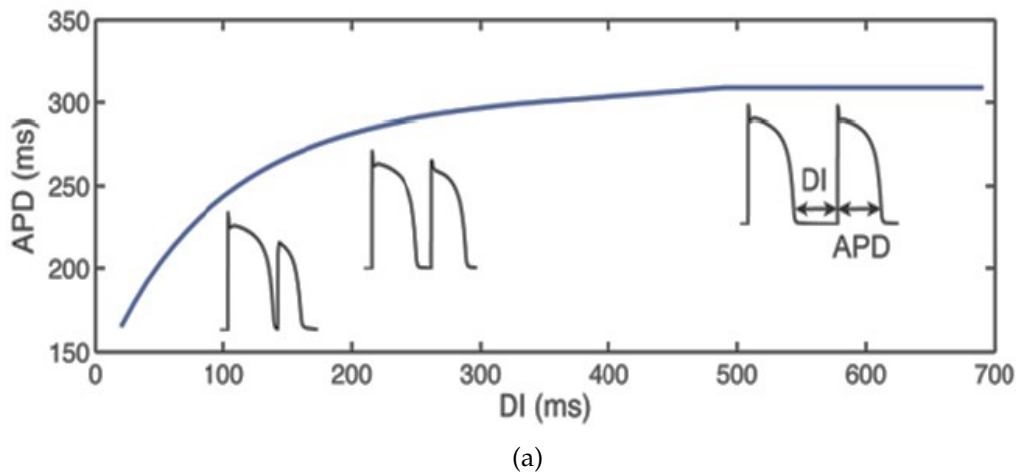


Figure 3.4 – Courbe illustrant la restitution de la durée du potentiel d'action du cœur [72]

Parmi celles-ci, on distingue :

Les bradycardies, caractérisées par un rythme inférieur à 60 battements par minute (BPM) au repos.

Les tachycardies, avec un rythme supérieur à 100 BPM.

Les arythmies ventriculaires (issues des ventricules) et supra-ventriculaires (issues des oreillettes ou du noeud auriculo-ventriculaire).

Les deux types d'arythmies les plus graves et potentiellement mortelles sont :

- La tachycardie ventriculaire (TV), qui débute en dessous du faisceau de His et peut évoluer vers une perte d'efficacité de la contraction cardiaque.
- La fibrillation ventriculaire (FV), où les ventricules perdent toute coordination. Les contractions deviennent extrêmement rapides (jusqu'à 300 BPM) et désorganisées, compromettant gravement la fonction de pompe du coeur.

Le mécanisme exact de déclenchement de la FV reste encore partiellement com-

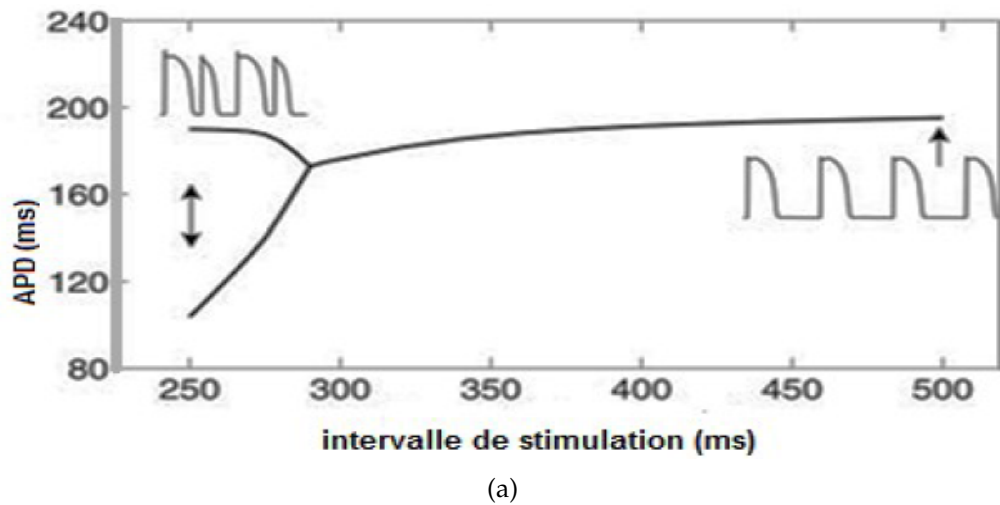


Figure 3.5 – Diagramme de bifurcation associé à la durée du potentiel d'action du cœur [72]

pris. Une extrasystole ventriculaire survenant pendant la phase de repolarisation peut en être le déclencheur. De plus, le phénomène de réentrée, souvent impliqué dans la genèse des tachycardies, peut également être à l'origine d'une FV.

Certains travaux, notamment ceux de Janse [51], suggèrent que le système de Purkinje pourrait aussi jouer un rôle clé dans certains cas.

Face à une fibrillation ventriculaire, la seule solution efficace reste l'application d'un choc électrique de défibrillation, capable de resynchroniser la dépolarisation du myocarde et de rétablir un rythme sinusal normal.

3.3.1 Le phénomène de réentrée

Le mécanisme de réentrée est l'un des principaux processus à l'origine de nombreuses arythmies cardiaques. Il se produit lorsqu'une impulsion électrique revient stimuler une région du tissu cardiaque qu'elle a déjà activée, mais qui a eu le temps de retrouver son excitabilité. Ainsi, au lieu de s'éteindre naturellement après avoir traversé le cœur, l'onde d'activation persiste et tourne en boucle, ré-activant les mêmes zones encore et encore [72, 58].

Ce phénomène repose généralement sur deux conditions :

Une conduction lente dans certaines régions du myocarde.

Une période réfractaire suffisamment courte, permettant à la zone stimulée de se réactiver rapidement.

On distingue principalement deux types de réentrées :

- **Réentrée anatomique** : elle se produit autour d'un obstacle fixe et non conducteur (comme une valve cardiaque ou une cicatrice post-infarctus). Le signal électrique forme alors une boucle autour de cette barrière. Ce modèle est le plus classique et le plus facile à conceptualiser.
- **Réentrée fonctionnelle** : elle survient en l'absence d'obstacle anatomique identifiable. Dans ce cas, le circuit de réentrée se forme autour d'une zone qui est fonctionnellement inexcitable, bien qu'anatomiquement normale. L'hétérogénéité dans les propriétés électrophysiologiques du tissu crée une discontinuité fonctionnelle, suffisante pour entretenir l'onde circulante [72].

Ce type de mécanisme joue un rôle clé dans des arythmies sévères comme la tachycardie ventriculaire ou la fibrillation, où l'activité électrique devient anarchique et inefficace.

3.3.2 Fibrillation ventriculaire

La fibrillation ventriculaire (FV) se caractérise par une désorganisation totale de la contraction des fibres musculaires ventriculaires, résultant en une absence de synchronisation efficace. Dans un tissu cardiaque homogène, toutes les cellules se dépolarisent et se contractent simultanément. Cependant, lorsque surviennent

des disparités dans les propriétés électriques (par exemple, des vitesses de conduction inégales), le signal ne se propage plus uniformément.

Ces hétérogénéités entraînent une déviation de l'onde électrique qui, en se courbant, peut adopter la forme d'une spirale incontrôlée. Cette spirale, qui se referme sur elle-même pour revenir à son point d'origine, déclenche alors une nouvelle dépolarisation dans un phénomène de réentrée fonctionnelle. Ce mécanisme spiralaire est susceptible de se fragmenter en plusieurs mini-spirales, lesquelles se propagent dans différentes régions des ventricules.

En conséquence, la dépolarisation et la contraction surviennent de manière totalement désordonnée, compromettant l'efficacité de la fonction de pompe cardiaque. Ce dysfonctionnement entraîne une interruption brutale de l'oxygénation, notamment du cerveau, ce qui peut aboutir à une mort subite.

3.3.3 Alternances

Les alternances cardiaques peuvent précéder l'apparition de tachycardies ventriculaires, ce qui suggère un lien potentiel de causalité entre les deux phénomènes. Ces alternances se manifestent par des variations cycliques de la durée du potentiel d'action d'un battement à l'autre.

Il existe deux formes principales :

- L'alternance spatialement concordante, où l'ensemble du tissu cardiaque présente une même alternance : un potentiel d'action long suivi d'un court à chaque battement successif.
- L'alternance spatialement discordante, où différentes régions du tissu cardiaque n'évoluent pas de manière synchrone : certaines présentent un potentiel d'action long pendant que d'autres affichent un potentiel court

pour le même battement.

Des études expérimentales [44, 9] et des simulations numériques [28, 53, 71] ont confirmé que ce type de désynchronisation peut jouer un rôle clé dans le déclenchement des arythmies ventriculaires.

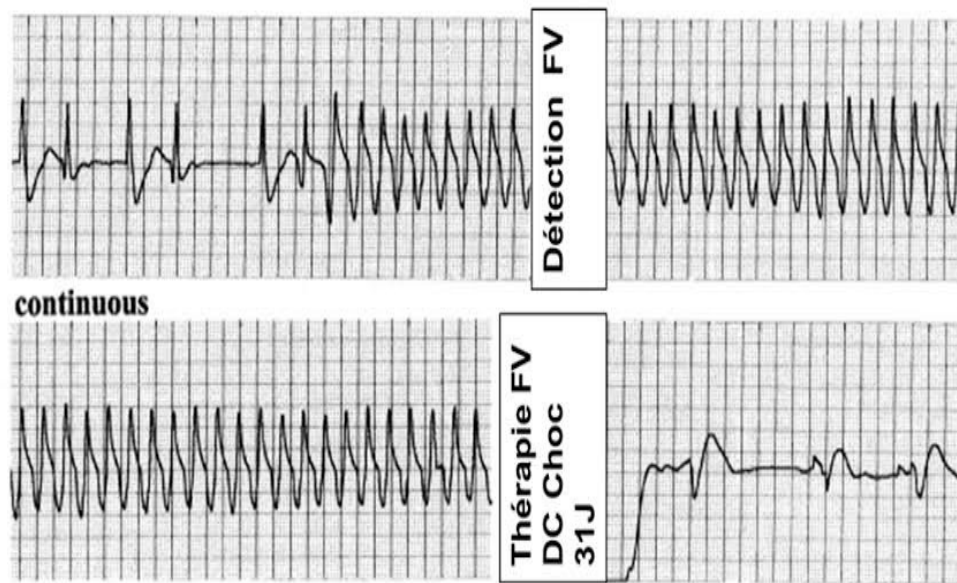
3.3.4 Défibrillation cardiaque

La défibrillation cardiaque est une technique thérapeutique consistant à délivrer un choc électrique contrôlé au cœur, dans le but d'interrompre une tachycardie ventriculaire ou une fibrillation ventriculaire. Elle est généralement réalisée à l'aide d'un défibrillateur cardiaque implantable (DCI), dispositif médical ressemblant à un stimulateur cardiaque, composé de deux éléments principaux : un boîtier de défibrillation et une ou plusieurs sondes implantées.

Ce boîtier contient des algorithmes permettant de surveiller le rythme cardiaque et de détecter les anomalies. Contrairement au pacemaker qui émet de faibles impulsions, le DCI peut délivrer des chocs électriques à haute énergie pour rétablir un rythme sinusal normal.

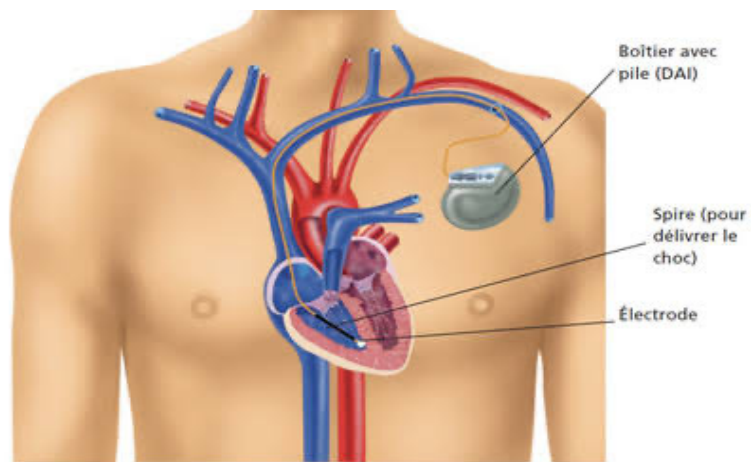
La sonde de défibrillation est connectée au boîtier et au ventricule droit du cœur. Elle détecte les troubles du rythme et peut aussi jouer le rôle de stimulation en cas de bradycardie. Chez certains patients, une seule sonde suffit pour assurer à la fois la stimulation régulière et la défibrillation.

Le principe de la défibrillation repose sur l'interruption des boucles de réentrée responsables des arythmies. Pour cela, l'onde d'excitation doit rencontrer des cellules réfractaires, incapables de se redépolariser immédiatement. Toutefois, il est essentiel de bien doser l'énergie : trop faible, elle est inefficace ; trop forte, elle risque de détériorer le tissu myocardique.



(a)

Figure 3.6 – Potentiel d'action des cellules myocardiques



(a)

Figure 3.7 – Défibrillateur cardiaque implantable

3.4 Le comportement régulier et chaotique dans l'APD sans mémoire et avec mémoire

Le système cardiaque est un système dynamique excitable doté de propriétés de mémoire, mais comprendre comment cette mémoire influence la dynamique de l'excitation demeure un véritable défi. Des simulations numériques réalisées dans [57] sur des modèles de durée du potentiel d'action (APD) ont démontré que la mémoire joue un rôle fondamental dans l'instabilité dynamique, menant à des comportements d'excitation complexes et chaotiques.

L'effet de la mémoire sur les alternances cardiaques a suscité l'intérêt de nombreuses études antérieures, notamment [27, 38, 67, 68]. Ces recherches ont montré que la mémoire peut soit supprimer les alternances cardiaques, soit accentuer l'instabilité dynamique, provoquant ainsi des comportements chaotiques dans les modèles APD. Ce phénomène est fidèlement représenté par un modèle de cartographie récurrente prenant en compte les effets de mémoire.

Afin de déterminer l'effet d'une mémoire de longueur fixe sur la dynamique du modèle, une cartographie unidimensionnelle sans mémoire est d'abord analysée. Cette classe particulière de cartes APD, proposée dans [59], constitue un modèle fondamental pour la compréhension de la dynamique cardiaque.

