République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire Abd Elhafid Boussouf Mila
Institut des Mathématiques et Informatique
Département d'Informatique

Cours : Algèbre 2

Par : Dr. Kecies Mohamed

Life is good only for two things, discovering mathematics and teaching mathematics.

Siméon Denis Poisson

Année Universitaire 2025/2026

Table des matières

Table des figures

Résumé

Ce manuscrit, issu du cours **d'Algèbre 2** destiné aux étudiants de première année L.M.D. en mathématiques et informatique, propose un parcours pédagogique cohérent et structuré à travers les concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire. Il aborde successivement les notions essentielles relatives aux espaces vectoriels, aux sous-espaces, aux familles libres et génératrices, ainsi qu'aux bases et à la dimension. L'étude se poursuit avec les applications linéaires, leurs principales propriétés, le noyau et l'image, ainsi que les opérations entre applications et le théorème du rang. Un lien étroit est ensuite établi entre les applications linéaires et les matrices, incluant la présentation des matrices de passage, du déterminant et de l'inversion des matrices. Enfin, les notions théoriques sont appliquées à la résolution des systèmes d'équations linéaires, à l'aide de différentes méthodes telles que la substitution, la méthode de Cramer et le pivot de Gauss. Chaque section est riche en explications théoriques et en exemples pratiques, ce qui permet aux étudiants d'acquérir une compréhension solide des fondements de l'algèbre linéaire et de ses applications.

Abstract

This manuscript, developed from the **Algebra 2** course intended for **first-year L.M.D. students in mathematics and computer science**, presents a coherent and systematically organized exploration of the core concepts of linear algebra.The text sequentially introduces the fundamental notions of vector spaces, subspaces, linearly independent and spanning sets, as well as the concepts of basis and dimension. It then examines linear mappings, emphasizing their properties, the notions of kernel and image, operations on linear mappings, and the rank theorem. A strong connection is subsequently established between linear mappings and their matrix representations, including topics such as change-of-basis matrices, determinants, and matrix inversion. The theoretical framework is then applied to the study and solution of linear systems of equations, through classical methods such as substitution, Cramer's rule, and the Gaussian elimination method. Each section is rich in theoretical explanations and practical examples, allowing students to develop a strong understanding of the fundamentals of linear algebra and its applications.

Introduction Générale

Ce document constitue un support de cours structuré et approfondi en algèbre linéaire, organisé en quatre chapitres principaux. Il offre une présentation progressive et rigoureuse des concepts fondamentaux qui forment le socle de cette discipline mathématique essentielle. Rédigé dans le cadre du module **Algèbre 2**, il s'adresse principalement aux étudiants de première année du système L.M.D. en mathématiques et en informatique, ainsi qu'à toute personne désireuse d'acquérir des bases solides en algèbre. L'objectif de ce manuscrit est de guider les étudiants vers une compréhension claire, cohérente et durable des notions fondamentales de l'algèbre linéaire, les préparant ainsi à l'étude de notions plus avancées. Le contenu suit fidèlement le programme récemment révisé, conformément au canevas officiel de formation.

La structure du cours s'organise autour de quatre chapitres principaux. Le premier chapitre introduit la notion fondamentale d'espace vectoriel, en abordant les lois de composition externes et les parties stables. Sont ensuite développées les notions de sous-espaces vectoriels, de familles libres, liées et génératrices, ainsi que la notion de base. La dimension finie est étudiée à travers des résultats essentiels tels que le théorème de la base extraite et le théorème de la base incomplète. Le chapitre se conclut par l'étude de la somme directe, des sous-espaces supplémentaires et de la formule de Grassmann, permettant d'analyser et de décomposer la structure des espaces vectoriels.

Le deuxième chapitre est consacré aux applications linéaires, ces transformations qui préservent la structure vectorielle. Après la définition des applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes, automorphismes et formes linéaires, il présente des applications particulières telles que projections, symétries, affinités et projecteurs. Les propriétés fondamentales sont détaillées, notamment la préservation des combinaisons linéaires et la caractérisation par l'image d'une base. Les opérations sur les applications linéaires et le groupe linéaire sont étudiés, tandis que les concepts de noyau, d'image, de rang et le théorème du rang fournissent des outils puissants pour leur analyse.

Le troisième chapitre établit le lien fondamental entre applications linéaires et matrices. Il couvre les définitions de base, les types de matrices, les opérations matricielles et les opérations élémentaires, ainsi que la représentation matricielle des applications linéaires. Les changements de base et les matrices de passage sont abordés, de même que le déterminant et son rôle dans l'inversion des matrices.

Le quatrième chapitre applique les concepts précédents à la résolution des systèmes linéaires. Il examine les représentations matricielles, les conditions d'existence de solutions et présente des méthodes de résolution telles que la substitution, la méthode de Cramer et le pivot de Gauss.

Cette progression logique, combinant théorie et exemples concrets, constitue un outil pédagogique essentiel pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire, tant en mathématiques pures que dans ses applications en informatique, physique et ingénierie. Nous espérons que ce polycopié répondra aux attentes des étudiants et contribuera à leur réussite académique.

Pour toute remarque ou suggestion visant à améliorer ce cours, vous pouvez me contacter à l'adresse suivante : `m.kecies@centre-univ-mila.dz`

Chapitre 1

Espaces vectoriels

Ce premier chapitre est consacré à l'étude des espaces vectoriels, qui constituent le fondement de l'algèbre linéaire et un outil essentiel dans de nombreux domaines des mathématiques et de l'informatique. Un espace vectoriel est une structure algébrique qui généralise la notion de vecteur de la géométrie usuelle et permet de manipuler des objets abstraits tout en préservant des opérations fondamentales telles que l'addition et la multiplication par un scalaire.

Le chapitre débute par la définition et les propriétés des espaces vectoriels, illustrées par des exemples concrets et variés. Il introduit ensuite la notion de sous-espace vectoriel, indispensable pour comprendre la structure interne d'un espace et organiser ses éléments. Une attention particulière est portée aux concepts de familles de vecteurs, de combinaisons linéaires, de dépendance et indépendance linéaire, ainsi qu'aux notions de base et de dimension, qui jouent un rôle central dans toute la suite du cours.

Ces notions sont enrichies par l'étude des sous-espaces supplémentaires, de la somme directe et de la dimension d'une somme, qui permettent d'analyser la décomposition des espaces vectoriels et de mieux appréhender leur organisation.

Enfin, le chapitre introduit des résultats fondamentaux tels que la formule de Grassmann, constituant un outil puissant pour travailler avec des sous-espaces et comparer leurs dimensions.

Ainsi, ce chapitre offre une introduction claire, progressive et structurée aux fondements de l'algèbre linéaire, en établissant les bases indispensables pour l'étude ultérieure des applications linéaires, des matrices et des systèmes d'équations linéaires.

Dans tout ce chapitre $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ désigne un corps commutatif et en général, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1 Lois de composition externes.

Avant de pouvoir définir rigoureusement la notion d'espace vectoriel, il est essentiel de comprendre les types d'opérations qui interviennent dans cette structure. En algèbre, et plus particulièrement dans l'étude des espaces vectoriels, on distingue deux types fondamentaux de lois : les lois de composition internes et les lois de composition externes.

La loi de composition interne permet de combiner deux éléments appartenant au même ensemble, comme l'addition de deux vecteurs. En revanche, la loi de composition externe fait intervenir un élément extérieur à l'ensemble, généralement issu d'un corps de scalaires, et permet ainsi de faire agir un scalaire sur un vecteur. Cette dernière joue un rôle central dans la définition et l'étude des espaces vectoriels, car elle établit le lien entre les vecteurs et les scalaires.

Définition 1.1.1 ***Loi de composition externe (LCE)***
Soient E un ensemble et Ω un autre ensemble (souvent un corps).
1. On appelle loi de composition externe (abrégée LCE) sur E toute application notée T définie par

$$\begin{array}{llll} T : \Omega \times E : & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda T x, \end{array}$$

où les éléments de Ω sont appelés opérateurs ou scalaires.
2. Cette loi associe à chaque couple (λ, x), formé d'un scalaire et d'un élément de E, un nouvel élément de E.

Notation 1.1.1 *Par convention, cette loi est généralement notée de façon multiplicative à l'aide d'un point central $\cdot$. Ainsi, l'image de (λ, x) est notée $\lambda \cdot x$.*

Exemple 1.1.1
1. Considérons l'ensemble $E = \mathbb{R}^n$ et le corps $\Omega = \mathbb{R}$. On définit la loi de composition externe suivante

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n).$$

C'est une loi de composition externe classique : elle permet de multiplier un vecteur de $\mathbb{R}^n$ par un scalaire réel. Elle correspond à la multiplication usuelle d'un vecteur par un scalaire.
2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, l'ensemble des polynômes à une indéterminée X à coefficients réels, et $\Omega = \mathbb{R}$. La multiplication $\cdot$ d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est une loi de composition externe sur $\mathbb{R}[X]$ à opérateurs dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{array}{lll} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X] : & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ (\lambda, P) & \longmapsto & \lambda \cdot P, \end{array}$$

le polynôme $\lambda \cdot P$ obtenu en multipliant chaque coefficient de P par λ. Par exemple, si

$$P = 2X^2 + 3X + 1,$$

alors

$$5 \cdot P = 10X^2 + 15X + 5.$$

3. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\Omega = \mathbb{R}$. On définit une loi

$$\begin{array}{lll} \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \lambda \cdot f, \end{array}$$

définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

Il s'agit d'une loi de composition externe sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à opérateurs dans $\mathbb{R}$. Cette LCE correspond à la multiplication d'une application par un scalaire : on multiplie chaque valeur de l'application par ce scalaire.
4. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, l'ensemble des suites réelles, et $\Omega = \mathbb{R}$. Définissons une loi

$$\begin{array}{lll} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda \cdot u = (\lambda u_n), \end{array}$$

Autrement dit, pour toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit une nouvelle suite $\lambda \cdot u$ dont les termes sont donnés, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$(\lambda \cdot u)_n = \lambda \cdot u_n.$$

Il s'agit d'une loi de composition externe sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ à opérateurs dans $\mathbb{R}$. Cette loi correspond à la multiplication d'une suite par un scalaire : chaque terme de la suite est multiplié par le même nombre réel.

1.1.1 Partie stable par une loi externe

Définition 1.1.2 ***(Partie stable par une loi externe)***
Soit E un ensemble muni d'une loi de composition externe T à opérateurs dans Ω. Soit F une partie de E.
1. Partie stable.
(a) On dit que la partie F est stable par la loi externe T si et seulement si

$$\forall\lambda \in \Omega, \forall x \in F : \lambda T x \in F.$$

Cela signifie que la restriction de la loi T à $\Omega \times F$ définit également une loi de composition externe sur F.
(b) La stabilité signifie que lorsqu'on applique la loi externe à un élément de F, le résultat appartient encore à F.
2. Partie non stable.
(a) On dit que F n'est pas stable (ou non stable) par la loi externe T s'il existe au moins un scalaire $\lambda \in \Omega$ et un élément $x \in F$ tels que l'image $T(\lambda, x)$ ne soit pas dans F. Autrement dit

$$\exists\lambda \in \Omega, \exists x \in F : \lambda T x \notin F.$$

(b) Une partie est non stable si, en appliquant la loi externe à un de ses éléments, on peut obtenir un résultat qui n'est pas dans cette partie.

