

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université  
Abdelhafid Boussouf – Mila



جامعة  
عبد الحفيظ بوالصوف - ميلة

Institut: Mathématiques et Sciences Informatiques  
Arrêté N ° : .....  
Numéro d'inscription : M98/2021

Département : Mathématiques  
Domaine : Mathématiques  
Spécialité: Mathématiques et application

[www.centre-univ-mila.dz](http://www.centre-univ-mila.dz)

# Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme  
de Doctorat LMD

## Equation de transport-diffusion par approximation à schéma explicite

Présentée par : Chettouh Ahlem

**Membres du jury :**

|                               |      |                          |                                       |
|-------------------------------|------|--------------------------|---------------------------------------|
| Abdelouahab<br>Mohammed-Salah | Prof | Université de Mila       | Président                             |
| Fujita Yashima<br>Hisao       | Prof | ENSM de Sidi<br>Abdallah | Directeur de<br>thèse                 |
| Halim Yacine                  | Prof | Université de Mila       | Examineur                             |
| Laouira Widad                 | MCA  | Université de Mila       | Examineur                             |
| Chellouf Yassmine             | MCA  | Université de Mila       | Examineur                             |
| Bezia Abdelhamid              | MCA  | ENSM de Sidi<br>Abdallah | Examineur                             |
| Bellour Azzeddine             | Prof | ENS Constantine          | Invité<br>-Co-directione<br>de thèse- |

Année universitaire : 2025/2026

---

## RÉSUMÉ

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'étude des équations de transport-diffusion, qui jouent un rôle fondamental dans la modélisation de divers phénomènes physiques, biologiques et environnementaux.

L'originalité de cette thèse se divise en deux études principales. La première est consacrée à l'étude du comportement asymptotique de l'équation de Lotka-Volterra dans un cadre élargi incluant l'effet de déplacement et l'effet de diffusion c'est-à-dire l'étude asymptotique pour un système d'équations de transport-diffusion décrivant l'évolution des populations de proies et de prédateurs avec leurs déplacements et leur diffusion, dans un domaine périodique dans  $\mathbb{R}$ . Nous y établissons des résultats sur la bornitude de la solution de cette équation et son logarithme, ainsi que la convergence uniforme de la solution de l'équation par rapport aux variables temporelles et spatiales vers la solution stationnaire lorsque la solution converge vers la solution stationnaire en valeur moyenne. En nous appuyant sur l'estimation  $L^2$  de la fonctionnelle de Lyapunov bien connue, et en particulier l'estimation de la croissance ponctuelle de la solution par l'application de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. La seconde concerne l'étude numérique d'un système d'équations de transport-diffusion reformulé en système d'équations intégro-différentielles de Volterra de seconde espèce, pour lequel nous proposons un schéma explicite efficace basé sur l'utilisation des polynômes de Taylor. La convergence de la méthode est analysée, démontrant que la méthode fournit des résultats fiables et précis. Afin de valider l'efficacité de l'approche, des exemples numériques sont présentés, comparant les solutions obtenues avec les solutions exactes pour confirmer les estimations théoriques et illustrer la précision et la stabilité de la méthode.

Cette thèse propose à la fois des avancées théoriques et des développements numériques, qui contribuent à une meilleure compréhension des systèmes de transport-diffusion et ouvrent la voie à des extensions vers des modèles non linéaires plus complexes.

**Mots-clés :** Equation de Lotka-Volterra ; Transport ; Diffusion ; Comportement asymptotique ; exemples numériques.

---

## ABSTRACT

This thesis deals with the study of the transport-diffusion equations, which play a fundamental role in modeling various physical, biological, and environmental phenomena.

The originality of this thesis is divided into two main studies.

The first is devoted to the study of the asymptotic behavior of the Lotka-Volterra equation in an extended framework that includes the effects of displacement and diffusion, i.e., the asymptotic study of a system of transport-diffusion equations describing the evolution of prey and predator populations with their displacement and diffusion in a periodic domain in  $\mathbb{R}$ . We establish results on the boundedness of the solutions of this equation and its logarithm, as well as on the uniform convergence of the solution of the equation with respect to the temporal and spatial variables to the stationary solution when the solution converges to the stationary solution in mean value. Based on the well-known  $L^2$  estimate of the Lyapunov functional, and in particular the estimation of the pointwise growth of the solution by applying the fundamental solution of the heat equation.

The second concerns the numerical study of a system of transport-diffusion equations reformulated as a system of Volterra integro-differential equations of the second kind, for which we propose an efficient explicit scheme based on the use of Taylor polynomials. The convergence of the method is analyzed, demonstrating that the method provides reliable and accurate results. To validate the effectiveness of the approach, numerical examples are presented, comparing the solutions obtained with the exact solutions to confirm the theoretical estimates and illustrate the accuracy and stability of the method.

This thesis proposes both theoretical advances and numerical developments, which contribute to a better understanding of transport-diffusion systems and pave the way for extensions to more complex nonlinear models.

**Key-words :** Lotka-Volterra equation ; Transport ; Diffusion ; Asymptotic behavior, Numerical examples.

# ملخص

تندرج هذه الأطروحة في إطار دراسة معادلات نقل-انتشار، والتي تلعب دوراً أساسياً في نمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية والبيولوجية والبيئية.

تتجلى أصالة هذه الأطروحة في تقسيمها إلى دراستين رئيسيتين؛ حيث تتناول الأولى دراسة السلوك التقاربي لمعادلة لوتكا-فولتيرا ضمن إطار موسع يشمل النقل والانتشار في آن واحد، أي دراسة السلوك التقاربي لجملة معادلاتي نقل-انتشار التي تصف تطور مجتمعات المفترس والفريسة مع أخذ تنقلاتها وانتشارها في الحسبان، وذلك ضمن مجال دوري من  $R$ . نُثبت في هذا الإطار نتائج تتعلق بكون حلول هذه المعادلة و لوغاريتماتها محدودة، كما نبرهن على التقارب المنتظم لحل المعادلة بالنسبة للمتغيرين الزمني والمكاني نحو الحل المستقر، وذلك عندما تتقارب الحلول في القيمة المتوسطة نحو الحل المستقر. وقد اعتمدنا في ذلك على تقدير  $L^2$  لدالة ليابونوف -Lyapunov- المعروفة، ولا سيما تقدير النمو الموضعي للحل بالاستعانة بالحل الأساسي لمعادلة الحرارة. أما الثانية فتتعلق بالدراسة العددية لجملة معادلات النقل-الانتشار، والذي أعيدت صياغته في شكل نظام من معادلات فولتيرا التكاملية-التفاضلية من الصنف الثاني. وقد اقترحنا له مخططاً صريحاً فعالاً يعتمد على استعمال كثيرات حدود تايلور. أظهرت نتائج تحليل تقارب هذه الطريقة أنها توفر نتائج موثوقة ودقيقة. ولغرض التحقق من فعالية هذه المقاربة، قُدمت أمثلة عددية تمت فيها مقارنة الحلول المتحصّل عليها مع الحلول الدقيقة، وذلك لتأكيد التقديرات النظرية وإبراز دقة واستقرار الطريقة.

تقدم هذه الأطروحة في آن واحد إسهامات نظرية وتطويرات عددية، تسهم في فهم أفضل لأنظمة النقل-الانتشار، وتفتح المجال نحو امتدادات إلى نماذج غير خطية أكثر تعقيداً.

**الكلمات المفتاحية:** معادلة لوتكا-فولتيرا، نقل، انتشار، سلوك تقاربي، أمثلة عددية.

---

## REMERCIEMENTS

*Je tiens tout d'abord à remercier Allah de m'avoir donné la force, le courage et la patience pour réaliser ce travail qui est l'aboutissement de plusieurs années d'efforts soutenus et son achèvement n'aurait pas été possible sans l'aide généreuse et le soutien indéfectible de nombreuses personnes.*

*Je voudrais aussi remercier mes enseignants, depuis mes premières années d'études jusqu'à aujourd'hui. Chacun d'eux, par son savoir et son dévouement, a laissé une empreinte qui m'a guidée dans mon parcours et m'a donné le goût de la recherche et en particulier à mon directeur de thèse, le Professeur HISAO FUJITA YASHIMA de l'École Normale Supérieure de Mathématiques de Sidi Abdallah, pour son encadrement qui n'a jamais tardé à m'orienter et m'encourager afin de donner le meilleur de moi-même, ainsi que pour sa confiance et ses conseils toujours bienveillants. Ses encouragements et sa disponibilité ont été une source précieuse de motivation dans les moments de doute, ainsi qu'à ma co-directeur de thèse, le Professeur BELLOUR AZZEDDINE de l'École Normale Supérieure de Constantine, qui a accepté d'assurer la co-direction de ce travail. Ses encouragements, son ses conseils avisés ont représenté pour moi un*

*appui précieux.*

*Je n'oublie pas Dr. LAIB HAFIDHA , pour notre collaboration fructueuse, pour ses remarques constructives et pour le soutien précieux qu'elle m'a apporté durant ce travail.*

*À mes collègues et amis, merci pour les échanges, les discussions et la complicité qui ont rendu ce chemin plus léger et plus humain.*

*Mes remerciements les plus chaleureux et les plus vifs s'adressent aux membres de jury, d'avoir accepté d'évaluer ce travail.*

*Enfin, mes pensées les plus profondes vont à ma famille. À mes parents, pour leur amour inconditionnel et leurs sacrifices silencieux. À mes proches et amis, pour leur présence rassurante et leurs encouragements sincères.*

*À toutes celles et ceux qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à ce parcours, je souhaite dire simplement : merci du fond du cœur.*

*À mes chers parents, source de tendresse et d'affection,  
À mes chers frères et soeurs,  
À toute ma famille,  
À mon directeur de thèse, en reconnaissance des efforts et de  
l'encadrement apportés à la réalisation de ce travail,  
À mes professeurs éminents qui ont contribué à ma formation  
scientifique,  
À mon université qui a offert le cadre académique et de  
recherche,  
À toutes les personnes ayant contribué, directement ou  
indirectement, à l'achèvement de cette thèse,  
Je dédie ce modeste travail.*

*Ahlem*

---

## TABLE DES MATIÈRES

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Remerciements</b>  | <b>v</b>  |
| <b>Introduction générale</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1 Systèmes d'équations de transport-diffusion</b>  | <b>4</b>  |
| 1.1 Rappels sur les équations paraboliques . . . . .  | 4         |
| 1.1.1 Équation parabolique linéaire ou semi-linéaire du second ordre . . . . .                              | 4         |
| 1.1.2 Solution fondamentale de l'équation de la chaleur . . . . .   | 6         |
| 1.1.3 Principe du maximum . . . . .   | 9         |
| 1.1.4 Équation parabolique des espaces de Sobolev . . . . .   | 12        |
| 1.2 Équation de transport-diffusion et système . . . . .  | 18        |
| 1.3 Dynamique de populations avec des déplacements et diffusion . . . . .                                   | 21        |
| 1.4 Calcul numérique pour les systèmes d'équations de transport-diffusion . . . . .                         | 25        |
| 1.4.1 Rappels sur les équations intégro-différentielles . . . . .   | 26        |
| 1.4.2 Espace des splines polynomiales . . . . .   | 27        |
| 1.4.3 Méthode de collocation basée sur les pôlynomes de Taylor . . . . .                                    | 28        |
| 1.4.4 Résultats auxiliaires . . . . .   | 29        |
| <b>2 Comportement asymptotique de la solution de l'équation</b>   | <b>30</b> |
| 2.1 Introduction aux problématiques de l'équation de Lotka-Volterra avec déplacement et diffusion . . . . . | 30        |
| 2.2 Motivation et quelques exemples numériques . . . . .  | 32        |
| 2.3 Position du problème et résultat préliminaire . . . . .   | 35        |
| 2.4 Résultat principal . . . . .  | 37        |
| 2.5 Démonstration de la proposition 2.4.1 . . . . .   | 38        |
| 2.6 Démonstration du Théorème 2.4.1 . . . . .   | 42        |
| 2.7 Conclusion . . . . .  | 49        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>3</b> | <b>Résolution numérique des systèmes d'équations de transport-diffusion</b>                      | <b>50</b> |
| 3.1      | Introduction à la résolution numérique des systèmes d'équations de transport-diffusion . . . . . | 50        |
| 3.2      | Position du Problème . . . . .   | 52        |
| 3.3      | Description de la méthode . . . . .  | 53        |
| 3.4      | Analyse de la convergence et de l'erreur . . . . .   | 59        |
| 3.5      | Exemples numériques . . . . .  | 67        |
| 3.6      | Conclusion . . . . .   | 80        |
|          | <b>Conclusion générale</b>   | <b>82</b> |

---

## TABLE DES FIGURES

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Solution du système d'équations (2.5) en un point où se produit l'amplification et en un point où se produit la contraction. . . . .   | 34 |
| 2.2 | Les trajectoires de la solution du système d'équations (2.5) sur le plan de phase en un point où se produit l'amplification et en un point où se produit la contraction. . . . . | 34 |
| 3.1 | La représentation graphique de la fonction erreur absolue de l'exemple 3.5.1 pour $p = 2, 3$ , et pour $(N, M) = (5, 10)$ . . . . .  | 68 |
| 3.2 | La représentation graphique de la fonction erreur absolue de l'exemple 3.5.2 . .   | 71 |
| 3.3 | La représentation graphique de la fonction erreur absolue de l'exemple 3.5.3 pour $p = 2, 3$ , et pour $(N, M) = (10, 20)$ . . . . .   | 73 |
| 3.4 | La représentation graphique de la fonction erreur absolue de l'exemple 3.5.4 . .   | 75 |
| 3.5 | La représentation graphique de la fonction erreur absolue de l'exemple 3.5.5 pour $p = 2, 3$ , et pour $(N, M) = (10, 20)$ . . . . .   | 77 |
| 3.6 | La représentation graphique de la fonction erreur absolue de l'exemple 3.5.6 . .   | 81 |

---

## LISTE DES TABLEAUX

|      |  |    |
|------|--|----|
| 3.1  | Comparaisons de l'erreur absolu pour l'exemple 3.5.1 . . . . .                                       | 68 |
| 3.2  | Comparaisons de l'erreur absolu pour l'exemple 3.5.2 . . . . .                                       | 70 |
| 3.3  | L'ordre de convergence expérimental pour l'exemple 3.5.2 . . . . .                                   | 70 |
| 3.4  | Comparaisons de l'erreur absolu pour l'exemple 3.5.3 . . . . .                                       | 72 |
| 3.5  | Comparaison de l'erreur absolu pour $p = 2$ pour l'exemple 3.5.4 . . . . .                           | 74 |
| 3.6  | Comparaison de l'erreur absolu pour $p = 3$ pour l'exemple 3.5.4 . . . . .                           | 74 |
| 3.7  | Comparaison de l'erreur absolu pour l'exemple 3.5.5 . . . . .  | 77 |
| 3.8  | Comparaison de l'erreur absolu pour $P = 2$ et $(N, M) = (5, 5)$ pour l'exemple<br>3.5.6 . . . . .   | 78 |
| 3.9  | Comparaison de l'erreur absolu pour $P = 2$ et $(N, M) = (10, 10)$ pour l'exemple<br>3.5.6 . . . . . | 79 |
| 3.10 | Comparaison de l'erreur absolu pour $P = 3$ et $(N, M) = (5, 5)$ pour l'exemple<br>3.5.6 . . . . .   | 79 |
| 3.11 | Comparaison de l'erreur absolu pour $P = 3$ et $(N, M) = (10, 10)$ pour l'exemple<br>3.5.6 . . . . . | 80 |

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'équation de transport-diffusion est une équation aux dérivées partielles du second ordre, de type parabolique. Sa forme générale peut s'écrire comme suit :

$$\partial_t u(t, x) + \nabla \cdot (v(t, x)u(t, x)) - \kappa \Delta u(t, x) = f, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n,$$

ou

$$\partial_t u(t, x) + v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) - \kappa \Delta u(t, x) = f, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n.$$

Elle est largement utilisée pour décrire divers phénomènes de transport, qui correspondent au déplacement d'une quantité sous l'effet d'un champ de vitesse, et de diffusion, qui reflète la tendance naturelle des particules ou des grandeurs à s'homogénéiser dans l'espace en réponse à des gradients de concentration. Ces phénomènes constituent des mécanismes fondamentaux dans la modélisation mathématique de nombreux processus naturels et technologiques. On les retrouve dans plusieurs domaines, tels que la physique, la chimie, la biologie et les sciences de l'environnement. En physique, l'équation de transport-diffusion se réduit au modèle de la chaleur, utilisé pour décrire la propagation de la température dans un corps solide ou dans un fluide [25, 52]. En chimie, elle sert à modéliser la dispersion d'un soluté dans un solvant comme la diffusion du sel dans l'eau. Les ions se déplacent par diffusion, et un écoulement éventuel ajoute un transport convectif [26]. En biologie, elle permet d'analyser la dynamique des populations et la propagation d'agents pathogènes comme les équations de type Lotka–Volterra avec diffusion telles que les systèmes proie prédateur, en tenant compte à la fois des dynamiques locales et des mouvements spatiaux [32, 33]. En sciences de l'environnement, elle est appliquée à l'étude du transport et de la diffusion des polluants dans l'air ou dans l'eau comme la dispersion de la fumée des usines dans l'atmosphère, qui combine le transport advectif par le vent et la diffusion moléculaire dans l'air [37]. L'étude de cette équation a fait l'objet de nombreux travaux antérieurs sur le plan théorique [54, 55] et sur le plan numérique, voir par exemple [3, 27, 41, 46]. Dans ce cadre, récemment le professeur H. Fujita Yashima et ses collaborateurs ont développé une méthode basée sur l'approximation

“à schéma explicite” avec la solution fondamentale de l’équation de la chaleur et la transition réalisant le transport, voir par exemple [1, 23, 54, 55].

Cependant, se limiter à une équation scalaire de transport-diffusion est souvent insuffisant. Dans la réalité, les grandeurs n’évoluent pas isolément mais interagissent entre elles. Par exemple, en biologie, l’étude des interactions de type proie-prédateur en présence de l’effet de transport et de diffusion conduit naturellement à la modélisation par des systèmes d’équations couplées, généralement non linéaires, où la dynamique de chaque espèce dépend à la fois de sa croissance propre et des effets de l’interaction. Le passage d’une équation unique à une formulation vectorielle reflète donc mieux la réalité et ouvre la voie à une analyse plus riche, mais aussi plus difficile. Dans ce cadre, le modèle de Lotka–Volterra, enrichi par des termes de diffusion, constitue un outil fondamental pour décrire et analyser la dynamique spatio-temporelle des populations en interaction. Introduit par Lotka (1925) et Volterra (1926), il a depuis suscité de nombreux travaux qui l’ont généralisé et approfondi, notamment ceux de Rothe [53], qui a étudié le cas unidimensionnels aux limites périodiques et a démontré la convergence uniforme vers une solution périodique en temps (voir aussi [47]). De leur côté, Gabbuti et Negro [24] ont considéré un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  avec condition de Neumann homogène et ont établi des résultats similaires de convergence. Par la suite, l’étude du comportement asymptotique de la solution avec des conditions de Dirichlet a été menée dans [60], tandis que les aspects liés à la propagation spatiale continuent d’attirer l’intérêt des chercheurs (voir, par exemple, [19, 20]). En outre, l’équation de Lotka–Volterra avec diffusion en une dimension a donné lieu à des recherches approfondies sur les ondes progressives “traveling wave” : si [47, 53] ont montré leur existence dans le modèle classique, plusieurs variantes et généralisations ont ensuite été proposées [5, 18, 21, 32, 57]. Dans un cadre stochastique, l’équation logistique diffusante a été étudiée pour l’existence et l’unicité des solutions [28], ainsi que pour la mise en évidence de mesures invariantes [30]. Enfin, l’introduction de mécanismes de déplacement ou d’immigration a ouvert de nouvelles perspectives, illustrées par plusieurs contributions récentes [2, 33, 34, 41].

Cependant, plusieurs questions restent ouvertes, notamment concernant l’effet combiné du transport et de la diffusion dans des systèmes couplés. L’interaction entre ces deux mécanismes introduit en effet des difficultés analytiques supplémentaires, en particulier pour la compréhension du comportement asymptotique des solutions. Parallèlement, la résolution numérique d’un système de  $d$  équations de transport-diffusion avec terme source linéaire soulève d’autres défis, relatifs à la stabilité, à la convergence des schémas et à la préservation

des propriétés qualitatives du modèle.

Dans ce contexte, la problématique que nous proposons d'aborder est la suivante :

Dans quelle mesure l'introduction des déplacements et de la diffusion dans l'équation de Lotka–Volterra modifie-t-elle le comportement asymptotique des solutions ? Et comment développer une méthode numérique efficace et rigoureuse pour l'étude de systèmes de  $d$  équations de transport-diffusion ?

Pour répondre à cette question, notre travail poursuit plusieurs objectifs complémentaires :

- **Objectifs théoriques** : établir des résultats concernant la bornitude, la stabilité et la convergence uniforme des solutions. L'analyse vise à comprendre dans quelles conditions les solutions demeurent bornées, tendent vers un état stationnaire ou présentent des comportements oscillatoires.
- **Objectifs numériques** : concevoir une méthode de résolution d'un système de transport-diffusion de  $d$  équations avec des termes source linéaires basée sur une reformulation intégrale de type Volterra. Cette approche, en exploitant des propriétés particulières des équations intégrales, permet d'obtenir des schémas numériques stables et précis. Une attention particulière est accordée à l'étude de la convergence et du coût de calcul de la méthode.

Enfin, l'organisation de la thèse est la suivante :

Le premier chapitre présente les notions préliminaires et les outils mathématiques nécessaires à la suite de l'étude. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du comportement asymptotique des solutions d'un système à deux équations de transport-diffusion de type proie-prédateur, en tenant compte à la fois de l'effet de l'immigration (transport) et de la diffusion. L'accent est mis sur la démonstration de leur convergence uniforme vers la solution stationnaire. Le troisième chapitre est consacré au développement de la méthode numérique et à son application à un système de  $d$  équation de transport-diffusion. Une conclusion générale résume les résultats obtenus et propose des perspectives pour de futurs travaux.

# CHAPITRE 1

## SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DE TRANSPORT-DIFFUSION

### Sommaire

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1.1   | Rappels sur les équations paraboliques . . . . .                                | 4  |
| 1.1.1 | Équation parabolique linéaire ou semi-linéaire du second ordre . . . . .        | 4  |
| 1.1.2 | Solution fondamentale de l'équation de la chaleur . . . . .                     | 6  |
| 1.1.3 | Principe du maximum . . . . .   | 9  |
| 1.1.4 | Équation parabolique des espaces de Sobolev . . . . .                           | 12 |
| 1.2   | Équation de transport-diffusion et système . . . . .                            | 18 |
| 1.3   | Dynamique de populations avec des déplacements et diffusion . . . . .           | 21 |
| 1.4   | Calcul numérique pour les systèmes d'équations de transport-diffusion . . . . . | 25 |
| 1.4.1 | Rappels sur les équations intégrales-différentielles . . . . .                  | 26 |
| 1.4.2 | Espace des splines polynomiales . . . . .                                       | 27 |
| 1.4.3 | Méthode de collocation basée sur les polynômes de Taylor . . . . .              | 28 |
| 1.4.4 | Résultats auxiliaires . . . . .   | 29 |

## 1.1 Rappels sur les équations paraboliques

Comme les équations de transport-diffusion que nous allons considérer sont des équations de type parabolique, nous rappelons les propriétés fondamentales des équations de type parabolique, que nous utiliserons – explicitement ou implicitement – dans la suite.

### 1.1.1 Équation parabolique linéaire ou semi-linéaire du second ordre

Les équations que nous allons considérer sont des équations aux dérivées partielles linéaires ou semi-linéaires du type parabolique du second ordre, c'est-à-dire une équation aux

dérivées partielles ayant la forme

$$\partial_t u(t, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t, x) + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \partial_{x_i} u(t, x) + c(t, x) u(t, x) + f(t, x, u(t, x)) \quad (1.1)$$

pour  $t > 0$  et  $x \in \Omega$ , où  $\Omega$  est un domaine ouvert, borné ou non borné, de  $\mathbb{R}^n$ . Éventuellement nous considérons  $t$  seulement dans l'intervalle  $0 < t < \tau$  avec un certain nombre  $\tau > 0$ . Dans l'équation (1.1)  $a_{ij}(t, x)$ ,  $b_i(t, x)$ ,  $c(t, x)$  et  $f(t, x, u)$  sont des fonctions données, tandis que  $u(t, x)$  est une fonction inconnue (à valeurs réelles). Parfois au lieu du terme  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t, x)$  on considère le terme  $\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij}(t, x) \partial_{x_j} u(t, x))$ . En tout cas, pour que l'équation considérée soit du type parabolique (non-dégénérée), on suppose qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq c |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.2)$$

pour  $t > 0$  et  $x \in \Omega$  (pour les détails de la classification des équations aux dérivées partielles, voir [51, 45]). Dans le cas où la fonction  $f(t, x, u)$  ne dépend pas de  $u$  (c'est-à-dire  $f(t, x, u) = f(t, x)$ ), l'équation (1.1) est dite *linéaire*, tandis que, si  $f(t, x, u)$  dépend effectivement de  $u$  de manière non-linéaire, communément elle est dite *semi-linéaire*.

Pour que le problème soit bien posé, nous considérons la condition initiale

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \Omega \quad (1.3)$$

et, dans le cas où le domaine  $\Omega$  a la frontière  $\partial\Omega$ , on doit considérer également une condition aux limites. La condition aux limites peut être de différentes formes : elle peut être la condition de Dirichlet

$$u(t, x) = \psi_0(t, x) \quad \text{pour } t \geq 0, x \in \partial\Omega,$$

elle peut être la condition de Neumann

$$\vec{n} \cdot \nabla u(t, x) = \psi_1(t, x) \quad \text{pour } t \geq 0, x \in \partial\Omega,$$

où  $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})^T$  (même dans la suite le symbole  $\nabla$  désigne  $(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})^T$ ), tandis que  $\vec{n}$  désigne la normale sur  $\partial\Omega$  orientée vers l'extérieur ; elle peut aussi être une condition

mixte

$$\lambda u(t, x) + (1 - \lambda) \vec{n} \cdot \nabla_x u(t, x) = \psi_2(t, x) \quad \text{pour } t \geq 0, x \in \partial\Omega, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Mais, il y a aussi d'autres formes de condition aux limites. Si le domaine  $\Omega$  est un intervalle borné, c'est-à-dire  $\Omega = ]a, b[ \subset \mathbb{R}$ , la condition aux limites peut être

$$u(t, a) = \psi_0(t), \quad \partial_x u(t, x)|_{x=a} = \psi_1(t),$$

comme nous allons considérer dans le chapitre 3. D'autre part, si le "domaine" est périodique, c'est-à-dire si on impose les conditions de périodicité par rapport aux variables  $x_1, \dots, x_n$

$$u(t, x + L_i \vec{e}_i) = u(t, x), \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{pour } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$$

( $L_i$  sont des constantes strictement positives et  $\vec{e}_i$  désigne la  $i$ -ième composante de la base canonique de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ ), cette condition remplace la condition aux limites. C'est le cas du problème que nous allons considérer dans le chapitre 2.

L'exemple le plus important (et le plus simple) d'équation parabolique est l'équation de la chaleur

$$\partial_t u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) + f(t, x),$$

où  $\kappa$  est une constante strictement positive, tandis que  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ . En effet, les propriétés de cette équation constituent la base de l'étude des équations paraboliques.

### 1.1.2 Solution fondamentale de l'équation de la chaleur

La solution fondamentale de l'équation de la chaleur joue le rôle fondamental pour l'étude des équations paraboliques. Considérons le problème de Cauchy

$$\partial_t u(t, x) - \kappa \Delta u(t, x) = f(t, x) \quad \text{pour } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5)$$

Rappelons le théorème fondamental (voir par exemple [45]).

**Theorem 1.1.** Soient  $f(t, x)$  et  $u_0(x)$  deux fonctions continues et sommables (c'est-à-dire, de classe  $L^1 \cap C^0$ , définies sur  $]0, \infty[ \times \mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^n$  respectivement). Soit  $U(t, x)$  la fonction donnée par

$$U(t, x) = \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\kappa t}}. \quad (1.6)$$

Alors la fonction  $u(t, x)$  ( $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$ ) donnée par

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} U(t, x - y)u_0(y)dy - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(t - s, x - y)f(s, x)dyds \quad (1.7)$$

satisfait à l'équation (1.4) et à la condition initiale (1.5) (lorsque  $u(0, x)$  est défini par  $u(0, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x)$ ).

Pour l'importance de ce théorème, nous citons aussi sa démonstration. Commençons par démontrer les lemmes suivants.

**Lemme 1.1.** Pour tout  $t > 0$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ , la fonction  $U(t, x)$  donnée dans (1.6) satisfait à l'égalité

$$\partial_t U(t, x) = \kappa \Delta U(t, x). \quad (1.8)$$

*Démonstration* En effet, par des calculs explicites on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} &= \left( -\frac{n}{2t(4\pi\kappa t)^{\frac{n}{2}}} + \frac{|x|^2}{4\kappa t^2(4\pi\kappa t)^{\frac{n}{2}}} \right) e^{-\frac{|x|^2}{4\kappa t}}, \\ \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x_i^2} &= \left( -\frac{1}{2\kappa t(4\pi\kappa t)^{\frac{n}{2}}} + \frac{x_i^2}{8\kappa^2 t^2(4\pi\kappa t)^{\frac{n}{2}}} \right) e^{-\frac{|x|^2}{4\kappa t}}, \end{aligned}$$

d'où on obtient (1.8).  $\square$

**Lemme 1.2.** Pour tout  $t > 0$ , la fonction  $U(t, x)$  donnée dans (1.6) vérifie la relation

$$\int_{\mathbb{R}^n} U(t, x)dx = 1. \quad (1.9)$$

*Démonstration* En effet, en utilisant le changement de variables  $\xi = \frac{x}{\sqrt{2\kappa t}}$ , dont le déterminant jacobien est égal à  $(2\kappa t)^{\frac{n}{2}}$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} U(t, x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\kappa t}} dx = \\ &= \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\xi^2}{2}} (2\kappa t)^{\frac{n}{2}} d\xi = \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{n/2}} (2\kappa t)^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{\frac{n}{2}} = 1. \end{aligned}$$

**Lemme 1.3.** Pour tout  $\varepsilon > 0$ , la fonction  $U(t, x)$  donnée dans (1.6) vérifie les relations

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\{|x| \leq \varepsilon\}} U(t, x)dx = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\{|x| > \varepsilon\}} U(t, x)dx = 0. \quad (1.10)$$

*Démonstration* En effet, en utilisant de nouveau le changement de variable  $\xi = \frac{x}{\sqrt{2\kappa t}}$ , on a

$$\int_{\{|x| \leq \varepsilon\}} U(t, x)dx = \int_{\{|x| \leq \varepsilon\}} \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\kappa t}} dx =$$

$$= \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{n/2}} \int_{\{|\xi| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\kappa t}}\}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} (2\kappa t)^{\frac{n}{2}} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\{|\xi| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\kappa t}}\}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

D'autre part, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\{|\xi| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\kappa t}}\}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = \lim_{R \rightarrow 0^+} \int_{\{|\xi| \leq R\}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = (2\pi)^{n/2},$$

d'où la première égalité de (1.10).