Le modèle de Lewis et Guevara représente un cadre mathématique largement utilisé pour décrire les cellules cardiaques excitables, notamment dans l'étude des arythmies cardiaques. Cependant, les formulations classiques reposent généralement sur des équations différentielles d'ordre entier, supposant des interactions instantanées et une perte totale de mémoire au-delà d'un certain délai. Cette simplification peut ne pas refléter avec précision les processus biophysiques complexes qui sous-tendent la dynamique cardiaque.

L'extension du modèle de Lewis et Guevara à l'aide du calcul fractionnaire

et d'une mémoire de longueur fixe introduit des améliorations physiologiques et physiques essentielles. La définition mathématique est donnée par :

$$x(i+1) = g(x(i)), i \in \mathbb{N},$$

où

$$x(i+1) = A - B_1 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_2}\right), \quad (3.2)$$

$x(i) \in [0, 270msec]$, où $x(i+1)$ représente la durée du potentiel d'action (APD) générée par le $(i+1)^{th^{me}}$ stimulus, et où n est le paramètre bloquant la production d'un potentiel d'action à la condition que $(nt_s - x(i+1) \geq DI_{min})$. Les constantes $A, B_1, B_2, \tau_1, \tau_2, DI_{min}$ sont liées aux contraintes électrophysiologiques cardiaques du cœur, telles que définies par Lewis et Guevara [59]. Ces paramètres sont les suivants :

$$A = 270msec, B_1 = 2441msec, B_2 = 90.02msec,$$

$$\tau_1 = 19.6msec, \tau_2 = 200.5msec, DI_{min} = 53.5msec.$$

Ces paramètres sont dérivés de contraintes électrophysiologiques cardiaques bien établies, basées sur des données expérimentales concernant la cinétique des canaux ioniques, la durée des potentiels d'action et les périodes réfractaires dans les tissus cardiaques. Les valeurs choisies garantissent la plausibilité biologique du modèle et sont cohérentes avec les comportements électrophysiologiques observés dans les cellules cardiaques réelles.

La figure 3.8 présente un diagramme de bifurcation inspiré de l'étude de Lewis et Guevara [59], dans laquelle le tissu cardiaque présente un rythme naturel stable de type 1 : 1 pour des intervalles de stimulation longs, ce qui signifie que chaque stimulus produit un potentiel d'action de durée égale. À mesure que la fréquence cardiaque augmente (c'est-à-dire que l'intervalle de stimulation diminue), ce rythme perd sa stabilité, ce qui conduit à des motifs rythmiques alternants, tels

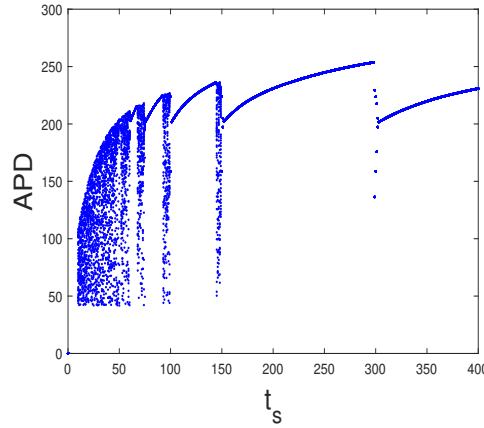


Figure 3.8 – Le diagramme de bifurcation révèle la présence d'un rythme d'alternance, d'une bistabilité, ainsi qu'un enchaînement de bifurcations par doublement de période menant au chaos dans l'application (3.2).

que le rythme 2 : 2. Dans cette étude, la relation dynamique entre l'intervalle de stimulation, la durée du potentiel d'action (APD), et l'intervalle diastolique (DI) est décrite par l'équation : $DI(i+1) = nt_s - x(i)$, où t_s désigne l'intervalle de stimulation de base. À mesure que la fréquence des stimuli augmente, la figure 3.8 illustre la séquence de bifurcations des rythmes pour toute valeur initiale $x(1) \leq 248msec$: $sequence = \{1 : 1 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 6 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 8 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 5 : 1 \rightarrow 10 : 2 \rightarrow 6 : 1 \rightarrow chaostotal\}$.

Pour la valeur initiale $x(1) > 248msec$, la séquence de bifurcations est la suivante : $sequence = \{1 : 1 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 6 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 8 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 5 : 1 \rightarrow 10 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 6 : 1 \rightarrow chaostotal\}$.

Les deux séquences précédentes montrent la présence de bistabilité dans le modèle (3.2) :

- La bistabilité entre les deux rythmes 1 : 1 et 2 : 1 pour $301.8msec < t_s \leq 307.3msec$.
- La bistabilité entre les deux rythmes 2 : 2 et 2 : 1 pour $297.9msec < t_s \leq 301.8msec$.

Il a également été observé que lorsque les répétitions commencent à partir

de n'importe quel état initial aléatoire dans l'intervalle de temps $[0, 270msec]$, l'apparition du chaos ne se produit que lorsque le rythme 4 : 2 perd sa stabilité. Nous passons maintenant du modèle de Lewis et Guevara sans mémoire au modèle avec mémoire, en présentant la version fractionnaire de l'application (3.2).

La différence d'ordre un de (3.2) peut être facilement formulée comme suit :

$$\Delta x_n = A - B_1 \exp\left(\frac{x_n - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{x_n - nt_s}{\tau_2}\right) - x_n. \quad (3.3)$$

En utilisant la différence delta de type Caputo avec d comme point de départ, la différence d'ordre fractionnaire de l'équation (3.3) est donnée par :

$${}^c \Delta_d^v x(t) = A - B_1 \exp\left(\frac{x(t-1+v) - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{x(t-1+v) - nt_s}{\tau_2}\right) - x(t-1+v). \quad (3.4)$$

Conformément au Theorem 2.5.1, nous considérons le modèle fractionnaire généralisé du modèle (3.3), donné par :

$$x_n = x_0 + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)} \left(A - B_1 \exp\left(\frac{x_{j-1} - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{x_{j-1} - nt_s}{\tau_2}\right) - x_{j-1} \right), \quad (3.5)$$

où $0 < v \leq 1$, v représente l'ordre fractionnaire du système dynamique discret (3.5). Grâce à cet ordre fractionnaire, on observe que le système (3.5) est soumis à un effet de mémoire, car l'état actuel x_n dépend de l'ensemble des états précédents $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

Avant de commencer notre étude numérique, il convient tout d'abord de rappeler que, tout comme les systèmes continus d'ordre fractionnaire, les systèmes discrets d'ordre fractionnaire ne peuvent avoir aucune solution périodique non constante. Par conséquent, le système d'ordre fractionnaire (3.5) ne peut admettre d'orbites périodiques [31]. Néanmoins, on peut considérer que le système (3.5) peut admettre des orbites périodiques numériques (OPN), dans le sens où l'on

peut estimer que les trajectoires s'approcheront des solutions périodiques.

L'objectif de cette sous-section est d'explorer, par simulation numérique, le comportement régulier et chaotique de l'application discrète fractionnaire (3.5) pour l'ensemble de paramètres défini en (12).

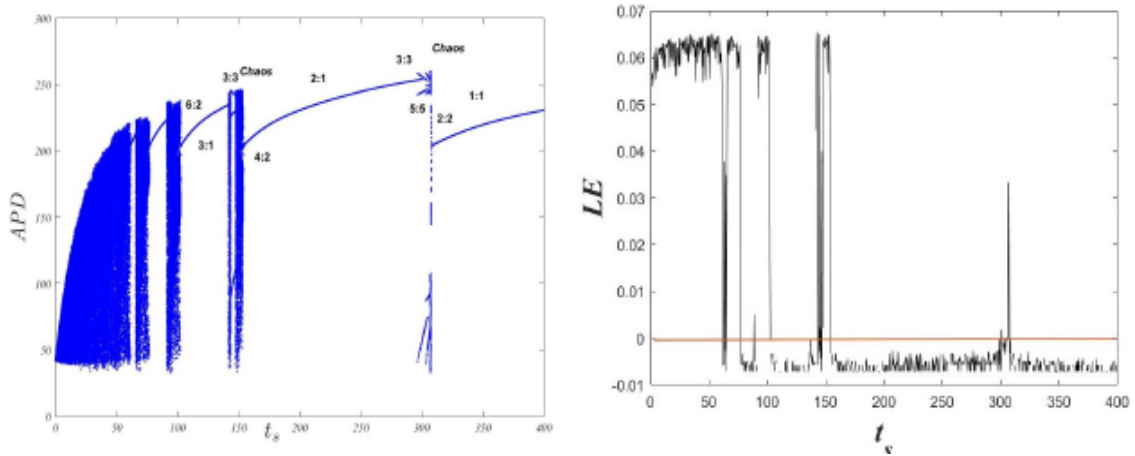


Figure 3.9 – (a) Diagramme de bifurcation dans le plan (APD vs t_s) pour $v = 0,92$, $APD_1 = 200msec$ et t_s variant de 0 à 400. (b) Exposants de Lyapunov correspondant au diagramme de bifurcation.

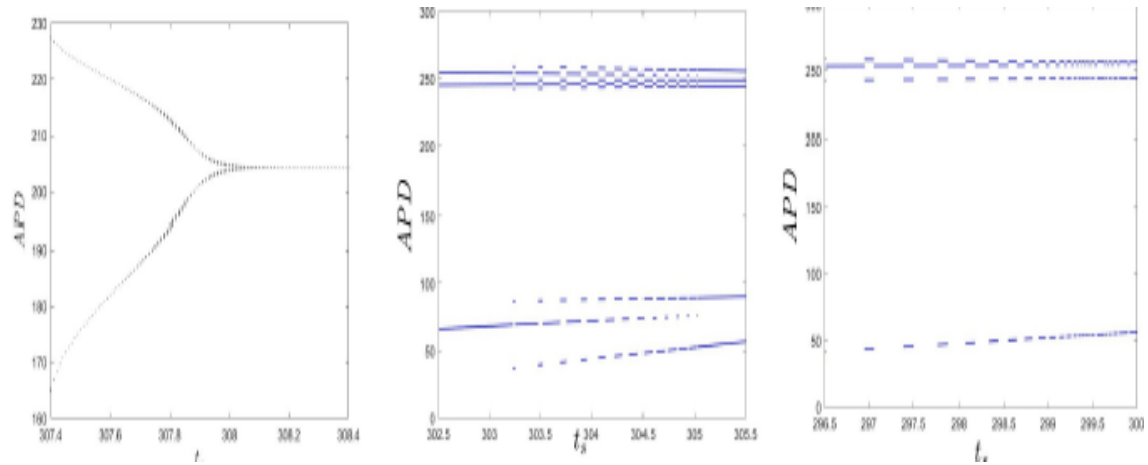


Figure 3.10 – Vue agrandie du diagramme de bifurcation : (a) Apparition du rythme 2 : 2 (alternance) à $t_s = 308msec$, (b) Dans l'intervalle $t_s = 303.2 - 304.9msec$, on observe une alternance entre les rythmes 5 : 5 et 3 : 3, (c) Dans l'intervalle $t_s = 296.4 - 300.1msec$, alternance entre les rythmes 2 : 1 et 3 : 3.

L'ordre v , qui exprime l'effet de mémoire, est choisi de manière à ce que le système présente une dynamique riche et intéressante tout en restant proche du

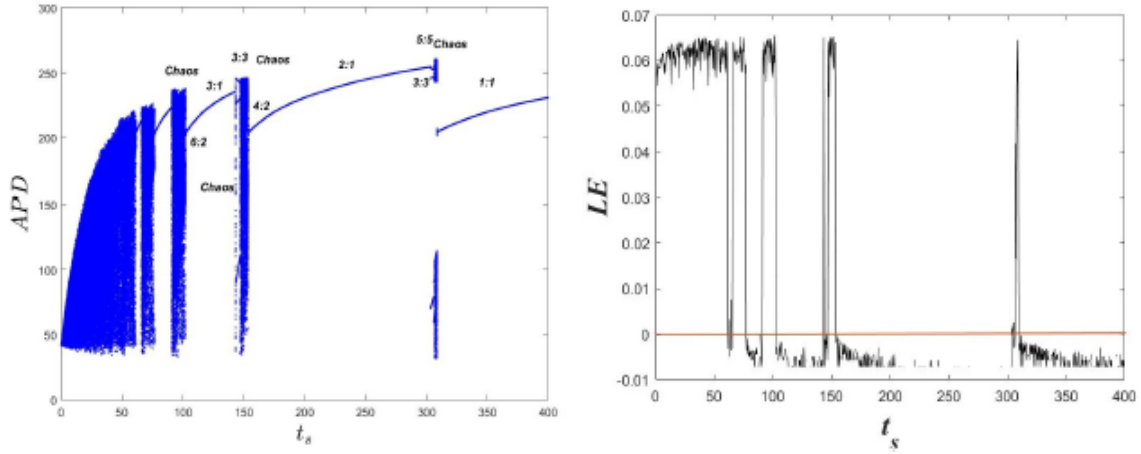


Figure 3.11 – (a)) Diagramme de bifurcation dans le plan (APD vs t_s) pour $v = 0,92$, $APD_1 = 250msec$ et t_s variant de 0 à 400. (b) Exposants de Lyapunov correspondant au diagramme de bifurcation.

cas entier $v = 1$. Après plusieurs essais, le choix s'est porté sur la valeur $v = 0.92$. Nous étudions l'effet de la diminution de la fréquence de stimulation t_s de la valeur $400msec$ à $40msec$, avec un incrément égal à 0.1 et une itération à partir de la condition initiale APD_1 égale à $200msec$. On obtient ainsi le diagramme de bifurcation présenté à la Figure 3.9 (a).

En analysant le diagramme de bifurcation, on observe que pour $t_s = 400msec$, l'état stationnaire stable, ou orbite de période 1, à $APD_n = APD_{n+1} = 230,8msec$, est atteint asymptotiquement. Cet état stationnaire correspond à un rythme normal 1 : 1. Lorsque t_s diminue, l'orbite de période 1 devient instable et est remplacée par une orbite périodique numérique stable de période 2 (OPN) correspondant à un rythme 2 : 2, ou alternance (alternans). Cette OPN de période 2 provient d'une bifurcation par doublement de période qui se produit à $t_s = 308msec$ (Figure 3.10 (a)).