Exemple 1.1.2
1. Dans $\mathbb{R}[X]$, considérons l'ensemble suivant

$$F = \mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leqslant n\} \ \ (n \in \mathbb{N}),$$

l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, alors F est stable par la loi externe $\cdot$ définie par

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X] : & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ (\lambda, P) & \longmapsto & \lambda \cdot P. \end{array}$$

En effet, soient $\lambda \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors

$$\deg(\lambda \cdot P) = \begin{cases} \deg(0_{\mathbb{R}[X]}) = -\infty \leqslant n, \ si\ \lambda = 0 \\ \deg(P) \leqslant n, \ si\ \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Ainsi $\lambda \cdot P \in \mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans $\mathbb{R}[X]$, considérons l'ensemble suivant

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) = n\} \ \ (n \in \mathbb{N}),$$

l'ensemble des polynômes de degré exactement égal à n. Alors F n'est pas stable par la loi externe $\cdot$. En effet, soit $P = X^n \in F$, et $\lambda = 0$, alors

$$\lambda \cdot P = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Or $\deg(0_{\mathbb{R}[X]}) = -\infty < n$. Alors $\lambda \cdot P \notin F$, ce qui montre que F n'est pas stable par la loi externe $\cdot$.
3. Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites réelles, considérons

$$F = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N : x_n = 0\},$$

l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Alors F est stable par la loi externe $\cdot$ définie par

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x = (\lambda x_n)_n. \end{array}$$

En effet, soit $x \in F$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = 0$ pour tout $n \geqslant N$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors

$$(\lambda \cdot x)_n = \lambda x_n = 0, \text{ pour tout } n \geqslant N.$$

donc $\lambda \cdot x \in F$. Ainsi, F est stable par la loi externe.
4. Dans $\mathbb{R}^n$, considérons l'ensemble suivant

$$F = \{x = (0, 0, ..., 0)\}.$$

F est stable par la loi externe $\cdot$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n).$$

En effet, soient $\lambda \in \mathbb{R}, x = (0, 0, ..., 0) \in F$, alors

$$\lambda \cdot x = (0, 0, ..., 0) \in F.$$

Ainsi, F est stable par la loi externe.
5. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, considérons la partie F suivante de E

$$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\},$$

l'ensemble des applications strictement positives sur $\mathbb{R}$, alors F n'est pas stable par la loi externe $\cdot$ définie par

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \lambda \cdot f, \end{array}$$

car la stabilité n'est assurée que pour les scalaires positifs $\lambda > 0$. En effet, soient $\lambda \in \mathbb{R}, f \in F$, alors $\lambda \cdot f \in F$ si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lambda f(x) > 0.$$

Alors
- *Si $\lambda > 0$, alors $\lambda f(x) > 0$ pour tout x, donc $\lambda \cdot f \in F$.*
- *Si $\lambda \leqslant 0$, alors $\lambda f(x) \leqslant 0$ pour tout x, donc $\lambda \cdot f \notin F$.*

Ainsi, il existe des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ (comme $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$) tels que $\lambda \cdot f \notin F$, ce qui montre que F n'est pas stable par la loi externe.
6. Dans $\mathbb{R}^2$, considérons la partie suivante

$$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\},$$

alors F n'est pas stable par la loi externe $\cdot$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2),$$

car,

$$\exists \lambda' = -1 \in \mathbb{R}, \exists x' = (2, 1) \in F \text{ mais } \lambda' \cdot x' = (-2, -1) \notin F.$$

Après avoir introduit la notion de loi de composition externe, nous pouvons à présent définir la structure d'un espace vectoriel. Cette loi joue un rôle central, car elle permet de relier les scalaires (éléments d'un corps $\mathbb{K}$) aux vecteurs (éléments d'un ensemble E). Grâce à elle, on peut multiplier un vecteur par un scalaire, ce qui est fondamental pour les opérations linéaires.

Définition 1.1.3 ***(Espace vectoriel sur un corps*** K***)***
On appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ *tout ensemble* E *muni d'une loi de composition interne (addition vectorielle)*

$$\begin{array}{rcl} + : E \times E : & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y, \end{array}$$

et d'une loi de composition externe $\cdot$ *(multiplication par un scalaire)*

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{K} \times E : & \longrightarrow & E \\ (\lambda, y) & \longmapsto & \lambda \cdot y, \end{array}$$

satisfaisant les propriétés suivantes
1. $(E, +)$ *est un groupe commutatif. On note* 0_E *l'élément neutre (appelé vecteur nul) et* $-x$ *l'opposé d'un vecteur* $x \in E$.
2. Distributivité (à droite) de la loi externe par rapport à l'addition dans $\mathbb{K}$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E : (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

3. Distributivité (à gauche) de la loi externe par rapport à l'addition dans E

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E : \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$$

4. Compatibilité avec la multiplication scalaire

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E : (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

5. Élément neutre du corps

$$\forall x \in E : 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x.$$

On dit alors que $(E, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *ou* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel. Les éléments de* $\mathbb{K}$ *sont appelés scalaires, ceux de* E*, vecteurs. L'élément neutre de* $(E, +)$*,* 0_E *est appelé vecteur nul.*

Notation 1.1.2 *Par convention*
- *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *est noté* $\mathbb{K}-$***ev****,*
- *et un espace vectoriel tout court peut être abrégé* ***ev*** *(sans précision sur le corps).*

Exemple 1.1.3 ***(Principaux exemples d'espaces vectoriels)***
1. Tout corps $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel sur lui-même, avec ses propres lois d'addition et de multiplication. En particulier,* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *sont des* $\mathbb{R}-$*espaces vectoriels pour les lois usuelles.*
2. ***Espaces vectoriels*** $\mathbb{R}^n$ ***:*** *L'ensemble* $\mathbb{R}^n$ *des* $n-$*uplets de réels est un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel avec*
- *Addition (loi interne)*

$$\forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n).$$

- *Multiplication par un scalaire (loi externe)*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda \cdot x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n).$$

3. ***Espace vectoriel des applications*** $\mathcal{F}(X, E)$ ***:*** *Soit* X *un ensemble non vide et soit* E *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel. On définit sur l'ensemble* $\mathcal{F}(X, E)$ *des applications définies sur* X *à valeurs dans* E*, une addition* $+$

$$\begin{array}{rcl} + : \mathcal{F}(X, E) \times \mathcal{F}(X, E) : & \longrightarrow & \mathcal{F}(X, E) \\ (f, g) & \longmapsto & f + g, \end{array}$$

donnée par

$$\forall x \in X : (f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

une multiplication par un scalaire $\cdot$

$$\begin{array}{llll} \cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{F}(X,E) : & \longrightarrow & \mathcal{F}(X,E) \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \lambda \cdot f, \end{array}$$

donnée par

$$\forall x \in X : (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

Avec ces deux lois, $(\mathcal{F}(X,E),+,\cdot)$ *est un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel. Son vecteur nul est l'application identiquement nulle sur* X *à valeurs dans* E.

$$\begin{array}{lll} 0_{\mathcal{F}(X,E)} : X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 0_E. \end{array}$$

5. ***Espace vectoriel des polynômes*** $\mathbb{K}[X]$ *: L'ensemble* $\mathbb{K}[X]$ *des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$*. La loi de composition interne sur* $\mathbb{K}[X]$ *est l'addition de polynômes et la loi de composition externe est la multiplication d'un polynôme par un élément de* $\mathbb{K}$.

$$\forall P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X] : P + Q = S = (s_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

telle que

$$s_n = a_n + b_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

et

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X] : \lambda \cdot P = Q = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Les vecteurs de $\mathbb{K}[X]$ *sont les polynômes et les scalaires sont les éléments de* $\mathbb{K}$*. Le vecteur nul est le polynôme nul,*

$$0_{\mathbb{K}[X]} = (0_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}, ..., 0_\mathbb{K}, ...) = 0.1 + 0.X + 0.X^2 + ... \in \mathbb{K}[X] \; .$$

Proposition 1.1.1 ***(Règles de calcul dans un espace vectoriel)***
Soit $(E,+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel. Pour tous scalaires* α, β, λ *de* $\mathbb{K}$ *et pour tous vecteurs* x, y *de* E*, on a*

1. $0_\mathbb{K} \cdot x = 0_E$ *et* $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.
2. $\lambda \cdot x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_\mathbb{K}$ *ou* $x = 0_E$.
3. $\alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y$.
4. $(\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x$.
5. $-(\lambda \cdot x) = (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x)$.

Ces identités sont des conséquences directes des axiomes de l'espace vectoriel. Elles jouent un rôle fondamental en facilitant les calculs algébriques, notamment dans la résolution d'équations vectorielles, la manipulation de combinaisons linéaires, ou encore l'étude des applications linéaires. Elles constituent donc un outil indispensable pour le raisonnement en algèbre linéaire.

Preuve. Les démonstrations des propriétés sont des manipulations sur les axiomes définissant les espaces vectoriels.
1. Soit $x \in E$, alors

$$0_\mathbb{K} \cdot x = (0_\mathbb{K} + 0_\mathbb{K}) \cdot x = 0_\mathbb{K} \cdot x + 0_\mathbb{K} \cdot x.$$

En additionnant $(-0_\mathbb{K} \cdot x)$ à droite et à gauche dans cette dernière égalité, on obtient

$$0_\mathbb{K} \cdot x = 0_E.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E.$$
En additionnant $(-\lambda \cdot 0_E)$ à droite et à gauche dans cette dernière égalité, on obtient
$$\lambda \cdot 0_E = 0_E.$$

2. (i) **Sens réciproque** $\Longleftarrow$: Cette implication découle immédiatement des deux premières propriétés des espaces vectoriels.
(ii) **Sens direc** $\Longrightarrow$: Supposons que
$$\lambda \cdot x = 0_E.$$
• Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, alors l'implication est vérifiée (ou si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, on a bien $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$).
• Si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors λ est inversible dans le corps $\mathbb{K}$. En multipliant par λ^{-1} les deux membres de l'égalité, il vient
$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda^{-1} \cdot 0_E \Longrightarrow \left(\lambda^{-1} \cdot \lambda\right) \cdot x = 0_E$$
$$\Longrightarrow 1_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E.$$
Maintenant, supposons que $x \neq 0_E$. Alors nécessairement $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, car sinon (comme ci-dessus) on pourrait multiplier l'égalité $\lambda \cdot x = 0_E$ par λ^{-1}, ce qui impliquerait $x = 0_E$, ce qui contredirait notre hypothèse.
3. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$, alors
$$\alpha \cdot x = \alpha \cdot (x + 0_E) = \alpha \cdot (x + (-y + y)) = \alpha \cdot ((x - y) + y) = \alpha \cdot (x - y) + \alpha \cdot y.$$
En rajoutant à chaque membre de l'égalité le symétrique $-(\alpha \cdot y)$ de $(\alpha \cdot y)$, on obtient
$$\alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y.$$
4. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, alors
$$\alpha \cdot x = (\alpha + 0_{\mathbb{K}}) \cdot x = (\alpha + (-\beta + \beta)) \cdot x = ((\alpha - \beta) + \beta) \cdot x = (\alpha - \beta) \cdot x + \beta \cdot x.$$
En rajoutant à chaque membre de l'égalité le symétrique $-(\beta \cdot x)$ de $(\beta \cdot x)$, on obtient
$$(\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x.$$
5. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, alors
$$\lambda \cdot x + (-\lambda) \cdot x = (\lambda - \lambda) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E.$$
Il en résulte que $(-\lambda) \cdot x$ est le symétrique de $\lambda \cdot x$, i.e,
$$-(\lambda \cdot x) = (-\lambda) \cdot x.$$
D'autre part, on a
$$\lambda \cdot x + \lambda \cdot (-x) = \lambda \cdot (x - x) = \lambda \cdot 0_E = 0_E.$$
Il en résulte que $\lambda \cdot (-x)$ est bien le symétrique de $\lambda \cdot x$, i.e,
$$-(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x).$$
□

La notion de combinaison linéaire permet d'introduire des concepts essentiels tels que l'espace engendré par une famille de vecteurs, la dépendance linéaire, les sous-espaces vectoriels, ou encore la notion de base d'un espace vectoriel.