La seconde égalité de (1.10) résulte immédiatement de la première égalité et de (1.9).  $\square$

**Lemme 1.4.** Soit  $\varphi(\cdot)$  une fonction continue et bornée sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors la fonction  $U(t, x)$  donnée dans (1.6) vérifie la relation

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} U(t, x - y) \varphi(y) dy = \varphi(x). \quad (1.11)$$

*Démonstration* Posons

$$M = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\varphi(y)|.$$

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Pour la continuité de  $\varphi(\cdot)$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si } |x - y| \leq \delta.$$

Posons

$$I_1 = \int_{\{|x-y| \leq \delta\}} U(t, x - y) (\varphi(y) - \varphi(x)) dy,$$

$$I_2 = \int_{\{|x-y| \leq \delta\}} U(t, x - y) \varphi(x) dy, \quad I_3 = \int_{\{|x-y| > \delta\}} U(t, x - y) \varphi(y) dy.$$

Il est clair que

$$\int_{\mathbb{R}^n} U(t, x - y) \varphi(y) dy = I_1 + I_2 + I_3.$$

Compte tenu du lemme 1.2 et de la positivité de la fonction  $U(t, x - y)$ , on a

$$|I_1| \leq \int_{\{|x-y| \leq \delta\}} U(t, x - y) |\varphi(y) - \varphi(x)| dy \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, d'après le lemme 1.3 il existe un  $t_1$  tel que, si  $0 < t < t_1$ , alors on a

$$1 - \frac{\varepsilon}{3M} \leq \int_{\{|x-y| \leq \delta\}} U(t, x - y) dy \leq 1, \quad 0 \leq \int_{\{|x-y| > \delta\}} U(t, x - y) dy \leq \frac{\varepsilon}{3M}.$$

On a donc

$$|\varphi(x) - I_2| \leq |\varphi(x)| \left( 1 - \int_{\{|x-y| \leq \delta\}} U(t, x - y) dy \right) \leq |\varphi(x)| \frac{\varepsilon}{3M},$$

$$|I_3| \leq M \int_{\{|x-y|>\delta\}} U(t, x-y) dy \leq M \frac{\varepsilon}{3M} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il s'ensuit que

$$\left| \varphi(x) - \int_{\mathbb{R}^n} U(t, x-y) \varphi(y) dy \right| \leq |I_1 + I_2 - \varphi(x) + I_3| \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre (1.11).  $\square$

Maintenant, nous sommes en mesure de démontrer le théorème 1.1.

**Démonstration du théorème 1.1** Comme on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(t-s, x-y) f(s, y) dy ds = 0,$$

il résulte du lemme 1.4 que  $u(t, x)$  satisfait à la condition (1.5).

D'autre part, pour  $t > 0$  et  $x \in \mathbb{R}^n$  on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} U(t, x-y) u_0(y) dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} U(t-s, x-y) f(s, y) dy ds + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}^n} U(t+h-s, x-y) f(s, y) dy ds. \end{aligned}$$

De manière analogue à la démonstration du lemme 1.4 on démontre facilement que pour  $t > 0$  et  $x \in \mathbb{R}^n$  on a

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}^n} U(t+h-s, x-y) f(s, y) dy ds = f(t, x).$$

En outre on a

$$\Delta u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta U(t, x-y) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Delta U(t-s, x-y) f(s, y) dy ds.$$

Par conséquent, en appliquant (1.8) à l'expression de  $u_t(t, x) - \Delta u(t, x)$  citée ci-dessus, on obtient (1.4). Le théorème est démontré.  $\square$

### 1.1.3 Principe du maximum

Le principe du maximum est un outil important pour analyser et contrôler le comportement des solutions des équations aux dérivées partielles de second ordre de type parabolique. Il se base sur le fait suivant :

**Remarque 1.1.** Si  $u(t, x)$  est une fonction à valeurs réelles continue sur  $[0, T] \times \overline{\Omega}$  ( $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ) et ses dérivées  $\partial_t u(t, x)$ ,  $\partial_{x_i} u(t, x)$  et  $\partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t, x)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) sont continues

sur  $[0, T] \times \bar{\Omega}$  et si à un point  $(t, x)$  intérieur de cette région la fonction  $u(t, x)$  atteint la valeur maximale, alors à ce point on a

$$\partial_t u(t, x) = 0, \quad \partial_{x_i} u(t, x) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t, x) \leq 0,$$

pour quelconque matrice  $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  telle que

$$\bar{\zeta}^T \bar{A} \bar{\zeta} = \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij} \bar{\zeta}_i \bar{\zeta}_j \geq 0 \quad \forall \bar{\zeta} \in \mathbb{R}^n;$$

en outre, si au point  $(t_1, x)$  avec  $0 < t_1 < T$  et  $x \in \Omega$  on a

$$u(t_1, x) = \max_{(t,y) \in [0,t_1] \times \bar{\Omega}} u(t, y),$$

alors on a

$$\partial_t u(t, x) \Big|_{t=t_1} \geq 0, \quad \partial_{x_i} u(t_1, x) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t_1, x) \leq 0.$$

Nous citons d'abord un théorème de principe du maximum dans le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^n$  (Théorème 2.5, Chap. I de [39]).

**Theorem 1.2.** Soit  $u(t, x)$  une fonction à valeurs réelles continue et bornée sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$  telle que ses dérivées partielles  $\partial_t u(t, x)$ ,  $\partial_{x_i} u(t, x)$  et  $\partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t, x)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) soient continues et bornées sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ . Soient  $a_{ij}(t, x)$ ,  $b_i(t, x)$ ,  $c(t, x)$  et  $f(t, x)$  des fonctions continues et bornées définies sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$  telles que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Soit  $u_0(x)$  une fonction continue et bornée définie sur  $\mathbb{R}^n$ . Si  $u(t, x)$  vérifie l'équation

$$\partial_t u(t, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t, x) + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \partial_{x_i} u(t, x) + c(t, x) u(t, x) + f(t, x) \quad (1.12)$$

et la condition initiale

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (1.13)$$

alors on a

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n} |u(t, x)| \leq \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u_0(x)| + \sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n} |f(t, x)| \right) e^{\alpha_0 t}, \quad (1.14)$$

où

$$\alpha_0 = \max \left( 0, \sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n} c(t,x) \right).$$

Dans le cas où  $\Omega$  est différent de  $\mathbb{R}^n$ , selon les différentes conditions aux limites, il y a différentes versions du principe du maximum. Nous citons une version du cas d'un domaine borné avec la condition de Dirichlet (Théorème 2.1, Chap. I de [39]).

**Theorem 1.3.** Soit  $u(t, x)$  une fonction à valeurs réelles continue sur  $[0, T] \times \Omega$  telle que ses dérivées partielles  $\partial_t u(t, x)$ ,  $\partial_{x_i} u(t, x)$  et  $\partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t, x)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) soient continues sur  $[0, T] \times \Omega$ . Soient  $a_{ij}(t, x)$ ,  $b_i(t, x)$ ,  $c(t, x)$  et  $f(t, x)$  des fonctions continues définies sur  $[0, T] \times \Omega$  telles que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall (t, x) \in [0, T] \times \Omega.$$

Soit  $u_0(x)$  une fonction continue définie sur  $\Omega$ . Soit  $\psi(t, x)$  une fonction continue définie sur  $[0, T] \times \partial\Omega$  telle que

$$\psi(0, x) = u_0(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Si  $u(t, x)$  vérifie l'équation

$$\partial_t u(t, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t, x) + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \partial_{x_i} u(t, x) + c(t, x) u(t, x) + f(t, x) \quad (1.15)$$

pour  $0 < t < T$  et  $x \in \Omega$ , la condition initiale

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \Omega \quad (1.16)$$

et la condition aux limites

$$u(t, x) = \psi(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad (1.17)$$

alors pour tout  $t_1 \in [0, T]$  on a

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda > \alpha_0} \left\{ 0, \inf_{(t,x) \in \Gamma_{t_1}} (\tilde{\psi}(t, x) e^{\lambda(t_1-t)}), \frac{1}{\lambda - \alpha_0} \inf_{(t,x) \in [0, t_1] \times \Omega} (f(t, x) e^{\lambda(t_1-t)}) \right\} &\leq \\ &\leq u(t_1, x) \leq \\ \leq \inf_{\lambda > \alpha_0} \left\{ 0, \sup_{(t,x) \in \Gamma_{t_1}} (\tilde{\psi}(t, x) e^{\lambda(t_1-t)}), \frac{1}{\lambda - \alpha_0} \sup_{(t,x) \in [0, t_1] \times \Omega} (f(t, x) e^{\lambda(t_1-t)}) \right\}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_{t_1} &= \{0\} \times \Omega \cup [0, t_1] \times \partial\Omega, \\ \tilde{\psi}(t, x) &= u_0(x) \quad \text{pour } t = 0, \quad \tilde{\psi}(t, x) = \psi(t, x) \quad \text{pour } 0 < t \leq t_1, \end{aligned}$$

$$\alpha_0 = \sup_{(t,x) \in [0,t_1] \times \Omega} c(t,x).$$

Pour la démonstration des théorèmes 1.2 et 1.3 le fait présenté dans la remarque 1.1 est essentiel. Mais il faut aussi certaines transformations de l'équation et des estimations non immédiates. Nous renvoyons leur démonstration à [39].

Le principe du maximum, outre à donner une estimation de la solution, implique aussi l'unicité de la solution de l'équation linéaire. En effet, si  $u^{(1)}(t,x)$  et  $u^{(2)}(t,x)$  toutes les deux vérifient l'équation (1.12) et la condition initiale (1.13), alors la fonction  $U(t,x) = u^{(1)}(t,x) - u^{(2)}(t,x)$  vérifie l'équation

$$\partial_t U(t,x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} U(t,x) + \sum_{i=1}^n b_i(t,x) \partial_{x_i} U(t,x) + c(t,x) U(t,x)$$

et la condition initiale

$$U(0,x) = 0.$$

Donc, en appliquant (1.14) à  $U(t,x)$  avec  $u_0 = 0$  et  $f = 0$ , on obtient l'inégalité

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n} |u^{(1)}(t,x) - u^{(2)}(t,x)| = \sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n} |U(t,x)| \leq 0,$$

ce qui prouve l'unicité de la solution du problème de Cauchy (1.12)–(1.13).

Dans le cas d'un domaine borné le raisonnement tout analogue conduit à l'unicité de la solution du problème (1.15)–(1.17).

### 1.1.4 Équation parabolique des espaces de Sobolev

Même si l'utilisation des espaces de Sobolev n'est pas la méthode principale dans le présent travail, nous rappelons les propriétés principales des équations paraboliques dans les espaces de Sobolev soit parce que nous les utilisons partiellement soit pour la comparaison de nos résultats avec les résultats existants.

Comme il est bien connu, la propriété essentielle sur laquelle se base l'étude des équations paraboliques dans les espaces de Sobolev est la propriété de l'opérateur elliptique. Pour simplifier, considérons l'opérateur

$$A = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \right) \quad (1.19)$$

et un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  et supposons que  $a_{ij}(x)$  sont des fonctions continues et bornées et vérifient la relation  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$  pour tout  $(i, j)$  et pour tout  $x \in \Omega$  et la condition

$$\inf_{x \in \Omega, \xi \in S^{n-1}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \equiv C_0 > 0 \quad (S^{n-1} = \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi|^2 = 1 \}). \quad (1.20)$$

On voit immédiatement que, si les fonctions  $u(x)$  et  $f(x)$  vérifient l'équation

$$Au = f \quad \text{dans } \Omega$$

et  $u(x)$  vérifie la condition

$$u(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

( $\partial\Omega$  désigne la frontière du domaine  $\Omega$ ), alors, en multipliant les deux membres de l'équation par  $u(x)$ , on a par l'intégration par parties

$$\int_{\Omega} (Au)u dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) (\partial_{x_i} u(x)) \partial_{x_j} u(x) dx = \int_{\Omega} f(x)u(x) dx$$

et que la condition (1.20) implique que

$$C_0 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) (\partial_{x_i} u(x)) \partial_{x_j} u(x) dx \leq C_1 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (1.21)$$

où  $C_0$  est la constante donnée dans (1.20), tandis que  $C_1$  est une constante dont l'existence résulte immédiatement de la bornitude des fonctions  $a_{ij}(x)$ . On rappelle que, si  $a_{ij}(x) = \kappa \delta_{ij}$  ( $\kappa$  : constante strictement positive,  $\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker), c'est-à-dire  $A = -\kappa \Delta$ , alors on a

$$\int_{\Omega} (Au)u dx = \int_{\Omega} \kappa \sum_{i=1}^n |\partial_{x_i} u(x)|^2 dx = \kappa \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Considérons maintenant l'équation

$$\partial_t u + Au = f \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \quad (1.22)$$

avec les conditions

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \Omega, \quad u(t, x) = 0 \quad \text{pour } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \quad (1.23)$$

où  $A$  est l'opérateur défini dans (1.19), tandis que  $f(t, x)$  et  $u_0(x)$  sont des fonctions données. Pour simplifier, supposons que

$$f \in C([0, \infty[; L^2(\Omega)), \quad u_0 \in L^2(\Omega).$$

Si on définit le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{V^1} = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) (\partial_{x_i} u(x)) \partial_{x_j} v(x) dx$$

et l'espace de Hilbert

$$V^1 = \{ u \text{ mesurable} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \langle u, u \rangle_{V^1} < \infty, u|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^1}$  et de la norme

$$\|u\|_{V^1} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{V^1}},$$

alors on voit immédiatement que pour  $\varphi \in L^2(\Omega)$  l'intégrale

$$\int_{\Omega} \varphi(x) u(x) dx$$

définit une fonctionnelle linéaire bornée sur  $V^1$  et que donc en vertu du théorème de représentation de Riesz il existe un élément  $u \in V^1$  et un seul tel que

$$\langle w, u \rangle_{V^1} = \int_{\Omega} \varphi(x) w(x) dx \quad \forall w \in V^1.$$

Cette relation définit l'opérateur auto-adjoint linéaire borné  $B : L^2(\Omega) \rightarrow V^1$ ,  $B\varphi = u$ . Comme l'injection de  $V^1$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte (analoguement à l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ ), si on considère l'opérateur  $B$  comme opérateur de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , il peut être considéré comme opérateur auto-adjoint compact. Donc d'après le théorème fondamental pour les opérateurs auto-adjoints compacts (de Hilbert-Schmidt) il existe une base orthogonale  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  de  $L^2(\Omega)$  telle que  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  soit un système orthogonal complet dans  $V^1$ , où  $e_k$  sont des vecteurs propres de l'opérateur  $B : Be_k = \mu_k e_k$ ,  $\mu_k$  étant la valeur propre de  $e_k$  (pour les détails, voir par exemple [45] et les manuels de l'Analyse fonctionnelle comme [36, 13]).

Cela étant, en faisant le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$  des deux membres de (1.22) avec  $e_k$  et en tenant compte de la relation  $\langle Au, e_k \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, e_k \rangle_{V^1}$ , on a l'équation

$$\frac{d}{dt} \langle u, e_k \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u, e_k \rangle_{V^1} = \langle f, e_k \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (1.24)$$

Or, comme  $u$  doit être décomposé selon la base orthonormale  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, e_k \rangle_{L^2(\Omega)} e_k,$$

on a

$$\frac{d}{dt} \langle u, e_k \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{k'=1}^{\infty} \langle u, e_{k'} \rangle_{L^2(\Omega)} \langle e_{k'}, e_k \rangle_{V^1} = \langle f, e_k \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Comme  $e_k$  est un vecteur propre ayant la valeur propre  $\mu_k$ , on a  $\langle e_{k'}, e_k \rangle_{V^1} = \frac{1}{\mu_k^2} \delta_{k'k}$  et donc l'équation précédente se réduit à

$$\frac{d}{dt} \langle u, e_k \rangle_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\mu_k^2} \langle u, e_k \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, e_k \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad (1.25)$$

ou, en réécrivant  $c_k(t)$  et  $f_k(t)$  au lieu de  $\langle u, e_k \rangle_{L^2(\Omega)}$  et  $\langle f, e_k \rangle_{L^2(\Omega)}$  respectivement,

$$\frac{d}{dt} c_k(t) + \frac{1}{\mu_k^2} c_k(t) = f_k(t). \quad (1.26)$$

Dans (1.26)  $f_k(t)$  peut être considérée comme fonction donnée, tandis que  $c_k(t)$  est la fonction inconnue. Donc, en résolvant l'équation différentielle ordinaire linéaire (1.26) avec la condition initiale

$$c_k(0) = \langle u, e_k \rangle_{L^2(\Omega)} \Big|_{t=0} = \langle u_0, e_k \rangle_{L^2(\Omega)},$$

on a

$$c_k(t) = \langle u(t, \cdot), e_k \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u_0, e_k \rangle_{L^2(\Omega)} e^{-t/\mu_k^2} + \int_0^t f_k(s) e^{-(t-s)/\mu_k^2} ds. \quad (1.27)$$

Ayant trouvé la fonction  $c_k(t)$  pour chaque  $k$ , il n'est pas difficile de constater que la fonction

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) e_k(x) \quad (1.28)$$

vérifie l'équation (1.24) pour tout  $k$ , donc l'équation

$$\frac{d}{dt} \langle u, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u, \varphi \rangle_{V^1} = \langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

pour toutes les fonctions  $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e_k(x)$  appartenant à  $V^1$ , ce qui, en rappelant la relation  $\langle Au, e_k \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, e_k \rangle_{V^1}$ , nous permet d'interpréter  $u$  donnée par (1.28) comme solution généralisée du problème (1.22)–(1.23).

Si dans l'équation analogue à (1.22) il y a le terme  $b(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \partial_{x_i} u(t, x)$  ou les fonctions  $a_{ij}$  dépendent aussi de  $t$  (c'est-à-dire  $a_{ij} = a_{ij}(t, x)$ ), c'est-à-dire si on considère l'équation

$$\begin{aligned} \partial_t u + b(t, x) \cdot \nabla u(t, x) + \tilde{A}u &= f \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \tilde{A}u &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(t, x) \right), \end{aligned} \quad (1.29)$$

avec les conditions (1.23), même si on suppose la condition analogue à (1.20) pour  $a_{ij}(t, x)$ , on ne peut pas appliquer directement la méthode simple que nous venons de décrire, car, si on procède d'une manière analogue, on n'aura pas l'équation similaire à (1.25) pour chaque  $k$  indépendante de  $k' \in \mathbb{N} \setminus \{k\}$ ; on aura un système infini d'équations différentielles ordinaires interdépendantes, que nous ne pouvons pas résoudre facilement. Alors nous utilisons l'approximation dans des sous-espaces de dimension finie de l'espace de Hilbert et cherchons la convergence vers la solution de l'équation, méthode connue sous le nom de *méthode de Galerkin*. Plus précisément, on considère une base orthonormale (quelconque)  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  de  $L^2(\Omega)$  qui est un système complet dans  $H_0^1(\Omega)$  et cherche la solution  $u^N(t, x)$  dans le sous-espace de  $L^2(\Omega)$  engendré par  $\{e_1, \dots, e_N\}$ , en résolvant le système d'équations

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u^N, e_k \rangle_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} b(t, x) \cdot \nabla u^N(t, x) e_k dx + \langle \tilde{A}u^N, e_k \rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle f, e_k \rangle_{L^2(\Omega)}, \\ &k = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$\langle u^N, e_k \rangle_{L^2(\Omega)} \Big|_{t=0} = \langle u_0, e_k \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad k = 1, \dots, N.$$

En effet, la solution  $u^N(t, x)$  de ce problème doit être de la forme

$$u^N(t, x) = \sum_{k=1}^N \langle u^N, e_k \rangle_{L^2(\Omega)} e_k \equiv \sum_{k=1}^N c_k^N(t) e_k,$$

de sorte que le système d'équations considéré est effectivement un système d'équations différentielles ordinaires linéaires et donc peut être résolu sans problème. Donc la fonction  $u^N(t, x)$  vérifie ces équations pour tout  $k = 1, \dots, N$  et par conséquent elle vérifie l'équation où  $e_k$  est

remplacé par une combinaison linéaire de  $\{e_k\}_{k=1}^N$ . Comme  $u^N(t, x)$  est aussi une combinaison linéaire de  $\{e_k\}_{k=1}^N$ , on peut la substituer à la place de  $e_k$ , en faisant toutefois l'attention à sa dérivée par rapport à  $t$  qui ne s'annule pas. Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u^N(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t', x) (\partial_{x_i} u^N(t', x)) \partial_{x_j} u^N(t', x) dx dt' = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (u^N(t', x))^2 \nabla \cdot b(t', x) dx dt' + \int_0^t \int_{\Omega} f(t', x) u^N(t', x) dx dt' + \frac{1}{2} \|u^N(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

(ici on a utilisé la relation  $\int_{\Omega} u b \cdot \nabla u dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 \nabla \cdot b dx$ ). De cette égalité et de l'inégalité (1.21) (où on remplace  $a_{ij}(x)$  par  $a_{ij}(t, x)$ ), compte tenu de la définition de la condition initiale pour  $u^N$ , on déduit à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz l'inégalité

$$\begin{aligned} & \|u^N(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t 2C_0 \|\nabla u^N\|_{L^2(\Omega)}^2 dt' \leq \tag{1.30} \\ & \leq (2\|\nabla \cdot b\|_{L^\infty([0,t] \times \Omega)} + 1) \int_0^t \|u^N\|_{L^2(\Omega)}^2 dt' + \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt' + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Si on pose

$$Y(t) = \|u^N(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t 2C_0 \|\nabla u^N\|_{L^2(\Omega)}^2 dt',$$

de (1.30) découle l'inégalité

$$Y(t) \leq (2\|\nabla \cdot b\|_{L^\infty([0,t] \times \Omega)} + 1)Y(t) + \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt' + \|u_0\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui nous permet d'avoir une estimation

$$Y(t) = \|u^N(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t 2C_0 \|\nabla u^N\|_{L^2(\Omega)}^2 dt' \leq K_t,$$

où  $K_t$  dépend de  $t$  mais ne dépend pas de  $N$ . Ayant établi cette estimation indépendante de  $N$ , on peut procéder de manière usuelle pour obtenir la solution généralisée  $u \in L^\infty(0, t; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, t; H_0^1(\Omega))$ . Rappelons aussi que l'unicité de la solution résulte d'une estimation analogue pour la différence de deux éventuelles solutions avec  $f = u_0 = 0$ .

Ici nous avons présenté un cas suffisamment simple, où la méthode principale peut être illustrée de manière claire. Les arguments présentés en haut et des arguments relatifs aux cas de conditions différentes et aussi pour la régularité de la solution se trouvent, avec les détails nécessaires, dans [22, 39] et d'autres ouvrages.

## 1.2 Équation de transport-diffusion et système

On connaît bien la méthode classique de résolution de l'équation de transport

$$\partial_t u(t, x) + v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = f(t, x)$$

ou une équation avec la fonction  $f = f(t, x, u(t, x))$  qui dépend de  $u$

$$\partial_t u(t, x) + v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = f(t, x, u(t, x)). \quad (1.31)$$

Il s'agit de la méthode des caractéristiques, qui consiste à transformer l'équation (1.31) en une famille d'équations différentielles ordinaires sur les caractéristiques  $\gamma(t) = \gamma(t^{(0)}, x^{(0)}; t)$  définies par l'équation intégrale

$$\gamma(t) = \gamma(t^{(0)}, x^{(0)}; t) = x^{(0)} + \int_{t^{(0)}}^t v(s, \gamma(t^{(0)}, x^{(0)}; s)) ds \quad (1.32)$$

(il est clair que pour définir  $\gamma(t^{(0)}, x^{(0)}; t)$  on peut utiliser l'équation différentielle au lieu de l'équation intégrale (1.32)) et à résoudre l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{dt} u(t, \gamma(t^{(0)}, x^{(0)}; t)) = f(t, \gamma(t^{(0)}, x^{(0)}; t), u(t, \gamma(t^{(0)}, x^{(0)}; t))) \quad (1.33)$$

ou l'équation simplement avec  $f(t, \gamma(t^{(0)}, x^{(0)}; t))$  au lieu de  $f(t, \gamma(t^{(0)}, x^{(0)}; t), u(t, \gamma(t^{(0)}, x^{(0)}; t)))$ .

Pour que l'on puisse résoudre l'équation (1.31) par cette méthode, il suffit que la régularité des données garantissent la résolubilité des équations (1.32) et (1.33).

Lorsqu'il s'agit du système d'équations de transport

$$\partial_t u_h(t, x) + v_h(t, x) \cdot \nabla u_h(t, x) = f_h(t, x, u_1(t, x), \dots, u_d(t, x)), \quad h = 1, \dots, d, \quad (1.34)$$

si toutes les fonctions  $v_h(t, x)$ ,  $h = 1, \dots, d$ , sont identiques, c'est-à-dire

$$v_1(t, x) = \dots = v_d(t, x) = v(t, x),$$

alors il est clair que l'on peut définir les caractéristiques  $\gamma(t) = \gamma(t^{(0)}, x^{(0)}; t)$  pour le système d'équations (1.34) de la même manière que pour l'équation (1.31) et sur les caractéristiques on doit résoudre le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{d}{dt} u_h(t, \gamma(t)) = f_h(t, \gamma(t), u_1(t, \gamma(t)), \dots, u_d(\gamma(t))), \quad h = 1, \dots, d \quad (1.35)$$

(ici naturellement  $\gamma(t) = \gamma(t^{(0)}, x^{(0)}; t)$ ) au lieu d'une seule équation. Mais le système de  $d$  équations différentielles ordinaires à  $d$  inconnues n'est autre qu'une équation différentielle ordinaire dans  $\mathbb{R}^d$  au lieu de  $\mathbb{R}$ . Pour le problème d'existence et unicité de la solution, entre l'équation différentielle ordinaire à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et celle à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  il n'y a pas de différence en principe et donc on peut démontrer l'existence et l'unicité de l'équation (1.35) avec le même principe que pour l'équation différentielle ordinaire à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (voir par exemple [4]).

Lorsque les fonctions  $v_h(t, x)$ ,  $h = 1, \dots, d$ , ne sont pas identiques, cette méthode ne s'applique pas directement. En effet, les caractéristiques définies par  $v_h(t, x)$

$$\gamma_h(t) = \gamma_h(t^{(0)}, x^{(0)}; t) = x^{(0)} + \int_{t^{(0)}}^t v_h(s, \gamma(t^{(0)}, x^{(0)}; s)) ds$$

ne coïncident pas avec  $\gamma_{h'}(t)$  pour  $h' \neq h$ . Même si on peut écrire l'équation

$$\frac{d}{dt} u_h(t, \gamma_h(t)) = f(t, \gamma_h(t), u_1(t, \gamma_1(t)), \dots, u_d(t, \gamma_d(t))) \quad (1.36)$$

d'une manière similaire à (1.35), ce n'est pas une équation d'un système autonome d'équations différentielles ordinaires sur une caractéristique comme (1.35). L'ensemble des équations (1.36) pour  $h = 1, \dots, d$  n'a pas de caractéristique commune et donc ne constitue pas un système d'équations différentielles ordinaires autonomes. Donc, pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution locale, il faut appliquer l'idée du théorème de Cauchy-Lipschitz, par exemple, à l'espace de Banach  $C(\Omega; \mathbb{R}^d)$  (des fonctions continues définies sur le domaine  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ) muni de la norme

$$\|u\|_{C(\Omega; \mathbb{R}^d)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|, \quad |u(x)| = \left( \sum_{h=1}^d |u_h(x)|^2 \right)^{1/2},$$

construire l'approximation successive en utilisant les équations (1.36) (dans (1.36) on utilise  $u_{h'}$  obtenue dans l'approximation précédente) et démontrer la convergence de la solution approchée dans un intervalle de temps suffisamment petit (mais avec une longueur strictement positive).

Si on ajoute à l'équation (1.31) un terme de diffusion  $\kappa \Delta u$ , on a l'équation

$$\partial_t u(t, x) + v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) - \kappa \Delta u(t, x) = f(t, x, u(t, x)). \quad (1.37)$$

Il est clair que l'équation (1.37) est une équation du type parabolique. Mais pour souligner

le rôle de transport et la relation avec l'équation de transport, nous l'appelons *équation de transport-diffusion*.

En tant qu'équation du type parabolique, si  $f$  ne dépend pas de  $u$ , on peut appliquer la méthode illustrée dans la section précédente pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution. Cette méthode peut être appliquée, avec une modification plutôt simple, même au cas où  $f(t, x, u)$  est linéaire par rapport à  $u$ , c'est-à-dire cas où  $f(t, x, u) = g_1(t, x)u + g_0(t, x)$  (voir par exemple [22, 39]). Mais le théorème d'existence et unicité de la solution obtenue par cette méthode ne donne pas de caractérisation intéressante de la relation entre l'équation de transport-diffusion et l'équation de transport.

Pour donner la possibilité d'examiner la relation entre l'équation de transport-diffusion et l'équation de transport et aussi pour obtenir directement la solution dans le cas où  $f(t, x, u)$  n'est pas linéaire par rapport à  $u$ , a été proposée récemment une méthode basée sur l'approximation de la solution construite par l'application de la solution fondamentale sur chaque pas de la discrétisation du temps et le transport linéarisé localement (voir [55, 54]). En effet, même si pour le moment les résultats ne concernent que les cas du domaine  $\Omega = \mathbb{R}^n$  ou  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ , une caractérisation intéressante de la convergence de la solution de l'équation de transport-diffusion et vers la solution de l'équation de transport a été obtenue (voir [1]).