En diminuant encore t_s , l'OPN de période 2 croît en amplitude jusqu'à ce qu'à $t_s = 307msec$, elle disparaisse brutalement et soit remplacée par un rythme irrégulier. Il est important de rappeler que l'alternance précède souvent la phase d'induction d'arythmies ventriculaires malignes et peut constituer le premier

signe d'une cascade de doublements de période menant finalement à une dynamique chaotique, laquelle correspondrait à une fibrillation ventriculaire. Dans notre cas, et contrairement à ce qui a été observé dans le système d'ordre entier, le chaos apparaît soudainement, sans être précédé par une quelconque bifurcation par doublement de période.

Lorsque nous réduisons le paramètre t_s jusqu'à la valeur de $307msec$, nous observons la formation d'une OPN de période 5 correspondant à un rythme 5 : 5, qui persiste jusqu'à $t_s = 304.9msec$, valeur à laquelle apparaît une OPN de période 3 correspondant à un rythme 3 : 3. Les rythmes 3 : 3 et 5 : 5 vont alterner sur l'intervalle $303.2msec \leq t_s \leq 304.9msec$, comme on le voit à la Figure 3.10 (b), où l'on remarque que la longueur de l'intervalle du rythme 3 : 3 augmente tandis que celle du rythme 5 : 5 diminue jusqu'à disparaître à $t_s = 303.2msec$, laissant subsister uniquement le rythme 3 : 3.

En diminuant encore t_s , le même scénario se répète sur l'intervalle $296.4 msec \leq t_s \leq 300.1 msec$, mais cette fois avec une alternance entre les rythmes 3 : 3 et 2 : 1 (voir Figure 3.10 (c)).

Lorsque t_s est encore réduit, on observe une bifurcation par doublement de période à $t_s = 154msec$, où le rythme 2 : 1 est remplacé par un rythme 4 : 2, après quoi un rythme irrégulier apparaît pour des valeurs de t_s comprises entre $142.1msec$ et $153.6msec$. Dans cet intervalle chaotique, on observe une fenêtre de période 3 pour $143.4 msec \leq t_s \leq 146.9 msec$.

En réduisant t_s dans la plage $142.1 msec > t_s \geq 40 msec$, par pas de $0.1msec$, on observe à plusieurs reprises des transitions de la forme

$$n : 1 \rightarrow 2n : 2 \rightarrow \text{irrégulier} \rightarrow n + 1 : 1$$

avec $3 \leq n \leq 5$.

Ainsi, pour la condition initiale $APD_1 = 200msec$, on peut résumer la dynamique

du système par la séquence suivante :

$sequence = \{1 : 1 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 5 : 5 \rightarrow 3 : 3 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 3 : 3 \rightarrow chaos \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 6 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 8 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 5 : 1 \rightarrow 10 : 2 \rightarrow chaostotal\}$

Pour une condition initiale $APD_1 = 250msec$, on obtient le diagramme de bifurcation présenté à la Figure 3.11 (a). On remarque l'absence d'alternance (rythme 2 : 2) et l'apparition soudaine du chaos lors d'une bifurcation par collision de bord. Nous avons donc la séquence de bifurcations suivante :

$sequence = \{1 : 1 \rightarrow chaos \rightarrow 5 : 5 \rightarrow 3 : 3 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 3 : 3 \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 6 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 8 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 5 : 1 \rightarrow 10 : 2 \rightarrow chaostotal\}$

3.5 Le comportement régulier et chaotique de l'APD à mémoire de longueur fixe

De cela, nous obtenons l'idée de savoir si le changement de la longueur de la mémoire a également un effet sur la dynamique, c'est-à-dire si une longueur fixe est définie pour la mémoire F de telle sorte que de l'état initial x_0 jusqu'à l'état x_F est calculé à partir de tous les états précédents, mais à partir de l'état x_{F+1} jusqu'à l'état ultime x_n est calculé sur la base de F états précédents uniquement.

Sur la base de l'application (3.5), notre proposition est une application de durée du potentiel d'action cardiaque fractionnaire unidimensionnel à mémoire de longueur fixe comme suit [13] :

$$\begin{cases} x_n = x_0 + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)} \left(a - B_1 \exp\left(\frac{x_{j-1}-nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{x_{j-1}-nt_s}{\tau_2}\right) - x_{j-1} \right) & \text{if } n \leq F, \\ x_n = \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{j=n-F}^n \frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)} \left(a - B_1 \exp\left(\frac{x_{j-1}-nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{x_{j-1}-nt_s}{\tau_2}\right) - x_{j-1} \right) & \text{else,} \end{cases} \quad (3.6)$$

où F représente la longueur de la mémoire.

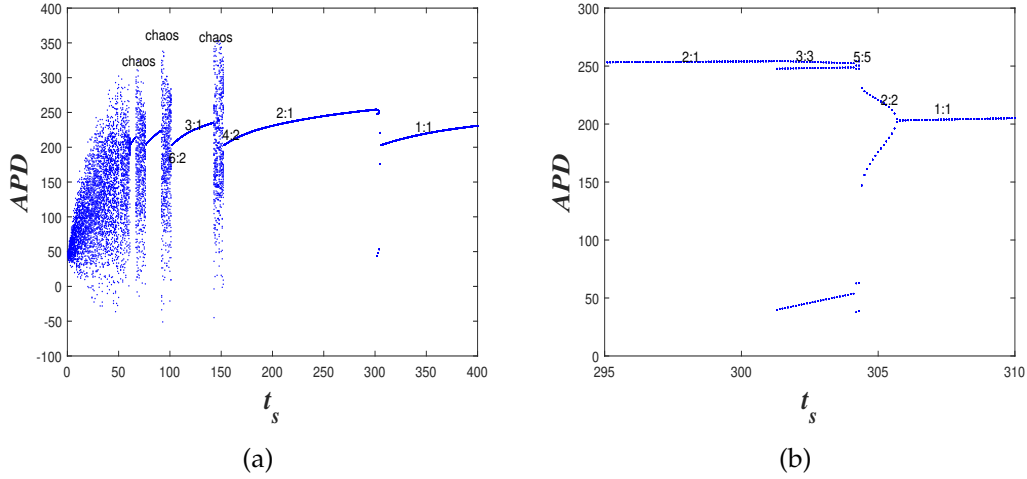


Figure 3.12 – (a) Diagramme de bifurcation illustrant la présence d'un rythme d'alternance et d'une voie de doublement de période vers le chaos dans le modèle de mappage (4.3), avec une longueur de mémoire de $F = 2800$, un ordre fractionnaire de $\nu = 0,95$ et une condition initiale de $APD_1 = 260msec$, (b) Vue focalisée sur le comportement de l'alternance dans la plage $295msec - 310msec$.

En analysant le diagramme de bifurcation, nous constatons que lorsque $t_s = 400msec$, le système se stabilise sur une orbite de période 1, indiquant un rythme 1 : 1 stable. Lorsque t_s diminue, l'orbite de période -1 devient instable et est remplacée par une orbite stable de période -2 correspondant à un rythme 2 : 2 ou alternance. Cet état de période -2 émerge d'une bifurcation à doublement de période à $t_s = 305,7msec$.

Lorsque nous réduisons le paramètre t_s jusqu'à la valeur $304,2msec$ nous observons la formation d'une période-5 qui correspond à un rythme 5 : 5 et dure jusqu'à $t_s = 303msec$, point auquel un état de période-3 correspondant à un rythme 3 : 3 apparaît.

En réduisant le paramètre t_s jusqu'à la valeur de $301msec$ On observe la forma-

tion d'une période -1 correspondant à un rythme $2 : 1$. À mesure que t_s diminue, une bifurcation de doublement de période se produit à $t_s = 152,5ms$, où le rythme $2 : 1$ passe à un rythme $4 : 2$. Ensuite, un rythme irrégulier apparaît lorsque t_s atteint une valeur de $152,1ms$.

À mesure que t_s est progressivement réduit de $142msec$ à $40msec$ par incréments de $0,1msec$, des transitions se produisent de manière répétée dans la séquence $\{n : 1 \rightarrow 2n : 2 \rightarrow irrégulier \rightarrow n + 1 : 1\}$, avec n allant de 3 à 5.

Par conséquent, lorsque l'état initial est $APD_1 = 260msec$, la dynamique du système peut être décrite par la séquence suivante :

$sequence = \{1 : 1 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow 5 : 5 \rightarrow 3 : 3 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 6 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 8 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 5 : 1 \rightarrow 10 : 2 \rightarrow chaostotal\}$.

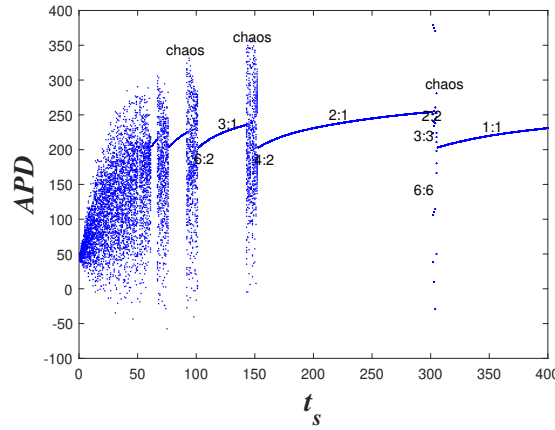


Figure 3.13 – Diagramme de bifurcation pour le modèle de cartographie cardiaque (4.3) (APD vs t_s), illustrant la dynamique de la durée du potentiel d'action avec une longueur de mémoire fixe de $F = 2800$, un ordre fractionnaire de $v = 0,95$ et une condition initiale de $APD_1 = 200msec$.

Avec une condition initiale de $APD_1 = 200ms$, le diagramme de bifurcation représenté sur la figure (3.13) est obtenu. On observe l'absence d'alternance (rythme $2 : 2$) et l'apparition soudaine d'un chaos lors d'une bifurcation par collision de bord. Par conséquent, on peut identifier la séquence de bifurcations

suivante :

$sequence = \{1 : 1 \rightarrow chaos \rightarrow 2 : 2 \rightarrow 3 : 3 \rightarrow 6 : 6 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 6 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 8 : 2 \rightarrow chaos \rightarrow 5 : 1 \rightarrow 10 : 2 \rightarrow chaostotal\}$ La bista-
bilité est observée dans l'application d'ordre fractionnaire de l'APD à mémoire de
longueur fixe, où les itérations convergent vers l'une des deux orbites en fonction
de la condition initiale sélectionnée,

- Bistabilité entre deux rythmes 2 : 2 et *chaos* à $304,4msec < t_s \leq 305,7msec$.
- Bistabilité entre deux rythmes 5 : 5 et 3 : 3 à $303msec < t_s \leq 304,2msec$.
- Bistabilité entre deux rythmes 3 : 3 et 6 : 6 à $301msec < t_s \leq 303msec$.

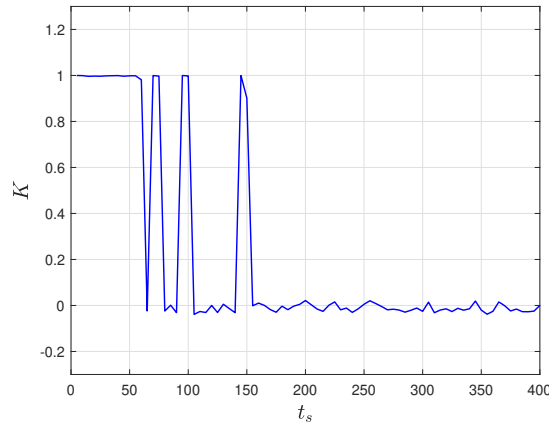


Figure 3.14 – Représentation du test 0-1 pour l'application (4.3) avec une longueur de mémoire fixe $F = 2800$, un ordre fractionnaire $v = 0,95$ et une condition initiale $APD_1 = 260msec$.

La figure 3.14 représente les résultats du test 0 – 1 pour l'application (4.3) pour une longueur de mémoire fixe égale à $F = 2800$, un ordre fractionnaire $v = 0,95$ et une condition initiale $APD_1 = 260msec$. On constate à travers cette figure que lorsque la valeur de t_s est confinée entre $400msec$ et $155msec$, la valeur de K est proche de zéro, ce qui indique le comportement régulier de cette application (voir figure 3.15 (a)). Tandis que lorsque la valeur de t_s chute de $155msec$ à $140msec$, la valeur de K remonte à un, ce qui indique le comportement chaotique de cette application (voir figure 3.15 (b)). On remarque ensuite le retour de la valeur de

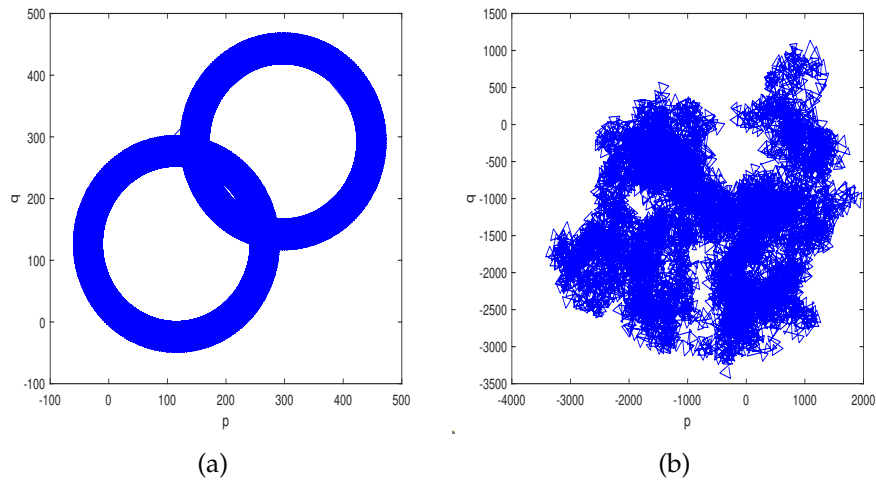


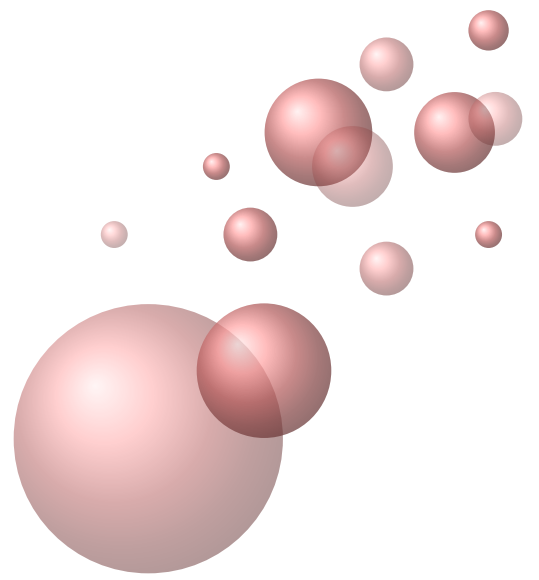
Figure 3.15 – Le test 0 – 1 pour l'application (4.3) (APD vs t_s) avec une longueur de mémoire fixe $F = 2800$, un ordre fractionnaire $v = 0,95$ et une condition initiale $APD_1 = 260 \text{ msec}$, pour : (a) $t_s = 250 \text{ msec}$, (b) $t_s = 150 \text{ msec}$.