Définition 1.1.4 ***(Combinaison linéaire)***
1. Soient $x_1, ..., x_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. On appelle combinaison linéaire de ces vecteurs tout vecteur $x \in E$ qui s'écrit sous la forme

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont des scalaires appelés coefficients de la combinaison linéaire.
2. En particulier, si $x = \lambda_1 x_1$, on dit que x est colinéaire à x_1 (ou : x et x_1 sont colinéaires).

Exemple 1.1.4
1. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, tout vecteur $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire des vecteurs suivants

$$x_1 = (1, 0, 0), x_2 = (0, 1, 0), x_3 = (0, 0, 1).$$

En effet,

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 (1, 0, 0) + \alpha_2 (0, 1, 0) + \alpha_3 (0, 0, 1) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3.$$

Les scalaires α_1, α_2 et α_3 sont les coefficients de la combinaison linéaire.
2. Dans l'espace des polynômes $\mathbb{R}_2[X]$, le polynôme $P = 3 - X + 2X^2$ est une combinaison linéaire des polynômes suivants

$$P_1 = 1, P_2 = X, P_3 = X^2,$$

car on peut écrire

$$P = 3P_1 + (-1) P_2 + 2P_3.$$

Les coefficients de la combinaison linéaire sont $3, -1$ et 2.
3. Dans l'espace des applications $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, considérons les applications suivantes

$$f_1(x) = \sin x, f_2(x) = \cos x, f(x) = \sqrt{2} \sin x - \cos x.$$

On a alors

$$f(x) = \sqrt{2} f_1(x) + (-1) f_2(x).$$

L'application f est donc une combinaison linéaire de f_1 et f_2, avec coefficients $\sqrt{2}$ et -1.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Une fois qu'un espace vectoriel est défini sur un corps donné, il est naturel de s'intéresser à certaines parties de cet espace qui, elles-mêmes, possèdent une structure d'espace vectoriel. Ces parties sont appelées **sous-espaces vectoriels**. Autrement dit, un sous-ensemble d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel s'il est stable à la fois par l'addition vectorielle et par la multiplication par un scalaire, et s'il contient le vecteur nul. Cela signifie qu'il vérifie les mêmes propriétés (ou axiomes) que l'espace vectoriel lui-même, mais à l'intérieur d'un ensemble plus petit.

Définition 1.2.1 ***(Sous-espace vectoriel)***
1. Soit $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel de E est un sous-ensemble $F \subset E$ qui est lui-même un espace vectoriel, muni des mêmes opérations d'addition vectorielle et de multiplication par un scalaire que E. Autrement dit, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées
(a) F contient le vecteur nul de E,

$$0_E \in F.$$

(b) F est stable par l'addition (loi interne),

$$\forall x, y \in F : x + y \in F.$$

(c) F est stable par la multiplication par un scalaire (loi externe),

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F : \lambda \cdot x \in F.$$

Remarque 1.2.1
1. Un sous-espace vectoriel, c'est juste une partie d'un espace vectoriel qui ressemble elle-même à un espace vectoriel. Autrement dit, un sous-espace vectoriel est un "petit espace vectoriel contenu dans un plus grand", dans lequel on peut effectuer les mêmes opérations que dans tout E, et où les règles restent valables.
2. Pour qu'un ensemble de vecteurs soit un sous-espace vectoriel, il suffit de vérifier trois choses simples
• *Présence du vecteur nul car c'est un élément essentiel de tout espace vectoriel.*
• *Stabilité par addition. Si on prend deux vecteurs dans le sous-ensemble, leur somme doit aussi appartenir à ce sous-ensemble.*
• *Stabilité par multiplication scalaire. Si on prend un vecteur du sous-ensemble et qu'on le multiplie par n'importe quel scalaire du corps $\mathbb{K}$, le résultat doit encore appartenir au sous-ensemble.*

Exemple 1.2.1
*1. **Sous-espaces vectoriels triviaux.** Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Alors, les ensembles $\{0_E\}$ (réduit au vecteur nul) et E lui-même sont deux sous-espaces vectoriels de E. On les appelle les sous-espaces vectoriels triviaux.*
2. L'ensemble

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\right\},$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, car il est défini comme l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène.
*3. **Sous-espace vectoriel des polynômes de degré borné**. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble*

$$\mathbb{R}_n [X] = \{P \in \mathbb{R} [X] : \deg(P) \leqslant n\},$$

des polynômes de degré inférieur ou égal à n, forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R} [X]$.
*4. **Sous-espace vectoriel des applications paires et impaires.** Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors*
• *L'ensemble des applications paires*

$$\mathcal{P} (\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \ f \text{ est paire}\} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)\},$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
• *De même, l'ensemble des applications impaires*

$$\mathcal{I} (\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \ f \text{ est impaire}\} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)\},$$

est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
*5. **Sous-espace vectoriel des suites réelles convergentes.** L'ensemble*

$$F = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n \in \mathbb{R}\right\},$$

des suites réelles convergentes forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'espace des suites réelles.
6. L'ensemble

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\right\},$$

n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, car il ne contient pas le vecteur nul $(0, 0, 0)$.

Proposition 1.2.1 ***(Caractérisation d'un sous-espace par la notion de combinaison linéaire)***
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et soit F une partie de E, alors

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff$$

$$\iff \begin{cases} (a)\ 0_E \in F \\ (b)\ F \text{ est stable par combinaisons linéaires,} \\ \forall x, y \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F. \end{cases}$$

Ainsi, pour montrer qu'un sous-ensemble F est un sous-espace vectoriel, il suffit de vérifier que le vecteur nul appartient à F, et que toute combinaison linéaire $\alpha \cdot x + \beta \cdot y$ de deux éléments de F appartient encore à F.

Preuve.
1. Sens direct ($\Longrightarrow$). Supposons que F est un sous-espace vectoriel de E, alors il contient nécessairement le vecteur nul 0_E. Donc (a) est vérifiée. D'autre part, puisque F est stable par addition et par multiplication scalaire, alors pour tous $x, y \in F$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F,$$

ce qui prouve (b).
2. Sens réciproque ($\Longleftarrow$). Supposons maintenant que les deux conditions (a) et (b) sont satisfaites (F est stable par combinaisons linéaires). Nous allons montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
• Stabilité par addition. Soient $x, y \in F$. En prenant $\alpha = \beta = 1_{\mathbb{K}}$ dans (b), on obtient

$$x + y = 1_{\mathbb{K}} \cdot x + 1_{\mathbb{K}} \cdot y \in F.$$

• Stabilité par multiplication scalaire. Soient $x \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On pose $y = 0_E$ et $\beta = 0_{\mathbb{K}}$. Alors

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \alpha \cdot x + 0_E = \alpha \cdot x \in F.$$

Ainsi, F est stable par addition et par multiplication par un scalaire. Donc F est un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque 1.2.2 *Le complémentaire ensembliste noté C_E^F d'un sous-espace vectoriel F dans E n'est pas un sous-espace vectoriel de E, car C_E^F ne contient pas le vecteur nul 0_E.*

Proposition 1.2.2 ***(Intersection de sous-espaces vectoriels)***
Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel E, alors $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E. Autrement dit l'intersection quelconque de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel est elle-même un sous-espace vectoriel.

Preuve. On pose

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i.$$

Nous allons montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, en vérifiant les deux conditions de caractérisation des sous-espaces vectoriels.
(a) **Le vecteur nul appartient à** F. Comme chaque F_i est un sous-espace vectoriel, on a $0_E \in F_i$ pour tout $i \in I$. Donc,

$$0_E \in \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = F,$$

ce qui prouve que F est non vide.
(b) **Stabilité par combinaisons linéaires.** Soient $x, y \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Par définition de l'intersection, $x, y \in F_i$ pour tout $i \in I$. Or, chaque F_i étant un sous-espace vectoriel, il est stable par combinaisons linéaires, donc

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F_i,$$

pour tout $i \in I$. Par conséquent,

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = F.$$

Les deux conditions sont vérifiées, donc F est un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque 1.2.3 *La réunion (finie ou infinie) de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel en général. Par exemple, considérons les deux sous-espaces vectoriels de l'espace (produit)* $\mathbb{R}^2$ *définis par*

$$F_1 = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\} \text{ (l'axe des abscisses)}$$

$$F_2 = \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\} \text{ (l'axe des ordonnées).}$$

Alors l'ensemble $F_1 \cup F_2$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *puisque* $(1, 0) \in F_1 \cup F_2$ *et* $(0, 1) \in F_1 \cup F_2$ *et*

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F_1 \cup F_2.$$

1.3 Familles libres, Familles liées, Familles génératrices et Bases

Dans un espace vectoriel, on travaille souvent avec des ensembles de vecteurs appelés familles de vecteurs. Ces familles peuvent avoir des propriétés différentes, selon la façon dont les vecteurs "se combinent" entre eux. Par exemple, une famille est dite libre si aucun vecteur ne peut être obtenu à partir des autres. Au contraire, une famille est liée s'il existe au moins un vecteur qui peut s'exprimer comme une combinaison des autres. Une autre notion importante est celle de famille génératrice : c'est une famille de vecteurs qui permet de former tous les vecteurs de l'espace, en faisant des combinaisons linéaires. Autrement dit, elle "engendre" tout l'espace. Enfin, une base est une famille de vecteurs à la fois libre et génératrice. Elle constitue un ensemble minimal de vecteurs permettant de représenter tous les éléments de l'espace de manière unique. Ces notions sont très utiles pour mieux comprendre la structure des espaces vectoriels et résoudre des problèmes en algèbre linéaire. C'est pourquoi nous abordons dans cette partie la notion importante de famille libre et la notion contraire de famille liée et de famille génératrice. Ces notions nous conduiront naturellement aux concepts de dimension et de base.

Définition 1.3.1 ***(Famille de vecteurs)*** *Soit* E *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel. Une famille finie de vecteurs ou un système fini de vecteurs de* E *est un ensemble fini de vecteurs* $x_1, ..., x_n$ *de* E *notée* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Définition 1.3.2 ***(Dépendance et indépendance linéaire)*** *Soient* E *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel et* $\{x_1, ..., x_n\}$ *une famille de vecteurs de* E.