Si pour chaque  $h = 1, \dots, d$  on ajoute à l'équation (1.34) un terme de diffusion  $\kappa_h \Delta u$ , on a l'équation

$$\partial_t u_h(t, x) + v_h(t, x) \cdot \nabla u_h(t, x) - \kappa_h \Delta u = f_h(t, x, u_1(t, x), \dots, u_d(t, x)), \quad (1.38)$$

qui forme un système. Si les fonctions  $f_h(t, x, u_1, \dots, u_d)$ ,  $h = 1, \dots, d$ , sont linéaires par rapport à  $u_1, \dots, u_d$ , c'est-à-dire

$$f_h(t, x, u_1(t, x), \dots, u_d(t, x)) = \sum_{h'=1}^d g_{h,h'}(t, x) u_{h'} + g_{h0}(t, x),$$

et si le système d'équations est considéré dans un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  avec la condition de Dirichlet homogène sur la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ , alors, avec des modifications nécessaires mais pas difficiles, on peut appliquer la méthode illustrée dans la section précédente pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

La méthode basée sur l'approximation de la solution construite par l'application de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur chaque pas de la discrétisation du temps

et le transport linéarisé localement, mentionnée en haut pour l'équation (1.37), peut être appliquée aussi au système d'équations (1.38) et nous permet d'obtenir une caractérisation de la convergence de la solution du système d'équations (1.38) vers la solution du système d'équations (1.34), caractérisation similaire au cas de l'équation (1.37) (voir [23]).

Il est clair que le comportement de la solution du système d'équations (1.38) pour  $t \rightarrow \infty$  dépend essentiellement des propriétés des fonctions  $f_h(t, x, u)$ . Dans le chapitre suivant nous allons examiner en détails ce problème d'un cas particulier, mais de grand intérêt.

### 1.3 Dynamique de populations avec des déplacements et diffusion

Dans son célèbre livre intitulé "*Théorie mathématique de la lutte pour la vie*" [56] Volterra propose différents modèles de la variation de populations due aux relations entre les espèces. Le nombre d'espèces qui interviennent dans ces considérations est varié, mais on peut considérer que les aspects fondamentaux se trouvent dans la relation entre deux espèces. Pour cela nous rappelons les trois types fondamentaux de relation entre deux espèces.

**Compétition.** On considère deux espèces qui partagent une ressource commune limitée – par exemple la nourriture –. Alors l'augmentation de la population, soit de la même espèce soit de l'autre espèce devient un obstacle pour la vie de la population de l'une et de l'autre espèce. Pour modéliser on propose le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u_1(t) = \alpha_1 u_1(t) - \beta_{11}(u_1(t))^2 - \beta_{12}u_1(t)u_2(t), \\ \frac{d}{dt}u_2(t) = \alpha_2 u_2(t) - \beta_{21}u_1(t)u_2(t) - \beta_{22}(u_2(t))^2, \end{cases} \quad (1.39)$$

où  $u_i(t)$  désigne la population de l'espèce  $i$ ,  $i = 1, 2$ , tandis que  $\alpha_i > 0$  est le coefficient de la croissance naturelle de la population de l'espèce  $i$  et  $\beta_{ij}$  sont des nombres positifs qui expriment l'effet de la surpopulation sur la croissance de la population.

**Prédation.** On considère la population  $u_1$  de l'espèce proie et la population  $u_2$  de l'espèce prédatrice. On suppose que le taux de la croissance naturelle de la population proie en l'absence de prédateur, noté  $\alpha$ , est strictement positif, tandis que celui de la population prédatrice en absence de proie, noté  $-\gamma$ , est strictement négatif. Comme la prédation réalisée signifie la nourriture pour la population prédatrice et la perte de la vie pour la population proie, pour

modéliser on propose le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u_1(t) = \alpha u_1(t) - \beta u_1(t)u_2(t), \\ \frac{d}{dt}u_2(t) = -\gamma u_2(t) + \delta u_1(t)u_2(t), \end{cases} \quad (1.40)$$

où  $\beta$  et  $\delta$  sont des constantes strictement positives.

Si on considère aussi l'effet logistique, c'est-à-dire l'effet négatif de la surpopulation à la croissance de la population, on considère le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u_1(t) = \alpha u_1(t) - \beta u_1(t)u_2(t) - \mu(u_1(t))^2, \\ \frac{d}{dt}u_2(t) = -\gamma u_2(t) + \delta u_1(t)u_2(t) - \nu(u_2(t))^2, \end{cases} \quad (1.41)$$

où  $\mu$  et  $\nu$  sont des constantes strictement positives.

**Symbiose.** Lorsqu'il y a une association de deux espèces dans laquelle chacune tire un avantage de la présence de l'autre, en considérant aussi l'effet logistique, on considère le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u_1(t) = \alpha_1 u_1(t) - \beta_{11}(u_1(t))^2 + \beta_{12}u_1(t)u_2(t), \\ \frac{d}{dt}u_2(t) = \alpha_2 u_2(t) + \beta_{21}u_1(t)u_2(t) - \beta_{22}(u_2(t))^2, \end{cases} \quad (1.42)$$

où  $\alpha_i, \beta_{ij}$  sont tous des constantes positives.

Les systèmes d'équations différentielles ordinaires (1.39)–(1.42) sont bien étudiés et on trouve toutes les analyses de ces systèmes d'équations et des considérations sur eux dans les manuels de dynamique de populations ainsi que nombreux articles sur ce sujet. Pour notre intérêt nous rappelons ici les propriétés particulières du système d'équations (1.40) suivant [56].

En multipliant la première équation de (1.40) par  $-\frac{\gamma}{u_1(t)}$ , on obtient

$$\frac{d}{dt}(-\gamma \log u_1(t)) = -\alpha\gamma + \beta\gamma u_2(t). \quad (1.43)$$

En multipliant la deuxième équation de (1.40) par  $-\frac{\alpha}{u_2(t)}$ , on obtient

$$\frac{d}{dt}(-\alpha \log u_2(t)) = \alpha\gamma - \alpha\delta u_1(t). \quad (1.44)$$

En multipliant la première équation de (1.40) par  $\delta$ , on obtient

$$\frac{d}{dt}(\delta u_1(t)) = \alpha \delta u_1(t) - \beta \delta u_1(t) u_2(t). \quad (1.45)$$

En multipliant la deuxième équation de (1.40) par  $\beta$ , on obtient

$$\frac{d}{dt}(\beta u_2(t)) = -\beta \gamma u_2(t) + \beta \delta u_1(t) u_2(t). \quad (1.46)$$

En faisant la somme des égalités (1.43)–(1.46), on a

$$\frac{d}{dt}(-\gamma \log u_1(t) - \alpha \log u_2(t) + \delta u_1(t) + \beta u_2(t)) = 0,$$

ou, si on pose

$$U_0(u_1, u_2) = -\gamma \log u_1 - \alpha \log u_2 + \delta u_1 + \beta u_2, \quad (1.47)$$

on a

$$\frac{d}{dt}U_0(u_1(t), u_2(t)) = 0. \quad (1.48)$$

L'égalité (1.48) signifie que la solution  $(u_1(t), u_2(t))$  du système d'équations (1.40) avec la condition initiale

$$u_1(t) = u_{0,1} > 0, \quad u_2(t) = u_{0,2} > 0,$$

reste toujours sur la courbe

$$\{(u_1, u_2) \in ]0, \infty[ \times ]0, \infty[ \mid U_0(u_1, u_2) = U_0(u_{0,1}, u_{0,2})\}$$

sur le plan de phases

$$]0, \infty[ \times ]0, \infty[.$$

En outre, par le calcul élémentaire on trouve que

$$\min_{u_1 > 0}(-\gamma \log u_1 + \delta u_1) = -\gamma \log \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) + \gamma,$$

$$\min_{u_2 > 0}(-\alpha \log u_2 + \beta u_2) = -\alpha \log \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \alpha,$$

ce qui implique que le point  $P_0 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$  est le point du minimum de la fonction  $U_0(u_1, u_2)$ .

Par conséquent la courbe

$$\{(u_1, u_2) \in ]0, \infty[ \times ]0, \infty[ \mid U_0(u_1, u_2) = U_0\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)\}$$

se réduit à un point, tandis que les courbes

$$\{(u_1, u_2) \in ]0, \infty[ \times ]0, \infty[ \mid U_0(u_1, u_2) = C\}, \quad C > U_0\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

sont des courbes fermées autour du point  $P_0 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$  sur  $]0, \infty[ \times ]0, \infty[$ . Comme le vecteur

$$\begin{pmatrix} \alpha u_1 - \beta u_1 u_2 \\ -\gamma u_2 + \delta u_1 u_2 \end{pmatrix}$$

ne s'annule qu'au point  $P_0 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$  sur  $]0, \infty[ \times ]0, \infty[$  et que donc, compte tenu de la continuité de ce vecteur par rapport à  $(u_1, u_2) \in ]0, \infty[ \times ]0, \infty[$ , la solution du système d'équations (1.40) qui passe par quelconque point différent de  $P_0 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$  est périodique en  $t$ .

Nous renvoyons à [56] les ultérieures caractérisations de la solution du système d'équations (1.40).

Les systèmes d'équations (1.39)–(1.42) sont conçus en considérant la population totale de chaque espèce dans une région. Mais la population n'est pas nécessairement répandue d'une manière homogène dans une région et on peut s'intéresser à connaître la densité de population à chaque point de la région. On s'intéresse donc à l'effet de la diffusion de la population dans la dynamique de population. Ainsi, par exemple, au lieu du système d'équations (1.39) on considère le système d'équations dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$  ou  $= 3$ ,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_1(t, x) = \kappa_1 \Delta u_1(t, x) + \alpha_1 u_1(t, x) - \beta_{11} (u_1(t, x))^2 - \beta_{12} u_1(t, x) u_2(t, x), \\ \frac{d}{dt} u_2(t, x) = \kappa_2 \Delta u_2(t, x) + \alpha_2 u_2(t, x) - \beta_{21} u_1(t, x) u_2(t, x) - \beta_{22} (u_2(t, x))^2. \end{cases}$$

De manière analogue, on peut considérer la variante de (1.40), (1.41), (1.42) avec la diffusion de population.

Comme ces équations sont du type parabolique, ces systèmes d'équations avec diffusion ont été étudiés par plusieurs chercheurs en utilisant les propriétés des équations paraboliques. Nous citons quelques travaux sur ce thème [24, 38, 44, 48, 29, 30] (dans [29, 30] on considère aussi la perturbation stochastique).

Les populations, au moins les populations animales, peuvent se déplacer collectivement. Certes, lorsqu'il s'agit du déplacement de population à cause de la distribution de la nourriture ou des conditions environnementales non homogènes, on pourrait penser le déplacement collectif de population comme une manière particulière de diffusion et formuler le

problème dans le cadre des équations avec diffusion. Mais il y a aussi des cas où les populations sont déplacées par une force extérieure précise, par exemple pour les populations vivant dans un fleuve l'écoulement de l'eau cause le déplacement collectif de population (même si les poissons ont la possibilité de nager contre le flux); dans ce cas il est raisonnable de modéliser la dynamique de population par des équations avec diffusion et déplacement (transport), comme il a été fait pour les populations fluviales [49, 59] (nous citons aussi d'autres travaux qui considèrent des équations avec diffusion et déplacement pour la dynamique de populations [15, 43, 42, 61], ..., etc. Mais les systèmes d'équations de transport-diffusion sont assez complexes, de sorte qu'il nous semble que l'étude de modèles de dynamique de populations avec diffusion et déplacements a été faite seulement partiellement et a encore beaucoup de choses à faire.

L'analyse du comportement asymptotique pour  $t \rightarrow \infty$  d'un modèle de proie-prédateur avec diffusion et déplacements, plus précisément le système d'équations

$$\partial_t u_1(t, x) = -v_1(t) \partial_x u_1(t, x) + \kappa \partial_x^2 u_1(t, x) + \alpha u_1(t, x) - \beta u_1(t, x) u_2(t, x), \quad (1.49)$$

$$\partial_t u_2(t, x) = -v_2(t) \partial_x u_2(t, x) + \kappa \partial_x^2 u_2(t, x) - \gamma u_2(t, x) + \delta u_1(t, x) u_2(t, x), \quad (1.50)$$

sera développée dans le chapitre suivant.

## 1.4 Calcul numérique pour les systèmes d'équations de transport-diffusion

Le calcul numérique appliqué aux systèmes d'équations aux dérivées partielles (en particulier systèmes de transport-diffusion) ou d'équations intégro-différentielles, présente des spécificités dues à la nature couplée des inconnues, ce qui exige l'utilisation de schémas adaptés (tels que la méthode des différences finies ou la méthode de collocation) ainsi qu'un maillage cohérent pour garantir la stabilité et la convergence de la solution approchée.

La présente section rassemble les notions fondamentales nécessaires à la construction des approximations de la solution du système de transport-diffusion d'une manière rigoureuse et à l'analyse de la méthode proposée.

### 1.4.1 Rappels sur les équations intégro-différentielles

Les équations intégro-différentielles (EID) apparaissent fréquemment lorsqu'on reformule des problèmes de Cauchy sous forme d'équations intégrales. Elles se caractérisent par l'apparition d'une fonction inconnue sous le signe d'intégrale, ainsi que leurs dérivées.

Une forme typique d'EID est donnée par l'équation intégro-différentielle de Volterra, qui s'écrit sous la forme suivante :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, u(t), u'(t), \dots, u^{n-1}(t)) dt, \quad (1.51)$$

où la région d'intégration est variable ( $u^{(n)}(x)$  désigne la dérivée  $n$ -ième de  $u(x)$ ).

Cette équation peut être linéaire si  $K(x, t, u(t), u'(t), \dots, u^{n-1}(t)) = \sum_{i=0}^{n-1} k(x, t) u^{(i)}(t)$ , mais si la fonction  $K(x, t, u(t))$  dépend de  $u$  de manière non linéaire, ou si l'équation contient une fonction non linéaire de  $u$ , telle que  $u^n$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$ ,  $e^u$ ,  $\sin(u)$ ,  $\cosh(u)$ ,  $\ln(1 + u)$ , alors l'équation devient non linéaire.

Elle peut être homogène si la fonction  $f(x)$  est nulle, sinon, l'équation est dite non homogène.

**Remarque 1.2.** Dans plusieurs cas, on peut dériver certaines équations intégro-différentielles pour retrouver une EDP équivalente. Inversement, une EDP peut être reformulée en une équation intégro-différentielle. Ce lien nous permet de choisir la forme la plus adaptée à l'analyse.

Pour effectuer ce type de transformation, il est essentiel de rappeler les propriétés bien connues de la dérivée et de l'intégrale, dont nous aurons besoin pour la méthode du calcul numérique présentée dans le chapitre 3.

**Lemme 1.5. (Formule de Leibniz [17, 58])** Soit  $f(x, t)$  une fonction continue. Supposons que  $\frac{\partial f}{\partial t}$  est également continue dans un domaine du plan contenant le rectangle  $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, t_0 \leq t \leq t_1\}$ . Posons

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, t) dt. \quad (1.52)$$

Alors, la dérivée de l'intégrale dans (1.52) existe et est donnée par :

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x, h(x)) \frac{dh(x)}{dx} - f(x, g(x)) \frac{dg(x)}{dx} + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt. \quad (1.53)$$

Si  $g(x) = a$  et  $h(x) = b$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes, alors la formule de Leibniz (1.53) se réduit à

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt. \quad (1.54)$$

**Lemme 1.6.** [58] Pour toute fonction intégrable  $u(x)$ , on a

$$\int_0^x \int_0^s u(t) dt ds = \int_0^x (x-t)u(t) dt. \quad (1.55)$$

Dans le cas général, on a

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-1}} u(x_n) dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} u(t) dt. \quad (1.56)$$

## 1.4.2 Espace des splines polynomiales

Soit  $I = [0, a] \times [0, b]$ . Considérons deux maillages uniformes :

- $I_h = \{t_n : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T\}$ , une subdivision de  $[0, a]$  en  $N$  sous-intervalles de longueur  $h = \frac{a}{N}$ ,
- $I_k = \{x_m : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = X\}$ , une subdivision de  $[0, b]$  en  $M$  sous-intervalles de longueur  $k = \frac{b}{M}$ .

Définissons aussi les sous-intervalles  $\delta_n = (t_n, t_{n+1})$  pour  $n = 0, 1, \dots, N-1$  et  $\delta_m = (x_m, x_{m+1})$  pour  $m = 0, 1, \dots, M-1$ .

**Définition 1.1. (Espace des splines polynomiales)** Pour un maillage donné  $I_h$ , l'espace des splines polynomiales  $S_\mu^{(d)}$  avec  $\mu \geq 0$ ,  $-1 \leq d \leq \mu$  est donné par

$$S_\mu^{(d)}(I_h) = \left\{ v \in C^d([0, a]) : v|_{\delta_n} \in \pi_\mu, 0 \leq n < N \right\}$$

où  $\pi_\mu$  désigne l'ensemble des polynômes réels de degré au plus  $\mu$  en  $x$ .

La dimension de cet espace est donnée par :

$$\dim S_\mu^{(d)}(I_h) = N(\mu - d) + d + 1.$$

On peut étendre la définition de l'espace des splines polynomiales aux deux dimensions, sur le rectangle  $I$ , comme suit :

**Définition 1.2. (Espace des splines polynomiales bivariées)** Pour deux maillages donnés  $I_h$  et  $I_k$ , l'espace des splines polynomiales bivariées  $S_{p+d, q+d}^{(d)}(I_{h,k})$  avec  $p \geq 1$ ,  $d \geq -1$  est donné par

$$S_{p+d, q+d}^{(d)}(I_{h,k}) = \left\{ v \in C^d(I) : v|_{\delta_{n,m}} \in \pi_{p+d, q+d}, 0 \leq n < N, 0 \leq m < M \right\}$$

où  $I_{h,k} = I_h \times I_k = \{(t_n, x_m), 0 \leq n < N, 0 \leq m < M\}$  et  $\delta_{n,m} = \delta_n \times \delta_m$ , avec  $\pi_{p+d, q+d}$  désigne l'ensemble des polynômes réels de degré au plus  $p + d$  en  $t$  et  $q + d$  en  $x$ .

La dimension de cet espace est donnée par :

$$\dim S_{p+d, q+d}^{(d)}(I_{h,k}) = (Np + d + 1)(Mq + d + 1).$$

**Remarque 1.3.** Le choix de l'espace des splines polynomiales approprié pour l'approximation des solutions de problèmes à conditions initiales (EDO ou équations intégrales de Volterra ou intégro-différentielles de Volterra) dépend du  $d$  :

- Si aucune condition initiale n'est imposée (comme pour certaines équations intégrales de Volterra), on choisit spécifiquement  $d = -1$ . Ce choix conduit à l'espace de collocation  $S_{p-1}^{(-1)}(I_{h,k})$ .
- Si une seule condition initiale est imposée (comme pour certaines équations intégro-différentielles de Volterra), on pose  $d = 0$ . On utilise alors l'espace  $S_p^{(0)}(I_{h,k})$ .
- Dans les cas où plusieurs conditions initiales sont imposées (par exemple, pour des équations intégro-différentielles de Volterra d'ordre  $n$ ), on fixe  $d = n - 1$ , ce qui conduit à l'espace  $S_{p+n-1}^{(n-1)}(I_{h,k})$ .

Ces espaces permettent une représentation flexible et précise de la solution approchée de l'équation étudiée (EDP, équation intégrale ou équation intégro-différentielle), notamment grâce à leur structure par morceaux.

### 1.4.3 Méthode de collocation basée sur les pôlynomes de Taylor

L'une des méthodes numériques les plus importantes pour résoudre les équations intégrales (respectivement les équations intégro-différentielles) est la méthode de collocation basée sur les pôlynomes de Taylor, qui consiste à approcher la solution  $u(x)$  dans l'espace réel des splines polynomiales  $S_p^{(d)}(\Pi_M)$  par un développement de Taylor d'ordre  $p$  autour d'un point  $x_m$  en chaque rectangle  $\delta_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, M - 1$ , sous la forme :

$$u_m(x) = \sum_{i=0}^p \frac{u_m^{(i)}(x_m)}{i!} (x - x_m)^i, \quad \forall x \in \delta_m.$$

En insérant cette approximation dans l'équation étudiée, et en imposant que l'égalité soit satisfaite en un certain nombre de points de collocation  $\{x_i : x_i = ik = i \frac{b}{M}, i = 1, \dots, M - 1\}$ , on obtient un système algébrique simple, pouvant être résolu explicitement, permettant de calculer les dérivées  $u_m^{(i)}(x_m)$  ou les coefficients correspondants. Cette méthode permet d'obtenir une solution approchée explicite, sans nécessiter la résolution d'un système d'équations

algébriques. Son ordre de convergence garantit une bonne précision et elle se distingue par sa simplicité algorithmique et son efficacité numérique.

En raison de ces propriétés avantageuses, cette méthode sera développée dans le chapitre 3 afin d'approximer la solution d'un système d'équations intégro-différentielles issue de la reformulation d'un système d'équations de transport-diffusion.

Pour plus d'informations et d'exemples d'application, voir par exemple [6, 7, 8].

#### 1.4.4 Résultats auxiliaires

Les lemmes suivants sont fréquemment utilisés pour établir la précision et la convergence de la méthode de collocation basée sur les pôlynomes de Taylor, en particulier dans le cadre de l'étude théorique développée au chapitre 3.

**Lemme 1.7. (Théorème de Taylor pour les fonctions de deux variables indépendantes [17])** Soit  $f$  une fonction  $p$  fois continûment dérivable sur  $D = [0, a] \times [0, b]$  et soit  $(x_0, y_0) \in D$ . Alors pour tout  $(x, y) \in D$ , on a

$$f(x, y) = \sum_{i+j=0}^{p-1} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^j} (x - x_0)^i (y - y_0)^j \\ + \sum_{i+j=p} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f(x_1, y_1)}{\partial x^i \partial y^j} (x - x_0)^i (y - y_0)^j,$$

où

$$\begin{cases} x_1 = \theta x + (1 - \theta)x_0 \in [0, a], \\ y_1 = \theta y + (1 - \theta)y_0 \in [0, b], \end{cases} \quad \theta \in ]0, 1[.$$

Pour la démonstration, voir par exemple [17].

**Lemme 1.8. (L'inégalité discrète de type Gronwall [14])** Soit  $p_0 \geq 0$ ,  $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$  une suite de nombres non négatifs et  $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$  une suite vérifiant les relations

$$\varepsilon_0 \leq p_0, \quad \varepsilon_n \leq p_0 + \sum_{i=0}^{n-1} k_i \varepsilon_i, \quad n = 1, 2, \dots$$

Alors, pour  $n = 1, 2, \dots$  on a

$$\varepsilon_n \leq p_0 \exp \left( \sum_{j=0}^{n-1} k_j \right).$$

## CHAPITRE 2

### COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SOLUTION DE L'ÉQUATION DE LOTKA-VOLTERRA AVEC DÉPLACEMENTS ET DIFFUSION

#### Sommaire

|   |    |
|---|----|
| 2.1 Introduction aux problématiques de l'équation de Lotka-Volterra avec déplacement et diffusion . . . . . | 30 |
| 2.2 Motivation et quelques exemples numériques . . . . .  | 32 |
| 2.3 Position du problème et résultat préliminaire . . . . .   | 35 |
| 2.4 Résultat principal . . . . .  | 37 |
| 2.5 Démonstration de la proposition 2.4.1 . . . . .   | 38 |
| 2.6 Démonstration du Théorème 2.4.1 . . . . .   | 42 |
| 2.7 Conclusion . . . . .  | 49 |

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'équation de Lotka–Volterra avec déplacements et diffusion, c'est-à-dire un système de transport-diffusion décrivant l'évolution de populations proie–prédateur dans un domaine périodique de  $\mathbb{R}$ . L'analyse met l'accent sur la justification des propriétés asymptotiques des solutions lorsque le modèle prend en compte simultanément les déplacements spatiaux et les effets de diffusion.

#### 2.1 Introduction aux problématiques de l'équation de Lotka-Volterra avec déplacement et diffusion

Comme il est bien connu, le système d'équations, appelé *équation de Lotka-Volterra*,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u_1 = \alpha u_1 - \beta u_1 u_2 \\ \frac{d}{dt}u_2 = -\gamma u_2 + \delta u_1 u_2 \end{cases}$$

( $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ ) a été proposé pour modéliser l'évolution des populations de proie (représentée par  $u_1$ ) et de prédateur (représentée par  $u_2$ ). Ce système d'équations a la particularité : toutes ses solutions (positives) sont périodiques, comme illustré dans [56]. Dans [56] on trouve aussi une analyse détaillée du comportement de la solution et différentes variantes de l'équation.

Quant à l'équation de Lotka-Volterra avec diffusion, Rothe [53] a considéré l'équation de Lotka-Volterra avec diffusion (avec le même coefficient de diffusion pour les deux espèces) dans le domaine d'une dimension  $0 < x < 1$  avec les conditions aux limites de périodicité en  $x$  (ou conditions de Neumann homogènes) et démontré la convergence uniforme vers la solution périodique en  $t$  de l'équation de Lotka-Volterra (indépendante de  $x$ ) (voir aussi [47], qui avait fait des raisonnements similaires). D'autre part, Gabbuti et Negro [24] ont démontré la convergence de la solution de l'équation de Lotka-Volterra avec diffusion sur un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  avec la condition de Neumann homogène vers la solution périodique en  $t$  de l'équation de Lotka-Volterra (indépendante de  $x$ ); dans le travail [24] les coefficients de diffusion ne sont pas identiques pour les deux espèces et la convergence est dans un sens intégral, mais suffisamment fort. Successivement le comportement asymptotique de la solution de l'équation de Lotka-Volterra avec la diffusion avec la condition de Dirichlet a été étudié dans [60], tandis que l'aspect de la propagation dans l'espace de la solution de l'équation de Lotka-Volterra continue à susciter l'intérêt des chercheurs (voir par exemple [19, 20]).

En ce concerne l'équation de Lotka-Volterra avec la diffusion en une dimension spatiale, la question relative à la "travelling waves" a intéressé beaucoup de chercheurs. Mais les résultats de [47] et [53] excluent l'existence d'une "travelling wave" pour l'équation de Lotka-Volterra classique avec la diffusion simple. Pour cela plusieurs chercheurs ont cherché l'aspect de "travelling wave" pour des équations légèrement modifiées (voir par exemple [5, 18, 32, 21, 57]).

Dans le contexte des équations stochastiques, l'équation de Lotka-Volterra avec l'effet logistique et avec la diffusion a été étudiée. Dans [28] le théorème d'existence et unicité de la solution a été démontré, tandis que l'existence d'une mesure invariante a été démontrée dans [31].

Dans [41], l'auteur a considéré l'équation de Lotka-Volterra avec diffusion et des déplacements de populations. Les résultats de ce travail sont essentiellement des résultats numériques. Or, la question de déplacement/immigration de population a attiré l'attention de nombreux chercheurs, comme témoigné par plusieurs publications récentes (voir par exemple [2, 33, 34]).

Dans ce chapitre, nous considérons l'équation de Lotka-Volterra avec diffusion et des déplacements de populations sur le domaine périodique de  $\mathbb{R}$  et démontrons la bornitude de  $u_1(t, x)$ ,  $u_2(t, x)$ ,  $\log u_1(t, x)$ ,  $\log u_2(t, x)$ . Nous démontrons aussi que dans le cas où la solution  $(u_1, u_2)$  tend vers la solution stationnaire en moyenne,  $(u_1, u_2)$  converge uniformément vers la solution stationnaire. Pour obtenir ce résultat, nous utilisons la fonction  $U = -\alpha u_2 - \gamma u_1 + \beta u_2 + \delta u_1$ , mais à cause des déplacements des populations on ne peut pas tirer la conclusion directement de l'équation pour  $U$ , comme les auteurs de [47] et [53] le faisaient. Pour surmonter cette difficulté, nous établissons une estimation de  $U$  dans  $L^2(0, 2\pi)$  et aussi des estimations de croissance ponctuelle de  $u_1(t, x)$  et  $u_2(t, x)$ .

L'étude présentée dans ce chapitre est motivée non seulement par l'intérêt général pour l'effet de déplacement/immigration pour la dynamique de populations, mais aussi par le comportement spécifique qui résulte du calcul numérique de la solution de l'équation de Lotka-Volterra avec des déplacements de direction opposée de la population de proie et de la population de prédateurs. L'illustration de ce point sera donnée dans la section qui suit.

## 2.2 Motivation et quelques exemples numériques

Comme nous l'avons évoqué dans l'Introduction de la problématique, l'évolution des populations de proie et de prédateurs est modélisée, comme modèle de base, par l'équation de Lotka-Volterra

$$\frac{d}{dt}u_1(t) = \alpha u_1(t) - \beta u_1(t)u_2(t), \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt}u_2(t) = -\gamma u_2(t) + \delta u_1(t)u_2(t), \quad (2.2)$$

où  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  désignent respectivement la population de proie et celle de prédateurs, tandis que les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  sont supposés constants et strictement positifs. Nous considérons le système d'équations (2.1)–(2.2) avec les conditions initiales

$$u_1(0) = u_{1,0} > 0, \quad u_2(0) = u_{2,0} > 0. \quad (2.3)$$

Nous rappelons d'abord les propriétés fondamentales bien connues de la solution du système d'équations (2.1)–(2.2). Pour cela, nous définissons la fonction  $U_0(\cdot, \cdot)$  par

$$U_0(u_1, u_2) = -\alpha \log u_2 - \gamma \log u_1 + \beta u_2 + \delta u_1, \quad u_1 > 0, u_2 > 0. \quad (2.4)$$

**Remarque 2.2.1.** Quelles que soient les données initiales  $u_{1,0} > 0$ ,  $u_{2,0} > 0$ , la solution  $(u_1(t), u_2(t))$  du problème de Cauchy (2.1)–(2.3) existe pour tout  $t > 0$  et est périodique en  $t$ . En outre, la fonction  $U_0(u_1(t), u_2(t))$  reste constante, c'est-à-dire

$$U_0(u_1(t), u_2(t)) = U_0(u_1(0), u_2(0)) = -\alpha \log(u_2(0)) - \gamma \log(u_1(0)) + \beta u_2(0) + \delta u_1(0)$$

pour tout  $t \geq 0$  et la solution  $(u_1(t), u_2(t))$  fait le tour sur la courbe fermée

$$\gamma = \{ (u_1, u_2) \mid u_1 > 0, u_2 > 0, U_0(u_1, u_2) = U_0(u_1(0), u_2(0)) \}$$

avec une période constante.