K à zéro lorsque t_s est compris entre 140 msec et 106 msec . La convergence de K vers 1 est observée à nouveau lorsque t_s est compris entre 106 ms et 90 ms . Ensuite, la valeur de K tend vers zéro lorsque t_s est compris entre 90 ms et 80 ms . Avec la diminution continue de t_s de 80 ms à 66 ms , la valeur de K remonte jusqu'à près de 1. Cependant, lorsque $t_s = 65 \text{ ms}$, on constate que la valeur de K est proche de zéro, et avec une nouvelle diminution de t_s , la valeur de K se fixe à 1.

Ces résultats sont cohérents et confirment nos conclusions précédentes grâce au diagramme de bifurcation pour les mêmes paramètres F , v et APD_1 .

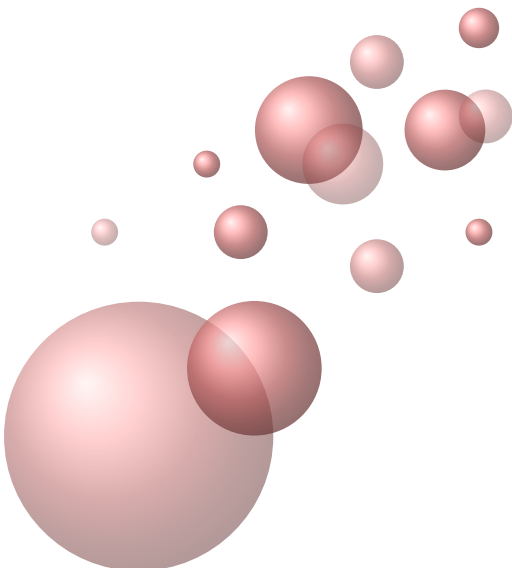
Physiologiquement, il existe un lien entre chaos et arythmogénèse. Le comportement régulier de l'APD ($K \approx 0$) correspond à un rythme cardiaque stable avec une activité électrique prévisible. Le doublement de période (alternance) (K modéré) reflète un état où l'APD alterne entre deux valeurs, connu pour être un précurseur d'arythmies dangereuses telles que la fibrillation ventriculaire. Tandis qu'un comportement chaotique de l'APD ($K \approx 1$) confirme l'apparition du chaos, qui, en physiologie cardiaque, correspond à des arythmies irrégulières et poten-

tiellement mortelles (par exemple, la fibrillation) et suggère une perte de contrôle déterministe de la régulation de l'APD, rendant plus difficiles la prédiction et le contrôle des réponses cardiaques à la stimulation.



CHAPITRE 4

Dynamique de l'application de Gauss fractionnaire à mémoire de longueur
fixe



CHAPITRE 4

DYNAMIQUE DE L'APPLICATION DE GAUSS FRACTIONNAIRE À MÉMOIRE DE LONGUEUR FIXE

4.1 Introduction

Récemment, le calcul fractionnaire discret [26, 32, 33, 46, 64] a suscité un intérêt croissant en raison de ses nombreuses applications dans divers domaines. De plus, il a été découvert que les applications complexes présentent des structures géométriques intéressantes et fascinantes. La dynamique non linéaire et le comportement chaotique des applications de Gauss fractionnaires discrètes ont été étudiés dans la littérature.

Il a été observé qu'une application de Gauss fractionnaire est plus stable que son application entière associée. La largeur des fenêtres de période [1] augmente lorsque le rang fractionnaire diminue [47]. La synchronisation des applications

de Gauss de rang entier standard et des applications de Gauss fractionnaires discrètes a également été étudiée à l'aide d'une méthode d'estimation des coefficients [49]. La dynamique non linéaire émergente et la synchronisation d'applications de Gauss de rang entier et fractionnaire appariées, présentant différentes topologies, ont été explorées dans les références [50, 52]. Cependant, une limitation importante des modèles fractionnaires classiques réside dans leur nécessité de stocker et de traiter l'historique complet du système, ce qui peut engendrer des coûts de calcul et de mémoire élevés. Ce défi devient particulièrement critique dans les simulations en temps réel ou les systèmes à grande échelle [22, 49, 54, 79].

Pour pallier ce problème, les chercheurs ont introduit des systèmes fractionnaires à mémoire fixe, où seul un nombre fini d'états passés contribue à l'état actuel. Cette approche réduit la complexité de calcul tout en préservant les principales caractéristiques dynamiques du système [4, 24, 23]. Malgré son potentiel, il existe encore un manque d'études approfondies explorant l'influence de la troncature de la mémoire sur le comportement à long terme des applications fractionnaires chaotiques, notamment en comparaison avec les systèmes fractionnaires classiques et ceux à mémoire complète.

Ce chapitre examine le comportement dynamique d'une application de Gauss fractionnaire à mémoire de longueur fixe. Nous utilisons divers outils, tels que les diagrammes de bifurcation, les exposants de Lyapunov et le test 0 – 1, pour analyser la réponse du système pour différentes valeurs des paramètres. De plus, nous menons une analyse comparative avec une application de Gauss classique afin d'évaluer l'impact de la mémoire fixe sur le désordre et les performances de calcul. Les résultats démontrent que le modèle proposé préserve la richesse de la dynamique du désordre tout en améliorant l'efficacité de calcul, ce qui en fait une approche prometteuse pour les applications pratiques où la mémoire et la vitesse sont des facteurs critiques.

4.2 Analyse du comportement de l'application de Gauss fractionnaire

En mathématiques, l'application de Gauss, également appelée application Gaussienne [47], est une application itérative non linéaire qui transforme des nombres réels en un intervalle réel à l'aide de la fonction gaussienne définie par :

$$x_{n+1} = \exp(-ax_n^2) + b, \quad (4.1)$$

où a et b sont des paramètres de bifurcation.

Cette application peut présenter un comportement chaotique, par exemple lorsque $a = 7.5$ et $b = -0.6$. Elle est également connue sous le nom « d'application de la souris » en raison de son diagramme de bifurcation pour $a = 7.5$ et b dans l'intervalle de -1 à 1 , qui ressemble à une souris, comme illustré dans la Figure 4.1.

La figure 4.1 montre le diagramme de bifurcation de l'application de Gauss (4.1)

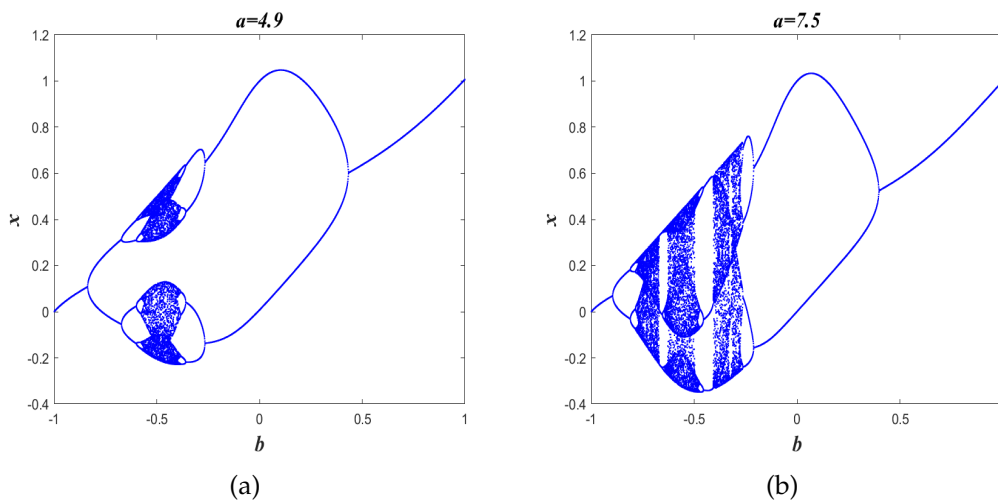


Figure 4.1 – Diagramme de bifurcation de l'application (4.1) avec $x_0 = 0$ et b dans l'intervalle de -1 à 1 , (a) $a = 4.9$ et (b) $a = 7.5$.

pour deux jeux de paramètres différents : le premier jeu est $a = 4.9$ et $b \in [-1, 1]$; le second jeu est $a = 7.5$ et $b \in [-1, 1]$.

La différence d'ordre un de l'application de Gauss peut être exprimée facilement comme suit :

$$\Delta x_n = \exp(-ax_n^2) + b - x_n. \quad (4.2)$$

En calcul fractionnaire discret, l'application de Gauss fractionnaire peut être définie comme suit :

$${}^c \Delta_q^v x_n = \exp(-ax(t-1+v)^2) + b - x(t-1+v), \quad (4.3)$$

où ${}^c \Delta_q^v$ est la différence fractionnaire au sens de Caputo et $0 < v \leq 1$ représente l'ordre de la différence.

Pour l'application de Gauss (4.3), une solution numérique explicite peut être donnée par :

$$x_n = x_0 + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)} (\exp(-ax(j-1)^2) + b - x(j-1)), \quad (4.4)$$

où x_0 est la condition initiale.

Pour $v = 1$, l'application fractionnaire discrète (4.4) se simplifie en l'application classique (4.1). Contrairement à l'application d'ordre entier (4.1), l'application fractionnaire (4.4) inclut un noyau discret qui dépend des informations passées $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$. Par conséquent, les effets de mémoire dans ces applications discrètes impliquent que leur état actuel d'évolution dépend de tous les états précédents.

La figure 4.2 montre le diagramme de bifurcation et l'exposant de Lyapunov de l'application de Gauss fractionnaire (4.4) pour deux jeux de paramètres différents : le premier jeu est $a = 4.9$, $v = 0.9$ et $b \in [-1, 1]$; le second jeu est $a = 7.5$, $v = 0.4$ et $b \in [-1, 1]$. Par exemple, pour $v = 0.4$ et $a = 7.5$, on remarque que l'application (4.4) converge vers une orbite de période 1 pour $-1 \leq b < -0.97$. La première bifurcation se produit lorsque $b = -0.97$, marquant une transition d'un point

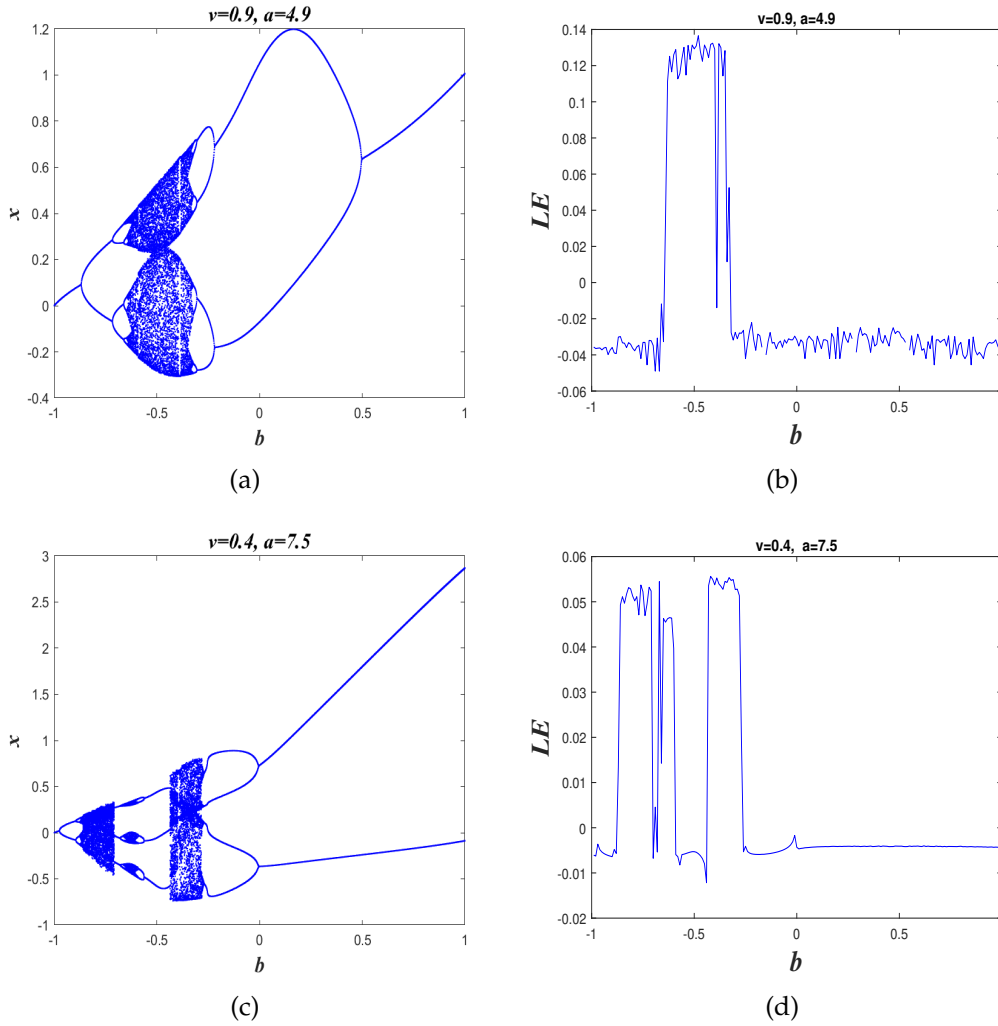


Figure 4.2 – (a) Diagramme de bifurcation de l'application de Gauss fractionnaire (4.4) pour $v = 0.9$, $x_0 = 0$, b dans l'intervalle de -1 à 1 et $a = 4.9$, (b) Plus grand exposant de Lyapunov de l'application de Gauss fractionnaire pour $v = 0.9$, $x_0 = 0$, b dans l'intervalle de -1 à 1 et $a = 4.9$, (c) Diagramme de bifurcation de l'application de Gauss fractionnaire (4.4) pour $v = 0.4$, $x_0 = 0$, b dans l'intervalle de -1 à 1 et $a = 7.5$, (d) Plus grand exposant de Lyapunov de l'application de Gauss fractionnaire pour $v = 0.4$, $x_0 = 0$, b dans l'intervalle de -1 à 1 et $a = 7.5$.