1. ***Familles libres.*** *On dit que la famille (ou : le système) de vecteurs* $\{x_1, ..., x_n\}$ *est libre sur* $\mathbb{K}$ *(ou les vecteurs* $x_1, ..., x_n$ *sont linéairement indépendants sur* $\mathbb{K}$*) si et si*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

En d'autres termes, toute combinaison linéaire des vecteurs qui donne le vecteur nul n'est possible que lorsque tous les coefficients sont nuls.
2. ***Familles liées :*** *On dit que la famille (ou : le système) de vecteurs* $\{x_1, ..., x_n\}$ *est liée sur* $\mathbb{K}$ *(ou les vecteurs* $x_1, ..., x_n$ *sont linéairement dépendants sur* $\mathbb{K}$*) si et si la famille* $\{x_1, ..., x_n\}$ *n'est pas libre. Formellement*

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}^* \textit{(non tous nuls)} : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0_E.$$

Cela signifie qu'il existe au moins un vecteur de la famille qui peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Exemple 1.3.1
1. Dans tout $\mathbb{K}-$*espace vectoriel* E*, une famille formée d'un seul vecteur* $\{x\}$ *est*
- *liée si et seulement si* $x = 0_E$*,*
- *libre si et seulement si* $x \neq 0_E$*.*

En effet, soit $\lambda \in \mathbb{K}$*. Considérons l'équation*

$$\lambda \cdot x = 0_E.$$

- *Si* $x = 0_E$ *, alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$*, on a*

$$\lambda \cdot 0_E = 0_E.$$

Cela signifie qu'il existe au moins un scalaire $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ *(par exemple* $\lambda = 1_{\mathbb{K}}$*) qui satisfait l'équation. Par définition, la famille* $\{x\}$ *est donc liée.*
- *Si* $x \neq 0_E$*, alors l'équation* $\lambda \cdot x = 0_E$ *implique nécessairement* $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$*, car dans un espace vectoriel, seul le produit d'un vecteur non nul par le scalaire nul donne le vecteur nul. Ainsi, la famille* $\{x\}$ *est libre.*

2. Considérons la famille de vecteurs $\{1, i\}$ *dans* $\mathbb{C}$*, alors*
- *Sur* $\mathbb{R}$ *: La famille* $\{1, i\}$ *est libre, car* 1 *et* i *sont linéairement indépendants sur* $\mathbb{R}$*.*
- *Sur* $\mathbb{C}$ *: La famille* $\{1, i\}$ *est liée, car* i *peut s'exprimer comme un multiple complexe de* 1*,*

$$i = i \cdot 1.$$

3. Dans l'espace $\mathbb{R}^n$*, Considérons la famille de vecteurs suivante*

$$\{x_1 = (1, 0, ..., 0), x_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., x_n = (0, 0, ..., 1)\}.$$

Cette famille est libre sur $\mathbb{R}$*.*
4. Dans le $\mathbb{R}-$*espace vectoriel* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *des applications de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, la famille* $\{f_1 = \cos, f_2 = \sin\}$ *est libre sur* $\mathbb{R}$*. En effet, soient* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$

Cela équivaut à

$$\forall x \in \mathbb{R} : \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x = 0.$$

En particulier, pour $x = 0$, cette égalité donne $\alpha_1 = 0$ et pour $x = 2\pi$, elle donne $\alpha_2 = 0$. Donc la famille $\{f_1, f_2\}$ est libre sur $\mathbb{R}$.
En revanche la famille $\{f_1 = \cos^2, f_2 = \sin^2, f_3 = 1\}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est liée car on a la relation de dépendance linéaire

$$\cos^2 + \sin^2 - 1 = 0.$$

Les coefficients de dépendance linéaire sont

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1.$$

Proposition 1.3.1 ***(Propriétés des familles libres et liées)***
1. Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
2. Soit A une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. On a alors
(a) Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Autrement dit si A est libre et si $A' \subset A$, alors A' est également libre.
(b) Toute sur-famille d'une famille liée est liée. Autrement dit si A est liée et si $A \subset A'$, alors A' est aussi liée.

Remarque 1.3.1
1. Si une famille est libre, cela signifie que aucun vecteur de cette famille ne peut être obtenu comme combinaison linéaire des autres. Donc, si on retire des vecteurs, on diminue les possibilités de dépendance. Une sous-famille conserve donc cette propriété d'indépendance.
2. Une famille est liée si au moins un vecteur peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres. Si on ajoute d'autres vecteurs, on ne peut pas "casser" cette dépendance : elle reste présente, donc la famille reste liée.

Preuve.
1. Soit $A = \{x_1, ..., x_n\}$ une famille de vecteurs de E, et supposons que $0_E \in A$. Alors il existe un indice $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que $x_i = 0_E$. Considérons les scalaires $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = ... = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$, et $\lambda_i = 1_{\mathbb{K}}$. Alors

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = \lambda_i x_i = 1_{\mathbb{K}} \cdot 0_E = 0_E.$$

mais tous les scalaires ne sont pas nuls (puisque $\lambda_i = 1_{\mathbb{K}}$). Cela montre qu'il existe une combinaison linéaire non triviale des vecteurs de A qui donne le vecteur nul. Donc, la famille A est liée.
2. (a) Soit $A = \{x_1, ..., x_n\}$ une famille libre de vecteurs de E. Une sous-famille de A est de la forme

$$A' = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}\} \text{ où } 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant n \text{ avec } r \leqslant n.$$

Puisque l'ordre des vecteurs dans la famille n'a pas d'importance pour sa liberté, on peut supposer que

$$A' = \{x_1, \ldots, x_r\}.$$

Pour montrer que A' est libre, soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r = 0_E.$$

Pour utiliser la liberté de la famille A, complétons cette combinaison linéaire avec des coefficients nuls

$$\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}},$$

ainsi on a

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r + \lambda_{r+1} x_{r+1} + ... + \lambda_n x_n = 0_E.$$

Par la liberté de A, on en déduit
$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$$
En particulier,
$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0_{\mathbb{K}},$$
ce qui prouve que A' est libre.
b. On démontre cette propriété en prouvant sa contraposée : Si A' est libre, alors toute sous-famille $A \subset A'$ est libre. Or, cette propriété est déjà connue et démontrée : Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Ainsi, la contraposée étant vraie, l'énoncé initial est également vrai. Donc, si $A \subset A'$ et que A est liée, alors A' ne peut pas être libre. Cela signifie que A' est aussi liée. □

Après avoir introduit les notions de familles libres et familles liées, nous pouvons maintenant définir celles de familles génératrices et de bases, qui occupent une place centrale dans l'étude des espaces vectoriels.

Dans l'étude des espaces vectoriels, on cherche souvent à exprimer l'ensemble des vecteurs d'un espace à partir d'un nombre limité de vecteurs. C'est précisément le rôle des familles génératrices : une famille de vecteurs est dite génératrice d'un espace vectoriel si tout vecteur de cet espace peut être écrit comme une combinaison linéaire de ses éléments. Cependant, une famille génératrice peut contenir des vecteurs redondants, c'est-à-dire qui peuvent être exprimés à partir des autres. Pour éliminer cette redondance, on s'intéresse aux bases, qui sont des familles à la fois génératrices et libres. Autrement dit, une base permet de représenter chaque vecteur de l'espace de manière unique, sans relation de dépendance entre ses vecteurs.

Définition 1.3.3 ***(Sous-espace vectoriel engendré)***
1. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, $A \in \mathcal{P}(E)$. On appelle sous-espace vectoriel engendré par A, et on note $Vect(A)$ ou $\langle A\rangle$, l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A
$$Vect(A) = \bigcap_{F \text{ sev de } E \text{ et } A \subset F} F.$$
2. Si $A = \{x_1, ..., x_n\}$ est une famille finie de vecteurs de E, alors le sous-espace vectoriel engendré par A est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de la famille. Formellement
$$Vect(A) =< A >= \{x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n : \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$
Dans ce cas, on dit que la famille A engendre $Vect(A)$, ou qu'elle est génératrice de ce sous-espace.

Remarque 1.3.2
1. $Vect(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A, au sens de l'inclusion. Autrement dit, tout sous-espace vectoriel de E qui contient A contient nécessairement $Vect(A)$.
2. En particulier, si $A = \phi$ (l'ensemble vide), alors le sous-espace vectoriel engendré est
$$Vect(\phi) = \{0_E\}.$$
C'est-à-dire que l'espace engendré par l'ensemble vide est le sous-espace réduit au vecteur nul.
3. Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, alors
$$Vect(E) = E.$$
Autrement dit, un espace vectoriel engendre lui-même, ce qui est une conséquence immédiate de la définition.

Exemple 1.3.2
1. La famille de vecteurs $\{x_1 = (1,0,0), x_2 = (0,1,0), x_3 = (0,0,1)\}$ *de l'espace vectoriel réel* $\mathbb{R}^3$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^3$*. En effet, tout vecteur* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *peut s'écrire comme*

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Autrement dit

$$\mathbb{R}^3 = Vect(\{x_1 = (1,0,0), x_2 = (0,1,0), x_3 = (0,0,1)\}).$$

2. Plus généralement, la famille génératrice canonique de $\mathbb{R}^n$ *est donnée par*

$$\{e_1 = (1,0,...,0), ..., e_n = (0,0,...,1)\},$$

où chaque vecteur e_i *a un* 1 *en* $i-$*ème position et* 0 *ailleurs.*
3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ *des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$*, la famille infinie*

$$\{1, X, X^2, ...\},$$

est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$*. En effet, tout polynôme de degré quelconque s'écrit comme une combinaison linéaire finie de ces monômes.*
4. L'ensemble $\{1, i\} \subset \mathbb{C}$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{C}$ *considéré comme un espace vectoriel réel. Tout nombre complexe* $z = a + ib$ *peut s'écrire comme*

$$z = a \cdot 1 + b \cdot i \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{C} = Vect(\{1, i\}).$$

5. Dans $\mathbb{K}_n[X]$ *l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à* n*,*

$$\{1, X, X^2, ..., X^n\},$$

est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$*. Tout polynôme de degré* $\leqslant n$ *est une combinaison de ces* $n+1$ *monômes de* $\mathbb{K}_n[X]$*.*

Proposition 1.3.2 ***(Propriétés des familles génératrices)***
1. ***Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice****. Si une famille* A *est génératrice d'un espace vectoriel* E*, alors toute famille* A' *contenant* A *est également génératrice de* E*. Autrement dit, si* $A \subset A'$ *et* $Vect(A) = E$*, alors* $Vect(A') = E$*.*
2. ***Inclusion des sous-espaces engendrés.*** *Si deux familles* A *et* B *de* E *vérifient* $A \subset B$*, alors* $Vect(A) \subset Vect(B)$*. Formellement*

$$A \subset B \Longrightarrow Vect(A) \subset Vect(B).$$

3. ***Espace engendré par l'union de deux familles****. Pour toutes familles* A *et* B *de* E*, on a*

$$Vect(A \cup B) = Vect(A) + Vect(B),$$

où

$$Vect(A) + Vect(B) = \{x = v_1 + v_2 : v_1 \in Vect(A), v_2 \in Vect(B)\},$$

est appelé la somme des sous-espaces vectoriels engendrés par A *et* B*.*

Ayant posé les fondements avec les notions de familles libres, liées et génératrices, nous pouvons maintenant introduire une notion centrale dans l'étude des espaces vectoriels : la base. Dans un espace vectoriel E, une base est une famille de vecteurs qui vérifie deux propriétés essentielles. D'une part, la famille est linéairement indépendante (ou libre), ce qui signifie qu'aucun vecteur de la famille ne peut être obtenu comme combinaison linéaire des autres. D'autre part, elle est génératrice de l'espace, c'est-à-dire que tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille. La notion de base est fondamentale, car elle permet de coordonner les vecteurs, de mesurer la dimension d'un espace, et de travailler efficacement avec les applications linéaires et les matrices.