Pour la démonstration de ce fait, voir [56] (et bien d'autres manuels de dynamique de populations).

Le modèle (2.1)–(2.2) est conçu pour la population de proie et celle de prédateurs réparties de manière homogène dans un territoire. Mais, si les populations ne sont pas distribuées de manière homogène et s'il y a des déplacements de populations, les relations mentionnées dans la remarque 2.2.1 ne seront pas garanties. Voyons un exemple de changement du comportement de la solution.

Considérons le système d'équations

$$\begin{cases} \partial_t u_1(t, x) = -v_1(t) \partial_x u_1(t, x) + \alpha u_1(t, x) - \beta u_1(t, x) u_2(t, x), \\ \partial_t u_2(t, x) = -v_2(t) \partial_x u_2(t, x) - \gamma u_2(t, x) + \delta u_1(t, x) u_2(t, x), \end{cases} \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

avec la condition initiale

$$u_1(0, x) = \bar{u}_1(x), \quad u_2(0, x) = \bar{u}_2(x).$$

Choisissons une donnée initiale particulière  $(\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x))$  définie comme suit : considérons le système d'équations (2.1)–(2.2) et dans ces équations au lieu de  $t$  écrivons  $x$ . On choisit une solution  $(\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x))$  de ce système d'équations ; il est clair que les fonctions  $\bar{u}_1(x)$  et  $\bar{u}_2(x)$  peuvent être définies sur  $\mathbb{R}$  et sont périodiques. Supposons en outre que  $v_1(t) = -v_2(t)$  pour tout  $t \geq 0$  et qu'elles sont périodiques en  $t$  de la même période que la solution du système d'équations (2.1)–(2.2) avec  $u_i(t_0) = \bar{u}_i(x_0)$ ,  $i = 1, 2$ , pour certains  $t_0$  et  $x_0$ . Alors pour certain choix des fonctions  $(v_1(t), v_2(t))$  on trouve l'amplification de l'oscillation de la solution dans certains points  $x$  et la contraction dans certains points  $x$ , comme illustré dans les graphes obtenus par le calcul numérique (voir les figures 2.1-2.2).

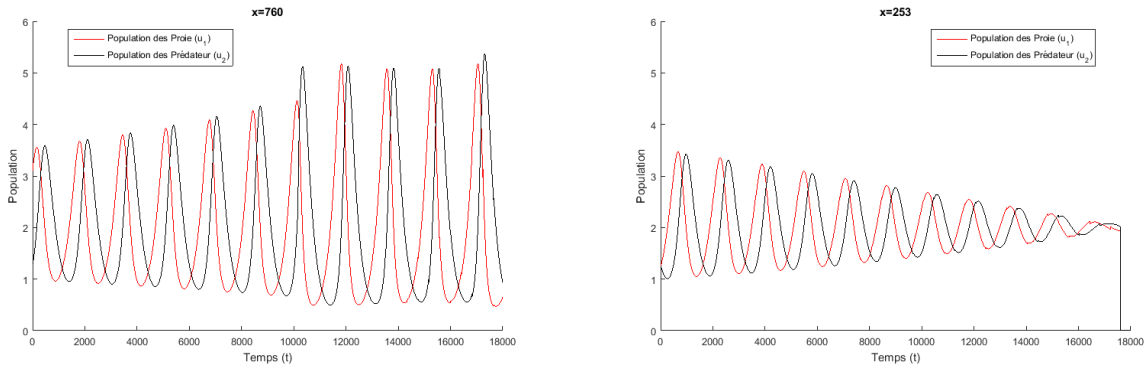


FIGURE 2.1 – Solution du système d'équations (2.5) en un point où se produit l'amplification et en un point où se produit la contraction.

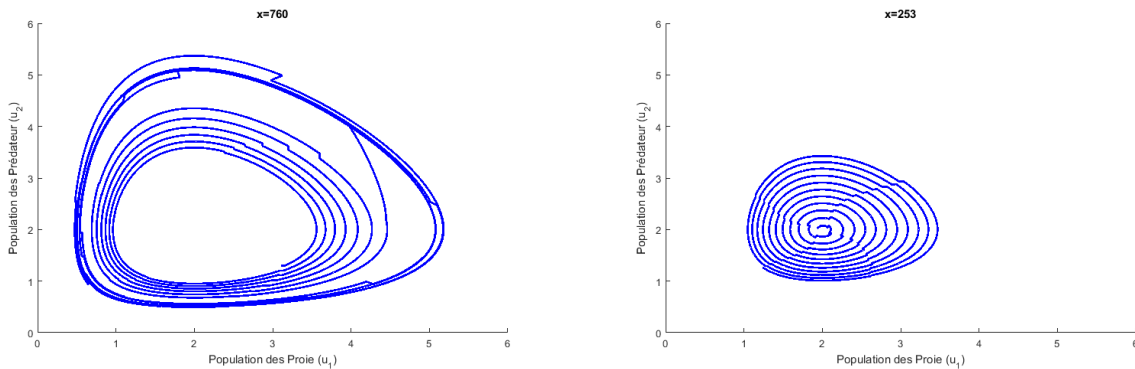


FIGURE 2.2 – Les trajectoires de la solution du système d'équations (2.5) sur le plan de phase en un point où se produit l'amplification et en un point où se produit la contraction.

Toutefois, même avec des déplacements, le système d'équations (2.5) dans un domaine périodique  $x \in \mathbb{R}/\text{mod } L$  jouit d'un comportement similaire à ce que nous avons vu dans la remarque 2.2.1.

**Remarque 2.2.2.** Soit  $L$  un nombre strictement positif. Soient  $u_{1,0}(x)$  et  $u_{2,0}(x)$  deux fonctions à valeurs strictement positives et périodiques en  $x \in \mathbb{R}$  de période  $L$ . Si la solution  $(u_1(t, x), u_2(t, x))$  du système d'équations (2.5) avec la condition initiale

$$u_1(0, x) = u_{1,0}(x), \quad u_2(0, x) = u_{2,0}(x),$$

existe et est périodique en  $x \in \mathbb{R}$  de période  $L$ , alors on a

$$\int_0^L U_0(u_1(t, x), u_2(t, x)) dx = \text{Const.} = \int_0^L U_0(u_{1,0}(x), u_{2,0}(x)) dx. \quad (2.6)$$

En effet, comme de (2.5) découlent immédiatement les égalités

$$\partial_t \log u_1 = -v_1 \partial_x \log u_1 + \alpha - \beta u_2, \quad (2.7)$$

$$\partial_t \log u_2 = -v_2 \partial_x \log u_2 - \gamma + \delta u_1, \quad (2.8)$$

de (2.5) et de (2.7)–(2.8) par des calculs directs on obtient

$$\partial_t U_0(u_1(t, x), u_2(t, x)) = -v_1 \partial_x (-\gamma \log u_1 + \delta u_1) - v_2 \partial_x (-\alpha \log u_2 + \beta u_2). \quad (2.9)$$

Comme par hypothèse  $u_1(t, x)$  et  $u_2(t, x)$  sont périodiques en  $x$  de période  $L$ , on a

$$\int_0^L \partial_x (-\gamma \log u_1 + \delta u_1) dx = \int_0^L \partial_x (-\alpha \log u_2 + \beta u_2) dx = 0,$$

donc

$$\frac{d}{dt} \int_0^L U_0(u_1(t, x), u_2(t, x)) dx = 0,$$

ce qui implique (2.6). Mais on ne peut pas en déduire que  $\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U_0(u_1(t, x), u_2(t, x))$  soit borné en  $t$ .

Vues ces circonstances, nous sommes intéressés au comportement asymptotique de la solution  $(u_1(t, x), u_2(t, x))$  de l'équation de Lotka-Volterra avec des déplacements et la diffusion (voir (2.10)–(2.11) dans la section suivante).

## 2.3 Position du problème et résultat préliminaire

Nous considérons le système d'équations

$$\partial_t u_1(t, x) = -v_1(t) \partial_x u_1(t, x) + \kappa \partial_x^2 u_1(t, x) + \alpha u_1(t, x) - \beta u_1(t, x) u_2(t, x) \quad (2.10)$$

$$\partial_t u_2(t, x) = -v_2(t) \partial_x u_2(t, x) + \kappa \partial_x^2 u_2(t, x) - \gamma u_2(t, x) + \delta u_1(t, x) u_2(t, x), \quad (2.11)$$

pour  $t \geq 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ , où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa$  sont des constantes strictement positives et  $v_1(t)$  et  $v_2(t)$  sont des fonctions de  $t$ . Le système (2.10)–(2.11) sera envisagé avec la condition initiale

$$u_i(t, x) = u_{i,0}(x), \quad i = 1, 2. \quad (2.12)$$

Pour les fonctions  $u_{1,0}(x)$  et  $u_{2,0}(x)$  nous supposons que

$$u_{i,0}(x) > 0, \quad u_{i,0}(x) = u_{i,0}(x + 2\pi) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_{i,0}(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad i = 1, 2. \quad (2.13)$$

Comme les équations (2.10)–(2.11) sont des équations paraboliques, sous les conditions (2.12)–(2.13) l'existence et l'unicité de la solution locale résultent de la théorie classique des équations paraboliques. En outre, en considérant les équations (2.10)–(2.11) sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$  avec le tore  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\text{mod } 2\pi$ , la périodicité en  $x$  de la solution  $(u_1(t, x), u_2(t, x))$  résulte automatiquement. En ce qui concerne la solution globale, nous démontrerons d'abord l'inégalité (2.25) sous l'hypothèse que la solution  $(u_1(t, x), u_2(t, x))$  du problème de Cauchy (2.10)–(2.12) existe et est unique dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  et qu'elle est périodique par rapport à  $x$  de période  $2\pi$ ; et puis nous déduisons de l'inégalité (2.25) et du théorème d'existence et unicité de la solution locale l'existence et l'unicité de la solution globale.

Maintenant, nous définissons les fonctions  $U_1(u_1)$ ,  $U_2(u_2)$  et  $U(u_1, u_2)$  :

$$U_1(u_1) = -\gamma \left( \log u_1 - \log \frac{\gamma}{\delta} \right) + \delta \left( u_1 - \frac{\gamma}{\delta} \right), \quad (2.14)$$

$$U_2(u_2) = -\alpha \left( \log u_2 - \log \frac{\alpha}{\beta} \right) + \beta \left( u_2 - \frac{\alpha}{\beta} \right), \quad (2.15)$$

$$U(u_1, u_2) = U_1(u_1) + U_2(u_2). \quad (2.16)$$

Comme

$$\min_{u_1 > 0} (-\gamma \log u_1 + \delta u_1) = -\gamma \log \left( \frac{\gamma}{\delta} \right) + \gamma, \quad (2.17)$$

$$\min_{u_2 > 0} (-\alpha \log u_2 + \beta u_2) = -\alpha \log \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) + \alpha, \quad (2.18)$$

on a  $U_1(u_1) \geq 0$ ,  $U_2(u_2) \geq 0$  et  $U(u_1, u_2) \geq 0$  pour quelconque  $u_1 > 0$  et  $u_2 > 0$  et donc

$$\min_{u_1 > 0} U_1(u_1) = \min_{u_2 > 0} U_2(u_2) = \min_{u_1 > 0, u_2 > 0} U(u_1, u_2) = 0, \quad (2.19)$$

$$U(u_1, u_2) = 0 \iff u_1 = \frac{\gamma}{\delta} \text{ et } u_2 = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (2.20)$$

Posons

$$\tilde{U}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(u_1(t, x), u_2(t, x)) dx. \quad (2.21)$$

Remarquons d'abord le fait suivant, qui se démontre de manière similaire au raisonnement de [47, 53].

**Proposition 2.3.1.** Supposons que  $\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(u_{1,0}(x), u_{2,0}(x)) < \infty$  et que le problème (2.10)–(2.12) avec (2.13) admet la solution unique  $(u_1(t, x), u_2(t, x))$  sur l'intervalle  $[0, \tau[$  ( $0 < \tau \leq \infty$ ). Alors la fonction  $\tilde{U}(t)$  est décroissante sur l'intervalle  $[0, \tau[$ .

**Démonstration** De manière similaire à l'obtention de (2.9), mais en y ajoutant les termes qui résultent des termes de diffusion, on obtient

$$\partial_t U = \kappa \partial_x^2 U - \kappa \sigma - v_1 \partial_x U_1 - v_2 \partial_x U_2, \quad (2.22)$$

où

$$\sigma = \sigma(t, x) = \gamma \left( \frac{\partial_x u_1(t, x)}{u_1(t, x)} \right)^2 + \alpha \left( \frac{\partial_x u_2(t, x)}{u_2(t, x)} \right)^2.$$

En intégrant les deux membres de l'égalité (2.22) par rapport à  $x$  de 0 à  $2\pi$ , on obtient

$$\int_0^{2\pi} \partial_t U dx = \int_0^{2\pi} (\kappa \partial_x^2 U - \kappa \sigma - v_1 \partial_x U_1 - v_2 \partial_x U_2) dx.$$

Comme les fonctions  $U(u_1(t, x), u_2(t, x))$ ,  $U_1(u_1(t, x))$  et  $U_2(u_2(t, x))$  sont périodiques en  $x$  de période  $2\pi$ , on aura

$$\frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} U(u_1(t, x), u_2(t, x)) dx = -\kappa \int_0^{2\pi} \sigma(t, x) dx,$$

ce qui, joint à la relation  $\sigma \geq 0$ , implique que la fonction  $\tilde{U}(t)$  est décroissante.  $\square$

**Corollaire 2.3.1.** Si la solution  $(u_1(t, x), u_2(t, x))$  du problème (2.10)–(2.12) (avec (2.13)) existe pour tout  $t > 0$ , alors la fonction  $\tilde{U}(t)$  converge vers une valeur  $\tilde{U}_\infty$  pour  $t \rightarrow \infty$ .

**Démonstration** Il résulte immédiatement de la proposition 2.3.1 et de (2.19).  $\square$

## 2.4 Résultat principal

Le résultat principal du présent travail est le suivant.

**Théorème 2.4.1.** Supposons que

$$\sup_{t \geq 0} |v_1(t) - v_2(t)| \equiv C_v < \infty, \quad (2.23)$$

$$\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(u_{1,0}(x), u_{2,0}(x)) < \infty. \quad (2.24)$$

Alors le problème (2.10)–(2.12) avec (2.13) admet une solution unique  $(u_1(t, x), u_2(t, x))$  pour tout  $t > 0$  et on a

$$\sup_{t \geq 0, 0 \leq x \leq 2\pi} U(u_1(t, x), u_2(t, x)) < \infty. \quad (2.25)$$

Plus précisément,

i) il existe une fonction continue et croissante  $\Lambda_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(u_1(t, x), u_2(t, x)) \leq \Lambda_1(\tilde{U}_\infty), \quad (2.26)$$

ii) si  $\tilde{U}_\infty = 0$ , alors on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(u_1(t, x), u_2(t, x)) = 0, \quad (2.27)$$

où  $\tilde{U}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{U}(t)$  avec  $\tilde{U}(t)$  définie dans (2.21).

Pour la démonstration du théorème 2.4.1 nous utilisons la proposition suivante.

**Proposition 2.4.1.** On suppose que les conditions (2.23)–(2.24) et (2.13) sont remplies et que le problème (2.10)–(2.12) admet une solution unique  $(u_1(t, x), u_2(t, x))$  pour tout  $t > 0$ . Alors il existe une fonction croissante et continue  $\Lambda_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|U(u_1(t, \cdot), u_2(t, \cdot))\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \leq \Lambda_2(\tilde{U}_\infty), \quad (2.28)$$

$$\Lambda_2(0) = 0. \quad (2.29)$$

La fonction  $\Lambda_2(\cdot)$  peut être donnée par exemple par la formule (2.42).

Dans la section suivante, nous allons démontrer la proposition 2.4.1. Le théorème 2.4.1 sera démontré dans la section successive.

## 2.5 Démonstration de la proposition 2.4.1

Pour démontrer la proposition 2.4.1, nous commençons par le lemme suivant.

**Lemme 2.5.1.** Soit  $U = U(x)$  une fonction positive et  $2\pi$ -périodique telle que

$$\left\| \frac{d}{dx} U \right\|_{L^2(0, 2\pi)} < \infty.$$

Si

$$\|U\|_{L^2(0, 2\pi)} > \sqrt{8\pi} \bar{U}, \quad (2.30)$$

alors on a

$$\left\| \frac{d}{dx} U \right\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \geq \frac{1}{256\pi^3 \bar{U}^2} \left( 1 - \frac{4\sqrt{2\pi} \bar{U}}{3\|U\|_{L^2(0, 2\pi)}} \right) \|U\|_{L^2(0, 2\pi)}^4, \quad (2.31)$$

où

$$\bar{U} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x) dx.$$

*Démonstration* Posons

$$\mu = \frac{\|U\|_{L^2(0, 2\pi)}}{2\sqrt{2\pi}}, \quad D_\mu = \{x \in [0, 2\pi] \mid U(x) > \mu\}, \quad (2.32)$$

et désignons par  $|D_\mu|$  la mesure de l'ensemble  $D_\mu$ . Comme  $U(x) > \mu$  sur  $D_\mu$ , de la définition de  $\bar{U}$  et de  $\mu$  il résulte que

$$\mu|D_\mu| \leq 2\pi\bar{U}. \quad (2.33)$$

Comme

$$U(x)^2 = (U(x) - \mu)^2 + 2\mu(U(x) - \mu) + \mu^2,$$

on a

$$\int_{D_\mu} |U(x)|^2 dx = \int_{D_\mu} (U(x) - \mu)^2 dx + 2 \int_{D_\mu} \mu(U(x) - \mu) dx + \int_{D_\mu} \mu^2 dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{D_\mu} (U(x) - \mu)^2 dx &= \int_{D_\mu} |U(x)|^2 dx - 2 \int_{D_\mu} \mu(U(x) - \mu) dx - |D_\mu|\mu^2 \\ &\geq \int_{D_\mu} |U(x)|^2 dx - 3|D_\mu|\mu^2 - \frac{1}{2} \int_{D_\mu} (U(x) - \mu)^2 dx. \end{aligned}$$

Donc, compte tenu de (2.32), on a

$$\int_{D_\mu} (U(x) - \mu)^2 dx \geq \frac{2}{3} \int_{D_\mu} |U(x)|^2 dx - 2|D_\mu|\mu^2 = \frac{2}{3} \int_{D_\mu} |U(x)|^2 dx - \frac{|D_\mu| \|U\|_{L^2(0,2\pi)}^2}{4\pi}. \quad (2.34)$$

D'autre part, on a

$$\int_{D_\mu^c} |U(x)|^2 dx \leq (2\pi - |D_\mu|)\mu^2,$$

d'où, compte tenu de (2.32),

$$\int_{D_\mu} |U(x)|^2 dx \geq \|U\|_{L^2(0,2\pi)}^2 - (2\pi - |D_\mu|)\mu^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{|D_\mu|}{8\pi}\right) \|U\|_{L^2(0,2\pi)}^2. \quad (2.35)$$

De (2.34) et (2.35) on obtient

$$\int_{D_\mu} (U(x) - \mu)^2 dx \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{|D_\mu|}{6\pi}\right) \|U\|_{L^2(0,2\pi)}^2. \quad (2.36)$$

Rappelons que sous la condition (2.30) la relation (2.33) implique que  $|D_\mu| < 2\pi$  et donc il existe au moins un  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  tel que  $U(\bar{x}) \leq \mu$ . Comme  $U(x)$  est  $2\pi$ -périodique, il n'est pas restrictif de supposer que  $\bar{x} = 0$  (et donc  $U(\bar{x} + 2\pi) \leq \mu$ ).

Considérons d'abord le cas où

$$D_\mu = ]x_0, x_0 + |D_\mu|[.$$

Dans ce cas, comme on a

$$\int_{D_\mu} (U(x) - \mu)^2 dx = \int_{D_\mu} 2 \int_{x_0}^x (U(x') - \mu) \frac{d}{dx'} U(x') dx' dx$$

et donc

$$\int_{D_\mu} (U(x) - \mu)^2 dx \leq 2|D_\mu| \left( \int_{D_\mu} (U(x) - \mu)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{D_\mu} \left( \frac{d}{dx} U(x) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

on obtient

$$\int_{D_\mu} (U(x) - \mu)^2 dx \leq 4|D_\mu|^2 \int_{D_\mu} \left( \frac{d}{dx} U(x) \right)^2 dx. \quad (2.37)$$

Même dans le cas général avec

$$D_\mu = \bigcup_{k=0}^N ]x_k, x'_k[, \quad |D_\mu| = \sum_{k=1}^N (x'_k - x_k), \quad N \in \mathbb{N}, N \geq 2 \text{ ou } N = +\infty,$$

sur chaque intervalle  $]x_k, x'_k[$  on a

$$\int_{x_k}^{x'_k} (U(x) - \mu)^2 dx \leq 4|D_\mu|^2 \int_{x_k}^{x'_k} \left( \frac{d}{dx} U(x) \right)^2 dx.$$

De la somme de ces inégalités on obtient (2.37).

De (2.36) et de (2.37) on obtient

$$\int_{D_\mu} \left( \frac{d}{dx} U(x) \right)^2 dx \geq \frac{1}{4|D_\mu|^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{|D_\mu|}{6\pi} \right) \|U\|_{L^2(0,2\pi)}^2. \quad (2.38)$$

Comme d'après (2.33) on a

$$|D_\mu| \leq \frac{4\pi\sqrt{2\pi\bar{U}}}{\|U\|_{L^2(0,2\pi)}},$$

de (2.38) on obtient

$$\int_{D_\mu} \left( \frac{d}{dx} U(x) \right)^2 dx \geq \frac{1}{256\pi^3\bar{U}^2} \left( 1 - \frac{4\sqrt{2\pi\bar{U}}}{3\|U\|_{L^2(0,2\pi)}} \right) \|U\|_{L^2(0,2\pi)}^4.$$

Comme  $\int_0^{2\pi} \left( \frac{d}{dx} U(x) \right)^2 dx \geq \int_{D_\mu} \left( \frac{d}{dx} U(x) \right)^2 dx$ , on en déduit l'inégalité (2.31). Le lemme est démontré.  $\square$

Du lemme 2.5.1 découle la propriété suivante.

**Lemme 2.5.2.** On suppose que les conditions (2.23)–(2.24) et (2.13) sont remplies et que le problème (2.10)–(2.12) admet une solution unique  $(u_1(t, x), u_2(t, x))$  pour tout  $t > 0$ . Soit

$U(\cdot, \cdot)$  la fonction définie dans (2.16). Soit  $\tilde{U}(t)$  la fonction définie dans (2.21). Si

$$\|U(u_1(t, \cdot), u_2(t, \cdot))\|_{L^2(0, 2\pi)} > \sqrt{8\pi}\tilde{U}(t),$$

alors on a

$$\frac{d}{dt}\|U\|_{L^2}^2 \leq \left( \frac{C_v^2}{\kappa} - \frac{\kappa}{256\pi^3\tilde{U}^2} \left( 1 - \frac{4\sqrt{2\pi}}{3\|U\|_{L^2}}\tilde{U} \right) \|U\|_{L^2}^2 \right) \|U\|_{L^2}^2, \quad (2.39)$$

où  $\tilde{U} = \tilde{U}(t)$  et  $\|U\|_{L^2} = \|U(u_1(t, \cdot), u_2(t, \cdot))\|_{L^2(0, 2\pi)}$ .

**Démonstration** En écrivant  $v_1(t) - v_2(t) + v_2(t)$  au lieu de  $v_1(t)$  dans (2.22), on a

$$\partial_t U = \kappa \partial_x^2 U - \kappa \sigma(t, x) - v_2(t) \partial_x U - (v_1(t) - v_2(t)) \partial_x U_1. \quad (2.40)$$

Si on multiplie les deux membres de (2.40) par  $U$  et les intègre sur  $[0, 2\pi]$ , alors, en utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} |U|^2 dx = -\kappa \int_0^{2\pi} |\partial_x U|^2 dx - \kappa \int_0^{2\pi} \sigma U dx + (v_1(t) - v_2(t)) \int_0^{2\pi} U_1 \partial_x U dx.$$

Remarquons que, en vertu des relations  $U = U_1 + U_2$ ,  $U_1 \geq 0$ ,  $U_2 \geq 0$  (voir (2.14)–(2.18)), on a

$$\int_0^{2\pi} U_1 \partial_x U dx \leq \frac{1}{2\kappa} \int_0^{2\pi} |U_1|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^{2\pi} |\partial_x U|^2 dx \leq \frac{1}{2\kappa} \int_0^{2\pi} |U|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^{2\pi} |\partial_x U|^2 dx.$$

Donc, compte tenu de la relation  $\sigma U \geq 0$ , on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} |U|^2 dx \leq -\frac{\kappa}{2} \int_0^{2\pi} |\partial_x U|^2 dx + \frac{|v_1(t) - v_2(t)|^2}{2\kappa} \int_0^{2\pi} |U|^2 dx. \quad (2.41)$$

En appliquant l'inégalité (2.31) au premier terme du second membre de (2.41) et en tenant compte de la condition (2.23), on obtient (2.39). Le lemme est démontré.  $\square$

**Démonstration de la proposition 2.4.1** Remarquons que, si  $\|U\|_{L^2} > \sqrt{8\pi}\tilde{U}$ , alors on a

$$1 - \frac{4\sqrt{2\pi}}{3\|U\|_{L^2}}\tilde{U} \geq \frac{1}{3}$$

et donc dans ce cas le second membre de l'inégalité (2.39) est majoré par

$$\left( \frac{C_v^2}{\kappa} - \frac{\kappa}{256\pi^3\tilde{U}^2} \frac{\|U\|_{L^2}^2}{3} \right) \|U\|_{L^2}^2,$$

Par conséquent, du lemme 2.5.2 il résulte que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |U(u_1(t, x), u_2(t, x))|^2 dx \leq \Lambda_2(\tilde{U}_\infty),$$

où  $\Lambda_2(\cdot)$  est définie par

$$\Lambda_2(a) = \max \left( 8\pi, \frac{768\pi^3 C_v^2}{\kappa^2} \right) a^2, \quad (2.42)$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 2.4.1.  $\square$

## 2.6 Démonstration du Théorème 2.4.1

Pour démontrer le théorème 2.4.1 nous commençons par une estimation de  $\|\partial_x U(u_1(t, \cdot), u_2(t, \cdot))\|_{L^2(0, 2\pi)}$ . On a le lemme suivant (dans les lemmes 2.6.1–2.6.7 on suppose que l'hypothèse de la proposition 2.4.1 est vérifiée).

**Lemme 2.6.1.** Pour tout  $t_2 > t_1 \geq 0$  on a

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \|\partial_x U(u_1(t, \cdot), u_2(t, \cdot))\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 dt &\leq \\ &\leq \frac{C_v}{\kappa^2} \int_{t_1}^{t_2} \|U(u_1(t, \cdot), u_2(t, \cdot))\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 dt + \frac{1}{\kappa} \|U(u_1(t_1, \cdot), u_2(t_1, \cdot))\|_{L^2(0, 2\pi)}^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

*Démonstration* On note  $U(t, x) = U(u_1(t, x), u_2(t, x))$ . De l'inégalité (2.41) on déduit que

$$\int_0^{2\pi} |\partial_x U(t, x)|^2 dx \leq \frac{|v_1(t) - v_2(t)|^2}{\kappa^2} \int_0^{2\pi} |U(t, x)|^2 dx - \frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} |U(t, x)|^2 dx.$$

En intégrant les deux membres de cette inégalité par rapport à  $t$  de  $t_1$  à  $t_2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \|\partial_x U(t, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 dt &\leq \\ &\leq \frac{C_v}{\kappa^2} \int_{t_1}^{t_2} \|U(t, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 dt - \frac{1}{\kappa} \left( \|U(t_2, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 - \|U(t_1, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

En éliminant le terme négatif du second membre de l'inégalité (2.44), on obtient (2.43).  $\square$

Du lemme 2.6.1 on déduit la relation suivante.

**Lemme 2.6.2.** On a

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(u_1(t', x), u_2(t', x)) dt' &\leq \\ &\leq \tilde{U}(t) + \sqrt{2\pi} \left( \frac{C_v}{\kappa^2} \int_t^{t+1} \|U(u_1(t', \cdot), u_2(t', \cdot))\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 dt' + \frac{1}{\kappa} \|U(u_1(t, \cdot), u_2(t, \cdot))\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

**Démonstration** On note  $U(t, x) = U(u_1(t, x), u_2(t, x))$  comme dans la démonstration du lemme 2.6.1. Comme  $\|\varphi\|_{L^1(0, 2\pi)} \leq \sqrt{2\pi}\|\varphi\|_{L^2(0, 2\pi)}$  pour tout  $\varphi \in L^2(0, 2\pi)$ , de la relation

$$\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(t, x) \leq \tilde{U}(t) + \|\partial_x U(t, \cdot)\|_{L^1(0, 2\pi)}$$

on obtient

$$\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(t, x) \leq \tilde{U}(t) + \sqrt{2\pi}\|\partial_x U(t, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}. \quad (2.46)$$

Compte tenu de la décroissance de  $\tilde{U}(t)$ , l'inégalité (2.45) résulte immédiatement de (2.43) et de (2.46).  $\square$

Maintenant, nous allons estimer la croissance de  $\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} u_1(t, x)$ ,  $\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} u_2(t, x)$ ,  $\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} (-\log u_1(t, x))$ ,  $\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} (-\log u_2(t, x))$ . Pour cela, nous retournons aux équations (2.10) et (2.11). Remarquons que, si on introduit la fonction

$$\xi_1(t, x) = x + \int_0^t v_1(t') dt',$$

et si on considère les variables  $(t, \xi_1)$  au lieu de  $(t, x)$ , alors l'équation (2.10) se transforme en

$$\partial_t u_1(t, \xi_1) = \kappa \partial_{\xi_1}^2 u_1(t, \xi_1) + \alpha u_1(t, \xi_1) - \beta u_1(t, \xi_1) u_2(t, \xi_1). \quad (2.47)$$

Analoguement, si on introduit la fonction

$$\xi_2(t, x) = x + \int_0^t v_2(t') dt',$$

et si on considère les variables  $(t, \xi_2)$  au lieu de  $(t, x)$ , alors l'équation (2.11) se transforme en

$$\partial_t u_2(t, \xi_2) = \kappa \partial_{\xi_2}^2 u_2(t, \xi_2) - \gamma u_2(t, \xi_2) + \delta u_1(t, \xi_2) u_2(t, \xi_2). \quad (2.48)$$

En utilisant (2.47) et (2.48), on va démontrer les quatre lemmes suivants.