fixe vers une orbite de *période* -2 par bifurcation par doublement de période. La figure 4.2(d) confirme cette information, car l'exposant de Lyapunov est négatif sur l'intervalle $[-1, -0.97]$ et devient nul lorsque $b = -0.97$. L'application garde ce comportement jusqu'à $b = -0.89$, où a lieu une seconde bifurcation, passant d'une orbite de *période* -2 à une orbite de *période* -4 par doublement de période. Lorsque $b > -0.87$, l'exposant de Lyapunov devient positif, indiquant un compor-

tement chaotique de l'application sur l'intervalle $[-0.87, -0.7[$; cela est confirmé par les figures 4.2(d) et 4.2(c). Quand $-0.7 \leq b < -0.67$, l'application converge vers une orbite de *priode* -3 , ce qui confirme à nouveau l'existence d'un comportement chaotique pour certaines valeurs de b [60]. Une autre bifurcation se produit lorsque $b = -0.67$, marquant la transition d'une orbite de *priode* -3 à une orbite de *priode* -6 par doublement de période.

Un retour au comportement chaotique de l'application (4.4) est observé de $b = -0.66$ à $b = -0.59$, comme le montre la figure 4.2(c). Ensuite, pour $-0.59 \leq b < -0.56$, l'application (4.4) converge vers une orbite de *priode* -6 pour la seconde fois. Après cela, elle converge à nouveau vers une orbite de *priode* -3 dans l'intervalle $[-0.56, -0.43[$. Encore une fois, dans l'intervalle $[-0.43, -0.27[$, l'application (4.4) présente un comportement chaotique. Sur l'intervalle $[-0.27, 0[$, elle converge vers une orbite de *priode* -4 à nouveau. Enfin, pour $0 \leq b \leq 1$, l'application (4.4) converge vers une orbite de *priode* -2 pour la seconde fois.

Il convient de noter que la figure représentant l'exposant de Lyapunov de l'application (4.4) confirme tous les résultats mentionnés précédemment : l'exposant est négatif lorsque l'orbite converge vers une orbite périodique, nul au point de bifurcation, et positif lorsque la trajectoire devient chaotique.

4.3 L'application de Gauss fractionnaire à mémoire de longueur fixe

Dans les modèles classiques à ordre fractionnaire, le système présente une mémoire infinie, où tous les états passés influencent la dynamique présente avec un poids décroissant. Bien que cette caractéristique permette de capturer avec précision les effets héréditaires, elle entraîne un coût de calcul élevé ainsi que

des exigences importantes en matière de stockage mémoire, notamment lors des simulations à long terme.

Pour surmonter ces limitations, cette étude adopte une approche à mémoire de longueur fixe, qui restreint l'influence du passé à une fenêtre finie d'étapes précédentes. Cette simplification réduit non seulement la complexité computationnelle, mais reflète également une hypothèse plus réaliste dans de nombreux systèmes physiques et biologiques, où les événements très anciens ont une influence négligeable.

De plus, l'utilisation d'une mémoire de longueur fixe améliore la stabilité numérique et l'efficacité de l'implémentation, ce qui la rend plus adaptée aux applications en temps réel ou aux systèmes avec des contraintes matérielles. En revanche, les schémas à mémoire infinie peuvent souffrir de l'accumulation d'erreurs numériques et d'exigences mémoire peu pratiques sur de longues périodes de simulation.

Par conséquent, l'adoption de l'application de Gauss fractionnaire à mémoire de longueur fixe permet de trouver un équilibre entre la prise en compte des effets mémoriels essentiels et le maintien de simulations efficaces et maîtrisables. Cette caractéristique est particulièrement avantageuse dans la modélisation chaotique, où la rapidité de calcul et la sensibilité aux conditions initiales sont cruciales. L'équation suivante définit l'application de Gauss fractionnaire à mémoire de longueur fixe [12] :

$$\begin{cases} x_n = x_0 + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)} (\exp(-ax(j-1)^2) + b - x(j-1)) & \text{si } n \leq F \\ x_n = \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{j=n-F}^n \frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)} (\exp(-ax(j-1)^2) + b - x(j-1)) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.5)$$

où F représente la longueur de la mémoire..

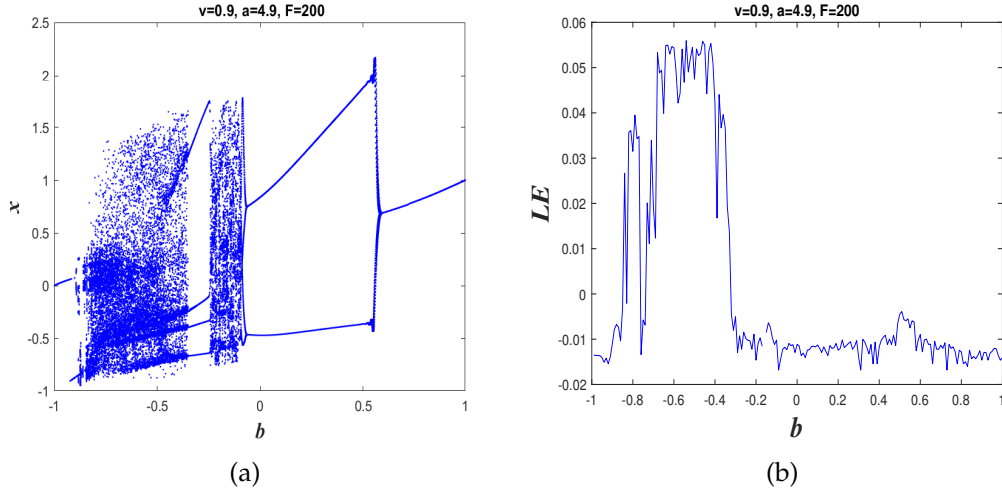


Figure 4.3 – (a) Diagramme de bifurcation de l'application de Gauss fractionnaire avec mémoire de longueur fixe pour $F = 200$, $v = 0.9$, $x_0 = 0$, $a = 4.9$ et b dans l'intervalle de -1 à 1 , (b) Le plus grand exposant de Lyapunov pour $F = 200$, $v = 0.9$, $x_0 = 0$, $a = 4.9$ et b dans l'intervalle de -1 à 1 .

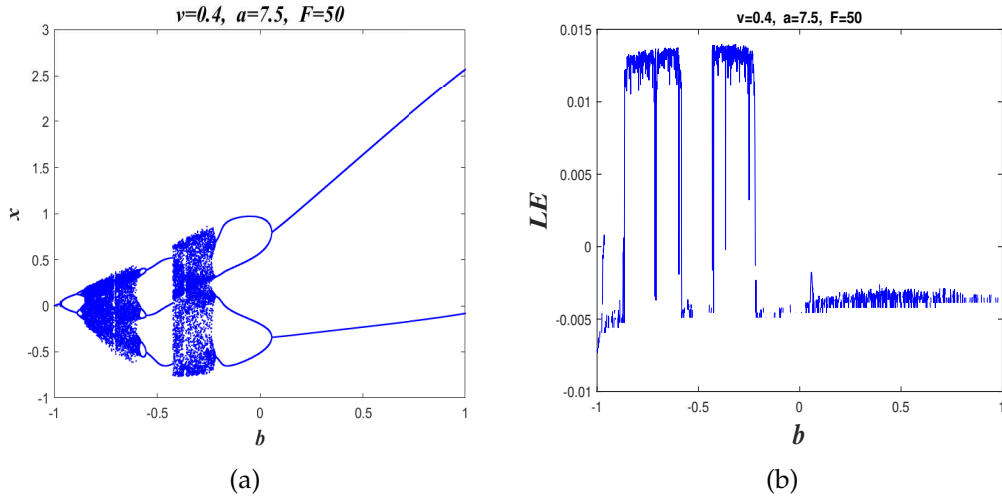


Figure 4.4 – (a) Diagramme de bifurcation de l'application de Gauss fractionnaire avec mémoire de longueur fixe pour $F = 50$, $v = 0.4$, $x_0 = 0$, $a = 7.5$ et b dans l'intervalle de -1 à 1 , (b) Le plus grand exposant de Lyapunov pour $F = 50$, $v = 0.4$, $x_0 = 0$, $a = 7.5$ et b dans l'intervalle de -1 à 1 .

Dans les systèmes classiques à ordre fractionnaire, l'ensemble de l'historique des états passés contribue à l'état actuel, avec des effets de mémoire régis par un noyau en loi de puissance. Cette mémoire à long terme est essentielle pour représenter fidèlement les dynamiques héréditaires et complexes. Cependant, elle engendre des exigences computationnelles élevées ainsi qu'une sensibilité accrue

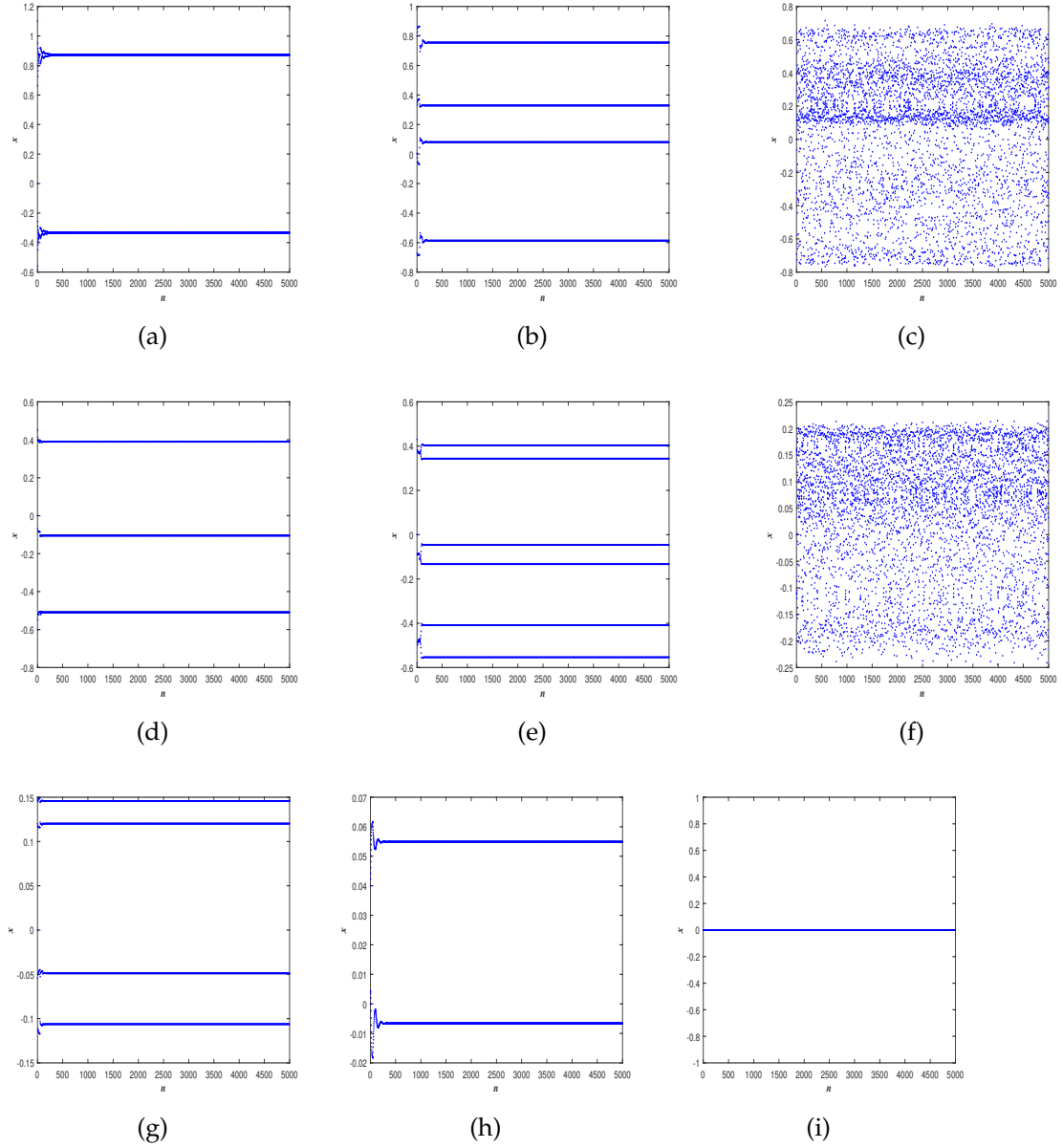


Figure 4.5 – Solutions de l'application de Gauss fractionnaire avec une longueur de mémoire fixe pour $F = 50, v = 0.4, x_0 = 0$: (a) $b = 0.1$, (b) $b = -0.2$, (c) $b = -0.4$, (d) $b = -0.55$, (e) $b = -0.57$, (f) $b = -0.84$, (g) $b = -0.88$, (h) $b = -0.96$ et (i) $b = -1$

aux erreurs numériques lors de simulations prolongées. L'introduction d'une mémoire de longueur fixe, notée F , permet de limiter l'influence des états passés aux seules F itérations les plus récentes. Cette simplification soulève des questions fondamentales quant à l'impact de cette coupure sur la nature du chaos.