Définition 1.3.4 ***(Bases et coordonnées)***
1. ***Base.*** *On dit qu'une famille de vecteurs B est une base d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ si, et seulement si, elle vérifie les deux conditions fondamentales suivantes :*
(i) La famille B est libre, c'est-à-dire que ses vecteurs sont linéairement indépendants ;
(ii) La famille B est génératrice de E, autrement dit

$$Vect(B) = E.$$

2. ***Caractérisation d'une base finie.*** *Une famille finie $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ d'éléments d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E est une base de E si et seulement si*

$$\forall x \in E,\ \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Autrement dit, tout vecteur $x \in E$ admet une unique décomposition sous forme de combinaison linéaire des vecteurs de B.
3. ***Coordonnées d'un vecteur****. Si E admet une base finie $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, pour tout x de E, les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ définis ci-dessus s'appellent les* ***coordonnées*** *(ou :* ***composantes****) de x sur la base B. Plus précisément, λ_i s'appelle la $i-$ème coordonnée (ou : composante) de x dans la base B.*

Exemple 1.3.3
1. La famille $\{1_{\mathbb{K}}\}$, réduite à l'élément neutre de la multiplication dans $1_{\mathbb{K}}$, est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}$ sur lui-même. En effet, tout élément $a \in \mathbb{K}$ peut s'écrire de manière unique comme

$$a = a \cdot 1_{\mathbb{K}}.$$

La famille $\{1_{\mathbb{K}}\}$ est donc génératrice et libre, et constitue ainsi une base de $\mathbb{K}$.
2. La base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est la famille

$$\{e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)\}.$$

Cette famille est libre et génératrice de $\mathbb{R}^n$, donc c'est bien une base. Elle permet de représenter tout vecteur $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ comme

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

3. La famille

$$\left\{1, X, X^2, ...\right\},$$

forme la base canonique de l'espace $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. Cette famille est libre et génératrice, mais elle est infinie. En particulier, pour tout entier naturel n, la famille

$$\left\{1, X, X^2, ..., X^n\right\},$$

forme la base canonique de l'espace $\mathbb{K}_n[X]$*, constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à* n*.*
4. La famille $\{1, i\}$ *constitue une base de l'espace* $\mathbb{C}$ *sur* $\mathbb{R}$*. En effet, tout nombre complexe* $z = a + bi$*, avec* $a, b \in \mathbb{R}$*, s'écrit de façon unique comme*

$$z = a \cdot 1 + b \cdot i.$$

La famille $\{1, i\}$ *est donc libre et génératrice de* $\mathbb{C}$ *sur* $\mathbb{R}$*.*

On peut aussi formuler la définition précédente sous la forme suivante

Proposition 1.3.3 ***(Application des coordonnées dans une base).***
Soit $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *une base d'un espace vectoriel* E*. Il existe alors une bijection linéaire, appelée application des coordonnées dans la base* B*, définie par*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_B : & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

Les scalaires x_i *sont appelés les coordonnées (ou composantes) du vecteur* x *dans la base* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$*.*

Exemple 1.3.4 *On considère l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$*.*
1. Avec la base canonique. Soit

$$B = \{e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)\}.$$

Prenons le vecteur

$$x = (2, -1, 3) \in \mathbb{R}^3.$$

Dans la base B*, on a immédiatement*

$$x = 2e_1 - 1e_2 + 3e_3.$$

Les coordonnées de x *dans* B *sont donc*

$$\varphi_B(x) = (2, -1, 3).$$

2. Avec une base différente. Soit maintenant

$$B' = \{v_1 = (1, 1, 0),\ v_2 = (0, 1, 1),\ v_3 = (1, 0, 1)\}.$$

On veut exprimer x *dans* B'*. On cherche* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ *tels que*

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3.$$

Ce qui donne le système

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 2, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = -1, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 3. \end{cases}$$

En résolvant, on obtient

$$\alpha_1 = -2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 4.$$

Ainsi

$$x = -2v_1 + 1v_2 + 4v_3,$$

et ses coordonnées dans la base B' *sont*

$$\varphi_{B'}(x) = (-2, 1, 4).$$

Cet exemple montre que ***les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie****, mais que la bijection* φ_B *décrite dans la proposition permet toujours de passer de* E *à* $\mathbb{K}^n$ *en fixant une base.*

Remarque 1.3.3 *La base de l'espace vectoriel réduit à $\{0_E\}$ est la famille vide ϕ. En effet, cette famille est à la fois libre (car elle ne contient aucun vecteur) et génératrice de $\{0_E\}$ (puisque la seule combinaison linéaire possible, la somme vide, donne 0_E).*

Une famille libre maximale, dans un espace vectoriel, est une famille de vecteurs qui est à la fois libre et maximale, ce qui signifie qu'ajouter n'importe quel autre vecteur de l'espace à la famille la rendrait liée.

Définition 1.3.5 ***(Famille libre maximale et famille génératrice minimale)***
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, $\mathcal{F} \subset E$ une famille (finie ou infinie) de vecteurs de E.
1. ***Famille libre maximale.*** *On dit que $\mathcal{F}$ est une famille libre maximale ou famille indépendante maximale dans E si $\mathcal{F}$ est libre c'est-à-dire que ses vecteurs sont linéairement indépendants et est maximale pour l'inclusion parmi les familles libres de E, ce qui signifie que, pour tout $v \in E/\mathcal{F}$, la famille $\mathcal{F} \cup \{v\}$ est liée. Formellement,*

$$\begin{cases} (i)\mathcal{F} \text{ est libre.} \\ (ii)\ \forall v \in E/\mathcal{F} : \mathcal{F} \cup \{v\} \text{ est liée.} \end{cases}$$

2. ***Famille génératrice minimale.*** *On dit que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice minimale dans E si $\mathcal{F}$ est génératrice de E et est minimale pour l'inclusion parmi les familles génératrices de E, c'est-à-dire que, pour tout $v \in \mathcal{F}$, la famille $\mathcal{F}/\{v\}$ n'est plus génératrice de E. Formellement,*

$$\begin{cases} (i)\ Vect(\mathcal{F}) = E \\ (ii)\ \forall v \in \mathcal{F} : Vect\left(\mathcal{F}/\{v\}\right) \neq E. \end{cases}$$

Remarque 1.3.4
1. ***Famille libre maximale :*** *Une famille libre est dite maximale lorsque l'ajout de tout vecteur de l'espace à cette famille la rend liée.*
2. ***Famille génératrice minimale :*** *Une famille génératrice est dite minimale lorsqu'il est impossible d'en retirer un vecteur sans perdre la propriété d'engendrer tout l'espace.*
3. ***Importance de la maximalité :*** *La condition de maximalité pour une famille libre signifie qu'on ne peut pas ajouter d'autre vecteur à cette famille sans la rendre liée (non libre). Cela assure que la base contient le minimum de vecteurs nécessaires pour engendrer tout l'espace.*
4. ***Importance de la minimalité :*** *La minimalité d'une famille génératrice est importante car elle permet d'avoir une représentation la plus simple possible de l'espace vectoriel, avec le moins de vecteurs indépendants nécessaires pour l'engendrer.*

Après avoir introduit les notions de famille libre maximale et de famille génératrice minimale, nous pouvons maintenant présenter une caractérisation des bases d'un espace vectoriel. Dans un espace vectoriel, les notions de base, famille libre maximale et famille génératrice minimale sont équivalentes.

Proposition 1.3.4 ***(Caractérisation d'une base)*** *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, $\mathcal{F} \subset E$ une famille (finie ou infinie) de vecteurs de E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*
(a) $\mathcal{F}$ est une base de E.
(b) $\mathcal{F}$ est une famille libre maximale
(c) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice minimale de E.

Preuve. Pour établir l'équivalence des trois assertions, nous allons montrer

$$(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (a),$$

ce qui, par transitivité, prouvera l'équivalence.
1. $(a) \Longrightarrow (b)$. Supposons que $\mathcal{F}$ est une base. Par définition, $\mathcal{F}$ est libre et engendre E. Soit $v \in E$. Comme $v \in Vect(\mathcal{F}) = E$, alors v s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$. Ainsi la famille $\mathcal{F} \cup \{v\}$ est liée. Donc on ne peut ajouter aucun vecteur sans perdre la liberté, ce qui montre que $\mathcal{F}$ est maximale parmi les familles libres.
2. $(b) \Longrightarrow (c)$. Supposons $\mathcal{F}$ libre et maximale pour l'inclusion parmi les familles libres.
• **Preuve qu'elle engendre** E : Si $Vect(\mathcal{F}) \neq E$, choisissons $v \in E \backslash Vect(\mathcal{F})$. Alors $\mathcal{F} \cup \{v\}$ serait encore libre (car v n'est pas combinaison des éléments de $\mathcal{F}$), contredisant la maximalité. Donc $Vect(\mathcal{F}) = E$, $\mathcal{F}$ engendre E.
• **Preuve de la minimalité :** si l'on pouvait enlever un vecteur $w \in \mathcal{F}$ et que $\mathcal{F} \backslash \{w\}$ engendrait encore E, alors w serait combinaison linéaire des autres, ce qui contredirait la liberté de $\mathcal{F}$. Ainsi $\mathcal{F}$ est une famille génératrice minimale.
3. Supposons $\mathcal{F}$ engendre E et soit minimale pour cette propriété. Si $\mathcal{F}$ était liée, il existerait une relation linéaire non triviale entre ses éléments ; en particulier un vecteur $w \in \mathcal{F}$ s'exprimerait comme combinaison linéaire des autres. Alors $\mathcal{F} \backslash \{w\}$ engendrerait encore E, ce qui contredirait la minimalité de $\mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F}$ est libre. Comme $\mathcal{F}$ engendre $\mathcal{F}$ et est libre, c'est une base. □

1.4 Espaces vectoriels de dimension finie

Dans cette section, nous introduisons la notion de dimension d'un espace vectoriel, ainsi que ses principales propriétés. La notion de dimension joue un rôle fondamental dans l'étude des espaces vectoriels. Elle permet d'évaluer la « taille » d'un espace vectoriel, en indiquant combien de vecteurs sont nécessaires, au minimum, pour engendrer tous les vecteurs de l'espace. On dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie lorsqu'il existe un ensemble fini de vecteurs permettant d'exprimer tous les autres par combinaison linéaire. Autrement dit, l'espace peut être entièrement décrit à l'aide d'un nombre fini de vecteurs. En revanche, si un espace nécessite une infinité de vecteurs pour engendrer tous les autres, on dit qu'il est de dimension infinie.

Définition 1.4.1
1. On dit qu'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est de dimension finie si, et seulement s'il admet au moins une famille génératrice finie de vecteurs dans E, c'est-à-dire un ensemble fini de vecteurs dont les combinaisons linéaires permettent d'engendrer tout l'espace.
1. Dans le cas contraire (c'est-à-dire si aucune famille génératrice finie n'existe), on dit que E est de dimension infinie.
2. Par convention, l'espace nul $E = \{0_E\}$ qui ne contient que le vecteur nul, est considéré comme un espace de dimension finie.

Exemple 1.4.1
1. Pour tout corps $\mathbb{K}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace $\mathbb{K}^n$ est l'ensemble des $n-$uplets de scalaires dans $\mathbb{K}$ est de dimension finie car il est engendré par une famille finie : les vecteurs canoniques

$$\{e_1 = (1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, ..., 0_{\mathbb{K}}), ..., e_n = (0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, ..., 1_{\mathbb{K}})\}.$$

En particulier les espaces $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, qui sont respectivement les cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sont des espaces vectoriels de dimension finie engendrés par leur base canonique.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ formé des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n est de dimension finie car, il est engendré par la famille finie $\{1, X, X^2, ..., X^n\}$. En revanche, l'espace $\mathbb{K}[X]$, qui contient tous les polynômes (de degré quelconque), n'est pas engendré par une famille finie. Donc $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Définition 1.4.2 ***(Dimension)*** *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.*
1. Si $E \neq \{0_E\}$, c'est-à-dire si E n'est pas réduit au seul vecteur nul, alors on appelle dimension de E le cardinal ou le nombre d'éléments de toute base B de E, et on le note

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = Card(B).$$

2. Si $E = \{0_E\}$ est l'espace nul, on dit que E est de dimension 0, et l'on pose par convention

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = 0.$$

Remarque 1.4.1
1. La dimension d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel dépend du corps $\mathbb{K}$ sur lequel il est considéré. Un même ensemble peut avoir des dimensions différentes selon le corps de scalaires. Par exemple
(a) Si l'on considère $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (i.e., $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel), alors

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2,$$

car la famille $\{1, i\}$ est une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.
(b) Si l'on considère $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel sur lui-même, alors

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1,$$

car tout nombre complexe z s'écrit $z = z \cdot 1$, donc la famille $\{1\}$ est une base.
2. Pour tout $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, on a

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = 0 \Longleftrightarrow E = \{0_E\}.$$

Exemple 1.4.2
1. Soient $E_1, \ldots, E_p$ des espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps $\mathbb{K}$. Alors

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_1 \times \cdots \times E_p) = \dim_{\mathbb{K}}(E_1) + \cdots + \dim_{\mathbb{K}}(E_p).$$

En particulier, on a

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n, \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n, \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n.$$

2. Pour les espaces de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1, \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X]) = \infty.$$

Intéressons-nous maintenant à la dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie.