**Lemme 2.6.3.** Soit

$$u_1^+(t) = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} u_1(t, x) = \sup_{\xi_1 \in \mathbb{R}} u_1(t, \xi_1). \quad (2.49)$$

Alors pour  $0 \leq t_0 \leq t$  on a

$$u_1^+(t) \leq u_1^+(t_0) e^{\alpha(t-t_0)} \equiv \Phi_1(u_1^+(t_0), t - t_0). \quad (2.50)$$

**Démonstration** En appliquant formellement la solution fondamentale de l'équation de la chaleur à (2.47), on a

$$u_1(t, \xi_1) = \int_{\mathbb{R}} \Theta(t - t_0, \xi' - \xi_1) u_1(t_0, \xi') d\xi' + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} \Theta(t - t', \xi' - \xi_1) (\alpha u_1(t', \xi') - \beta u_1(t', \xi') u_2(t', \xi')) d\xi' dt',$$

où

$$\Theta(\tau, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi\tau\kappa)}} \exp\left(-\frac{|\eta|^2}{4\tau\kappa}\right).$$

Comme  $\int_{\mathbb{R}} \Theta(\tau, \eta) d\eta = 1$  pour tout  $\tau > 0$ , on a

$$u_1^+(t) \leq u_1^+(t_0) + \alpha \int_{t_0}^t u_1^+(t') dt',$$

d'où résulte (2.50).  $\square$

**Lemme 2.6.4.** Soit

$$w_2^+(t) = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} (-\log u_2(t, x)) = \sup_{\xi_2 \in \mathbb{R}} (-\log u_2(t, \xi_2)). \quad (2.51)$$

Alors pour  $0 \leq t_0 \leq t$  on a

$$w_2^+(t) \leq w_2^+(t_0) + \gamma(t - t_0) \equiv \Psi_2(w_2^+(t_0), t - t_0). \quad (2.52)$$

**Démonstration** Si on divise les deux membres de (2.48) par  $-u_2(t, \xi_2)$ , on a

$$\partial_t(-\log(u_2(t, \xi_2))) = \kappa \partial_{\xi_2}^2(-\log(u_2(t, \xi_2))) - (\partial_{\xi_2} \log(u_2(t, \xi_2)))^2 + \gamma - \delta u_1(t, \xi_2). \quad (2.53)$$

En appliquant formellement la solution fondamentale de l'équation de la chaleur à (2.53), on aura

$$-\log(u_2(t, \xi_2)) \leq \int_{\mathbb{R}} \Theta(t - t_0, \xi' - \xi_2) (-\log(u_2(t_0, \xi'))) d\xi' + \gamma(t - t_0),$$

d'où s'obtient sans difficulté l'inégalité (2.52).  $\square$

**Lemme 2.6.5.** Soit

$$u_2^+(t) = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} u_2(t, x) = \sup_{\xi_2 \in \mathbb{R}} u_2(t, \xi_2).$$

Alors pour  $0 \leq t_0 \leq t$  on a

$$u_2^+(t) \leq u_2^+(t_0) \left( 1 + \delta u_1^+(t_0) \int_{t_0}^t e^{\alpha(t'-t_0)} e^{\frac{\delta}{\alpha} u_1^+(t_0) (e^{\alpha(t-t_0)} - e^{\alpha(t'-t_0)})} dt' \right) \quad (2.54)$$

$$\equiv \Phi_2(u_1^+(t_0), u_2^+(t_0), t - t_0).$$

**Démonstration** On applique formellement la solution fondamentale de l'équation de la chaleur à (2.48), de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} u_2(t, \xi_2) &\leq \int_{\mathbb{R}} \Theta(t - t_0, \xi' - \xi_2) u_2(t_0, \xi') d\xi' + \\ &\quad + \delta \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} \Theta(t - t', \xi' - \xi_2) u_1(t', \xi') u_2(t', \xi') d\xi' dt', \end{aligned}$$

d'où, à l'aide de (2.50),

$$u_2^+(t) \leq u_2^+(t_0) + \delta u_1^+(t_0) \int_{t_0}^t e^{\alpha(t'-t_0)} u_2^+(t') dt',$$

ou

$$Y'(t) \leq e^{\alpha(t-t_0)} u_2^+(t_0) + \delta u_1^+(t_0) e^{\alpha(t-t_0)} Y(t), \quad Y(t) = \int_{t_0}^t e^{\alpha(t'-t_0)} u_2^+(t') dt'.$$

De cette inégalité résulte (2.54).  $\square$

**Lemme 2.6.6.** Soit

$$w_1^+(t) = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} (-\log u_1(t, x)) = \sup_{\xi_1 \in \mathbb{R}} (-\log u_1(t, \xi_1)). \quad (2.55)$$

Alors pour  $0 \leq t_0 \leq t$  on a

$$w_1^+(t) \leq w_1^+(t_0) + \beta \int_{t_0}^t \Phi_2(t_0, u_2^+(t_0), t') dt' \equiv \Psi_1(u_1^+(t_0), u_2^+(t_0), w_1^+(t_0), t - t_0). \quad (2.56)$$

**Démonstration** De l'équation

$$\partial_t (-\log(u_1(t, \xi_1))) = \kappa \partial_{\xi_1}^2 (-\log(u_1(t, \xi_1))) - \kappa (\partial_{\xi_1} \log(u_1(t, \xi_1)))^2 - \alpha + \beta u_2(t, \xi_1)$$

on déduit (de manière analogue aux cas précédents)

$$-\log(u_1(t, \xi_1)) \leq w_1^+(t_0) + \beta \int_{t_0}^t u_2^+(t') dt'$$

d'où à l'aide de (2.54) on obtient (2.56).  $\square$

Définissons  $w_1^+(U)$ ,  $u_1^+(U)$ ,  $w_2^+(U)$  et  $u_2^+(U)$  pour chaque  $U \geq 0$  comme suit :

$$w_1^+(U) = -\log(\bar{u}_1), \quad U_1(\bar{u}_1) = U, \quad 0 < \bar{u}_1 \leq \frac{\gamma}{\delta},$$

$$u_1^+(U) = \bar{u}_1, \quad U_1(\bar{u}_1) = U, \quad \bar{u}_1 \geq \frac{\gamma}{\delta},$$

$$\begin{aligned} w_2^+(U) &= -\log(\bar{u}_2), & U_2(\bar{u}_2) &= U, & 0 < \bar{u}_2 &\leq \frac{\alpha}{\beta}, \\ u_2^+(U) &= \bar{u}_2, & U_2(\bar{u}_2) &= U, & \bar{u}_2 &\geq \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

Il est clair que

$$U = U_1(e^{-w_1^+(U)}) = U_1(u_1^+(U)) = U_2(e^{-w_2^+(U)}) = U_2(u_2^+(U)). \quad (2.57)$$

Ces définitions sont justifiées en vertu de la définition (2.14)–(2.15) de  $U_1(u_1)$  et  $U_2(u_2)$ .

**Lemme 2.6.7.** Si on pose

$$U^+(t) = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(u_1(t, x), u_2(t, x)),$$

on a

$$U^+(t) \leq \tilde{M}(U^+(t_0), t - t_0), \quad t \geq t_0. \quad (2.58)$$

où

$$\tilde{M}(U^+(t_0), t - t_0) = U_1^{\max}(U^+(t_0), t - t_0) + U_2^{\max}(U^+(t_0), t - t_0), \quad (2.59)$$

$$U_1^{\max}(U^+(t_0), t - t_0) =$$

$$= \max(U_1(\Phi_1(u_1^+(U^+(t_0))), t - t_0), U_1(e^{-\Psi_1(u_1^+(U^+(t_0)), u_2^+(U^+(t_0)), w_1^+(U^+(t_0)), t - t_0)})),$$

$$U_2^{\max}(U^+(t_0), t - t_0) =$$

$$= \max(U_2(\Phi_2(u_1^+(U^+(t_0)), u_2^+(U^+(t_0))), t - t_0), U_2(e^{-\Psi_2(w_2^+(U^+(t_0)), t - t_0)})).$$

**Démonstration** Le lemme résulte immédiatement de la définition de  $\tilde{M}(U^+(t_0), t - t_0)$  et des lemmes 2.6.3–2.6.6.  $\square$

**Remarque 2.6.1.** La fonction  $\tilde{M}(a, b)$  peut être définie pour quelconques valeurs  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$  (indépendamment de la solution  $(u_1(t, x), u_2(t, x))$  du problème (2.10)–(2.12)). En outre  $\tilde{M}(a, b)$  est continue et croissante soit par rapport à  $a \geq 0$  soit par rapport  $b \geq 0$ .

En effet, cela résulte immédiatement de (2.59).

Maintenant, nous sommes en mesure de démontrer le résultat principal.

**Démonstration du théorème 2.4.1** Dans cette démonstration, on note  $U(t, x) = U(u_1(t, x), u_1(t, x))$ .

Le lemme 2.5.2 (voir aussi (2.42)) implique que, si

$$\|U(t, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 > \Lambda_2(\tilde{U}(t)),$$

alors  $\|U(t, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2$  décroît. Compte tenu que  $\tilde{U}(t)$  est décroissante, on a

$$\|U(t, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \leq \max\left(\|U(0, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2, \Lambda_2(\tilde{U}(0))\right) \equiv B_U \quad \forall t \geq 0. \quad (2.60)$$

L'inégalité (2.45), jointe à l'inégalité (2.60) et la proposition 2.3.1, nous donne l'existence de  $\tau$  dans chaque intervalle  $[t, t + 1]$  tel que

$$\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(\tau, x) \leq \tilde{U}(0) + \sqrt{2\pi} \left( \frac{C_v}{\kappa^2} + \frac{1}{\kappa} \right)^{1/2} \sqrt{B_U} \equiv A_U.$$

D'autre part, du lemme 2.6.7 (voir aussi (2.6.1)) il résulte que

$$\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(t, x) \leq \tilde{M}(A_U, t - \tau)$$

pour  $t \geq \tau$ . Donc, de ces relations il résulte que pour tout  $t \geq 0$  on a

$$\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(t', x) \leq \tilde{M}(A_U, 1) \quad \forall t' \in [t, t + 1],$$

c'est-à-dire, on a

$$\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(t, x) \leq \tilde{M}(A_U, 1) \quad \forall t \geq 0$$

avec  $\tilde{M}(A_U, 1) < \infty$  (voir (2.59)), ce qui achève la démonstration de (2.25).

Maintenant, on pose

$$\Lambda_1(\tilde{U}_\infty) = \tilde{M}(A_U^*(\tilde{U}_\infty), 1), \quad (2.61)$$

où

$$A_U^*(\tilde{U}_\infty) = \tilde{U}_\infty + \sqrt{2\pi} \left( \frac{C_v}{\kappa^2} + \frac{1}{\kappa} \right)^{1/2} \sqrt{\Lambda_2(\tilde{U}_\infty)}. \quad (2.62)$$

On remarque que la deuxième membre de (2.62) ne dépend pas de  $t$  et de la définition de  $\tilde{M}$  on peut déduire que la fonction  $\Lambda_1(\tilde{U}_\infty)$  est continue et croissante. Du raisonnement de la démonstration de (2.25), compte tenu de (2.28), on déduit que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(t, x) \leq \Lambda_1(\tilde{U}_\infty), \quad (2.63)$$

ce qui achève la démonstration de l'affirmation *i*) du théorème 2.4.1.

Maintenant on suppose que  $\tilde{U}_\infty = 0$ . Alors d'après le lemme 2.6.2 on a

$$\begin{aligned} \int_{t-1}^t \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(\tau, x) d\tau &\leq \\ &\leq \tilde{U}(t-1) + \sqrt{2\pi} \left( \frac{C_v}{\kappa^2} \int_{t-1}^t \|U(\tau, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 d\tau + \frac{1}{\kappa} \|U(t-1, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.4.1 la limite supérieure du second membre de cette inégalité est  $A_U^*(\tilde{U}_\infty)$  donné dans (2.62). Donc on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-1}^t \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(\tau, x) d\tau = 0. \quad (2.64)$$

Pour démontrer l'affirmation *ii*) du théorème 2.4.1, supposons par l'absurde que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(t, x) \neq 0,$$

c'est-à-dire qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $t > 0$  il existe  $t' \geq t$  tel que

$$\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(t', x) \geq \varepsilon. \quad (2.65)$$

Définissons une fonction  $U^{(\varepsilon)}(s)$  pour  $s > 0$  par la relation

$$\tilde{M}(U^{(\varepsilon)}(s), s) = \varepsilon. \quad (2.66)$$

Alors de la définition de  $\tilde{M}$  il résulte que pour  $t'$  satisfaisant à (2.65) on a pour  $\tau < t'$

$$U^{(\varepsilon)}(t' - \tau) \leq \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(\tau, x),$$

donc

$$\int_{t'-1}^{t'} U^{(\varepsilon)}(t' - \tau) d\tau \leq \int_{t'-1}^{t'} \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(\tau, x) d\tau. \quad (2.67)$$

Rappelons que la définition de  $\tilde{M}$  (et aussi de  $U_1^{\max}$  et  $U_2^{\max}$ ; voir (2.59)) implique que pour quelconque  $t_0 > 0$  on a

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} U_1^{\max}(U^+(t_0), t - t_0) = \max(U_1(u_1^+(U^+(t_0))), U_1(e^{-w_1^+(U^+(t_0))})) = U^+(t_0),$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} U_2^{\max}(U^+(t_0), t - t_0) = \max(U_2(u_2^+(U^+(t_0))), U_2(e^{-w_2^+(U^+(t_0))})) = U^+(t_0),$$

et donc

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \tilde{M}(U^+(t_0), t - t_0) = 2U^+(t_0).$$

Cette relation implique aussi que

$$\lim_{\tau \rightarrow t'^-} U^{(\varepsilon)}(t' - \tau) = \frac{1}{2}\varepsilon > 0. \quad (2.68)$$

De la continuité de  $\tilde{M}(a, b)$  découle la continuité de  $U^{(\varepsilon)}(s)$  (voir (2.66)). Donc de (2.68) il résulte qu'il existe un  $s_\varepsilon > 0$  tel que  $U^{(\varepsilon)}(s) > 0$  pour  $0 < s < s_\varepsilon$  et on a

$$\int_{t'-s_\varepsilon}^{t'} U^{(\varepsilon)}(t' - \tau) d\tau = \int_0^{s_\varepsilon} U^{(\varepsilon)}(s) ds \equiv c_\varepsilon > 0.$$

Donc de (2.67) il résulterait que

$$\int_{t'-1}^{t'} \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(\tau, x) d\tau \geq c_\varepsilon > 0$$

avec  $c_\varepsilon$  indépendant de  $t'$ , ce qui contredit (2.64). On a donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} U(t, x) = 0$ .

Le théorème est démontré.  $\square$

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé le comportement asymptotique de la solution de l'équation de Lotka-Volterra avec diffusion et déplacement de populations dans un domaine périodique de  $\mathbb{R}$ . À partir de cette analyse, nous avons obtenu la bornitude globale de la solution et son logarithme et aussi sa convergence uniforme vers la solution stationnaire dans le cas où la solution converge en valeur moyenne vers la solution stationnaire. Ce résultat garantit que, même s'il peut y avoir une croissance de l'oscillation de la solution en certains points comme nous l'avons vu dans l'exemple de calcul numérique dans la section 2, ces phénomènes ne peuvent se développer à l'infini, et la croissance de l'oscillation est limitée.

De plus, nous avons développé quelques techniques particulières d'estimation de la solution. Même si les conditions que nous avons fixées pour l'équation sont relativement simples, les techniques que nous avons développées ici peuvent, avec une adaptation possible, être utilisées également pour des problèmes analogues avec des conditions plus complexes.

## CHAPITRE 3

### RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DE TRANSPORT-DIFFUSION

#### Sommaire

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 3.1 | Introduction à la résolution numérique des systèmes d'équations de transport-diffusion | 50 |
| 3.2 | Position du Problème . . . . .   | 52 |
| 3.3 | Description de la méthode . . . . .  | 53 |
| 3.4 | Analyse de la convergence et de l'erreur . . . . .                                     | 59 |
| 3.5 | Exemples numériques . . . . .  | 67 |
| 3.6 | Conclusion . . . . .   | 80 |

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude numérique d'un système d'équations de transport-diffusion, en mettant l'accent sur le développement et l'analyse de schémas explicites permettant d'obtenir des solutions approchées fiables et efficaces

### 3.1 Introduction à la résolution numérique des systèmes d'équations de transport-diffusion

Afin de mieux comprendre le cadre de ce travail, rappelons d'abord la forme générale du système de transport-diffusion, qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\partial_t u(t, x) + v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) - \kappa \Delta u(t, x) = f(t, x, u(t, x)), \quad (3.1)$$

pour tout  $(t, x, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ . Ce système offre un modèle pertinent pour l'étude des phénomènes couplés impliquant plusieurs grandeurs dynamiques.

Dans ce contexte,  $u$  est le vecteur des inconnues,  $v$  représente les champs de vitesse,  $\kappa$  est une constante positive qui représente le coefficient de diffusion, et  $f$  regroupe les termes sources. Ce système trouve des applications dans divers domaines, notamment l'analyse des systèmes dynamiques et les problèmes atmosphériques, tels que la pollution de l'air. Il permet également de modéliser les problèmes de pollution de l'eau dans les mers et autres systèmes aquatiques.

La plupart des contributions de la littérature se sont intéressées au cas scalaire (cas d'une seule équation) de ce modèle, en développant différentes approches numériques. Dans ce cadre, deux cas principaux se présentent en fonction de la valeur de  $f$ .

- **Le premier cas** est celui où  $f = 0$ . De nombreux chercheurs ont étudié ce cas numériquement dans le domaine  $0 < x < L$  sous des conditions initiales et aux limites, en utilisant différentes méthodes numériques, telles que La méthode des différences finies compactes du sixième ordre [27] et la méthode de collocation exponentielle B-spline [46].
- **Le deuxième cas** est celui où  $f \neq 0$ . De nombreux chercheurs ont étudié ce scénario. Dans [3], Alhumaizi a analysé un système de convection-diffusion avec réaction à l'aide de diverses techniques de réduction standard. Dans [41], Liu a présenté une analyse numérique d'un modèle de diffusion-migration (transport) avec une réaction décrivant l'interaction entre une proie et un prédateur dans un espace unidimensionnel sous des conditions aux limites périodiques.

L'objectif principal de ce travail est de développer une méthode de collocation fondée sur l'utilisation des polynômes de Taylor pour la résolution numérique d'un système d'équations de transport-diffusion dans un domaine monodimensionnel sous des conditions initiales

Cette méthode est connue pour sa performance puissante dans la résolution numérique d'équations différentielles, intégrales et intégro-différentielles (voir, par exemple, [9, 10, 12, 35, 40]).

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la Section 3.2, nous commençons par poser notre problème avant de le reformuler sous la forme d'une équation intégro-différentielle de Volterra du second espèce. Dans la Section 3.3, nous introduisons la méthode de collocation basée sur les polynômes de Taylor ainsi que les coefficients correspondants permettant d'approximer la solution du système étudié. Dans la Section 3.4, nous présentons l'analyse de

la convergence et déterminons l'ordre associé. Dans la Section 3.5, nous donnons plusieurs exemples numériques afin d'illustrer les résultats théoriques. Enfin, nous concluons ce chapitre.

## 3.2 Position du Problème

Considérons le système d'équations de transport-diffusion suivant :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + v(t) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = f(t, x, u(t, x)), \quad (3.2)$$

pour tout  $(t, x) \in D = [0, T] \times [0, X] \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  avec les conditions initiales

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u(t, 0) = h(t), \quad u_0(0) = h(0), \quad \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = l(t), \quad (3.3)$$

où

- $u(t, x) \in \mathbb{R}^d$  est une fonction vectorielle inconnue, modélisant les quantités transportées et diffusées,
- $v(t) = \text{diag}(v_1, v_2, \dots, v_d)$  est une matrice diagonale  $d \times d$  décrivant la vitesse du transport,
- $\kappa$  est une constante strictement positive représente le coefficient de diffusion,
- $f(t, x, u(t, x))$  est une fonction vectorielle représentant le terme de réaction ou source,
- $u_0, h, l \in \mathbb{R}^d$  sont des fonctions vectorielles données.

Afin de simplifier l'étude analytique et numérique du problème (3.2)–(3.3), nous le reformulons sous forme intégrale. En intégrant deux fois les deux membres de l'équation (3.2) de 0 à  $x$  par rapport à la seconde variable, on obtient un système d'équations intégro-différentielles de Volterra bidimensionnel de la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \int_0^x \frac{(s-x)}{\kappa} f(t, x, u(t, x)) ds + \left( I_d - \frac{x}{\kappa} v(t) \right) h(t) + xl(t) \\ & + \frac{1}{\kappa} \int_0^x (x-s) \frac{\partial u(t, s)}{\partial t} + v(t) u(t, s) ds, \end{aligned}$$

Si on suppose que la fonction  $f(t, x, u(t, x))$  est une fonction affine par rapport à la troisième variable, c'est-à-dire,

$$f(t, x, u(t, x)) = a(t, x) \cdot u(t, x) + b(t, x),$$

où  $a$  est une matrice  $d \times d$  et  $b = (b_1, b_2, \dots, b_d)^t$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^d$ , alors

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^x \frac{s-x}{\kappa} (a(t, s) \cdot u(t, s) + b(t, s)) ds + \left( I_d - \frac{x}{\kappa} v(t) \right) h(t) + xl(t) \\ &+ \frac{1}{\kappa} \int_0^x (x-s) \frac{\partial u(t, s)}{\partial t} + v(t) u(t, s) ds, \end{aligned}$$

d'où

$$u(t, x) = F(t, x) + \frac{1}{\kappa} \int_0^x (x-s) \left( \frac{\partial u(t, s)}{\partial t} - a(t, s) \cdot u(t, s) \right) + v(t) u(t, s) ds, \quad (3.4)$$

où

$$F(t, x) = \int_0^x \frac{s-x}{\kappa} b(t, s) ds + \left( I_d - \frac{x}{\kappa} v(t) \right) h(t) + xl(t).$$

Les fonctions  $F$ ,  $a$ , et  $v$  sont lisses, avec  $F$  et  $a$  définie sur  $D = [0, T] \times [0, X] \subset \mathbb{R}^2$ .

### 3.3 Description de la méthode

Soient  $\Pi_N = \{t_i \mid t_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}$  et  $\Pi_M = \{x_j \mid x_j = jk, j = 0, 1, \dots, M\}$  sont les subdivisions uniformes des intervalles  $[0, T]$  et  $[0, X]$ , respectivement, avec des pas donnés par  $h = \frac{T}{N}$  et  $k = \frac{X}{M}$ . Ces partitions définissent une grille pour  $D$  :

$$\Pi_{N,M} = \Pi_N \times \Pi_M = \{(t_n, x_m), 0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M\}.$$

Nous définissons les sous-intervalles de la manière suivante :

$$\sigma_n = [t_n, t_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-2; \quad \sigma_{N-1} = [t_{N-1}, t_N],$$

$$\delta_m = [x_m, x_{m+1}), \quad m = 0, 1, \dots, M-2; \quad \delta_{M-1} = [x_{M-1}, x_M],$$

et on définit

$$D_{n,m} := \sigma_n \times \delta_m \quad \text{pour tout } n = 0, 1, \dots, N-1; m = 0, 1, \dots, M-1.$$

De plus, soit  $\pi_{p-1}$  l'ensemble de tous les polynômes réels dans  $\mathbb{R}$  de degré inférieur ou égal à  $p-1$  en  $t$  et  $x$ . Nous définissons l'espace des splines polynomiales réelles de degré  $p-1$  en  $t$  et  $x$  de la manière suivante :

$$S_{p-1}^{(-1)}(\Pi_{N,M}) = \{\bar{u} : \bar{u}_{n,m} = \bar{u}|_{D_{n,m}} \in \pi_{p-1}, n = 0, \dots, N-1; m = 0, \dots, M-1\}.$$

Cet espace est composé de fonctions spline polynomiales bivariées de degré (au plus)  $p-1$  en  $t$  et  $x$ . Sa dimension est  $dNMp^2$ , qui correspond au nombre total de coefficients des polynômes  $\bar{u}_{n,m}$  pour  $n = 0, \dots, N-1; m = 0, \dots, M-1$ . Pour déterminer ces coefficients, nous appliquons le polynôme de Taylor sur chaque rectangle.

Tout d'abord, on approche  $u$  dans le rectangle  $D_{0,0}$  par le polynôme

$$\bar{u}_{0,0}(t, x) = \sum_{i+j=0}^{p-1} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} u(0,0)}{\partial t^i \partial x^j} t^i x^j; \quad (t, x) \in D_{0,0}, \quad (3.5)$$

où  $\frac{\partial^{i+j} u(0,0)}{\partial t^i \partial x^j}$  est la valeur exacte de  $\frac{\partial^{i+j} u}{\partial t^i \partial x^j}$  au point  $(0,0)$ .

Pour obtenir  $\frac{\partial^j u(t, x)}{\partial x^j}$ , on effectue la dérivée d'ordre  $j$  de l'équation (3.4) par rapport à  $x$ , ce qui nous amène à distinguer deux cas.

- Pour  $j = 1$ , on obtient

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{\kappa} v(t) u(t, x) + \frac{1}{\kappa} \int_0^x \frac{\partial u(t, s)}{\partial t} - a(t, s) \cdot u(t, s) ds. \quad (3.6)$$

- Pour  $j \geq 2$ , on obtient

$$\frac{\partial^j u(t, x)}{\partial x^j} = \frac{\partial^j F(t, x)}{\partial x^j} + \frac{1}{\kappa} v(t) \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial x^{j-1}} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t \partial x^{j-2}} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^{j-2} (a(t, x) \cdot u(t, x))}{\partial x^{j-2}}. \quad (3.7)$$

Ensuite, on effectue la dérivée d'ordre  $i$  de l'équation (3.4), (3.6) et (3.7) par rapport à  $t$ , ce qui nous amène à distinguer trois cas.

- Pour  $j = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i u(t, x)}{\partial t^i} &= \frac{\partial^i F(t, x)}{\partial t^i} + \frac{1}{\kappa} \int_0^x (x-s) \left( \frac{\partial^{i+1} u(t, s)}{\partial t^{i+1}} - \frac{\partial^i (a(t, s) \cdot u(t, s))}{\partial t^i} \right) ds \\ &+ \frac{1}{\kappa} \int_0^x \frac{\partial^i (v(t) \cdot u(t, s))}{\partial t^i} ds, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial^i u(0, 0)}{\partial t^i} = \frac{\partial^i F(0, 0)}{\partial t^i}.$$

- Pour  $j = 1$ , on obtient

$$\frac{\partial^{i+1} u(t, x)}{\partial t^i \partial x} = \frac{\partial^{i+1} F(t, x)}{\partial t^i \partial x} + \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\partial^i (v(t) u(t, x))}{\partial t^i} + \int_0^x \frac{\partial^{i+1} u(t, s)}{\partial t^{i+1}} - \frac{\partial^i (a(t, s) \cdot u(t, s))}{\partial t^i} ds \right],$$

d'où

$$\frac{\partial^{i+1} u(0, 0)}{\partial t^i \partial x} = \frac{\partial^{i+1} F(0, 0)}{\partial t^i \partial x} + \frac{1}{\kappa} \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \frac{\partial^{i-r} v(0)}{\partial t^{i-r}} \frac{\partial^r u(0, 0)}{\partial t^r}.$$

- Pour  $j \geq 2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i+j} u(t, x)}{\partial t^i \partial x^j} &= \frac{\partial^{i+j} F(t, x)}{\partial t^i \partial x^j} \\ &+ \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\partial^i \left( v(t) \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial x^{j-1}} \right)}{\partial t^i} + \frac{\partial^{i+j-1} u(t, x)}{\partial t^{i+1} \partial x^{j-2}} - \frac{\partial^{i+j-2} (a(t, x) \cdot u(t, x))}{\partial t^i \partial x^{j-2}} \right], \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i+j}u(0,0)}{\partial t^i \partial x^j} &= \frac{\partial^{i+j}F(0,0)}{\partial t^i \partial x^j} + \frac{1}{\kappa} \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \frac{\partial^{i-r}v(0)}{\partial t^{i-r}} \frac{\partial^{r+j-1}u(0,0)}{\partial t^r \partial x^{j-1}} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^{i+j-1}u(0,0)}{\partial t^{i+1} \partial x^{j-2}} \\ &\quad - \frac{1}{\kappa} \sum_{r=0}^i \sum_{e=0}^{j-2} \binom{i}{r} \binom{j-2}{e} \frac{\partial^{i+j-2-e-r}a(0,0)}{\partial t^{i-r} \partial x^{j-2-e}} \cdot \frac{\partial^{r+e}u(0,0)}{\partial t^e \partial x^r}. \end{aligned}$$

Deuxièmement, on approche  $u$  dans les rectangles  $D_{n,m}$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ ,  $m = 0, \dots, M-1$  et  $(n, m) \neq (0, 0)$  par les polynômes

$$\bar{u}_{n,m}(t, x) = \sum_{i+j=0}^{p-1} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}\hat{u}_{n,m}(t_n, x_m)}{\partial t^i \partial x^j} (t - t_n)^i (x - x_m)^j, \quad (t, x) \in D_{n,m}, \quad (3.8)$$

où  $\hat{u}_{n,m}$  est la solution exacte de l'équation intégrale

$$\begin{aligned} \hat{u}_{n,m}(t, x) &= F(t, x) + \frac{1}{\kappa} \sum_{\rho=0}^{m-1} \int_{x_\rho}^{x_{\rho+1}} (x - s) \left( \frac{\partial \bar{u}_{n,\rho}(t, s)}{\partial t} - a(t, s) \cdot \bar{u}_{n,\rho}(t, s) \right) ds \\ &\quad + \frac{1}{\kappa} \left( \sum_{\rho=0}^{m-1} \int_{x_\rho}^{x_{\rho+1}} v(t) \bar{u}_{n,\rho}(t, s) ds + \int_{x_m}^x v(t) \hat{u}_{n,m}(t, s) ds \right) \\ &\quad + \frac{1}{\kappa} \int_{x_m}^x (x - s) \left( \frac{\partial \hat{u}_{n,m}(t, s)}{\partial t} - a(t, s) \cdot \hat{u}_{n,m}(t, s) \right) ds. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pour obtenir  $\frac{\partial^j \hat{u}_{n,m}(t, x)}{\partial x^j}$ , on effectue la dérivée d'ordre  $j$  de l'équation (3.9) par rapport à  $x$ , ce qui nous amène à distinguer deux cas.