Qualitativement, la réduction de mémoire peut atténuer les corrélations à longue

portée, ce qui pourrait diminuer la profondeur de la complexité chaotique ou modifier la séquence des bifurcations. Toutefois, comme le montrent les figures 4.3 et 4.4, l'application de Gauss fractionnaire à mémoire de longueur fixe continue de présenter les caractéristiques typiques des systèmes chaotiques (notamment les scénarios de doublement de période menant au chaos, les fenêtres de périodicité et les zones à exposants de Lyapunov positifs), malgré sa mémoire finie.

La préservation de ces structures suggère que le comportement non linéaire essentiel demeure intact, même en ignorant les états les plus anciens.

Quantitativement, nos simulations montrent qu'en comparant l'application fractionnaire à mémoire complète (4.4) avec sa version à mémoire de longueur fixe (4.5), les points critiques de bifurcation et les plages de comportement chaotique ne subissent que de légers décalages, et les valeurs des plus grands exposants de Lyapunov restent dans des gammes comparables.

Par ailleurs, le gain numérique est considérable. Le tableau 4.1 montre que le temps de calcul est réduit jusqu'à 99 lorsque la mémoire est fixée, sans compromettre la capacité du modèle à simuler le chaos. Ce compromis entre efficacité computationnelle et fidélité de la mémoire est particulièrement avantageux dans les systèmes embarqués ou en temps réel, où les ressources sont limitées.

Nombre d'itérations	GF	GFMLF
1000	0.920305	0.205349
5000	91.580199	0.264022
10000	732.813417	0.267275
20000	13121.494701	0.304672

Tableau 4.1 – Le temps nécessaire pour obtenir la trajectoire de l'application de Gauss fractionnaire (GF) et de l'application de Gauss fractionnaire avec mémoire de longueur fixe (GFMLF) lorsque $F = 50$.

Les figures 4.3 et 4.4 montrent le diagramme de bifurcation et le plus grand exposant de Lyapunov d'une application de Gauss fractionnaire à mémoire de longueur fixe, pour deux ensembles de paramètres différents : le premier ensemble

est défini par $a = 4.9$, $v = 0.9$, $F = 200$ et $b \in [-1, 1]$; le second ensemble est défini par $a = 7.5$, $v = 0.4$, $F = 50$ et $b \in [-1, 1]$.

En comparant la figure 4.2, qui représente le diagramme de bifurcation de l'application de Gauss fractionnaire, avec la figure 4.4, qui représente le diagramme de bifurcation de l'application de Gauss fractionnaire avec mémoire de longueur fixe, nous obtenons les observations et résultats suivants :

Chaque caractéristique présente dans le diagramme de bifurcation à ordre fractionnaire complet peut également être observée dans les diagrammes de bifurcation à ordre fractionnaire avec mémoire de longueur fixe.

On constate une augmentation de la période des bifurcations, ce qui mène à l'apparition du chaos dans tous les diagrammes de bifurcation.

À partir du diagramme de bifurcation présenté dans la figure 4.4 pour l'application de Gauss fractionnaire avec une mémoire de longueur fixe $F = 50$. On observe que pour $-1 \leq b < -0.97$, l'application (4.5) converge vers une orbite de *priode* -1 . La première bifurcation a lieu lorsque $b = -0.97$, marquant la transition d'un point fixe vers une orbite de *priode* -2 via une bifurcation par doublement de période. La figure 4.4(b) confirme cette information, car l'exposant de Lyapunov est négatif sur l'intervalle $-1 \leq b < -0.97$ et devient nul lorsque $b = -0.97$.

L'application conserve le même comportement jusqu'à $b = -0.88$, où a lieu une seconde bifurcation, passant d'une orbite de *priode* -2 à une orbite de *priode* -4 , toujours via un doublement de période. Lorsque $-0.88 < b < -0.58$, l'exposant de Lyapunov devient positif, ce qui indique que l'application devient chaotique sur cet intervalle; cela est confirmé par les figures 4.4(b) et 4.4(a).

Lorsque $-0.58 \leq b < -0.55$, l'application converge vers une orbite de *priode* -6 , ce qui confirme encore une fois l'existence de comportements chaotiques pour

certaines valeurs de b . Une autre bifurcation survient à $b = -0.55$, marquant le passage d'une orbite de *periode* -6 à une orbite de *periode* -3 .

Un retour au comportement chaotique de l'application (4.5) est observé de $b = -0.42$ jusqu'à $b = -0.21$, comme le montre la figure 4.4(a). Ensuite, pour $-0.21 \leq b < -0.06$, l'application (4.5) converge vers une orbite de *periode* -4 pour la deuxième fois.

Enfin, l'application (4.5) converge de nouveau vers une orbite de période 2 dans l'intervalle $0.06 \leq b < 1$.

La figure affichant l'exposant de Lyapunov pour l'application (4.5) valide toutes les conclusions précédentes. Elle montre que l'exposant de Lyapunov est négatif lorsque l'orbite de l'application (4.5) tend vers un état périodique, nul au point de bifurcation, et positif lorsque la trajectoire passe à un comportement chaotique.

Les valeurs des paramètres utilisées dans nos simulations, telles que $a = 4.9$, $a = 7.5$ et $b \in [-1, 1]$, ont été choisies en raison de leur capacité bien connue à produire des dynamiques riches dans l'application classique de Gauss. Les ordres fractionnaires $v = 0.4$ et $v = 0.9$ ont été sélectionnés pour comparer les effets d'une mémoire forte avec un comportement quasi-entier. Les longueurs de mémoire $F = 50$ et $F = 200$ ont été utilisées pour évaluer l'impact de la troncature tout en maintenant un faible coût computationnel.

En comparant les diagrammes de bifurcation de l'application de Gauss fractionnaire et de sa version avec mémoire de longueur fixe, nous pouvons conclure que la longueur de la mémoire a un effet significatif sur la dynamique de l'application. Nous avons mentionné dans la première section que le calcul numérique du système fractionnaire discret beaucoup plus coûteux en temps que celui du même système à mémoire de longueur fixe. C'est ce que nous allons démontrer dans

cette partie à l'aide d'un tableau résumant qui résume les résultats du temps nécessaire pour obtenir la trajectoire de l'application de Gauss fractionnaire et de sa version à mémoire de longueur fixe.

Pour cela, nous avons utilisé le logiciel MATLAB, exécuté sur un processeur i5 à 2.40 GHz avec 16 Go de RAM (mémoire vive).

Le tableau 4.1 compare le temps de calcul requis par l'application de Gauss fractionnaire selon deux stratégies de mémoire : mémoire infinie et mémoire de longueur fixe. Les résultats montrent clairement que l'approche à mémoire fixe réduit de manière significative la charge computationnelle.

Cette amélioration devient encore plus marquée à mesure que l'horizon de simulation s'allonge, ce qui met en évidence la scalabilité de la méthode proposée. En limitant le nombre d'états passés pris en compte à chaque itération, le modèle à mémoire fixe évite les calculs redondants tout en conservant les dynamiques essentielles liées à la mémoire du système.

Une telle réduction du temps d'exécution est cruciale pour les applications en temps réel et les simulations de longue durée, notamment dans les environnements contraints en ressources matérielles ou les systèmes à grande échelle. Ainsi, l'utilisation d'une mémoire fixe améliore non seulement l'efficacité numérique, mais rend également la modélisation fractionnaire des systèmes chaotiques plus pratique et accessible.

À partir de la figure 4.6, nous avons remarqué qu'un changement de l'état initial entraîne une interruption rapide dans les diagrammes de bifurcation, aussi bien pour l'ordre entier que pour l'ordre fractionnaire. Ce phénomène a également été observé dans le diagramme de bifurcation de l'application fractionnaire à mémoire de longueur fixe (figure 4.6) lors du changement de la valeur initiale de $x_0 = 0$ à $x_0 = 0,9$.

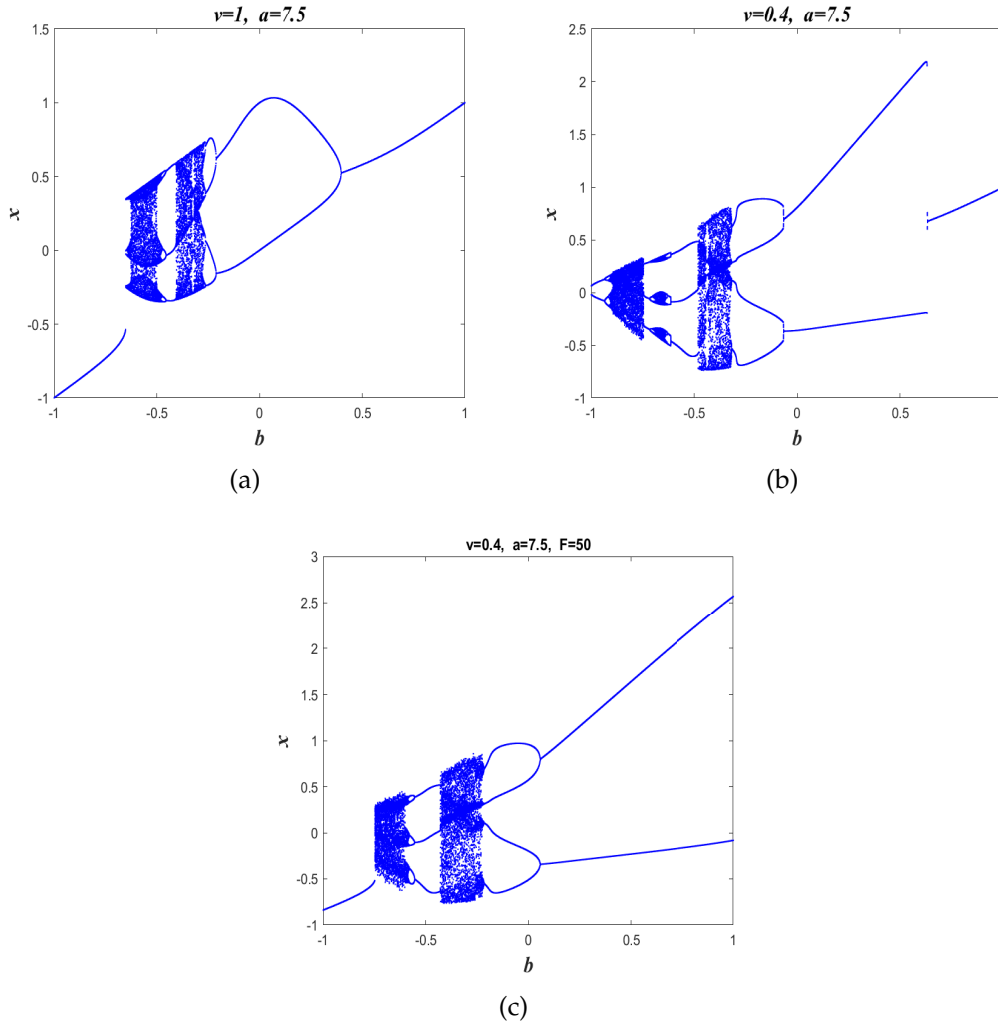


Figure 4.6 – Diagramme de bifurcation de l'application de Gauss fractionnaire avec la condition initiale $x_0 = 0.9$ et b dans l'intervalle $[-1, 1]$, où : (a) pour $v = 1$; (b) pour $v = 0.4$; et (c) pour $v = 0.4$ avec une mémoire fixe de longueur $F = 50$.

4.4 Comportement chaotique de l'application Gauss fractionnaire à mémoire de longueur fixe

Dans cette section, nous appliquons le test 0 – 1 afin d'examiner la dynamique de l'application de Gauss fractionnaire à mémoire de longueur fixe. Cette approche vise à confirmer la présence d'un comportement chaotique à l'aide de la méthode de corrélation et de divers indicateurs permettant de caractériser la nature des trajectoires dans le plan (p_c, q_c) ainsi que d'évaluer le taux de croissance

asymptotique k .

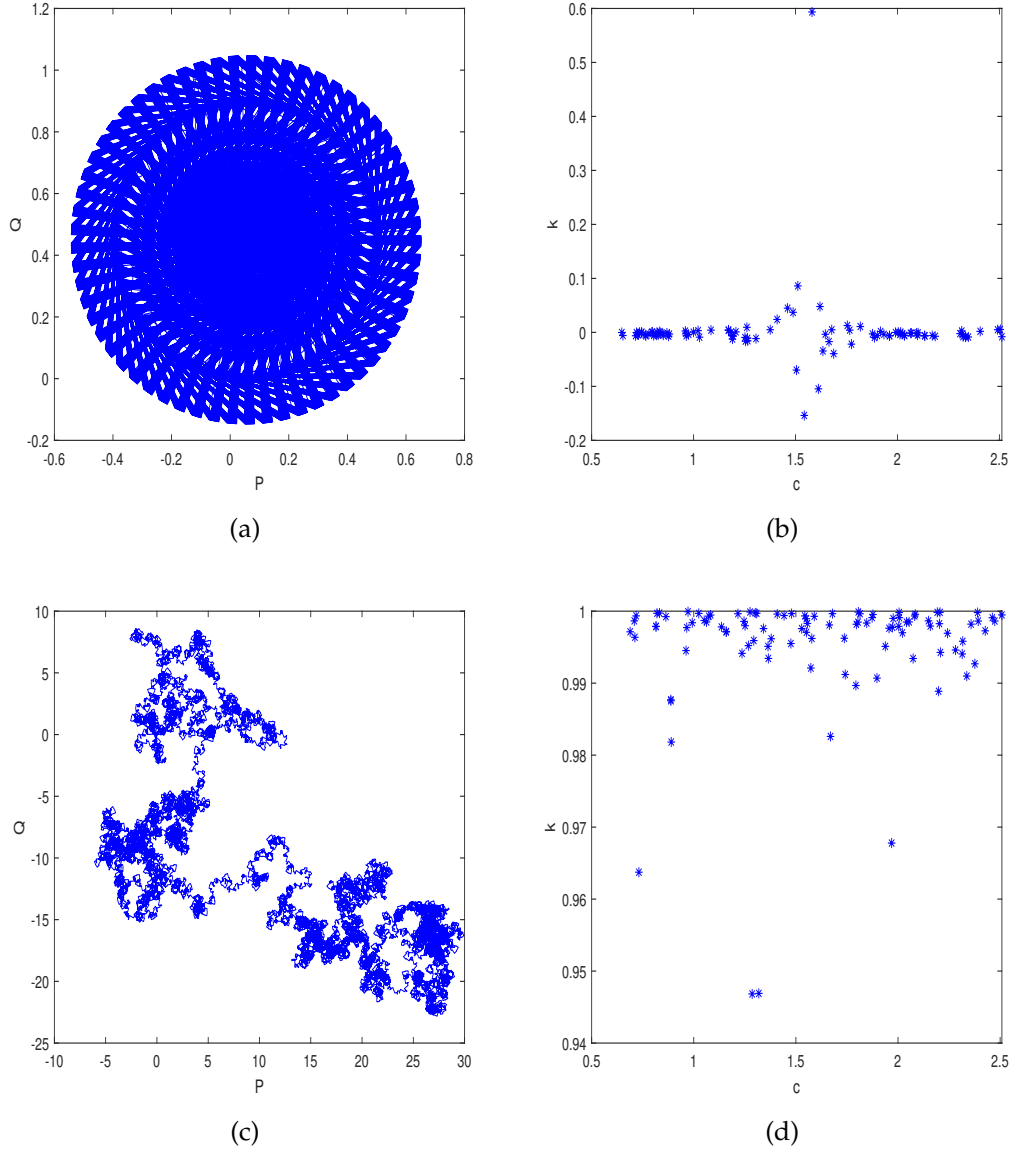


Figure 4.7 – Le test 0 – 1 de l’application de Gauss fractionnaire avec une mémoire fixe de longueur $F = 50$, $v = 0.4$, $x_0 = 0$, (a) (b) pour $b = 0$ et (c), (d) pour $b = -0.7$.