Proposition 1.4.1 *Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E. On a*
1. Le sous-espace F est de dimension finie et

$$\dim_{\mathbb{K}}(F) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

Autrement dit, toute base de F contient un nombre de vecteurs inférieur ou égal à celui d'une base de E.
2. Le sous-espace F coïncide avec E si et seulement si leurs dimensions sont égales. On a donc

$$E = F \Longleftrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

Dans un espace vectoriel de dimension finie, le cardinal de toute famille génératrice est minoré par celui d'une base, tandis que le cardinal de toute famille libre est majoré par celui d'une base. Ces propriétés sont extrêmement importantes, car elles sont fréquemment utilisées en pratique. Nous les résumons dans la proposition suivante.

Proposition 1.4.2 ***(Relations entre familles libres, génératrices, bases et dimension)***
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n. On a les propriétés suivantes
1. E admet au moins une base finie formée de n vecteurs.
2. Toutes les bases de E sont finies et ont exactement n vecteurs.
3. Toute famille libre contenant n vecteurs est une base de E.
4. Toute famille génératrice de E composée de n vecteurs est une base de E.
5. Toute famille de vecteurs de E ayant strictement plus de n éléments est liée (dépendante linéairement).
6. Toute famille de vecteurs de E ayant strictement moins de n éléments ne peut être génératrice de E.

Remarque 1.4.2
• *Les points (1) et (2) assurent l'existence d'une base et l'unicité de la dimension.*
• *Les points (3) et (4) affirment qu'une famille libre maximale ou une famille génératrice minimale est nécessairement une base.*
• *Le point (5) indique qu'une famille trop nombreuse est forcément dépendante.*
• *Le point (6) indique qu'une famille trop petite ne peut pas engendrer tout l'espace.*

Exemple 1.4.3
1. Existence d'une base de n vecteurs. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille

$$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\},$$

est une base de $\mathbb{R}^3$, formée de 3 vecteurs. Cela illustre que tout espace vectoriel de dimension n admet une base de n vecteurs.
1. Toutes les bases ont n vecteurs. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille

$$B' = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\},$$

est aussi une base de $\mathbb{R}^3$. Bien que différente de la base canonique, elle contient également 3 vecteurs, ce qui montre que toutes les bases de $\mathbb{R}^3$ ont le même nombre de vecteurs.
3. Une famille libre de n vecteurs est une base. Considérons dans $\mathbb{R}^2$ la famille

$$F = \{(1,2), (3,1)\}.$$

Les vecteurs sont linéairement indépendants et $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, donc F est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Une famille génératrice de n vecteurs est une base. Dans $\mathbb{R}^2$, la famille

$$G = \{(1,0), (1,1)\},$$

engendre $\mathbb{R}^2$. Comme elle contient 2 vecteurs (égale à la dimension de $\mathbb{R}^2$), elle est nécessairement une base.
5. Une famille de plus de n vecteurs est liée. Dans $\mathbb{R}^2$, la famille

$$H = \{(1,0), (0,1), (1,1)\},$$

contient 3 vecteurs, donc plus que la dimension de l'espace (2). Elle est liée, car

$$(1,1) = (1,0) + (0,1).$$

6. Une famille de moins de n vecteurs n'est pas génératrice. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille

$$K = \{(1,0,0),(0,1,0)\},$$

contient seulement 2 vecteurs, donc moins que la dimension de $\mathbb{R}^3$. Elle ne peut pas engendrer tout $\mathbb{R}^3$, car aucun vecteur de la famille n'a de composante non nulle sur le troisième axe.

Lorsqu'on travaille dans un espace vectoriel de dimension finie, il est souvent utile de réduire une famille de vecteurs, parfois trop grande ou redondante, à une base, c'est-à-dire à une famille libre qui génère tout l'espace. Le théorème de la base extraite formalise cette idée en affirmant qu'à partir de toute famille génératrice, on peut toujours extraire une base. Ce résultat est fondamental car il permet d'identifier une base « minimale » au sein d'une famille donnée, facilitant ainsi l'étude et la manipulation des vecteurs de l'espace.

Théorème 1.4.1 ***(Théorème de la base extraite).***
Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$ et $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E. Alors, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une famille libre et génératrice de E. Autrement dit, il existe une famille $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}'$ soit une base de E.

Le théorème de la base extraite énonce que, dans un espace vectoriel de dimension finie, toute famille génératrice contient une base. Autrement dit, à partir d'un ensemble de vecteurs qui engendre tout l'espace, il est toujours possible de sélectionner un sous-ensemble formant une base, c'est-à-dire un ensemble de vecteurs à la fois linéairement indépendants et générateurs.

Exemple 1.4.4 *Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et la famille suivante*

$$\mathcal{F} = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0),(0,0,1)\}.$$

• ***Vérification que $\mathcal{F}$ est génératrice*** *: Les vecteurs $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ engendrent déjà $\mathbb{R}^3$, car pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on peut écrire*

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

De plus, toute sur-famille d'une famille génératrice est également génératrice. Comme $\mathcal{F}$ contient ces trois vecteurs, $\mathcal{F}$ est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$.
• ***Extraction d'une base*** *: Le théorème de la base extraite assure qu'il existe une sous-famille $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ formée de 3 vecteurs (puisque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$) qui soit une base. Par exemple*

$$\mathcal{F}' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},$$

est libre et génératrice, donc constitue une base extraite de $\mathcal{F}$.

Le théorème suivant est fondamental, car il fournit un procédé permettant de construire une base à partir d'une famille libre. Il affirme qu'il est toujours possible, en ajoutant des vecteurs bien choisis, de compléter une famille libre incomplète pour obtenir une base. Ce résultat, connu sous le nom de théorème de la base incomplète, exprime que, dans tout espace vectoriel de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base et, réciproquement, qu'il est possible d'extraire d'une famille génératrice une sous-famille qui constitue une base.

Théorème 1.4.2 ***(Théorème de la base incomplète)*** *Soit* $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel de dimension* n*, et soit*

$$L = \{x_1, x_2, ..., x_p\},$$

une famille libre de p $(p \leqslant n)$ *vecteurs de* E*. Soit*

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\},$$

une base de E*. Alors*
1. Si $p = n$*, alors* L *est déjà une (nouvelle) base de* E*.*
2. Si $p < n$*, alors on peut compléter* L *en une base de* E *en ajoutant exactement* $(n - p)$ *vecteurs supplémentaires de* B*.*
Autrement dit, il existe des indices distincts $i_1, i_2, ..., i_{n-p} \in \{1, 2, ..., n\}$ *tels que*

$$\left\{x_1, x_2, ..., x_p, e_{i_1}, ..., e_{i_{n-p}}\right\},$$

soit une base de E*.*

Remarque 1.4.3
1. Le théorème de la base extraite permet de réduire une famille génératrice trop grande à une base.
2. Le théorème de la base incomplète permet de compléter une famille libre insuffisante pour en faire une base.
3. Ensemble, ces résultats montrent que toute base d'un espace de dimension finie contient exactement n *vecteurs et que toute famille libre ou génératrice peut être transformée en une base.*

Exemple 1.4.5
1. ***Pour*** $p = 1$*, on travaille dans* $\mathbb{R}^3$ *avec la base canonique* $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *où* $e_1 = (1, 0, 0)$*,* $e_2 = (0, 1, 0)$*,* $e_3 = (0, 0, 1)$*. Prenons* $L = \{x_1\}$ *avec* $x_1 = (1, 1, 0)$*. Cette famille est libre et contient un seul vecteur (*$p = 1 < 3$*), donc on peut la compléter avec exactement* $(n - p = 2)$ *vecteurs pris dans* B*. Par exemple, en ajoutant* e_1 *et* e_3 *(indices* $i_1 = 1, i_2 = 3$*), on obtient*

$$\{x_1, e_1, e_3\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}.$$

ces trois vecteurs sont linéairement indépendants, donc forment une base de $\mathbb{R}^3$*.*
2. ***Pour*** $p = 2$*, toujours dans* $\mathbb{R}^3$ *avec la base canonique* B*. On prend*

$$x_1 = (1, 0, 1), x_2 = (0, 1, 1).$$

Ces deux vecteurs sont indépendants ($p = 2 < 3$*). Il faut donc ajouter* $(n - p = 1)$ *vecteur de* B *qui ne soit pas dans l'espace engendré par* x_1 *et* x_2*. On teste* $e_1 = (1, 0, 0)$ *(indices* $i_1 = 1$*) et on constate qu'il ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de* x_1 *et* x_2*. Ainsi,*

$$\{x_1, x_2, e_1\} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\},$$

est une famille libre de trois vecteurs, donc une base de $\mathbb{R}^3$*.*

Le rang d'une famille finie de vecteurs est défini comme la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille. Autrement dit, il représente le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de cette famille.

Définition 1.4.3 ***(Rang d'une famille)***
Soit $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel, et soit* $\mathcal{F} = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ *une famille finie de vecteurs de*

E. Le rang de $\mathcal{F}$, noté $rg(\mathcal{F})$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille, autrement dit

$$rg(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{K}}(Vect(\mathcal{F})).$$

Cela revient à dire que $rg(\mathcal{F})$ est le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de $\mathcal{F}$.

Exemple 1.4.6 *Soit la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$*

$$\mathcal{F} = \{x_1 = (1,0,0), x_2 = (0,1,0), x_3 = (1,1,0)\}.$$

On remarque que x_3 est une combinaison linéaire des deux premiers vecteurs

$$x_3 = x_1 + x_2.$$

Cela montre que la famille $\mathcal{F}$ est linéairement dépendante. Alors on peut extraire de $\mathcal{F}$ la sous famille $\mathcal{F}' = \{x_1, x_2\}$ qui est linéairement indépendant. Par conséquent,

$$rg(\mathcal{F}) = rg(\mathcal{F}') = 2.$$

Autrement dit, la famille $\mathcal{F}' = \{x_1, x_2\}$ est une base de $Vect(\mathcal{F})$, on obtient

$$rg(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{R}}(Vect(\mathcal{F})) = Card(\mathcal{F}') = 2.$$

Le rang vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 1.4.3 ***(Propriétés du rang d'une famille de vecteurs)***
1. ***Comparaison de rangs pour deux familles.*** *Pour toutes familles finies $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ d'éléments de E, on a*

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \Longrightarrow rg(\mathcal{F}) \leqslant rg(\mathcal{F}').$$

Autrement dit, ajouter des vecteurs à une famille ne peut pas diminuer son rang. De plus,

$$\max\left(rg(\mathcal{F}), rg(\mathcal{F}')\right) \leqslant rg(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}') \leqslant rg(\mathcal{F}) + rg(\mathcal{F}').$$

Cela signifie que le rang de la réunion est au moins le plus grand des deux rangs, mais ne dépasse jamais leur somme.
2. Si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{F} = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ une famille de vecteurs de E, alors
(a). Le rang ne dépasse pas le nombre de vecteurs dans la famille,

$$rg(\mathcal{F}) \leqslant m.$$

(b). Le rang ne dépasse pas non plus la dimension de l'espace,

$$rg(\mathcal{F}) \leqslant \min(m, n).$$

(c). Cas particuliers,
(i) Famille libre,

$$rg(\mathcal{F}) = m \Longleftrightarrow \mathcal{F} \text{ est libre}.$$

(ii) Famille génératrice,

$$rg(\mathcal{F}) = n \Longleftrightarrow Vect(\mathcal{F}) = E.$$

(iii) Base de E,

$$rg(\mathcal{F}) = m = n \Longleftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une base de } E.$$

1.5 Somme, somme directe, sous-espace supplémentaires

La somme de deux sous-espaces vectoriels permet de créer un nouveau sous-espace à partir de deux autres. Ce nouveau sous-espace contient tous les vecteurs des deux sous-espaces de départ et toutes les sommes possibles de ces vecteurs. C'est le plus petit sous-espace qui les contient tous les deux. Cette opération est importante car elle permet de rassembler plusieurs sous-espaces en un seul, tout en gardant les règles d'un espace vectoriel.