- Pour  $j = 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_{n,m}(t, x)}{\partial x} &= \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{\kappa} \sum_{\rho=0}^{m-1} \int_{x_\rho}^{x_{\rho+1}} \left[ \frac{\partial \bar{u}_{n,\rho}(t, s)}{\partial t} - a(t, s) \cdot \bar{u}_{n,\rho}(t, s) \right] ds \\ &\quad + \frac{1}{\kappa} v(t) \hat{u}_{n,m}(t, x) + \frac{1}{\kappa} \int_{x_m}^x \left[ \frac{\partial \hat{u}_{n,m}(t, s)}{\partial t} - a(t, s) \cdot \hat{u}_{n,m}(t, s) \right] ds. \end{aligned} \quad (3.10)$$

- Pour  $j \geq 2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j \hat{u}_{n,m}(t, x)}{\partial x^j} &= \frac{\partial^j F(t, x)}{\partial x^j} + \frac{1}{\kappa} v(t) \frac{\partial^{j-1} \hat{u}_{n,m}(t, x)}{\partial x^{j-1}} \\ &+ \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^{j-1} \hat{u}_{n,m}(t, x)}{\partial t \partial x^{j-2}} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^{j-2} (a(t, x) \cdot \hat{u}_{n,m}(t, x))}{\partial x^{j-2}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Maintenant, on effectue la dérivée d'ordre  $i$  de l'équation (3.9), (3.10) et (3.11) par rapport à  $t$ , ce qui nous amène à distinguer trois cas.

- Pour  $j = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i \hat{u}_{n,m}(t, x)}{\partial t^i} &= \frac{\partial^i F(t, x)}{\partial t^i} + \frac{1}{\kappa} \sum_{\rho=0}^{m-1} \int_{x_\rho}^{x_{\rho+1}} (x-s) \left( \frac{\partial^{i+1} \bar{u}_{n,\rho}(t, s)}{\partial t^{i+1}} - \frac{\partial^i (a(t, s) \cdot \bar{u}_{n,\rho}(t, s))}{\partial t^i} \right) ds \\ &+ \frac{1}{\kappa} \sum_{\rho=0}^{m-1} \int_{x_\rho}^{x_{\rho+1}} \frac{\partial^i (v(t) \bar{u}_{n,\rho}(t, s))}{\partial t^i} ds \\ &+ \frac{1}{\kappa} \int_{x_m}^x (x-s) \left( \frac{\partial^{i+1} \hat{u}_{n,m}(t, s)}{\partial t^{i+1}} - \frac{\partial^i (a(t, s) \cdot \hat{u}_{n,m}(t, s))}{\partial t^i} \right) ds \\ &+ \frac{1}{\kappa} \int_{x_m}^x \frac{\partial^i (v(t) \hat{u}_{n,m}(t, s))}{\partial t^i} ds, \end{aligned} \quad (3.12)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i \hat{u}_{n,m}(t_n, x_m)}{\partial t^i} &= \frac{\partial^i F(t_n, x_m)}{\partial t^i} + \frac{1}{\kappa} \sum_{\rho=0}^{m-1} \int_{x_\rho}^{x_{\rho+1}} \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \frac{\partial^{i-r} v(t_n)}{\partial t^{i-r}} \frac{\partial^r \bar{u}_{n,\rho}(t_n, s)}{\partial t^r} ds \\ &+ \frac{1}{\kappa} \sum_{\rho=0}^{m-1} \int_{x_\rho}^{x_{\rho+1}} (x_m - s) \frac{\partial^{i+1} \bar{u}_{n,\rho}(t_n, s)}{\partial t^{i+1}} ds \\ &- \frac{1}{\kappa} \sum_{\rho=0}^{m-1} \int_{x_\rho}^{x_{\rho+1}} (x_m - s) \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \frac{\partial^{i-r} a(t_n, s)}{\partial t^{i-r}} \frac{\partial^r \bar{u}_{n,\rho}(t_n, s)}{\partial t^r} ds. \end{aligned}$$

- Pour  $j = 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i+1}\hat{u}_{n,m}(t,x)}{\partial t^i \partial x} &= \frac{\partial^{i+1}F(t,x)}{\partial t^i \partial x} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^i (v(t)\hat{u}_{n,m}(t,x))}{\partial t^i} \\ &+ \frac{1}{\kappa} \sum_{\rho=0}^{m-1} \int_{x_\rho}^{x_{\rho+1}} \left[ \frac{\partial^{i+1}\bar{u}_{n,\rho}(t,s)}{\partial t^{i+1}} - \frac{\partial^i (a(t,s) \cdot \bar{u}_{n,\rho}(t,s))}{\partial t^i} \right] ds \\ &+ \frac{1}{\kappa} \int_{x_m}^x \left[ \frac{\partial^{i+1}\hat{u}_{n,m}(t,s)}{\partial t^{i+1}} - \frac{\partial^i (a(t,s) \cdot \hat{u}_{n,m}(t,s))}{\partial t^i} \right] ds, \end{aligned} \quad (3.13)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i+1}\hat{u}_{n,m}(t_n, x_m)}{\partial t^i \partial x} &= \frac{\partial^{i+1}F(t_n, x_m)}{\partial t^i \partial x} + \frac{1}{\kappa} \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \frac{\partial^{i-r}v(t_n)}{\partial t^{i-r}} \frac{\partial^r \hat{u}_{n,m}(t_n, x_m)}{\partial t^r} \\ &+ \frac{1}{\kappa} \sum_{\rho=0}^{m-1} \int_{x_\rho}^{x_{\rho+1}} \frac{\partial^{i+1}\bar{u}_{n,\rho}(t_n, s)}{\partial t^{i+1}} ds \\ &- \frac{1}{\kappa} \sum_{\rho=0}^{m-1} \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \int_{x_\rho}^{x_{\rho+1}} \frac{\partial^{i-r}a(t_n, s)}{\partial t^{i-r}} \frac{\partial^r \bar{u}_{n,\rho}(t_n, s)}{\partial t^r} ds. \end{aligned}$$

- Pour  $j \geq 2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i+j}\hat{u}_{n,m}(t,x)}{\partial t^i \partial x^j} &= \frac{\partial^{i+j}F(t,x)}{\partial t^i \partial x^j} \\ &+ \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\partial^i \left( v(t) \frac{\partial^{j-1}\hat{u}_{n,m}(t,x)}{\partial x^{j-1}} \right)}{\partial t^i} + \frac{\partial^{i+j-1}\hat{u}_{n,m}(t,x)}{\partial t^{i+1} \partial x^{j-2}} - \frac{\partial^{i+j-2}(a(t,x) \cdot \hat{u}_{n,m}(t,x))}{\partial t^i \partial x^{j-2}} \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i+j}\hat{u}_{n,m}(t_n, x_m)}{\partial t^i \partial x^j} &= \frac{\partial^{i+j}F(t_n, x_m)}{\partial t^i \partial x^j} + \frac{1}{\kappa} \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \frac{\partial^{i-r}v(t_n)}{\partial t^{i-r}} \frac{\partial^{r+j-1}\hat{u}_{n,m}(t_n, x_m)}{\partial t^r \partial x^{j-1}} \\ &+ \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^{i+j-1}\hat{u}_{n,m}(t_n, x_m)}{\partial t^{i+1} \partial x^{j-2}} \\ &- \frac{1}{\kappa} \sum_{r=0}^i \sum_{\eta=0}^{j-2} \binom{i}{r} \binom{j-2}{\eta} \frac{\partial^{i+j-2-\eta-r}a(t_n, x_m)}{\partial t^{i-r} \partial x^{j-2}} \frac{\partial^{r+\eta}\hat{u}_{n,m}(t_n, x_m)}{\partial t^r \partial x^\eta}. \end{aligned}$$

### 3.4 Analyse de la convergence et de l'erreur

Cette section sera consacrée à l'étude de la convergence de la méthode mentionnée ci-dessus et à l'évaluation de son erreur. Les lemmes 1.7, 1.8 et le lemme suivant seront importants dans cette analyse :

**Lemme 3.4.1.** Soient  $F$  et  $v$  deux fonctions  $p$ -fois continûment dérivables dans leurs domaines de définition. Alors, sous l'hypothèse

$$k < \min \left\{ \frac{\kappa}{A}, \frac{-V + \sqrt{V^2 + 2\kappa(1+A)}}{2(1+A)} \right\} \quad (3.15)$$

où

$$V = \max \left\{ \binom{i}{r} \left\| \frac{\partial^{i-r} v}{\partial t^{i-r}} \right\|, \quad i = 0, \dots, p, \quad r = 0, \dots, i \right\},$$

$$A = \max \left\{ \binom{i}{r} \left\| \frac{\partial^{i-r} a}{\partial t^{i-r}} \right\|, \quad i = 0, \dots, p, \quad r = 0, \dots, i \right\},$$

il existe un nombre positif  $C(p)$  tel que pour tout  $n = 0, \dots, N-1$ ,  $m = 0, \dots, M-1$  et  $i+j = 0, 1, \dots, p$ , on a

$$\left\| \frac{\partial^{i+j} \hat{u}_{n,m}}{\partial t^i \partial x^j} \right\|_{L^\infty(D_{n,m})} \leq C(p),$$

où  $\hat{u}_{0,0}(t, x) = u(t, x)$  pour  $(t, x) \in D_{0,0}$ .

**Démonstration 1.** Soit  $a_{n,m}^{i+j} = \left\| \frac{\partial^{i+j} \hat{u}_{n,m}}{\partial t^i \partial x^j} \right\|_{L^\infty(D_{n,m})}$ .

- Si  $(t, x) \in D_{0,0}$ , alors on a pour tout  $i+j = 0, \dots, p$ ,

$$a_{0,0}^{i+j} \leq \max \left\{ \left\| \frac{\partial^{i+j} u}{\partial t^i \partial x^j} \right\|_{L^\infty(D_{0,0})}, \quad i+j = 0, 1, \dots, p \right\} \equiv C_1(p) \quad (3.16)$$

- Si  $(t, x) \in D_{n,m}$  avec  $n = 0, \dots, N-1$ ,  $m = 0, \dots, M-1$ ,  $i+j = 0, \dots, p$ , et  $(n, m) \neq (0, 0)$ , alors trois cas peuvent être distingués.

- **Cas 1 :** Si  $j = 0$ , alors de l'équation (3.12) on obtient

$$a_{n,m}^i \leq c_1 + c_2 k \sum_{\rho=0}^{m-1} \sum_{r=0}^i \sum_{\alpha+\beta=r}^{p-1} a_{n,\rho}^{\alpha+\beta} + c_3 \left( a_{n,m}^{i+1} + 2 \sum_{r=0}^i a_{n,m}^r \right), \quad (3.17)$$

où  $c_1, c_2$  et  $c_3$  sont des nombres positifs.

D'autre part, en effectuant la dérivée d'ordre  $(i+1)$  de l'équation (3.9) par rapport à  $t$ , on obtient

$$\frac{\partial^{i+1} \hat{u}_{n,m}(t, s)}{\partial t^{i+1}} = \frac{\partial^{i+1} F(t, s)}{\partial t^{i+1}} + \frac{1}{\kappa} \left[ \sum_{\rho=0}^{m-1} \int_{x_\rho}^{x_{\rho+1}} \frac{\partial^{i+1} (v(t) \bar{u}_{n,\rho}(t, s))}{\partial t^{i+1}} ds + \int_{x_m}^x \frac{\partial^{i+1} (v(t) \hat{u}_{n,m}(t, s))}{\partial t^{i+1}} ds \right],$$

ce qui implique que

$$a_{n,m}^{i+1} \leq c_1 + c_2 k \sum_{\rho=0}^{m-1} \sum_{r=0}^{i+1} \sum_{\alpha+\beta=r}^p a_{n,\rho}^{\alpha+\beta} + c_3 \sum_{r=0}^{i+1} a_{n,m}^r.$$

Maintenant, en considérant la suite  $\Gamma_{n,m} = \max\{a_{n,m}^{\alpha+\beta}, \alpha + \beta = 0, \dots, p\}$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ ,  $m = 0, \dots, M-1$ , on obtient

$$(1 - c_3) a_{n,m}^{i+1} \leq c_1 + c_2 p^3 k \sum_{\rho=0}^{m-1} \Gamma_{n,\rho} + c_3 \sum_{r=0}^i a_{n,m}^r.$$

En utilisant le lemme 1.8 et l'hypothèse (3.15), on obtient

$$\begin{aligned} a_{n,m}^{i+1} &\leq \left( \frac{c_1}{1-c_3} + \frac{c_2 p^3}{1-c_3} k \sum_{\rho=0}^{m-1} \Gamma_{n,\rho} \right) \exp\left(\frac{c_3 p}{1-c_3}\right) \\ &\leq \underbrace{\frac{c_1}{1-c_3} \exp\left(\frac{c_3 p}{1-c_3}\right)}_{c_4} + \underbrace{\frac{c_2 p^3}{1-c_3} \exp\left(\frac{c_3 p}{1-c_3}\right)}_{c_5} k \sum_{\rho=0}^{m-1} \Gamma_{n,\rho}, \end{aligned}$$

ce qui implique pour tout  $n = 0, \dots, N-1$  et  $i = 0, \dots, p$

$$a_{n,m}^{i+1} \leq \Gamma_{n,m} \leq c_4 + c_5 k \sum_{\rho=0}^{m-1} \Gamma_{n,\rho}.$$

En utilisant le lemme 1.8, on obtient

$$a_{n,m}^{i+1} \leq \Gamma_{n,m} \leq \underbrace{c_4 \exp(c_5 X)}_c. \quad (3.18)$$

En remplaçant (3.18) dans l'équation (3.17), on obtient :

$$(1-2c_3)a_{n,m}^i \leq c_1 + cc_3 + c_2 k p^3 \sum_{\rho=0}^{m-1} \Gamma_{n,\rho} + 2c_3 \sum_{r=0}^{i-1} a_{n,m}^r,$$

alors, de l'hypothèse (3.15) on obtient

$$\begin{aligned} a_{n,m}^i &\leq \underbrace{\frac{c_1 + cc_3}{1-2c_3}}_{c_6} + \underbrace{\frac{c_2 p^3}{1-2c_3}}_{c_7} k \sum_{\rho=0}^{m-1} \Gamma_{n,\rho} + \underbrace{\frac{2c_3}{1-2c_3}}_{c_8} \sum_{r=0}^{i-1} a_{n,m}^r \\ &\leq c_6 + c_7 k \sum_{\rho=0}^{m-1} \Gamma_{n,\rho} + c_8 \sum_{r=0}^{i-1} a_{n,m}^r. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1.8, on obtient

$$a_{n,m}^i \leq \underbrace{c_6 \exp(c_8 p)}_{c_9} + \underbrace{c_7 \exp(c_8 p)}_{c_{10}} k \sum_{\rho=0}^{m-1} \Gamma_{n,\rho},$$

ce qui implique  $n = 0, \dots, N-1$  et  $i = 0, \dots, p$

$$a_{n,m}^i \leq \Gamma_{n,m} \leq \underbrace{c_9 \exp(c_{10} X)}_{\alpha_1(p)},$$

d'où, le premier cas est achevé.

- **Cas 2 :** Si  $j = 1$ , alors de l'équation (3.13) on obtient

$$\begin{aligned} a_{n,m}^{i+1} &\leq b_1^1 + b_2^1 \sum_{r=0}^i a_{n,m}^r + b_2^2 \left( a_{n,m}^{i+1} + \sum_{r=0}^i a_{n,m}^r \right) \\ &\quad + kb_3 \sum_{\rho=0}^{m-1} \sum_{r=0}^i \sum_{\alpha+\beta=r}^{p-1} a_{n,\rho}^{\alpha+\beta}, \end{aligned}$$

où  $b_1^1, b_1^2, b_2^2$  et  $b_3$  sont des nombres positives, cela implique que

$$(1 - b_2^2) a_{n,m}^{i+1} \leq b_1^1 + (b_2^1 + b_2^2) \sum_{r=0}^i a_{n,m}^r + kb_3 \sum_{\rho=0}^{m-1} \sum_{r=0}^i \sum_{\alpha+\beta=r}^{p-1} a_{n,\rho}^{\alpha+\beta},$$

alors, de l'hypothèse (3.15) on obtient

$$\begin{aligned} a_{n,m}^{i+1} &\leq \underbrace{\frac{b_1^1}{1 - b_2^2}}_{b_1} + \underbrace{\frac{b_2^1 + b_2^2}{1 - b_2^2}}_{b_2} \sum_{r=0}^i a_{n,m}^r + k \underbrace{\frac{b_3 p^3}{1 - b_2^2}}_{b_4} \sum_{\rho=0}^{m-1} \Gamma_{n,\rho} \\ &\leq b_1 + b_2 \sum_{r=0}^i a_{n,m}^r + kb_4 \sum_{\rho=0}^{m-1} \Gamma_{n,\rho}. \end{aligned}$$

De manière analogue à la déduction du **cas 1**, on obtient pour tout  $n = 0, \dots, N - 1$ ,  $m = 0, \dots, M - 1$  et  $i = 0, \dots, p - 1$

$$a_{n,m}^{i+1} \leq \alpha_2(p).$$

- **Cas 3** : Si  $j \geq 2$ , alors de l'équation (3.14) on obtient

$$a_{n,m}^{i+j} \leq d_1 + d_2 \sum_{r=0}^i a_{n,m}^{r+j-1} + d_3 a_{n,m}^{i+j-1} + d_4 \sum_{r=0}^i \sum_{e=0}^{j-2} a_{n,m}^{r+e},$$

où  $d_1, d_2, d_3$  et  $d_4$  sont des nombres positives, alors

$$a_{n,m}^{i+j} \leq d_1 + \underbrace{(d_2 + d_3 + d_4)}_{d_5} \sum_{r+e=0}^{i+j-1} a_{n,m}^{r+e}.$$

Considérons la suite  $y_{i+j} = a_{n,m}^{i+j}$  pour tout  $i + j = 0, \dots, p$ , alors il résulte du lemme 1.8 que

$$a_{n,m}^{i+j} \leq \underbrace{d_1 \exp(d_5 p^2)}_{\alpha_3(p)}.$$

Par conséquent, la démonstration du lemme 3.4.1 est achevée en prenant

$$C(p) = \max\{\alpha_1(p), \alpha_2(p), \alpha_3(p), C_1(p)\}.$$

Le théorème suivant établira la convergence de la méthode présentée.

**Théorème 3.4.1.** soient  $F, a$ , et  $v$  des fonctions  $p$ -fois continûment dérivable dans leurs domaines de définition. Supposons que  $\bar{u} \in S_{p-1}^{(-1)}(\Pi_{N,M})$  dans les équations (3.5) et (3.8) définit une solution approximative unique. Alors la fonction erreur  $e = u - \bar{u}$  vérifie

$$\|e\|_{L^\infty(D)} \leq C(h+k)^{p-1},$$

où  $C$  est une constante finie indépendant de  $h$  et  $k$ .

**Démonstration 2.** Définissons la fonction erreur  $e(t, x)$  dans  $D_{n,m}$  par  $e_{n,m}(t, x) = u(t, x) - \bar{u}_{n,m}(t, x)$  pour tout  $n \in \{0, \dots, N-1\}$  et  $m \in \{0, \dots, M-1\}$ .

Affirmation 1. Il existe une constante  $\beta_1$  indépendante de  $h$  et  $k$  tel que

$$\|e_{0,0}\|_{L^\infty(D_{0,0})} \leq \beta_1 (h+k)^p.$$

Soit  $(t, x) \in D_{0,0}$ , en utilisant le lemme 1.7, il résulte de (3.5)

$$|e_{0,0}(t, x)| \leq \sum_{i+j=p} \frac{1}{i!j!} \left\| \frac{\partial^{i+j} u}{\partial t^i \partial x^j} \right\| h^i k^j.$$

D'où il résulte du lemme 3.4.1 que

$$|e_{0,0}(t, x)| \leq \underbrace{\frac{C(p)}{p!}}_{\beta_1} (h+k)^p.$$

Affirmation 2. Il existe une constante  $\beta_2$  indépendante de  $h$  et  $k$  tel que

$$\|e_{n,m}\|_{L^\infty(D_{n,m})} \leq \beta_2 (h+k)^{p-1},$$

pour tout  $n = 0, \dots, N-1$  et  $m = 1, \dots, M-1$ .

Soit  $(t, x) \in D_{n,m}$ , on a de (3.9)

$$\begin{aligned} |u(t, x) - \hat{u}_{n,m}(t, x)| &\leq c_1 k \sum_{\rho=0}^{m-1} (\|\partial_t e_{n,\rho}\| + \|e_{n,\rho}\|) + c_2 \int_{x_m}^x \|\partial_t u(t, s) - \partial_t \hat{u}_{n,m}(t, s)\| ds \\ &+ c_2 \int_{x_m}^x \|u(t, s) - \hat{u}_{n,m}(t, s)\| ds, \end{aligned} \quad (3.19)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des nombres positifs.

D'autre part, en calculant la dérivée de l'équation (3.9) par rapport à  $t$ , on obtient pour  $x \neq x_m$

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^x (x-s)(\partial_t u(t,s) - \partial_t \hat{u}_{n,m}(t,s)) ds &= \kappa(u(t,x) - \hat{u}_{n,m}(t,x)) \\ &+ \int_{x_m}^x ((x-s)a(t,s) - v(t))(u(t,s) - \hat{u}_{n,m}(t,s)) ds \\ &- \sum_{\rho=0}^{m-1} \int_{x_\rho}^{x_{\rho+1}} (x-s)(\partial_t u(t,s) - \partial_t \bar{u}_{n,\rho}(t,s)) + v(t)(u(t,s) - \bar{u}_{n,\rho}(t,s)) ds \end{aligned}$$

d'où

$$c_3 \|\partial_t u - \partial_t \hat{u}_{n,m}\| \leq \kappa \|u - \hat{u}_{n,m}\| + kc_4 \|u - \hat{u}_{n,m}\| + kc_5 \sum_{\rho=0}^{m-1} (\|\partial_t e_{n,\rho}\| + \|e_{n,\rho}\|)$$

alors

$$\|\partial_t u - \partial_t \hat{u}_{n,m}\| \leq \frac{\kappa + kc_4}{c_3} \|u - \hat{u}_{n,m}\| + \frac{kc_5}{c_3} \sum_{\rho=0}^{m-1} (\|\partial_t e_{n,\rho}\| + \|e_{n,\rho}\|). \quad (3.20)$$

En calculant la dérivée de l'équation (3.9) par rapport à  $t$  pour  $x = x_m$ , on obtient

$$\|\partial_t u - \partial_t \hat{u}_{n,m}\| \leq \frac{kc_6}{\kappa} \sum_{\rho=0}^{m-1} (\|\partial_t e_{n,\rho}\| + \|e_{n,\rho}\|) \quad (3.21)$$

en utilisant (3.20) et (3.21), on obtient

$$\|\partial_t u - \partial_t \hat{u}_{n,m}\| \leq \left( \frac{\kappa + kc_4}{c_3} \right) \|u - \hat{u}_{n,m}\| + kc_7 \sum_{\rho=0}^{m-1} (\|\partial_t e_{n,\rho}\| + \|e_{n,\rho}\|) \quad (3.22)$$

où  $c_3, c_4, c_5$  et  $c_6$  sont des nombres positifs et  $c_7 = k(\frac{c_5}{c_3} + \frac{c_6}{\kappa})$ .

Alors, de (3.19) et de (3.22), on a

$$\begin{aligned} \|u - \hat{u}_{n,m}\| + \|\partial_t u - \partial_t \hat{u}_{n,m}\| &\leq k(c_1 + c_7) \sum_{\rho=0}^{m-1} (\|\partial_t e_{n,\rho}\| + \|e_{n,\rho}\|) \\ &\quad + c_2 X \|\partial_t u - \partial_t \hat{u}_{n,m}\| + \left(c_2 X + \frac{1}{c_3} + \frac{Xc_4}{\kappa c_3}\right) \|u - \hat{u}_{n,m}\|, \end{aligned}$$

notons par  $c_8 = \max\{c_2 X, c_2 X + \frac{1}{c_3} + \frac{Xc_4}{\kappa c_3}\}$ , alors

$$\begin{aligned} \|u - \hat{u}_{n,m}\| + \|\partial_t u - \partial_t \hat{u}_{n,m}\| &\leq k(c_1 + c_7) \sum_{\rho=0}^{m-1} (\|\partial_t e_{n,\rho}\| + \|e_{n,\rho}\|) \\ &\quad + c_8 (\|u - \hat{u}_{n,m}\| + \|\partial_t u - \partial_t \hat{u}_{n,m}\|), \end{aligned}$$

d'où

$$\|u - \hat{u}_{n,m}\| + \|\partial_t u - \partial_t \hat{u}_{n,m}\| \leq \underbrace{\frac{c_1 + c_7}{1 - c_8}}_{c_9} k \sum_{\rho=0}^{m-1} (\|\partial_t e_{n,\rho}\| + \|e_{n,\rho}\|),$$

et du lemme 3.4.1, on déduit que

$$\begin{aligned} \|\partial_t e_{n,m}\| + \|e_{n,m}\| &\leq \|\partial_t u - \partial_t \hat{u}_{n,m}\| + \|\partial_t \hat{u}_{n,m} - \partial_t \bar{u}\| + \|u - \hat{u}_{n,m}\| + \|\hat{u}_{n,m} - \bar{u}\| \\ &\leq c_9 k \sum_{\rho=0}^{m-1} (\|\partial_t e_{n,\rho}\| + \|e_{n,\rho}\|) + \frac{C(p)}{(p-1)!} \left(\frac{T+X}{p} + 1\right) (h+k)^{p-1}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1.8, on obtient

$$\|\partial_t e_{n,m}\| + \|e_{n,m}\| \leq \underbrace{\frac{C(p)}{(p-1)!} \left(\frac{T+X}{p} + 1\right) \exp(c_9 X)}_{\beta_2} (h+k)^{p-1}.$$

Cela implique que pour tout  $n = 0, \dots, N - 1$  et  $m = 0, \dots, M - 1$

$$\|e_{n,m}\| \leq \beta(h+k)^{p-1},$$

où  $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$ .

Par conséquent, la démonstration du Théorème 3.4.1 est achevée.  $\square$

### 3.5 Exemples numériques

Dans cette section, nous allons étudier l'application pratique de la méthode discutée en détail dans les sections précédentes pour résoudre un système de transport-diffusion. Les calculs ont été effectués à l'aide de Maple 17 fonctionnant sous Windows 7 sur un ordinateur équipé d'un processeur Intel Core i7-2630QM @2.00 GHz et de 8,00 Go de RAM.

#### Cas d'une seule equation ( $d = 1$ )

**Exemple 3.5.1.** Considérons l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = t^2 x^3 u(t, x) - \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2},$$

avec les conditions initiales :

$$u(0, x) = x, \quad u(t, 0) = -0.00025 \sin(\pi^2 t), \quad \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = 1,$$

pour tout  $t, x \in [0, 1]$ , où  $F(t, x)$  est choisie de sorte que la solution exacte soit  $u(t, x) = x - 0.00025 \sin(\pi^2 t)$ .

Ce problème de Cauchy est équivalent à l'équation intégrale-différentielle de Volterra bidimensionnelle linéaire :

$$u(t, x) = F(t, x) + \int_0^x (x - s) \left( \frac{\partial u(t, s)}{\partial t} - t^2 x^3 u(t, s) \right) ds. \quad (3.23)$$

La comparaison entre la solution exacte de l'équation (3.23) et la solution approchée obtenue par la méthode proposée est présentée dans le tableau 3.1 en différents points du domaine  $D = [0.1] \times [0.1]$ . Cette comparaison est effectuée pour  $p = 2, 3, 4$  et pour  $(N, M) = (5, 10)$ .

| $(t, x)$      | $p = 2$      | $p = 3$      | $P = 4$      |
|---------------|--------------|--------------|--------------|
| $(0, 0)$      | 0            | 0            | 0            |
| $(0.2, 0.1)$  | $2.51e - 11$ | $1.52e - 13$ | $1.23e - 13$ |
| $(0.4, 0.2)$  | $4.39e - 07$ | $2.14e - 10$ | $1.08e - 11$ |
| $(0.6, 0.3)$  | $1.51e - 06$ | $4.67e - 08$ | $4.09e - 11$ |
| $(0.8, 0.4)$  | $1.58e - 05$ | $2.02e - 08$ | $7.56e - 09$ |
| $(1, 0.5)$    | $7.59e - 04$ | $1.69e - 04$ | $4.57e - 04$ |
| CPU temps/sec | 2.60 s       | 2.70 s       | 3.01 s       |

TABLE 3.1 – Comparaisons de l'erreur absolue pour l'exemple 3.5.1

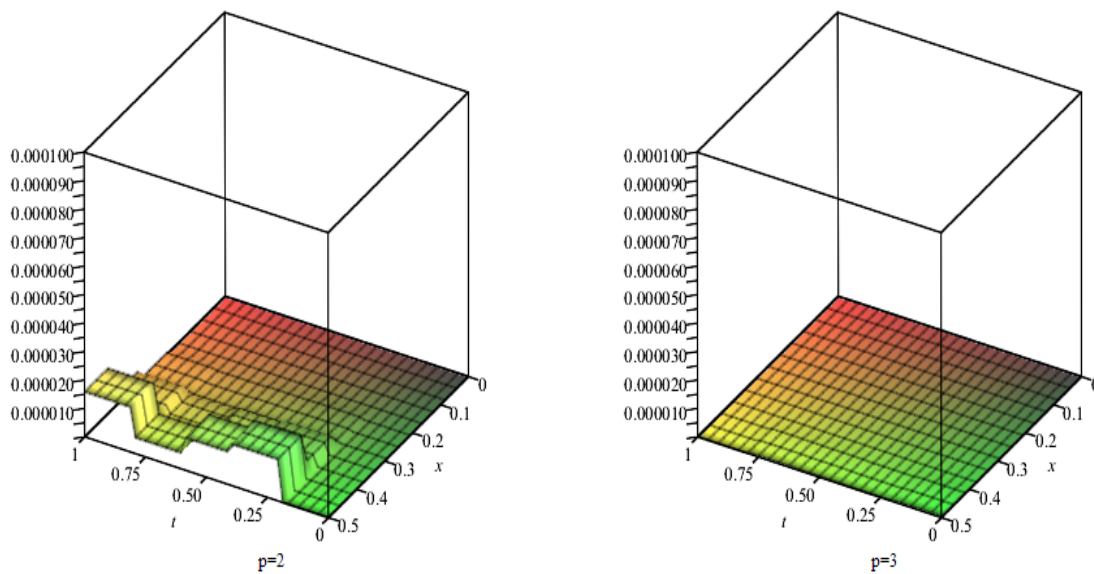


FIGURE 3.1 – La représentation graphique de la fonction erreur absolue de l'exemple 3.5.1 pour  $p = 2, 3$ , et pour  $(N, M) = (5, 10)$ .