La figure 4.7 représente le résultat du test 0 – 1 appliqué à l’application de Gauss fractionnaire avec $v = 0.4$, $F = 50$ et $x_0 = 0$.

Nous avons effectué le test 0-1 pour deux valeurs différentes de b .

Lorsque $b = 0$, la trajectoire de p_c et q_c dans le plan $(p_c - q_c)$ reste bornée (voir figure 4.7(a)). On remarque également que la valeur de k est très proche de 0 (voir figure 4.7(b)), ce qui traduit un comportement non chaotique de l’application de Gauss

fractionnaire à mémoire de longueur fixe.

En revanche, lorsque $b = -0.7$, la trajectoire de p_c et q_c dans le plan $(p_c - q_c)$ est similaire à un mouvement brownien (voir figure 4.7(c)). On observe aussi que la valeur de k est très proche de 1 (voir figure 4.7(d)), ce qui indique un comportement chaotique de l'application de Gauss fractionnaire à mémoire de longueur fixe.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Cette thèse établit un cadre d'étude du chaos et de la bifurcation des systèmes dynamiques discrets d'ordre fractionnaire. Ses objectifs sont divisés en deux parties principales :

Dans la première partie, nous avons étudié un modèle de cartographie unidimensionnelle de la durée du potentiel d'action cardiaque avec une mémoire longue, exprimée par le coefficient de différence d'ordre fractionnaire de Caputo. Une caractéristique essentielle de ce modèle est que l'état actuel dépend de tous les états précédents. De plus, nous avons étudié un modèle de cartographie unidimensionnelle de la durée du potentiel d'action cardiaque utilisant la définition de différence d'ordre fractionnaire de Caputo avec une longueur de mémoire fixe. Autrement dit, si une longueur de mémoire fixe F est attribuée, l'état initial x_0 jusqu'à l'état x_F est calculé à partir de tous les états précédents, mais de l'état x_{F+1} à l'état final x_n , le calcul est effectué uniquement à partir des états précédents, en utilisant F .

Nous avons obtenu les résultats suivants : dans le premier cas, c'est-à-dire le modèle *APD* d'ordre fractionnaire (mémoire longue), les différentes dynamiques ont été décrites en fonction de la fréquence de stimulation t_s . Cette représentation

présente un comportement qualitativement différent de celui du modèle sans mémoire proposé dans [30] et du modèle de mémoire à court terme de [35]. Notons que pour l'APD à $t_s = 200ms$, le désordre apparaît plus tôt que dans ces modèles (à $t_s = 307ms$) et n'est précédé d'aucune bifurcation par doublement de période, mais survient après la séquence.

Séquence de fragments : $1 : 1 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow chaos$.

Cependant, pour une PDA de $250ms$, on observe l'absence d'alternance du rythme ($2 : 2$) et le chaos apparaît brusquement lors d'une bifurcation par collision de frontière.

Séquence de fragments : $1 : 1 \rightarrow chaos$.

De plus, l'alternance des rythmes $5 : 5$ et $3 : 3$

(séquence de fragments : $5 : 5 \xrightarrow{\text{alternance}} 3 : 3$)

n'a été mentionnée dans aucun modèle précédent.

En outre, de nouvelles bistabilités, absentes du modèle sans mémoire (11) et du modèle à mémoire courte (13), apparaissent.

- Bistabilité entre deux rythmes $2 : 2$ et *chaos*.
- Bistabilité entre deux rythmes $5 : 5$ et $3 : 3$.
- Bistabilité entre deux rythmes $3 : 3$ et $2 : 1$.
- Bistabilité entre deux rythmes *chaos* et $3 : 1$.

Nous avons vérifié les résultats obtenus à l'aide du l'exposant de Lyapunov et du test 0 – 1.

Concernant le second cas, le modèle APD d'ordre fractionnaire avec une mémoire de longueur fixe, nous avons constaté que l'intégration d'une mémoire de longueur fixe induit une dynamique différente de celle du modèle de Luis et Guevara, qui ne tient pas compte des effets de mémoire. Toujours concernant le modèle APD d'ordre fractionnaire, nous avons observé que pour $APD_1 \geq 248msec$ ($APD_1 = 260msec$), après l'apparition du rythme $2 : 2$, le rythme $5 : 5$

apparaît, suivi du rythme 3 : 3, ce qui est différent de ce qui apparaissait dans les modèles précédents.

Pour $APD_1 \leq 248msec$ ($APD_1 = 200msec$), le chaos apparaît soudainement à $t_s = 305,7msec$, ce qui est plus précoce que l'apparition du chaos dans les modèles précédents. De plus, l'apparition du chaos dans notre modèle n'était pas précédée du rythme alterné 2 : 2, mais est apparue après celui-ci, en plus de l'apparition du rythme 3 : 3, suivi du rythme 6 : 6, qui est également différent de celui des modèles précédents.

Ce modèle présente également une nouvelle bistabilité, absente des modèles précédents (modèle sans mémoire et modèle à mémoire courte), telle que :

- Bistabilité entre deux rythmes 2 : 2 et *chaos* .
- Bistabilité entre deux rythmes 5 : 5 et 3 : 3 .
- Bistabilité entre deux rythmes 3 : 3 et 6 : 6 .

Pour vérifier le résultat obtenu, le test 0 – 1 est utilisé.

Dans la deuxième partie, nous avons proposé une application de Gauss fractionnaire avec mémoire de longueur fixe pour modéliser efficacement les dynamiques chaotiques. Les résultats ont montré que l'approche à mémoire fixe permet de réduire considérablement le temps de calcul tout en conservant les caractéristiques essentielles du comportement chaotique.

Contrairement aux systèmes fractionnaires traditionnels à mémoire infinie, le modèle proposé établit un équilibre entre la représentation de la mémoire et l'efficacité numérique, ce qui le rend plus adapté aux applications en temps réel ou à grande échelle.

Cependant, cette étude se limite à certains types spécifiques d'applications chaotiques et à une structure de mémoire fixe. L'influence de la variation de la longueur de mémoire, la stabilité des dynamiques à long terme, ainsi que les compromis en termes de précision nécessitent des recherches plus approfondies.

Les travaux futurs viseront à étendre ce cadre à d'autres applications fractionnaires, à explorer des stratégies de mémoire adaptative, et à appliquer le modèle à des systèmes réels tels que des séries temporelles biologiques ou économiques. De plus, une analyse théorique plus rigoureuse des propriétés de stabilité et de convergence du modèle fractionnaire à mémoire fixe permettrait d'en renforcer les bases mathématiques et l'applicabilité.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Abdelaziz, M. A., Ismail, A. I., Abdullah, F. A., & Mohd, M. H. (2018). Bifurcations and chaos in a discrete SI epidemic model with fractional order. *Advances in Difference Equations*, 2018(1), 44., 1-19. <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1481-6>
- [2] Abdeljawad, T. (2011). On Riemann and Caputo fractional differences. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(3), 1602-1611. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.03.036>
- [3] Abdelouhab, M. S. Les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires. Mémoire de magistère. Univ. Mentouri. Constantine 1, 2009.
- [4] Abdelouahab, M. S., & Hamri, N. E. (2016). The Grünwald–Letnikov fractional-order derivative with fixed memory length. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(2), 557-572. <https://doi.org/10.1007/s00009-015-0525-3>
- [5] Almatrafi, M. B., & Berkal, M. (2024). Bifurcation analysis and chaos control for fractional predator-prey model with Gompertz growth of prey population. *Modern Physics Letters B*, 2550103. <https://doi.org/10.1142/S0217984925501039>

- [6] Almatrafi, M. B., & Berkal, M. (2025). Stability and bifurcation analysis of predator-prey model with Allee effect using conformable derivatives. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 36(3), 299-316. <https://dx.doi.org/10.22436/jmcs.036.03.05>
- [7] Almatrafi, M. B., & Berkal, M. (2023). Bifurcation analysis and chaos control for prey-predator model with Allee effect. *International Journal of Analysis and Applications*, 21, 131-131. <https://dx.doi.org/10.28924/2291-8639-21-2023-131>
- [8] Anastassiou, G. A. (2011). About discrete fractional calculus with inequalities. In *Intelligent mathematics : computational analysis* 575-585.
- [9] Andronov, A. A., Vitt, A. A., & Khaikin, S. E. (1987). *Theory of Oscillators*, ed. W. Fishwick, (Mineola, NY : Dover, 1987 [1966]), 200.
- [10] Babrhoul, Y., Cherkaoui, F., El Boukari, B., Hilal, K., & Kajouni, A. (2025). Analysis and optimal control of a fractional-order SEAIR epidemic model with two-strains. *Gulf Journal of Mathematics*, 19(1), 251-284. <https://doi.org/10.56947/gjom.v19i1.2561>
- [11] Baumol, W. J., & Benhabib, J. (1989). Chaos : significance, mechanism, and economic applications. *Journal of Economic Perspectives*, 3(1), 77-105. <https://dx.doi.org/10.1257/jep.3.1.77>
- [12] Bellout, A., Bououden, R., Bouzeraa, S. E. I., & Berkal, M. (2025). A study on efficient chaotic modeling via fixed-memory length fractional Gauss maps. *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 15(4), 1310-1331. <https://doi.org/10.22067/ijnao.2025.93606.1650>
- [13] Bellout, A., Bououden, R., Houmor, T., & Berkal, M. (2025). Nonlinear dynamics and chaos in fractional-order cardiac action potential duration mapping model with fixed memory length. *Gulf Journal of Mathematics*, 19(2), 369-383. <https://doi.org/10.56947/gjom.v19i2.2765>

- [14] Berkal, M., & Almatrafi, M. B. (2023). Bifurcation and stability of two-dimensional activator-inhibitor model with fractional-order derivative. *Fractal and Fractional*, 7(5), 344. <https://doi.org/10.3390/fractalfract7050344>
- [15] Berkal, M., & Navarro, J. F. (2021). Qualitative behavior of a two-dimensional discrete-time prey-predator model. *Computational and Mathematical Methods*, 3(6), e1193.. <https://doi.org/10.1002/cmm4.1193>
- [16] Berkal, M., Navarro, J. F., Hamada, M. Y., & Semmar, B. (2025). Qualitative behavior for a discretized conformable fractional-order predator-prey model. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 1-23. <https://doi.org/10.1007/s12190-025-02413-3>
- [17] Bers, D. M. *Excitation Contraction Coupling and Cardiac Contractile Force*, The Netherlands : Kluwer Academic, Boston, 2001 .
- [18] Boudjedour, A., Batiha, I., Boucetta, S., Dalah, M., Zennir, K., & Ouannas, A. (2025). A finite difference method on uniform meshes for solving the time-space fractional advection-diffusion equation. *Gulf Journal of Mathematics*, 19(1), 156-168. <https://doi.org/10.56947/gjom.v19i1.2524>
- [19] Bououden, R., & Abdelouahab, M. S. (2018). On efficient chaotic optimization algorithm based on partition of data set in global research step. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 18(1), 42-52.
- [20] Bououden, R., & Abdelouahab, M. S. (2021). Chaotic optimization algorithm based on the modified probability density function of Lozi map. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 39, 9-22. <https://doi.org/10.5269/bspm.41668>
- [21] Bououden, R., & Abdelouahab, M.S. (2020). Chaos in new 2-d discrete mapping and its application in optimisation. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. 20(2), 144-152.