Définition 1.5.1 ***(Somme de sous-espaces vectoriels)*** *Soient $(E, +, \cdot)$ $\mathbb{K}-$espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. La somme de F_1 et F_2 est le sous-ensemble de E, noté $F_1 + F_2$, défini par*

$$F_1 + F_2 = \{x \in E, \exists x_1 \in F_1, \exists x_2 \in F_2 : x = x_1 + x_2\}.$$

On peut aussi écrire

$$F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\}.$$

Autrement dit, $F_1 + F_2$ est l'ensemble de toutes les sommes possibles d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2. Chaque élément de $F_1 + F_2$ peut donc s'écrire sous la forme $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.

Proposition 1.5.1 *Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E, alors $F_1 + F_2$ est lui-même un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve. Soit

$$F_1 + F_2 = \{\, x_1 + x_2 : x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2 \,\}.$$

Montrons que $F_1 + F_2$ est un sous-espace de E.
(a) **Stabilité par le vecteur nul**. Comme $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$, on a

$$0_E = 0_E + 0_E \in F_1 + F_2.$$

(b) **Stabilité par addition**. Soient $x = u_1 + v_1$ et $y = u_2 + v_2$ dans $F_1 + F_2$, avec $u_1, u_2 \in F_1$ et $v_1, v_2 \in F_2$. Alors, en utilisant l'associativité et la commutativité de l'addition dans E, on a

$$x + y = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2).$$

Comme F_1 et F_2 sont des sous-espaces, $u_1 + u_2 \in F_1$ et $v_1 + v_2 \in F_2$, donc $x + y \in F_1 + F_2$.
(c) **Stabilité par multiplication scalaire**. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x = u + v \in F_1 + F_2$, avec $u \in F_1$ et $v \in F_2$. Alors

$$\lambda x = (\lambda u) + (\lambda v).$$

Comme F_1 et F_2 sont des sous-espaces, $\lambda u \in F_1$ et $\lambda v \in F_2$, donc $\lambda x \in F_1 + F_2$. Ainsi, $F_1 + F_2$ est bien un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque 1.5.1 *F_1 et F_2 sont eux-mêmes deux sous-espaces vectoriels de $F_1 + F_2$.*

On peut regrouper les principales propriétés de la somme de deux sous-espaces vectoriels dans la proposition suivante.

Proposition 1.5.2 ***(Propriétés de la somme de sous-espaces vectoriels)*** *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et soient F_1, F_2, F_3 trois sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*
1. Commutativité,

$$F_1 + F_2 = F_2 + F_1.$$

2. Inclusions de base,

$$F_1 \subset F_1 + F_2.$$

3. Caractérisation par inclusion,

$$(F_1 \subset F_3 \textit{ et } F_2 \subset F_3) \iff F_1 + F_2 \subset F_3.$$

4. Compatibilité avec l'inclusion,

$$F_1 \subset F_2 \Longrightarrow F_1 + F_3 \subset F_2 + F_3.$$

5. Idempotence,

$$F_1 + F_1 = F_1.$$

6. Somme avec le sous-espace nul,

$$F_1 + \{0_E\} = F_1.$$

7. Somme avec l'espace tout entier,

$$F_1 + E = E.$$

8. Associativité,

$$(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3).$$

Preuve. On rappelle que la somme de deux sous-espaces est définie par

$$F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2\}.$$

1. **Commutativité.** Soit $x \in F_1 + F_2$. Alors $x = x_1 + x_2$ pour certains $x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2$. Par commutativité de l'addition dans E on a $x = x_2 + x_1$, donc $x \in F_2 + F_1$. L'inclusion réciproque se montre de la même façon, d'où

$$F_1 + F_2 = F_2 + F_1.$$

2. **Inclusions de base.** Si $x_1 \in F_1$ alors $x_1 = x_1 + 0_E$ avec $0_E \in F_2$, donc $x_1 \in F_1 + F_2$. Ainsi $F_1 \subset F_1 + F_2$. De même $F_2 \subset F_1 + F_2$.
3. **Caractérisation par inclusion.**
• Sens direct ($\Longrightarrow$). Si $F_1 \subset F_3$ et $F_2 \subset F_3$, alors pour tout $x = x_1 + x_2 \in F_1 + F_2$ on a $x_1, x_2 \in F_3$ et donc $x \in F_3$ (puisque F_3 est un sous-espace). D'où

$$F_1 + F_2 \subset F_3.$$

• Sens réciproque ($\Longleftarrow$). Si $F_1 + F_2 \subset F_3$, alors pour $x_1 \in F_1$ on a $x_1 = x_1 + 0_E \in F_1 + F_2 \subset F_3$, donc $F_1 \subset F_3$. Même raisonnement pour F_2.
4. **Compatibilité avec l'inclusion.** Supposons $F_1 \subset F_2$. Soit $x \in F_1 + F_3$, alors $x = u + v$ avec $u \in F_1,\ v \in F_3$. Comme $u \in F_2$ on a $x \in F_2 + F_3$. Donc

$$F_1 + F_3 \subset F_2 + F_3.$$

5. **Idempotence.**
• L'inclusion $F_1 \subset F_1 + F_1$ est claire. En effet, pour tout $u \in F_1$, on peut écrire

$$u = u + 0_E,$$

avec $u \in F_1$ et 0_E. Cela montre que $u \in F_1 + F_1$.
• Réciproquement, si $x \in F_1 + F_1$ alors $x = u + v$ avec $u, v \in F_1$ et donc $x \in F_1$ par stabilité de F_1 par addition. D'où $F_1 + F_1 \subset F_1$. En combinant les deux inclusions, on obtient bien $F_1 + F_1 = F_1$.
6. **Somme avec $\{0_E\}$.**

Si $x \in F_1 + \{0_E\}$ alors $x = u + 0_E = u$ pour un certain $u \in F_1$, donc $x \in F_1$. L'inclusion réciproque vient de (2) puisque $\{0_E\} \subset F_1$. Ainsi $F_1 + \{0_E\} = F_1$.
7. **Somme avec E.**
(i) Comme $F_1 \subset E$ est un espace vectoriel, toute somme $x + y$ avec $x \in F_1$ et $y \in E$ est encore dans E. Cela montre que

$$F_1 + E \subset E.$$

(ii) Pour tout $y \in E$ on a $y = 0_E + y$ avec $0_E \in F_1$, donc $y \in F_1 + E$. Ainsi

$$E \subset F_1 + E.$$

8. **Associativité.** Soit $x \in (F_1 + F_2) + F_3$. Alors $x = (u + v) + w$ avec $u \in F_1,\ v \in F_2,\ w \in F_3$. Par associativité de l'addition dans E, $x = u + (v + w)$ et $v + w \in F_2 + F_3$, donc $x \in F_1 + (F_2 + F_3)$. L'inclusion inverse se démontre de manière analogue en permutant les rôles des sous-espaces. Ainsi

$$(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3).$$

Cela achève la preuve des huit propriétés. □

Après avoir présenté la notion de somme de deux sous-espaces vectoriels et étudié leurs propriétés, il est naturel de s'intéresser à un cas particulier important, appelé somme directe. Dans la somme ordinaire, un vecteur peut parfois s'écrire de plusieurs façons différentes comme somme d'un vecteur du premier sous-espace et d'un vecteur du second. En revanche, dans une somme directe, chaque vecteur de la somme possède une décomposition unique : il existe un seul couple formé d'un vecteur du premier sous-espace et d'un vecteur du second dont la somme donne ce vecteur.

Définition 1.5.2 ***(Somme directe)***
Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F_1 + F_2$ est directe, et l'on note $F_1 \oplus F_2$, lorsque les deux sous-espaces n'ont en commun que le vecteur nul

$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\}.$$

Autrement dit

$$F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2 \Longleftrightarrow F_1 \cap F_2 = \{0_E\}.$$

Remarque 1.5.2 *La somme directe est un cas particulier de la somme de deux sous-espaces ; elle impose la condition supplémentaire que leur intersection soit réduite au vecteur nul.*

Exemple 1.5.1
1. Dans tout $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E, +, \cdot)$, les sous-espaces E et $\{0_E\}$ sont en somme directe, c'est-à-dire

$$E + \{0_E\} = E \oplus \{0_E\}.$$

car leur intersection est $\{0_E\}$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les sous-espaces vectoriels

$$F_1 = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \text{ (axe des abscisses),}$$

$$F_2 = \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \text{ (axe des ordonnées).}$$

On a

$$F_1 \cap F_2 = \{(0, 0)\}.$$

Ainsi

$$F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2.$$

3. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les sous-espaces vectoriels

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in E : f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in E : f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\},$$

qui sont respectivement les espaces des applications paires et impaires. On observe que

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\},$$

car la seule application à la fois paire et impaire est l'application nulle. Ainsi

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) + \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Proposition 1.5.3 ***(Caractérisation de la somme directe)***
Pour que deux sous-espaces vectoriels F_1, F_2 d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ soient en somme directe, il faut et il suffit que tout élément de $F_1 + F_2$ se décompose de façon unique en somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2. Autrement dit

$$\forall x \in F_1 + F_2, \exists! x_1 \in F_1, \exists!\, x_2 \in F_2 : x = x_1 + x_2.$$

Autrement dit, chaque vecteur de la somme directe admet une seule écriture comme somme d'éléments provenant de chacun des sous-espaces.

Preuve.
1. **Condition nécessaire :** Supposons que F_1 et F_2 soient en somme directe, c'est-à-dire que

$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\}.$$

Soit $x \in F_1 + F_2$, par définition de $F_1 + F_2$, il existe $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Supposons qu'il existe une autre décomposition de x

$$x = y_1 + y_2$$

avec $(y_1, y_2) \in F_1 \times F_2$. On a alors

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Longrightarrow x_1 - y_1 = y_2 - x_2.$$

Comme $x_1 - y_1 \in F_1$ et $y_2 - x_2 \in F_2$, et que $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ (car F_1 et F_2 sont en somme directe), on déduit que

$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 0_E.$$

Ainsi,

$$x_1 = y_1 \text{ et } x_2 = y_2.$$

Cela prouve que la décomposition de x est unique.
2. **Condition suffisante :** Supposons que tout élément de $F_1 + F_2$ admette une décomposition unique

$$x = x_1 + x_2,$$

avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. Soit $x \in F_1 \cap F_2$, alors on peut écrire 0_E de deux façons

$$0_E = 0_E + 0_E = x + (-x),$$

où $x \in F_1$ et $-x \in F_2$.
Par unicité de la décomposition de 0_E, on a nécessairement

$$x = 0_E \text{ et } -x = 0_E.$$

Donc
$$x = 0_E.$$
Ainsi
$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\},$$
ce qui montre que la somme est directe. □

Définition 1.5.3 ***(Sous-espaces supplémentaires)***
Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $E = F_1 \oplus F_2$. Cela signifie que

$$E = F_1 \oplus F_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \\ \quad et \\ E = F_1 + F_2. \end{cases}$$