**Exemple 3.5.2.** Considérons l'équation de transport-diffusion :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \sin(t^2) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - 4 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = \ln(2)t^2 u(t, x) - 4 \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2},$$

avec les conditions initiales :

$$u(0, x) = \ln(x^2 + 1), \quad u(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = 0,$$

pour tout  $t, x \in [0, 1]$ , où  $F(t, x)$  est choisie de sorte que la solution exacte soit  $u(t, x) = e^{t^4} \ln(x^2 + 1)$ .

Ce problème de Cauchy est équivalent à l'équation intégral-différentielle de Volterra bidimensionnelle linéaire :

$$u(t, x) = F(t, x) + \frac{1}{4} \int_0^x (x - s) \left( \frac{\partial u(t, s)}{\partial t} - \ln(2)t^2 u(t, s) \right) + \sin(t^2) u(t, s) ds. \quad (3.24)$$

La comparaison entre la solution exacte de l'équation (3.24) et la solution approchée obtenue par la méthode proposée est présentée dans le tableau 3.2 en différents points du domaine  $D = [0.1] \times [0.1]$ . Cette comparaison est effectuée pour  $p = 3, 4$  et pour  $(N, M) = (5, 5), (10, 10)$ . L'ordre de convergence expérimental (EOC) de la méthode est présenté dans le tableau 3.3. Cette EOC est calculé pour trois degrés de polynômes  $p = 2, 3$  et  $p = 4$ .

Les résultats obtenus montrent que l'EOC se stabilise autour de  $p - 1$ . Cette observation suggère que la méthode proposée atteint l'ordre de convergence attendu, confirmant sa fiabilité théorique.

| $(t, x)$      | $p = 3$      |              | $p = 4$      |              |
|---------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|               | $N = M = 5$  | $N = M = 10$ | $N = M = 5$  | $N = M = 10$ |
| $(0, 0)$      | 0            | 0            | 0            | 0            |
| $(0.1, 0.1)$  | $4.87e - 05$ | $8.41e - 09$ | $4.87e - 05$ | $7.74e - 11$ |
| $(0.2, 0.2)$  | $1.08e - 06$ | $4.12e - 07$ | $1.22e - 08$ | $1.20e - 08$ |
| $(0.3, 0.3)$  | $1.53e - 04$ | $3.60e - 06$ | $4.38e - 05$ | $2.15e - 07$ |
| $(0.4, 0.4)$  | $5.47e - 05$ | $1.69e - 05$ | $2.79e - 06$ | $1.67e - 06$ |
| $(0.5, 0.5)$  | $1.06e - 03$ | $5.80e - 05$ | $2.57e - 04$ | $8.38e - 06$ |
| $(0.6, 0.6)$  | $5.36e - 04$ | $1.68e - 04$ | $5.86e - 05$ | $3.22e - 05$ |
| $(0.7, 0.7)$  | $6.28e - 03$ | $4.47e - 04$ | $8.53e - 04$ | $1.05e - 04$ |
| $(0.8, 0.8)$  | $3.41e - 03$ | $1.16e - 03$ | $6.30e - 04$ | $3.15e - 04$ |
| $(0.9, 0.9)$  | $3.50e - 02$ | $3.07e - 03$ | $6.79e - 03$ | $9.06e - 04$ |
| CPU temps/sec | 10.68 s      | 346.35 s     | 17.15 s      | 355.73 s     |

TABLE 3.2 – Comparaisons de l'erreur absolu pour l'exemple 3.5.2

| $(N, M)$ | $(2, 2)$ | $(4, 4)$ | $(8, 8)$ | $(16, 16)$ |
|----------|----------|----------|----------|------------|
| $p = 2$  | /        | 0.70     | 1.00     | 1.12       |
| $p = 3$  | /        | 1.18     | 1.66     | 1.79       |
| $p = 4$  | /        | 1.88     | 2.56     | 3.14       |

TABLE 3.3 – L'ordre de convergence expérimental pour l'exemple 3.5.2

### Cas d'un système à deux équations ( $d = 2$ )

**Exemple 3.5.3.** Considérons le système d'équation de transport-diffusion :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} - 0.1 \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} &= u_2(t, x) - 0.1 \frac{\partial^2 F_1(t, x)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} - 0.1 \frac{\partial^2 u_2(t, x)}{\partial x^2} &= -u_1(t, x) - 2u_2(t, x) - 0.1 \frac{\partial^2 F_2(t, x)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} u_1(0, x) &= -0.002 \sin(\pi x), \quad u_1(t, 0) = 0.002t^4, \quad \frac{\partial u_1(t, 0)}{\partial x} = -0.002\pi, \\ u_2(0, x) &= 0.001 \sin(\pi - x), \quad u_2(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_2(t, 0)}{\partial x} = 0.001e^{-\frac{1}{2}t}, \end{aligned}$$

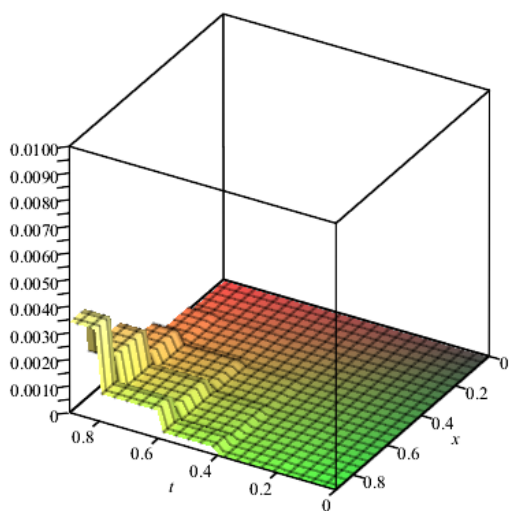
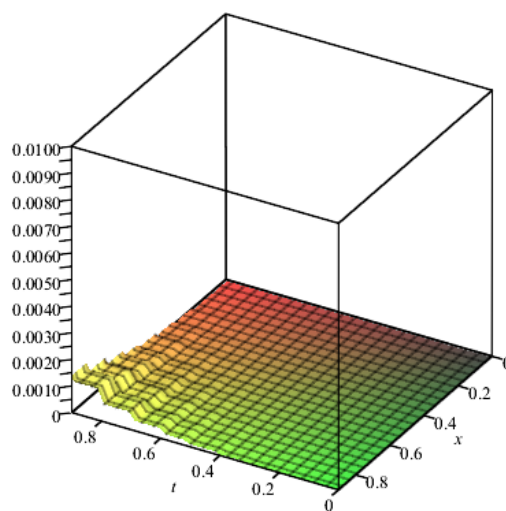
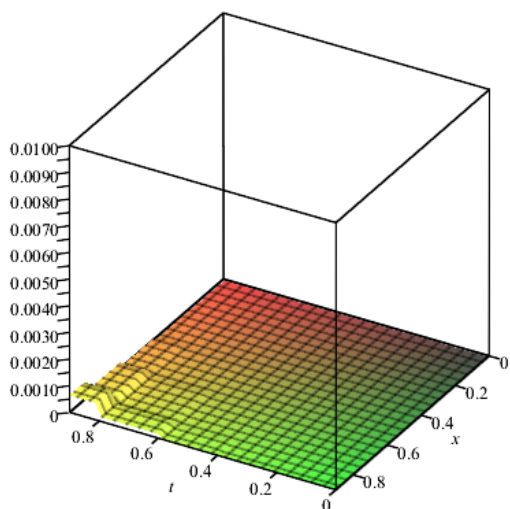
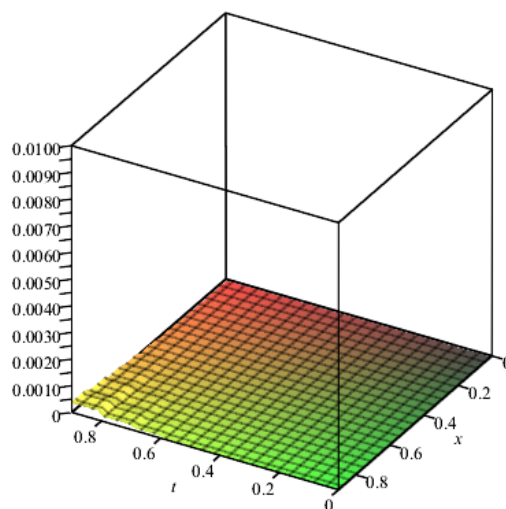
(a) La fonction  $e$  pour  $p = 3, N = M = 5$ .(b) La fonction  $e$  pour  $p = 3, N = M = 10$ .(c) La fonction  $e$  pour  $p = 4, N = M = 5$ .(d) La fonction  $e$  pour  $p = 4, N = M = 10$ .

FIGURE 3.2 – La représentation graphique de la fonction erreur absolue de l'exemple 3.5.2

pour  $t, x \in [0, 1]$ , où  $fF_1(t, x)$  et  $F_2(t, x)$  sont choisis de sorte que la solution exacte soit

$$(u_1(t, x), u_2(t, x)) = (0.002(t^4 - \sin(\pi x)), 0.001e^{-\frac{1}{2}t} \sin(\pi - x)).$$

Il est clair que ce problème de Cauchy est équivalent au système d'équation intégrodifférentielle de Volterra bidimensionnelle linéaire :

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= F_1(t, x) + 10 \int_0^x (x-s) \left( \frac{\partial u_1(t, s)}{\partial t} - u_2(t, s) \right) ds, \\ u_2(t, x) &= F_2(t, x) + 10 \int_0^x (x-s) \left( \frac{\partial u_2(t, s)}{\partial t} + u_1(t, s) + 2u_2(t, s) \right) ds. \end{aligned} \quad (3.25)$$

La comparaison entre la solution exacte du système (3.25) et la solution approchée obtenue par la méthode proposée est présenté dans le tableau 3.4 en différents points du domaine  $D = [0.1] \times [0.1]$ . Cette comparaison est effectuée pour  $p = 2, 3$  et pour  $(N, M) = (10, 20)$ .

| $(t, x)$      | $p = 2$    |            |            | $p = 3$    |            |            |
|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|               | $e_1$      | $e_2$      | $e$        | $e_1$      | $e_2$      | $e$        |
| (0,0)         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| (0.1,0.05)    | $2.48e-11$ | $9.75e-08$ | $9.75e-08$ | $2.01e-11$ | $1.77e-09$ | $1.77e-09$ |
| (0.2,0.1)     | $1.72e-07$ | $5.14e-07$ | $5.14e-07$ | $2.38e-08$ | $4.54e-08$ | $4.54e-08$ |
| (0.3,0.15)    | $2.53e-06$ | $1.44e-06$ | $2.53e-06$ | $2.21e-07$ | $3.80e-07$ | $3.80e-07$ |
| (0.4,0.2)     | $1.62e-05$ | $3.09e-06$ | $1.62e-05$ | $1.19e-06$ | $1.27e-06$ | $1.27e-06$ |
| (0.5,0.25)    | $6.70e-05$ | $4.55e-06$ | $6.70e-05$ | $4.99e-06$ | $2.44e-06$ | $4.99e-06$ |
| (0.6,0.3)     | $2.11e-04$ | $7.47e-07$ | $2.11e-04$ | $1.73e-05$ | $1.78e-06$ | $1.73e-05$ |
| (0.7,0.35)    | $5.54e-04$ | $2.43e-05$ | $5.54e-04$ | $5.09e-05$ | $7.16e-06$ | $5.09e-05$ |
| (0.8,0.4)     | $1.27e-03$ | $1.10e-04$ | $1.27e-03$ | $1.32e-04$ | $3.98e-05$ | $1.32e-04$ |
| (0.9,0.45)    | $2.63e-03$ | $3.42e-04$ | $2.63e-03$ | $3.05e-04$ | $1.29e-04$ | $3.05e-04$ |
| (1,0.5)       | $5.84e-03$ | $7.54e-04$ | $5.84e-03$ | $1.68e-03$ | $3.17e-04$ | $1.69e-03$ |
| CPU temps/sec | 11.65 s    |            |            | 38.09 s    |            |            |

TABLE 3.4 – Comparaisons de l'erreur absolu pour l'exemple 3.5.3

**Exemple 3.5.4.** Considérons le système d'équation de transport-diffusion :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} + e^{-t^2} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial x} - 3 \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} &= -3t^2 x u_1(t, x) + \ln(2) t^2 u_2(t, x) - 3 \frac{\partial^2 F_1(t, x)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} + t^3 \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial x} - 3 \frac{\partial^2 u_2(t, x)}{\partial x^2} &= t^3 e^{-t} u_1(t, x) + (t+x) u_2(t, x) - 3 \frac{\partial^2 F_2(t, x)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

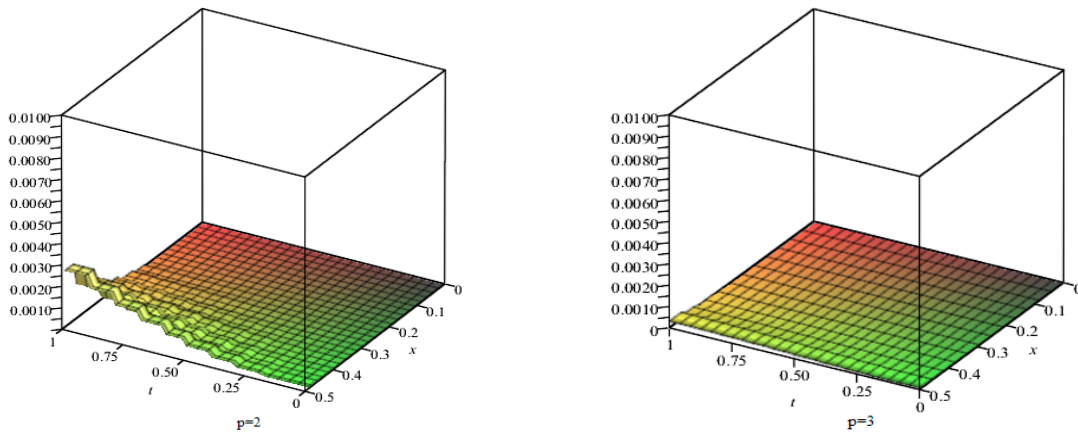


FIGURE 3.3 – La représentation graphique de la fonction erreur absolue de l'exemple 3.5.3 pour  $p = 2, 3$ , et pour  $(N, M) = (10, 20)$ .

avec les conditions initiales :

$$u_1(0, x) = u_1(t, 0) = \frac{\partial u_1(t, 0)}{\partial x} = 0,$$

$$u_2(0, x) = \frac{\partial u_2(t, 0)}{\partial x} = 0, \quad u_2(t, 0) = -t^3,$$

pour  $t, x \in [0, 1]$ , où  $F_1(t, x)$  et  $F_2(t, x)$  sont choisis de sorte que la solution exacte soit

$$(u_1(t, x), u_2(t, x)) = (-t^4 \sin(x^2), -t^3 \cos(x)).$$

Il est clair que ce problème de Cauchy est équivalent au système d'équation intégrodifférentielle de Volterra bidimensionnelle linéaire :

$$u_1(t, x) = F_1(t, x) + \frac{1}{3} \int_0^x (x-s) \left( \frac{\partial u_1(t, s)}{\partial t} + 3t^2 s u_1(t, s) - \ln(2) t^2 u_2(t, s) \right) + e^{-t^2} u_1(t, s) ds,$$

$$u_2(t, x) = F_2(t, x) + \frac{1}{3} \int_0^x (x-s) \left( \frac{\partial u_2(t, s)}{\partial t} - t^3 e^{-t} u_1(t, s) - (t+s) u_2(t, s) \right) + t^3 u_2(t, s) ds.$$

(3.26)

La comparaison entre la solution exacte du système (3.25) et la solution approchée obtenue par la méthode proposée est présenté dans les tableaux 3.5–3.6 en différents points du

domaine  $D = [0.1] \times [0.1]$ . Cette comparaison est effectuée pour  $p = 2, 3$  et pour  $(N, M) = (5, 5), (10, 10)$ .

| $(t, x)$      | $(N, M) = (5, 5)$ |            |            | $(N, M) = (10, 10)$ |            |            |
|---------------|-------------------|------------|------------|---------------------|------------|------------|
|               | $e_1$             | $e_2$      | $e$        | $e_1$               | $e_2$      | $e$        |
| (0,0)         | 0                 | 0          | 0          | 0                   | 0          | 0          |
| (0.1,0.1)     | $9.99e-07$        | $9.95e-04$ | $9.95e-04$ | $1.11e-08$          | $4.09e-08$ | $4.09e-08$ |
| (0.2,0.2)     | $1.44e-06$        | $2.47e-06$ | $2.47e-06$ | $9.20e-07$          | $1.72e-06$ | $1.72e-06$ |
| (0.3,0.3)     | $4.77e-04$        | $7.14e-03$ | $7.14e-03$ | $1.24e-05$          | $2.10e-05$ | $2.10e-05$ |
| (0.4,0.4)     | $1.21e-04$        | $1.47e-05$ | $1.21e-04$ | $7.66e-05$          | $1.11e-04$ | $1.11e-04$ |
| (0.5,0.5)     | $5.57e-03$        | $1.54e-02$ | $1.54e-02$ | $3.12e-04$          | $3.89e-04$ | $3.89e-04$ |
| (0.6,0.6)     | $1.64e-03$        | $4.02e-04$ | $1.64e-03$ | $9.76e-04$          | $1.08e-03$ | $1.08e-03$ |
| (0.7,0.7)     | $2.57e-02$        | $2.96e-02$ | $2.96e-02$ | $2.55e-03$          | $2.60e-03$ | $2.60e-03$ |
| (0.8,0.8)     | $1.01e-02$        | $3.41e-03$ | $1.01e-02$ | $5.83e-03$          | $5.71e-03$ | $5.83e-03$ |
| (0.9,0.9)     | $7.53e-02$        | $5.83e-02$ | $7.53e-02$ | $1.20e-02$          | $1.19e-02$ | $1.20e-02$ |
| CPU temps/sec | 20.45 s           |            |            | 282.06 s            |            |            |

TABLE 3.5 – Comparaison de l'erreur absolue pour  $p = 2$  pour l'exemple 3.5.4

| $(t, x)$      | $(N, M) = (5, 5)$ |            |            | $(N, M) = (10, 10)$ |            |            |
|---------------|-------------------|------------|------------|---------------------|------------|------------|
|               | $e_1$             | $e_2$      | $e$        | $e_1$               | $e_2$      | $e$        |
| (0,0)         | 0                 | 0          | 0          | 0                   | 0          | 0          |
| (0.1,0.1)     | $9.99e-07$        | $9.95e-04$ | $9.95e-04$ | $1.13e-08$          | $3.67e-08$ | $3.67e-08$ |
| (0.2,0.2)     | $1.48e-06$        | $1.96e-06$ | $1.96e-06$ | $5.84e-07$          | $7.80e-07$ | $7.80e-07$ |
| (0.3,0.3)     | $2.39e-04$        | $5.54e-04$ | $5.54e-04$ | $5.30e-06$          | $3.70e-06$ | $5.30e-06$ |
| (0.4,0.4)     | $7.98e-05$        | $3.15e-05$ | $7.98e-05$ | $2.53e-05$          | $9.52e-06$ | $2.53e-05$ |
| (0.5,0.5)     | $1.64e-03$        | $4.22e-04$ | $1.64e-03$ | $8.48e-05$          | $1.39e-05$ | $8.48e-05$ |
| (0.6,0.6)     | $7.31e-04$        | $3.09e-05$ | $7.31e-04$ | $2.26e-04$          | $7.26e-06$ | $2.26e-04$ |
| (0.7,0.7)     | $4.90e-03$        | $6.83e-04$ | $4.90e-03$ | $5.08e-04$          | $1.45e-04$ | $5.08e-04$ |
| (0.8,0.8)     | $3.29e-03$        | $1.23e-03$ | $3.29e-03$ | $9.87e-04$          | $6.94e-04$ | $9.87e-04$ |
| (0.9,0.9)     | $8.14e-03$        | $4.99e-03$ | $8.14e-03$ | $1.66e-03$          | $2.49e-03$ | $2.49e-03$ |
| CPU temps/sec | 24.85 s           |            |            | 620.64 s            |            |            |

TABLE 3.6 – Comparaison de l'erreur absolue pour  $p = 3$  pour l'exemple 3.5.4

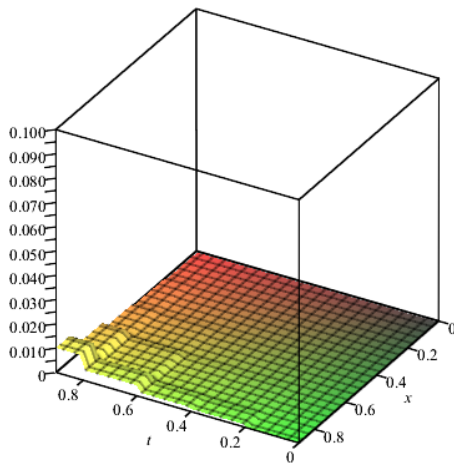
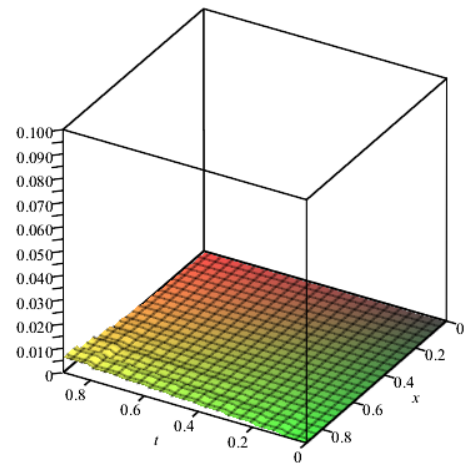
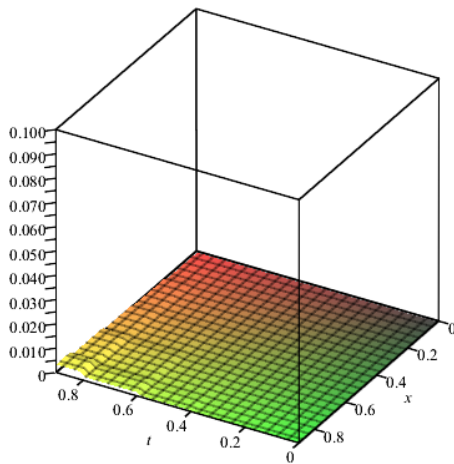
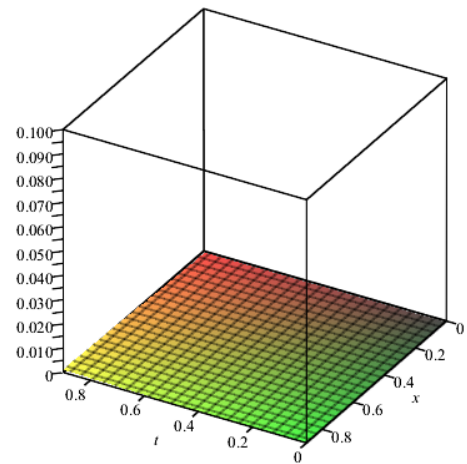
(a) La fonction  $e$  pour  $p = 2, N = M = 5$ .(b) La fonction  $e$  pour  $p = 2, N = M = 10$ .(c) La fonction  $e$  pour  $p = 3, N = M = 5$ .(d) La fonction  $e$  pour  $p = 3, N = M = 10$ .

FIGURE 3.4 – La représentation graphique de la fonction erreur absolue de l'exemple 3.5.4

### Cas d'un système à trois équations ( $d = 3$ )

**Exemple 3.5.5.** Considérons le système d'équation de transport-diffusion :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} &= u_2(t, x) - 2u_3(t, x) - 2 \frac{\partial^2 F_1(t, x)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 u_2(t, x)}{\partial x^2} &= 2u_1(t, x) - u_3(t, x) - 2 \frac{\partial^2 F_2(t, x)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_3(t, x)}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 u_3(t, x)}{\partial x^2} &= 2u_1(t, x) + 3u_2(t, x) - 2 \frac{\partial^2 F_3(t, x)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} u_1(0, x) &= -0.0021x^2, \quad u_1(t, 0) = 0.0021t^4, \quad \frac{\partial u_1(t, 0)}{\partial x} = 0, \\ u_2(0, x) &= x, \quad u_2(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_2(t, 0)}{\partial x} = e^{-t^3}, \\ u_3(0, x) &= 0, \quad u_3(t, 0) = 0.000125t^3, \quad \frac{\partial u_3(t, 0)}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

pour  $t, x \in [0, 1]$ , où  $F_1(t, x)$ ,  $F_2(t, x)$  et  $F_3(t, x)$  sont choisis de sorte que la solution exacte soit  $(u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x)) = (0.0021(t^4 - x^2), e^{-t^3}x, 0.000125t^3 \cos(x))$ .

Ce problème de Cauchy est équivalent au système d'équation intégral-différentielle de Volterra bidimensionnelle linéaire :

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= F_1(t, x) + \frac{1}{2} \int_0^x (x-s) \left( \frac{\partial u_1(t, s)}{\partial t} - u_2(t, s) + 2u_3(t, s) \right) ds, \\ u_2(t, x) &= F_2(t, x) + \frac{1}{2} \int_0^x (x-s) \left( \frac{\partial u_2(t, s)}{\partial t} - 2u_1(t, s) + u_3(t, s) \right) ds, \\ u_3(t, x) &= F_3(t, x) + \frac{1}{2} \int_0^x (x-s) \left( \frac{\partial u_3(t, s)}{\partial t} - 2u_1(t, s) - 3u_2(t, s) \right) ds. \end{aligned} \quad (3.27)$$

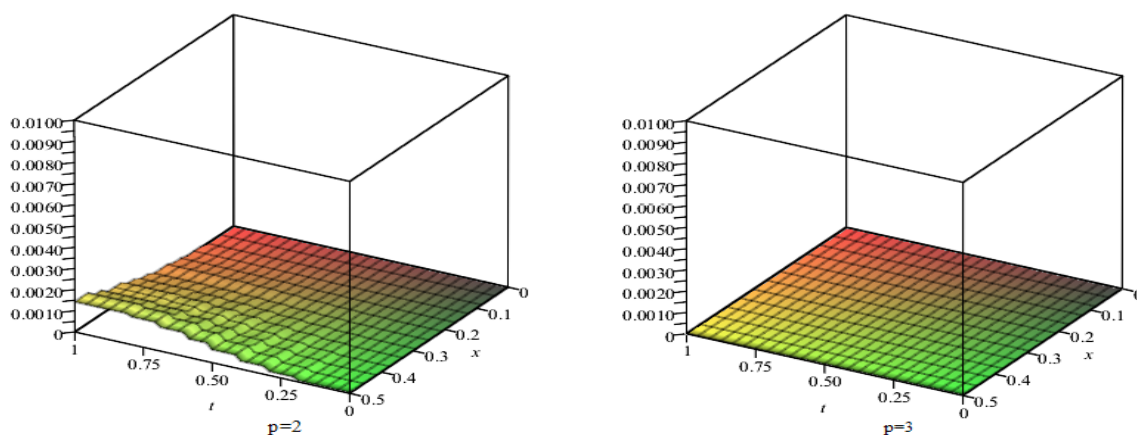
La comparaison entre la solution exacte du système (3.27) et la solution approchée obtenue par la méthode proposée est présenté dans le tableau 3.7 en différents points du domaine  $D = [0.1] \times [0.1]$ . Cette comparaison est effectuée pour  $p = 2, 3$  et pour  $(N, M) = (10, 20)$ .

**Exemple 3.5.6.** Considérons le système d'équation de transport-diffusion :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} - 3 \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} &= -3t^2 x u_1(t, x) + \ln(2)t^2 u_2(t, x) + tx^3 u_3(t, x) - 3 \frac{\partial^2 F_1(t, x)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} - e^{-t^3} \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial x} - 3 \frac{\partial^2 u_2(t, x)}{\partial x^2} &= (t^3 - tx)u_1(t, x) + (t+x)u_2(t, x) - 3 \frac{\partial^2 F_2(t, x)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_3(t, x)}{\partial t} + t^3 \frac{\partial u_3(t, x)}{\partial x} - 3 \frac{\partial^2 u_3(t, x)}{\partial x^2} &= t^3 e^{-t} u_1(t, x) + (t-x)u_2(t, x) + 3t^2 x u_3(t, x) - 3 \frac{\partial^2 F_3(t, x)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

| $(t, x)$      | $P = 2$      |              |              | $e$          |              |
|---------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|               | $e_1$        | $e_2$        | $e_3$        | $P = 2$      | $P = 3$      |
| $(0, 0)$      | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            |
| $(0.1, 0.05)$ | $3.62e - 14$ | $3.11e - 07$ | $1.09e - 09$ | $3.11e - 7$  | $3.66e - 11$ |
| $(0.2, 0.1)$  | $4.25e - 08$ | $6.21e - 06$ | $7.12e - 09$ | $6.21e - 06$ | $2.62e - 08$ |
| $(0.3, 0.15)$ | $3.11e - 07$ | $3.30e - 05$ | $7.93e - 08$ | $3.30e - 05$ | $2.28e - 07$ |
| $(0.4, 0.2)$  | $1.08e - 06$ | $1.04e - 04$ | $5.62e - 07$ | $1.04e - 04$ | $9.96e - 07$ |
| $(0.5, 0.25)$ | $2.49e - 06$ | $2.44e - 04$ | $2.40e - 06$ | $2.44e - 04$ | $2.86e - 06$ |
| $(0.6, 0.3)$  | $4.20e - 06$ | $4.70e - 04$ | $7.33e - 06$ | $4.70e - 04$ | $6.29e - 06$ |
| $(0.7, 0.35)$ | $5.21e - 06$ | $7.74e - 04$ | $1.76e - 05$ | $7.74e - 04$ | $1.14e - 05$ |
| $(0.8, 0.4)$  | $3.95e - 06$ | $1.12e - 03$ | $3.49e - 05$ | $1.12e - 03$ | $1.79e - 05$ |
| $(0.9, 0.45)$ | $1.37e - 06$ | $1.42e - 03$ | $5.92e - 05$ | $1.42e - 03$ | $2.46e - 05$ |
| $(1, 0.5)$    | $8.70e - 04$ | $4.87e - 03$ | $3.16e - 03$ | $4.87e - 03$ | $3.27e - 03$ |
| CPU temps/sec | 18.03 s      |              |              | 18.03 s      | 30.25 s      |

TABLE 3.7 – Comparaison de l'erreur absolue pour l'exemple 3.5.5

FIGURE 3.5 – La représentation graphique de la fonction erreur absolue de l'exemple 3.5.5 pour  $p = 2, 3$ , et pour  $(N, M) = (10, 20)$ .