- [22] Bououden, R., Abdelouahab, M. S. & Jarad, F. (2020). Non-linear dynamics and chaos in a new 2 – D piecewise linear map and its fractional version. *Electronic Research Archive*, 28(1), 505-525.
- [23] Bourafa, S., Abdelouahab, M. S., & Lozi, R. (2021). On periodic solutions of fractional-order differential systems with a fixed length of sliding memory. *Journal of Innovative Applied Mathematics Computational Sciences*, 1(1), 64-78. <https://doi.org/10.58205/jiamcs.v1i1.6>
- [24] Bouzeraa, S. E. I., Bououden, R., & Abdelouahab, M. S. (2023). Fractional logistic map with fixed memory length. *International Journal of General Systems*, 52, 653-663. <https://doi.org/10.1080/03081079.2023.2201001>
- [25] Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II. *Geophysical journal international*, 13(5), 529-539. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x>
- [26] Chen, A., & Chen, Y. (2011). Existence of solutions to anti-periodic boundary value problem for nonlinear fractional differential equations with impulses. *Advances in Difference Equations*, 2011, 1-17. <https://doi.org/10.1155/2011/915689>
- [27] Cherubini, C., Filippi, S., Gizzi, A., & Ruiz-Baier, R. (2017). A note on stress-driven anisotropic diffusion and its role in active deformable media. *Journal of Theoretical Biology*, 430, 221-228. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2017.07.013>
- [28] Chinushi, M., Kozhevnikov, D., Caref, E. B., Restivo, M., & El-Sherif, N. (2003). Mechanism of discordant T wave alternans in the in vivo heart. *Journal of cardiovascular electrophysiology*, 14(6), 632-638. <https://doi.org/10.1046/j.1540-8167.2003.03028.x>

- [29] Dai, W., Zhou, R., Lin, Y., & Liu, Y. (2023). Lightweight cryptography for embedded systems—A survey. *Sensors*, 23(2). https://doi.org/10.1007/978-3-642-54568-9_21
- [30] Devaney, R. L. *An introduction to chaotic dynamical systems*, CRC press, 2018.
- [31] Diblík, J., Fečkan, M., & Pospíšil, M. (2015). Nonexistence of periodic solutions and S-asymptotically periodic solutions in fractional difference equations. *Applied Mathematics and Computation*, 257, 230-240. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.11.108>
- [32] Donato, C., & Grassi, G. (2008). Bifurcation and chaos in the fractional-order Chen system via a time-domain approach. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 10, 1845-1863.
- [33] Ebrahimzadeh, A., Jajarmi, A., & Baleanu, D. (2024). Enhancing water pollution management through a comprehensive fractional modeling framework and optimal control techniques. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 31(1), 48. <https://doi.org/10.1007/s44198-024-00215-y>
- [34] Elaydi, S. *An Introduction to difference equations*, 3 edition, Springer, San Antonio, 2005.
- [35] Elaydi, S. *Discrete chaos :With Applications in Science and Engineering*, 2 Edition, CRC Press, San Antonio, 2007.
- [36] Elsadany, A. A., & Matouk, A. E. (2015). Dynamical behaviors of fractional-order Lotka-Volterra predator-prey model and its discretization. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 49, 269-283. <https://doi.org/10.1007/s12190-014-0838-6>
- [37] Fulai, C., Xiannan, L., & Yong, Z. (2011). Existence results for nonlinear fractional difference equation. *Advances in Difference Equations*, 2011(1), 1-12. <https://doi:10.1155/2011/713201>

- [38] Gizzi, A., Loppini, A., Ruiz-Baier, R., Ippolito, A., Camassa, A., La Camera, A., Emmi, E., Di Perna, L., Garofalo, V., Cherubini, C., & Filippi, S. (2017). Nonlinear diffusion and thermo-electric coupling in a two-variable model of cardiac action potential. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 27(9). <https://doi.org/10.1063/1.4999610>
- [39] Glass, L., & Mackey, M. C. (1988). *From clocks to chaos : The rhythms of life*. Princeton University Press.
- [40] Gleick, J. (1987) *Chaos : Making a New Science*. Viking Penguin, New York.
- [41] Goldberger, A. L., & West, B. J. (1987). Fractals in physiology and medicine. *The Yale journal of biology and medicine*, 60(5), 421.
- [42] Gottwald, G. A., & Melbourne, I. (2004). A new test for chaos in deterministic systems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 460(2042), 603-611. <https://doi.org/10.1098/rspa.2003.1183>
- [43] Guevara, M. R., Glass, L., & Shrier, A. (1981). Phase locking, period-doubling bifurcations, and irregular dynamics in periodically stimulated cardiac cells. *Science*, 214(4527), 1350-1353. <https://doi.org/10.1126/science.731369>
- [44] Guevara, M. R., Ward, G., Shrier, A., & Glass, L. (1984). *Computers in Cardiology*. IEEE Computer Society, Silver Spring, MD, 167.
- [45] Guel-Cortez, A. J., & Kim, E. J. (2020). A fractional-order model of the cardiac function. In *Chaotic Modeling and Simulation International Conference* (pp. 273-285). Cham : Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-70795-8_21
- [46] Gümüş, M., & Teklu, S. W. (2025) Cost-benefit and dynamical investigation of a fractional-order corruption population dynamical system. *Fractal & Fractional*, 9(4).

- [47] Hilborn, R. C. Chaos and nonlinear dynamics : an introduction for scientists and engineers, Oxford Univ. Press, New York, 2011.
- [48] Holm, M. T. The Theory of Discrete Fractional Calculus : Development and Application (2011). Dissertations, Theses, and Student Research Papers in Mathematics.
- [49] Hu, T. (2014). Discrete chaos in fractional Henon map. Applied Mathematics, 5, 2243-2248. <https://doi.org/10.4236/am.2014.5152218>
- [50] Jan, C., & Nechvatel, L. (2018). Local bifurcations and chaos in the fractional Rossler system. International Journal of Bifurcation & Chaos, 28, 1850-098. <https://doi.org/10.1142/S0218127418500980>
- [51] Janse, M. J. (1992). Is there chaos in cardiology?. British Heart Journal, 67(1), 3. <https://doi.org/10.1136/hrt.67.1.3>
- [52] Jianping, S., He, K., & Fang, H. (2022). Chaos, Hopf bifurcation and control of a fractional-order delay financial system. Mathematics & Computers in Simulation, 194, 348-364. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.12.009>
- [53] Karma, A. (1994). Electrical alternans and spiral wave breakup in cardiac tissue. Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 4(3), 461-472. <https://doi.org/10.1063/1.166024>
- [54] Khennaoui, A. A., Ouannas, A., Bendoukha, S., Wang, X., & Pham, V. T. (2018). On chaos in the fractional-order discrete-time unified system and its control synchronization. Entropy, 20, 530-540. <https://doi.org/10.3390/e20070530>
- [55] Kome, C., & Yazlik, Y. (2024). Stability, bifurcation analysis and chaos control in a discrete predator-prey system incorporating prey immigration. Journal of Applied Mathematics and Computing, 70(5), 5213-5247. <https://doi.org/10.1007/s12190-024-02230-0>

- [56] Kumar, A., Bahuguna, D., & Kumar, S. (2024). Complex dynamic behaviour on fractional predator-prey model of mathematical ecology. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 70(6), 5319-5357. <https://doi.org/10.1007/s12190-024-02171-8>
- [57] Landaw, J., Garfinkel, A., Weiss, J. N., & Qu, Z. (2017). Memory-induced chaos in cardiac excitation. *Physical review letters*, 118(13), 138101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.138101>
- [58] Leenhardt, A., Sebag, C., EXTRAMIANA, F., & ALGALARRONDO, V. (2012). *L'essentiel en rythmologie*. Flammarion medecine-sciences.
- [59] Lewis, T. J., & Guevara, M. R. (1990). Chaotic dynamics in an ionic model of the propagated cardiac action potential. *Journal of theoretical biology*, 146(3), 407-432. [https://doi.org/10.1016/S0022-5193\(05\)80750-7](https://doi.org/10.1016/S0022-5193(05)80750-7)
- [60] Li, T. Y., & Ismail, J. A. (1975). Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*, 82, 985–992.
- [61] Li, T. Y., & Yorke, J. A. (1975). Period three implies chaos. *The american mathematical monthly*, 82(10), 985-992. <https://doi.org/10.1080/00029890.1975.11994008>
- [62] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2), 130-141. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2)
- [63] Magin, R.L. (2006) *Fractional Calculus in Bioengineering*. Begell House Publishers, Redding.
- [64] Miller, K. S., & Ross, B. (1989, May). Fractional difference calculus. In *Proceedings of the international symposium on univalent functions, fractional calculus and their applications*.
- [65] Mozyrska, D., & Girejko, E. (2013). Overview of fractional h-difference operators. In *Advances in harmonic analysis and operator theory : the*

- stefan samko anniversary volume (pp. 253-268). Basel : Springer Basel.
https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0516-2_14
- [66] Nolasco, J. B., & Dahlen, R. W. (1968). A graphic method for the study of alternation in cardiac action potentials. *Journal of applied physiology*, 25(2), 191-196. <https://doi.org/10.1152/jappl.1968.25.2.191>
- [67] Otani, N. F. (2017). Theory of the development of alternans in the heart during controlled diastolic interval pacing. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 27(9). <https://doi.org/10.1063/1.5003250>
- [68] Otani, N. F., & Gilmour Jr, R. F. (1997). Memory models for the electrical properties of local cardiac systems. *Journal of Theoretical Biology*, 187(3), 409-436. <https://doi.org/10.1006/jtbi.1997.0447>
- [69] Peters, E. E. (1996). *Chaos and order in the capital markets : a new view of cycles, prices, and market volatility*. John Wiley & Sons.
- [70] Qu, Z., Garfinkel, A., Chen, P. S., & Weiss, J. N. (2000). Mechanisms of discordant alternans and induction of reentry in simulated cardiac tissue. *Circulation*, 102(14), 1664-1670. <https://doi.org/10.1161/01.CIR.102.14.1664>
- [71] Qu, Z., Weiss, J. N., & Garfinkel, A. (1999). Cardiac electrical restitution properties and stability of reentrant spiral waves : a simulation study. *American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology*, 276(1), H269-H283. <https://doi.org/10.1152/ajpheart.1999.276.1.H269>
- [72] Schöll, E., & Schuster, H. G. *Handbook of Chaos Control*, 2 edition , WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2008.
- [73] Stenzinger, R. V., & Tragtenberg, M. H. R. (2022). Cardiac reentry modeled by spatiotemporal chaos in a coupled map lattice. *The European Physical Journal Special Topics*, 231(5), 847-858. <https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-022-00473-1>

- [74] Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Westview Press. <https://doi.org/10.1201/9780429492563>
- [75] Sun, H., & Chang, Y. (2015). Fractional-order modeling of action potential duration restitution in cardiac tissue. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 27(1-3), 1-11.
- [76] Wang, X., et al. (2024). Impact of Ionic Accumulation on APD Dynamics in Pathological Conditions. *Journal of Cardiac Electrophysiology*, 35(4), 567-578.
- [77] Weiss, J. N., Garfinkel, A., Karagueuzian, H. S., Chen, P. S., & Qu, Z. (2010). Early afterdepolarizations and cardiac arrhythmias. *Heart rhythm*, 7(12), 1891-1899. <https://doi.org/10.1016/j.hrthm.2010.09.017>
- [78] Weiss, J. N., Garfinkel, A., Karagueuzian, H. S., Chen, P. S., & Qu, Z. (2010). Early afterdepolarizations and cardiac arrhythmias. *Heart rhythm*, 7(12), 1891-1899. <https://doi.org/10.1016/j.hrthm.2010.09.017>
- [79] Wu, G. C., & Baleanu, D. (2014). Discrete fractional logistic map and its chaos. *Nonlinear Dynamics*, 75, 283-287. <https://doi.org/10.1007/s11071-013-1065-7>
- [80] Zhao, Y., et al. (2022). Advancements in Space-Fractional Models for Cardiac Wave Propagation. *Computational Biology*, 29(3), 345-359.

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier le chaos et la bifurcation dans certains systèmes dynamiques discrets fractionnaires, en mettant l'accent sur l'effet du calcul fractionnaire et de la longueur de mémoire sur le comportement dynamique des systèmes non linéaires. Sur la base du calcul fractionnaire discret, un modèle APD fractionnaire, un modèle APD fractionnaire à longueur de mémoire fixe, ainsi qu'un modèle gaussien fractionnaire à longueur de mémoire fixe ont été proposés.

Le comportement dynamique de ces modèles proposés a été analysé à l'aide de diagrammes de bifurcation, des exposants de Lyapunov et du test $0-1$, afin de détecter le chaos dans ces modèles.

Les résultats ont montré que les modèles fractionnaires à longueur de mémoire fixe surpassent les modèles fractionnaires classiques en termes de réduction du temps nécessaire pour obtenir des solutions numériques, ce qui les rend plus efficaces sur le plan computationnel.

Mots-clés :

Systèmes dynamiques, Chaos, Longueur de mémoire fixe, Fibrillation ventriculaire, Arythmie cardiaque.

Abstract

The objective of this thesis is to study chaos and bifurcation in certain discrete fractional dynamical systems, with a focus on the effect of fractional calculus and memory length on the dynamic behavior of nonlinear systems. Based on discrete fractional calculus, a fractional APD model, a fractional APD model with fixed memory length, as well as a fractional Gaussian model with fixed memory length, have been proposed.

The dynamic behavior of these proposed models has been analyzed using bifurcation diagrams, Lyapunov exponents, and the 0–1 test in order to detect chaos in these models.

The results have shown that fractional models with fixed memory length outperform classical fractional models in terms of reducing the time required to obtain numerical solutions, making them more computationally efficient.

Keywords:

Dynamical systems, Chaos, Fixed memory length, Ventricular fibrillation, Cardiac arrhythmia.

الملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة الفوضى و التشعب في بعض الأنظمة الديناميكية المنفصلة الكسرية، مع التركيز على تأثير الحساب الكسري وطول الذاكرة في السلوك الديناميكي للأنظمة غير الخطية. وبالإعتماد على الحساب الكسري المنفصل، تم إقتراح نموذج APD الكسري، ونموذج APD الكسري مع الطول الثابت للذاكرة، بالإضافة إلى نموذج غاوس الكسري مع الطول الثابت للذاكرة.

وقد تم تحليل السلوك الديناميكي لهذه النماذج المقترحة بإستخدام مخططات التشعب، وأسس ليابونوف، وإختبار 0-1، وذلك من أجل الكشف عن الفوضى في هذه النماذج المقترحة.

أظهرت النتائج أن النماذج الكسرية ذات الطول الثابت للذاكرة تتفوق على النماذج الكسرية التقليدية من حيث تقليل الزمن اللازم للحصول على الحلول العددية، مما يجعلها أكثر كفاءة من الناحية الحسابية.

الكلمات المفتاحية:

الانظمة الديناميكية، الفوضى، الطول الثابت للذاكرة، الرجفان البطيني، عدم انتظام ضربات القلب.