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned}
 u_1(0, x) &= -x^2, & u_1(t, 0) &= t^4, & \frac{\partial u_1(t, 0)}{\partial x} &= 0, \\
 u_2(0, x) &= 0, & u_2(t, 0) &= 0, & \frac{\partial u_2(t, 0)}{\partial x} &= -t^3, \\
 u_3(0, x) &= 0, & u_3(t, 0) &= -t^3, & \frac{\partial u_3(t, 0)}{\partial x} &= 0,
 \end{aligned}$$

pour  $t, x \in [0, 1]$ , où  $F_1(t, x)$ ,  $F_2(t, x)$  et  $F_3(t, x)$  sont choisis de sorte que la solution exacte soit  $(u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x)) = (t^4 - x^2, -t^3x, -t^3 \cos(x))$ .

Il est clair que ce problème de Cauchy est équivalent au système d'équation intégral-différentielle de Volterra bidimensionnelle linéaire :

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= F_1(t, x) + \frac{1}{3} \int_0^x (x-s) \left( \frac{\partial u_1(t, s)}{\partial t} + 3t^2 s u_1(t, s) - \ln(2)t^2 u_2(t, s) - t s^3 u_3(t, s) \right) ds, \\ u_2(t, x) &= F_2(t, x) + \frac{1}{3} \int_0^x (x-s) \left( \frac{\partial u_2(t, s)}{\partial t} - (t^3 - t s) u_1(t, s) - (t+s) u_2(t, s) \right) - e^{-t^3} u_2(t, s) ds, \\ u_3(t, x) &= F_3(t, x) + \frac{1}{3} \int_0^x (x-s) \left( \frac{\partial u_3(t, s)}{\partial t} - t^3 e^{-t} u_1(t, s) - (t-s) u_2(t, s) - 3t^2 s u_3(t, s) \right) + t^3 u_3(t, s) ds. \end{aligned} \quad (3.28)$$

La comparaison entre la solution exacte du système (3.28) et la solution approchée obtenue par la méthode proposée est présentée dans les tableaux 3.8–3.11 en différents points du domaine  $D = [0.1] \times [0.1]$ . Cette comparaison est effectuée pour  $p = 2, 3$  et pour  $(N, M) = (5, 5), (10, 10)$ .

| $(t, x)$      | $e_1$      | $e_2$      | $e_3$      | $e$        |
|---------------|------------|------------|------------|------------|
| (0,0)         | 0          | 0          | 0          | 0          |
| (0.1,0.1)     | $9.90e-03$ | $1.00e-04$ | $9.95e-04$ | $9.90e-03$ |
| (0.2,0.2)     | $6.40e-07$ | $5.44e-05$ | $2.81e-06$ | $5.44e-05$ |
| (0.3,0.3)     | $6.38e-03$ | $3.49e-03$ | $7.15e-03$ | $7.15e-03$ |
| (0.4,0.4)     | $6.35e-05$ | $1.07e-03$ | $1.01e-06$ | $1.07e-03$ |
| (0.5,0.5)     | $6.55e-03$ | $1.38e-02$ | $1.55e-02$ | $1.55e-02$ |
| (0.6,0.6)     | $1.19e-03$ | $5.81e-03$ | $2.76e-04$ | $5.81e-03$ |
| (0.7,0.7)     | $4.27e-02$ | $3.60e-02$ | $3.03e-02$ | $4.27e-02$ |
| (0.8,0.8)     | $8.57e-03$ | $2.02e-02$ | $2.83e-03$ | $2.02e-02$ |
| (0.9,0.9)     | $3.37e-01$ | $1.34e-01$ | $8.13e-02$ | $6.23e-02$ |
| CPU temps/sec | 7.92 s     |            |            |            |

TABLE 3.8 – Comparaison de l'erreur absolu pour  $P = 2$  et  $(N, M) = (5, 5)$  pour l'exemple 3.5.6

| $(t, x)$      | $e_1$      | $e_2$      | $e_3$      | $e$        |
|---------------|------------|------------|------------|------------|
| (0,0)         | 0          | 0          | 0          | 0          |
| (0.1,0.1)     | $5.00e-09$ | $1.69e-06$ | $4.36e-08$ | $1.69e-06$ |
| (0.2,0.2)     | $1.16e-06$ | $3.34e-05$ | $1.59e-06$ | $3.34e-05$ |
| (0.3,0.3)     | $1.97e-05$ | $1.81e-04$ | $1.99e-05$ | $1.81e-04$ |
| (0.4,0.4)     | $1.33e-04$ | $5.94e-04$ | $1.05e-04$ | $5.94e-04$ |
| (0.5,0.5)     | $5.69e-04$ | $1.50e-03$ | $3.72e-04$ | $1.50e-03$ |
| (0.6,0.6)     | $1.84e-03$ | $3.20e-03$ | $1.04e-03$ | $3.20e-03$ |
| (0.7,0.7)     | $4.91e-03$ | $6.19e-03$ | $2.49e-03$ | $6.19e-03$ |
| (0.8,0.8)     | $1.15e-02$ | $1.12e-02$ | $5.45e-03$ | $1.15e-02$ |
| (0.9,0.9)     | $2.46e-02$ | $1.99e-02$ | $1.13e-02$ | $2.46e-02$ |
| CPU temps/sec | 41.03 s    |            |            |            |

TABLE 3.9 – Comparaison de l'erreur absolu pour  $P = 2$  et  $(N, M) = (10, 10)$  pour l'exemple 3.5.6

| $(t, x)$      | $e_1$      | $e_2$      | $e_3$      | $e$        |
|---------------|------------|------------|------------|------------|
| (0,0)         | 0          | 0          | 0          | 0          |
| (0.1,0.1)     | $1.00e-04$ | $1.00e-04$ | $9.95e-04$ | $9.95e-04$ |
| (0.2,0.2)     | $7.66e-09$ | $3.26e-07$ | $2.50e-06$ | $2.50e-06$ |
| (0.3,0.3)     | $9.54e-04$ | $9.69e-04$ | $5.47e-04$ | $9.69e-04$ |
| (0.4,0.4)     | $2.19e-06$ | $4.77e-05$ | $5.15e-05$ | $5.15e-05$ |
| (0.5,0.5)     | $2.26e-03$ | $2.16e-03$ | $4.37e-04$ | $2.26e-03$ |
| (0.6,0.6)     | $4.83e-05$ | $6.03e-04$ | $1.55e-04$ | $6.03e-04$ |
| (0.7,0.7)     | $5.44e-03$ | $4.88e-03$ | $8.12e-05$ | $5.44e-03$ |
| (0.8,0.8)     | $3.68e-04$ | $4.45e-03$ | $7.72e-04$ | $4.45e-03$ |
| (0.9,0.9)     | $1.66e-02$ | $1.71e-02$ | $9.76e-03$ | $1.71e-02$ |
| CPU temps/sec | 10.35 s    |            |            |            |

TABLE 3.10 – Comparaison de l'erreur absolu pour  $P = 3$  et  $(N, M) = (5, 5)$  pour l'exemple 3.5.6

| $(t, x)$      | $e_1$        | $e_2$        | $e_3$        | $e$          |
|---------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $(0, 0)$      | 0            | 0            | 0            | 0            |
| $(0.1, 0.1)$  | $6.23e - 12$ | $4.66e - 09$ | $4.11e - 08$ | $4.11e - 08$ |
| $(0.2, 0.2)$  | $2.32e - 09$ | $6.45e - 07$ | $9.62e - 07$ | $9.62e - 07$ |
| $(0.3, 0.3)$  | $6.28e - 09$ | $6.81e - 06$ | $5.11e - 06$ | $6.81e - 06$ |
| $(0.4, 0.4)$  | $1.09e - 07$ | $3.44e - 05$ | $1.51e - 05$ | $3.44e - 05$ |
| $(0.5, 0.5)$  | $1.06e - 06$ | $1.22e - 04$ | $2.96e - 05$ | $1.22e - 04$ |
| $(0.6, 0.6)$  | $5.97e - 06$ | $3.61e - 04$ | $2.89e - 05$ | $3.61e - 04$ |
| $(0.7, 0.7)$  | $2.81e - 05$ | $9.64e - 04$ | $6.60e - 05$ | $9.64e - 04$ |
| $(0.8, 0.8)$  | $1.22e - 04$ | $2.48e - 03$ | $5.01e - 04$ | $2.48e - 03$ |
| $(0.9, 0.9)$  | $4.91e - 04$ | $6.47e - 03$ | $1.94e - 03$ | $6.47e - 03$ |
| CPU temps/sec | 84.57 s      |              |              |              |

TABLE 3.11 – Comparaison de l'erreur absolue pour  $P = 3$  et  $(N, M) = (10, 10)$  pour l'exemple 3.5.6

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode numérique pour résoudre le système d'équations de transport diffusion en utilisant la méthode de collocation basée sur les polynômes de Taylor. Cette approche est particulièrement efficace pour l'approximation des solutions des équations intégrales de Volterra, et nous avons aussi réalisé une analyse approfondie des propriétés de convergence de la méthode proposée.

Les expériences numériques démontrent l'efficacité de la méthode de collocation basée sur les polynômes de Taylor pour résoudre le système de transport-diffusion, même en présence de termes de réaction. Ces résultats confirment non seulement l'utilité de la méthode dans ce contexte spécifique, mais soulignent également son potentiel pour des applications dans d'autres domaines impliquant des processus de transport et de diffusion, tels que la modélisation environnementale et atmosphérique. En outre, cette méthode joue un rôle crucial dans la théorie des systèmes, car les équations de transport-diffusion sont essentielles pour modéliser des processus physiques et techniques complexes, notamment le transfert de chaleur, la dispersion des polluants et la dynamique des fluides. Ces équations régissent les effets simultanés du transport et de la diffusion dans les systèmes du monde réel, où les solutions analytiques sont souvent irréalisables en raison des non-linéarités et des interactions à haute dimension.

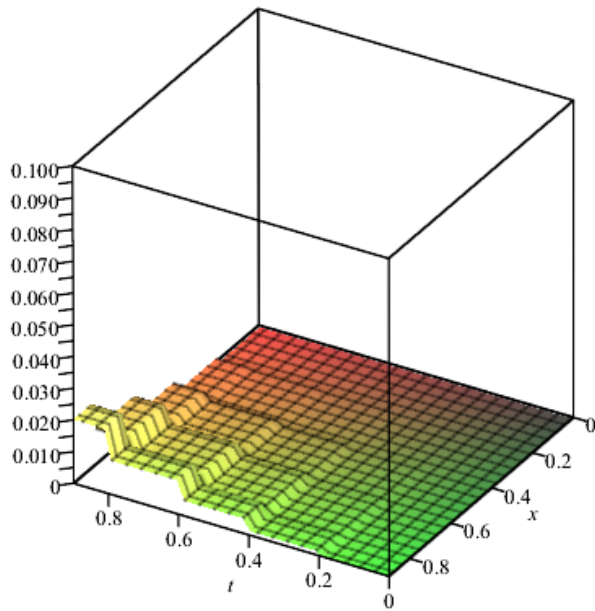
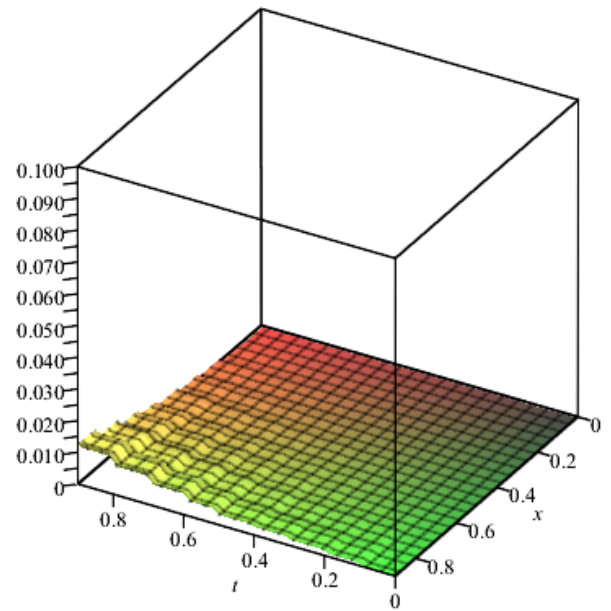
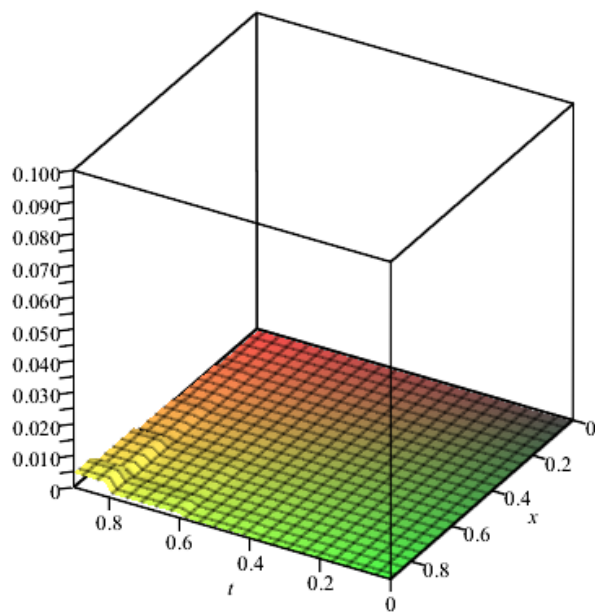
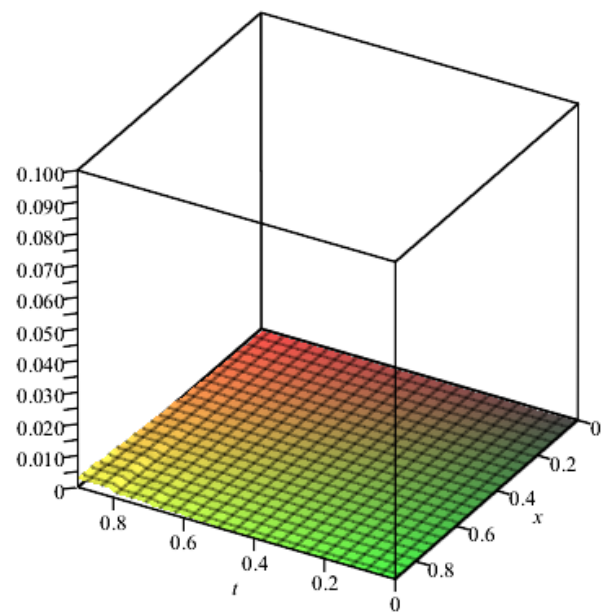
(a) La fonction  $e$  pour  $p = 2, N = M = 5$ .(b) La fonction  $e$  pour  $p = 2, N = M = 10$ .(c) La fonction  $e$  pour  $p = 3, N = M = 5$ .(d) La fonction  $e$  pour  $p = 3, N = M = 10$ .

FIGURE 3.6 – La représentation graphique de la fonction erreur absolue de l'exemple 3.5.6

---

## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Au terme de ce travail de thèse, nous avons étudié les systèmes de transport-diffusion en mettant l'accent sur deux aspects importants : l'analyse théorique du comportement asymptotique des solutions et le développement de méthodes numériques adaptées. L'objectif principal était de mieux comprendre l'interaction entre les mécanismes de transport et de diffusion, tout en proposant une approche de résolution fiable et efficace.

Sur le plan théorique, nous avons établi des résultats relatifs à la bornitude et à la convergence uniforme des solutions. En particulier, nous avons montré que, pour le modèle de Lotka-Volterra avec déplacements et diffusion, la solution et ses logarithmes demeurent globalement bornés, et que, dans le cas où la convergence en moyenne est assurée, la convergence uniforme vers la solution stationnaire a lieu. Ce type d'analyse constitue un outil essentiel pour l'interprétation qualitative des modèles de dynamique des populations, en particulier dans le cadre des équations de type Lotka-Volterra avec diffusion et déplacements.

Parallèlement, nous avons appliqué la méthode de collocation basée sur les pôlynomes de Taylor à l'équation intégrale de type Volterra équivalente au système d'équations de transport-diffusion étudié. Cette reformulation intégrale permet d'exploiter la structure particulière du problème afin d'obtenir des schémas à la fois stables et précis. Les simulations numériques réalisées ont confirmé la pertinence de cette approche, en particulier pour des systèmes comportant plusieurs équations avec des termes sources linéaires. L'analyse de la convergence et du coût de calcul a mis en évidence sa robustesse et son efficacité.

L'apport essentiel de ce travail réside dans la complémentarité entre l'analyse qualitative des solutions, menée notamment pour l'équation de Lotka-Volterra avec diffusion et déplacements, et l'étude numérique de systèmes de transport-diffusion généraux comportant des termes sources linéaires. Cette double démarche permet d'une part de mieux comprendre le comportement asymptotique des solutions dans un cadre théorique précis, et d'autre part de valider des techniques numériques adaptées, confirmant ainsi la robustesse et l'efficacité de

l'approche proposée. Elle constitue une contribution originale à la littérature existante sur les équations de transport–diffusion. Cependant, de nombreuses pistes restent à explorer. L'extension des résultats obtenus à des systèmes non linéaires ou à des domaines de dimension supérieure soulève des défis analytiques et numériques particulièrement stimulants. De même, l'étude de conditions aux limites plus complexes — telles que des conditions mixtes ou dépendantes du temps — permettrait de rapprocher davantage les modèles de situations réelles. Sur le plan numérique, l'optimisation de la méthode proposée, notamment en ce qui concerne la réduction du coût de calcul et l'adaptation à des maillages non uniformes, constitue une perspective naturelle. Enfin, l'intégration d'effets supplémentaires, comme les déplacements aléatoires ou des mécanismes de réaction plus sophistiqués, pourrait enrichir le modèle et ouvrir de nouvelles directions de recherche.

En résumé, ce travail fournit une base solide pour l'analyse et la simulation numérique de systèmes de transport–diffusion. Les résultats obtenus constituent à la fois une contribution théorique et méthodologique, et les perspectives identifiées laissent entrevoir un large champ d'investigation, où l'interaction entre modélisation, analyse et calcul numérique continuera de jouer un rôle central.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ait-Mahiout, L., Fujita Yashima, H. (2023). Convergence de la solution d'une équation de transport-diffusion vers la solution d'une équation de transport. *Ann. Math. Afr.*, vol. **10**, 105–124.
- [2] Alebraheem, J. (2021). Dynamics of a predator–prey model with the effect of oscillation of immigration of the prey. *Diversity*, **13**(1), 403–414.
- [3] Alhumaizi, K., Henda, R., Soliman, M. (2003). Numerical analysis of a reaction-diffusion-convection system. *Journal of Computer Applications in Chemical Engineering*, **27**(4), 579–594.
- [4] Amann, H. (1995). *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 2-e éd., De Gruyter; traduction anglaise (de la 1-ère éd.) *Ordinary Differtial Equations*, De Gruyter, 1990.
- [5] Ambrosio, B., Ducrot, A., Ruan, S. (2021). Generalized traveling waves for time-dependent reaction–diffusion systems. *Mathematische Annalen*, **381**, 1–27.
- [6] Bellour, A., Rawashdeh, E. A. (2010). Numerical solution of first kind integral equations by using Taylor polynomials. *J. Inequal. Speci. Func.*, **1**, 23–29.
- [7] Bellour, A., Bousselsal, M. (2014). A Taylor collocation method for solving delay integral equations. *Numerical Algorithms*, **65**(4), 843–857.
- [8] Bellour, A., Bousselsal, M. (2014). Numerical solution of delay integro-differential equations by using Taylor collocation method. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **37**(10), 1491–1506.
- [9] Bellour, A., Bousselsal, M., Laib, H. (2020). Numerical solution of second-order linear delay differential and integro-differential equations by using Taylor collocation method. *International Journal of Computational Methods*, **17**(09), 1950070.
- [10] Birem, F., Boulmerka, A., Laib, H., Hennous, C. (2023). An algorithm for solving first-kind two-dimensional Volterra integral equations using collocation method. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, **23**, 475–486.

- [11] Birem, F., Boulmerka, A., Laib, H., Hennous, C. (2024). Goursat problem in hyperbolic partial differential equations with variable coefficients solved by Taylor collocation method. *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, **14**(2), 613–637.
- [12] Bouzeraieb, H., Laib, H., Boulmerka, A. (2024). Numerical solution of neutral double delay Volterra integral equations using Taylor collocation method. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, **23**(3), 236–245.
- [13] Brezis, H. (1987). *Analyse fonctionnelle (Théorie et applications)*, Masson.
- [14] Brunner, H. (2004). *Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations*. Cambridge University Press.
- [15] Cantrell, R. S., Cosner, C., Lou, Y. (2007). Advection-mediated coexistence of competing species. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics*, **137**(3), 497–518.
- [16] Chettouh, A. (2025). Asymptotic behavior for the Lotka–Volterra equation with displacements and diffusion. *Ural Mathematical Journal*, **11**(1), 46–62.
- [17] Courant, R., John, F. (2011). *Introduction to calculus and analysis*. Springer-Verlag.
- [18] Ducrot, A. (2013). Convergence to generalized transition waves for some Holling–Tanner prey–predator reaction–diffusion system. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **100**(1), 1–15.
- [19] Ducrot, A. (2016). Spatial propagation for a two component reaction–diffusion system arising in population dynamics. *Journal of Differential Equations*, **260**(12), 8316–8357.
- [20] Ducrot, A., Giletti, T., Matano, H. (2019). Spreading speeds for multidimensional reaction–diffusion systems of the prey–predator type. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **58**, 1–34.
- [21] Dunbar, S. R. (1984). Traveling wave solutions of diffusive Lotka–Volterra equations : a heteroclinic connection in  $\mathbb{R}^4$ . *Transactions of the American Mathematical Society*, **286**(2), 557–594.
- [22] Evans, L. C. (2022). *Partial differential equations*. Graduate Stu. in Math. **19**, AMS.
- [23] Fujita Yashima, H., Ait-Mahiout, L. (2023). Convergence of solution of transport–diffusion system to that of transport system (en russe). *Vestnik Buryat. Gos. Univ. Mat. Inf.* [Bull. Buryat St. Univ. Math. Inf.], **2023**( 1), 22–36.

- [24] Gabutti, B., Negro, A. (1978). Some results on asymptotic behavior of the Volterra-Lotka diffusion equations. *Rend. Sem. Mat. Univ. Poli. Torino*, **36**, 403–414.
- [25] Gomez, H., Colominas, I., Navarrina, F., Casteleiro, M. (2008). A hyperbolic model for convection-diffusion transport problems in CFD : Numerical analysis and applications. *RACSAM-Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, **102**(2), 319–334.
- [26] Gomez, H., Colominas, I., Navarrina, F., Casteleiro, M. (2007). A finite element formulation for a convection–diffusion equation based on Cattaneo’s law. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **196**(9-12), 1757-1766.
- [27] Gurarlsan, G., Karahan, H., Alkaya, D., Sari, M., Yasar, M. (2013). Numerical solution of advection-diffusion equation using a sixth-order compact finite difference method. *Mathematical Problems in Engineering*, **2013**, 672936.
- [28] Fujita Yashima, H. (2003). Équation stochastique de dynamique de populations du type proie–prédateur avec diffusion dans un territoire. *Novi Sad Journal of Mathematics*, **33**(1), 31–52.
- [29] Hamdous, S., Fujita Yashima, H. (2009). Mesure invariante pour le système d’équations stochastiques du modèle de compétition avec diffusion spatiale. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **122**, 85–98.
- [30] Hamdous, S., Manca, L., Fujita Yashima, H. (2010). Mesure invariante pour le système d’équations stochastiques du modèle de proie–prédateur avec diffusion spatiale. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **124**, 57–75.
- [31] Hamdous, S., Manca, L., Fujita Yashima, H. (2010). Mesure invariante pour le système d’équations stochastiques du modèle de proie–prédateur avec diffusion spatiale. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, **124**, 57–75.
- [32] Huang, J., Gang, L., Ruan, S. (2003). Existence of traveling wave solutions in a diffusive predator–prey model. *Journal of Mathematical Biology*, **46**(2), 132–152.
- [33] Kangalgil, F., Işik, S. (2022). Effect of immigration in a predator–prey system : stability, bifurcation and chaos. *AIMS Mathematics*, **7**(8), 14354–14375.
- [34] Kaviya, R., Muthukumar, P. (2020). The impact of immigration on a stability analysis of Lotka–Volterra system. *IFAC-PapersOnLine*, **53**(1), 214–219.

- [35] Khennaoui, C., Bellour, A., Laib, H. (2023). Taylor collocation method for solving two-dimensional partial Volterra integro-differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **46**(12), 12735–12758.
- [36] Kolmogorov, A. N., Fomine, S. V. (1974). *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle* (traduit du russe). Mir, Moscou.
- [37] Knox, J. B. (1974). Numerical modeling of the transport diffusion and deposition of pollutants for regions and extended scales. *Journal of the Air Pollution Control Association*, **24**(7), 660-664.
- [38] Korman, P. (1992). Dynamics of the Lotka-Volterra systems with diffusion. *Applicable Analysis*, **44**(3–4), 191–207.
- [39] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'tseva, N. N. (1968). *Linear and quasi-linear equations of parabolic type* (translated from Russian). AMS.
- [40] Laib, H., Bellour, A., Boulmerka, A. (2022). Taylor collocation method for high-order neutral delay Volterra integro-differential equations. *J. Innov. Appl. Math. Comput. Sci.*, **2**(1), 53–77.
- [41] Liu, P. P. (2010). An analysis of a predator–prey model with both diffusion and migration. *Mathematical and Computer Modelling*, **51**(9-10), 1064–1070.
- [42] Lou, Y., Lutscher, F. (2014). Evolution of dispersal in open advective environments. *Journal of Mathematical Biology*, **69**(6), 1319–1342.
- [43] Lou, Y., Zhou, P. (2015). Evolution of dispersal in advective homogeneous environment : The effect of boundary conditions. *Journal of Differential Equations*, **259**(1), 141–171.
- [44] McLaughlin, J. F., Roughgarden, J. (1991). Pattern and stability in predator-prey communities : how diffusion in spatially variable environments affects the Lotka-Volterra model. *Theoretical Population Biology*, **40**(2), 148–172.
- [45] Mikhailov, V. (1980). *Équations aux dérivées partielles* (traduit du russe). Éd. Mir.
- [46] Mohammadi, R. (2013). Exponential B-spline solution of convection-diffusion equations. *Applied Mathematics*, **4**(6), 933–944.
- [47] Murray, J. D. (1975). Non-existence of wave solutions for the class of reaction–diffusion equations given by the Volterra interacting-population equations with diffusion. *Journal of Theoretical Biology*, **52**(2), 459–469.

- [48] Negro, A., Gabutti, B. (1977). A fractional steps method for the Volterra-Lotka diffusion equations. *Rend. Sem. Mat. Univ. Poli. Torino*, **35**, 373–389.
- [49] Nie, H., Wang, B., Wu, J. (2020). Invasion analysis on a predator-prey system in open advective environments. *J. Math. Bio.*, **81**, 1429–1463.
- [50] Pachpatte, B. G. (2001). *Inequalities for finite difference equations*, CRC Press.
- [51] Petrovskii, I. G. (1991). *Lectures on partial differential equations* (translated from Russian, 1954), Dover.
- [52] Roger, M., Caliot, C., Crouseilles, N., Coelho, P. J. (2014). A hybrid transport-diffusion model for radiative transfer in absorbing and scattering media. *Journal of Computational Physics*, **275**, 346–362.
- [53] Rothe, F. (1976). Convergence to the equilibrium state in the Volterra–Lotka diffusion equations. *Journal of Mathematical Biology*, **3**(3-4), 319–324.
- [54] Smaali, H., Fujita Yashima, H. (2021). Une généralisation de l’approximation par une moyenne locale de la solution de l’équation de transport-diffusion. *Ann. Math. Afr.*, **9**, 89–108.
- [55] Taleb, L., Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. (2020). Approximation par une moyenne locale de la solution de l’équation de transport-diffusion. *Ann. Math. Afr.*, **8**, 53–73.
- [56] Volterra, V. (1931). *Théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Gauthiers-Villars, Paris.
- [57] Wang, X., Lin, G. (2019). Traveling waves for a periodic Lotka–Volterra predator–prey system. *Journal of Applied Analysis*, **98**(14), 2619–2638.
- [58] Wazwaz, A. M. (2011). *Linear and nonlinear integral equations*. Springer, Berlin.
- [59] Xu, F., Gan, W., Tang, D. (2020). Population dynamics and evolution in river ecosystems. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, **51**, 102983.
- [60] Yamada, Y. (1990). Stability of steady states for prey–predator diffusion equations with homogeneous Dirichlet conditions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **21**(2), 327–345.
- [61] Zhou, P., Xiao, D., Lou, Y. (2016). Qualitative analysis for a Lotka–Volterra competition system in advective homogeneous environment. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **36**(2).