Remarque 1.5.3 *(Remarque importante)*
Il ne faut pas confondre le complémentaire ensembliste $E \backslash F$ avec un supplémentaire de F dans E.
• *Un supplémentaire G est un sous-espace tel que $E = F \oplus G$.*
• *Un complémentaire ensembliste $E \backslash F$ est simplement l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F. Il ne s'agit pas nécessairement d'un sous-espace vectoriel et il n'a donc pas la structure nécessaire pour former une somme directe avec F.*

Exemple 1.5.2
1. Pour tout $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E, +, \cdot)$, on a E et $\{0_E\}$ sont supplémentaires dans E.
2. Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soit

$$F_1 = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \ \textit{(l'axe des abscisses)}$$

$$F_2 = \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \ \textit{(l'axe des ordonnées)},$$

deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, alors on a F_1 et F_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Autrement dit

$$\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2.$$

3. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications paires et impaires respectivement, alors on a $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Autrement dit

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

4. Dans $E = \mathbb{C}$, posons
$$F_1 = Vect(\{1\}), F_2 = Vect(\{i\}).$$
On sait que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E.
• *Si $x \in F_1 \cap F_2$, alors x est à la fois réel et imaginaire pur donc $x = 0$ et*

$$F \cap G = \{0\}.$$

• *On a*
$$F_1 + F_2 = Vect(1) + Vect(i) = Vect(1, i) = \mathbb{C},$$
Ainsi
$$E = F_1 \oplus F_2.$$

Proposition 1.5.4 ***(Caractérisation des sous-espaces supplémentaires)***
Deux sous-espaces vectoriels F_1, F_2 d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ sont supplémentaires dans E, si et seulement si tout élément de E se décompose de façon unique en somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2. Formellement, cela s'écrit

$$\forall x \in E, \exists! x_1 \in F_1, \exists!\, x_2 \in F_2 : x = x_1 + x_2.$$

Autrement dit, chaque vecteur de E possède une unique écriture comme somme d'éléments provenant de chacun des sous-espaces supplémentaires.

Preuve.
1. **Sens direct :** Supposons que F_1 et F_2 soient supplémentaires

$$E = F_1 + F_2, F_1 \cap F_2 = \{0_E\}.$$

(a). Existence de la décomposition : Comme $E = F_1 + F_2$, pour tout $x \in E$, il existe $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$.
(b). Unicité de la décomposition : Supposons que x ait deux écritures

$$x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2,$$

avec $x_1, y_1 \in F_1$ et $x_2, y_2 \in F_2$. On a alors

$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2.$$

Le membre de gauche est dans F_1 et celui de droite à F_2. Ainsi

$$x_1 - y_1 \in F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \Longrightarrow x_1 = y_1.$$

En remplaçant dans l'égalité de départ, on obtient aussi

$$x_2 = y_2.$$

Ainsi, la décomposition est unique.
Sens réciproque : Supposons que tout $x \in E$ se décompose de façon unique en

$$x = x_1 + x_2,$$

avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.
(a). Somme : Par hypothèse, pour chaque $x \in E$, on peut trouver $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ tels que

$$x = x_1 + x_2.$$

Cela signifie que $x \in E$, on a donc

$$E \subset F_1 + F_2.$$

Comme l'inclusion

$$F_1 + F_2 \subset E,$$

est toujours vraie, on a

$$E = F_1 + F_2.$$

(b). Intersection nulle : Si $v \in F_1 \cap F_2$, alors

$$\left\{ \begin{array}{c} v \in F_1 \\ \wedge \\ v \in F_2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} v = v + 0_E \\ \wedge \\ v = 0_E + v, \end{array} \right.$$

sont deux décompositions possibles. L'unicité impose $v = 0_E$. Donc

$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\}.$$

□

La proposition suivante fournit un critère simple et efficace pour vérifier que deux sous-espaces vectoriels F_1et F_2 d'un espace vectoriel E sont supplémentaires à partir de leurs bases.

Proposition 1.5.5 *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E munis d'une base $B_1 = \{e_1, \ldots, e_p\}$ pour F_1 et d'une base $B_2 = \{f_1, \ldots, f_q\}$ pour F_2. Les assertions suivantes sont équivalentes*
(a) F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E,

$$E = F_1 \oplus F_2.$$

(b) La famille $B = \{e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q\}$ est une base de E.

Preuve.
1. **Sens direct :** $(a) \Longrightarrow (b)$. Supposons que $E = F_1 \oplus F_2$, donc

$$E = F_1 + F_2 \text{ et } F_1 \cap F_2 = \{0_E\}.$$

• **Engendrement de E,**

$$Vect\,(B) = E.$$

On a tout $x \in E$ s'écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. Comme B_1 engendre F_1 et B_2 engendre F_2, l'union $B = B_1 \cup B_2$ engendre E. Ainsi

$$Vect\,(B) = E.$$

• **Indépendance linéaire.** Soient $\alpha_1, ..., \alpha_p, \beta_1, ..., \beta_q \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j f_j = 0_E.$$

Posons

$$u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \in F_1, v = \sum_{j=1}^{q} \beta_j f_j \in F_2.$$

Alors

$$u + v = 0_E \Longrightarrow u = -v \in F_1 \cap F_2.$$

Par hypothèse, $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, donc $u = v = 0_E$. Ainsi, toutes les coordonnées α_i et β_j sont nulles, et B est libre. Donc B est une base de E.
Sens réciproque : $(b) \Longrightarrow (a)$. Supposons maintenant que $B = B_1 \cup B_2$ soit une base de E.
• **Somme.** Comme B engendre E,

$$E = Vect(B) = Vect(B_1 \cup B_2) = Vect(B_1) + Vect(B_2) = F_1 + F_2.$$

• **Intersection nulle**. Soit $x \in F_1 \cap F_2$. Alors x s'exprime uniquement à partir de vecteurs de B_1 (puisque $x \in F_1$) et uniquement à partir de vecteurs de B_2 (puisque $x \in F_2$). L'unicité de la représentation dans la base B impose $x = 0_E$. Ainsi,

$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\}.$$

On a donc $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, ce qui signifie

$$E = F_1 \oplus F_2.$$

□

Théorème 1.5.1 ***(Existence d'un supplémentaire en dimension finie)*** *Soit* $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel de dimension* n*, alors*
(a) Tout sous-espace vectoriel F *de* E *admet au moins un supplémentaire dans* E*.*
(b) Si $\dim(F) = p$*, alors tout supplémentaire de* F *dans* E *est de dimension* $(n-p)$*.*

Remarque 1.5.4 *L'existence d'un supplémentaire est également garantie en dimension infinie.*

Exemple 1.5.3
1. Dans $\mathbb{R}^3$*soit*

$$E = \mathbb{R}^3, F = Vect\{(1,0,0),(0,1,0)\}.$$

On a $\dim(E) = 3$*,* $\dim(F) = 2$*. Selon le théorème, le supplémentaire* G *doit avoir* $\dim(G) = 3-2 = 1$.
Construction du supplémentaire *: On choisit un vecteur* v *qui n'appartient pas à* F*. Par exemple* $v = (0,0,1)$*. Alors*

$$G = Vect\{v\} = Vect\{(0,0,1)\}.$$

Vérification. *Chaque vecteur* $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *s'écrit*

$$x = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, x_3) \in F + G.$$

Intersection nulle *:* $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$*, car aucun vecteur non nul de* F *n'est dans* G*. Par conséquent*

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G.$$

2. Dans $\mathbb{R}^4$*, soit*

$$E = \mathbb{R}^4, F = Vect\{e_1, e_2\},$$

avec

$$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0).$$

Il est clair que $\dim(E) = 4$*,* $\dim(F) = 2$*. Un supplément* G *doit avoir* $\dim(G) = 4-2 = 2$*.*
Construction du supplémentaire *: On choisit deux vecteurs indépendants de* F*, par exemple*

$$G = Vect\{e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)\}.$$

Vérification *: Chaque vecteur* $x \in \mathbb{R}^4$ *s'écrit comme*

$$x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4 \in F + G.$$

Intersection *:* $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ *car aucun vecteur non nul de* F *n'est dans* G*. Par conséquent* $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$*.*
3. Un sous-espace peut avoir plusieurs supplémentaires différents. Dans $\mathbb{R}^3$*,* $F = Vect\{(1,0,0)\}$ *a par exemple* $G = Vect\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ *ou* $G' = Vect\{(1,1,0),(0,0,1)\}$*. La dimension du supplémentaire est toujours déterminée :* $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$*.*

Dans l'étude des sous-espaces vectoriels, il est souvent nécessaire de relier la dimension de la somme de deux sous-espaces à celles de chacun d'eux, ainsi qu'à la dimension de leur intersection. La formule de Grassmann, également appelée formule des quatre dimensions, établit ce lien de manière simple et élégante. Cette formule tient compte du « double comptage » des vecteurs appartenant simultanément aux deux sous-espaces et permet de calculer efficacement la dimension de leur somme. Elle constitue un outil fondamental en algèbre linéaire.

Théorème 1.5.2 ***(Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels, formule de Grassmann)***
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim_{\mathbb{K}}(F_1 + F_2) = \dim_{\mathbb{K}}(F_1) + \dim_{\mathbb{K}}(F_2) - \dim_{\mathbb{K}}(F_1 \cap F_2).$$

En particulier, si F_1 et F_2 sont en somme directe ($F_1 \oplus F_2$), on a

$$\dim_{\mathbb{K}}(F_1 \oplus F_2) = \dim_{\mathbb{K}}(F_1) + \dim_{\mathbb{K}}(F_2).$$

Ainsi, la formule de Grassmann exprime que la dimension de la somme $F_1 + F_2$ est égale à la somme des dimensions de F_1 et F_2, diminuée de la dimension de leur intersection $F_1 \cap F_2$.

Proposition 1.5.6 ***(Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie)***
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$E = F_1 \oplus F_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \\ et \\ \dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2). \end{cases}$$

De manière équivalente

$$E = F_1 \oplus F_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} E = F_1 + F_2 \\ et \\ \dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2). \end{cases}$$

Remarque 1.5.5 *Ces formulations montrent que, pour que deux sous-espaces soient supplémentaires :*
(a) Leur intersection doit être réduite au vecteur nul,
(b) La somme de leurs dimensions doit égaler celle de l'espace entier,
(c) Ou, de façon équivalente, leur somme doit engendrer tout l'espace.

Conclusion du chapitre

Ce chapitre a présenté les notions fondamentales des espaces vectoriels. Après avoir introduit les lois de composition et les sous-espaces vectoriels, il a développé les concepts de familles libres, liées, génératrices et de bases. L'étude s'est ensuite concentrée sur les espaces vectoriels de dimension finie et sur la notion de somme directe de sous-espaces.

Ces outils sont essentiels pour comprendre et manipuler les espaces vectoriels et trouvent des applications en algèbre linéaire, en géométrie et en analyse fonctionnelle. Les notions de base, de dimension et de somme directe constituent des fondements indispensables pour l'étude ultérieure des matrices et applications linéaires.

Chapitre 2

Applications Linéaires

Dans ce chapitre, nous allons étudier les applications linéaires, une notion fondamentale de l'algèbre linéaire et très utilisée en mathématiques comme en informatique. Une application linéaire est une transformation entre espaces vectoriels qui conserve leur structure : elle respecte l'addition des vecteurs et la multiplication par un scalaire.

Nous commencerons par définir ce qu'est une application linéaire et donnerons des exemples simples. Nous verrons aussi des cas particuliers importants comme les endomorphismes, isomorphismes, automorphismes et formes linéaires. Ensuite, nous présenterons des applications particulières, telles que les projections, symétries, affinités et projecteurs, qui interviennent souvent dans la modélisation et la résolution de problèmes.

Nous étudierons ensuite les principales propriétés des applications linéaires, en particulier la préservation des combinaisons linéaires, ainsi que l'importance des bases pour les déterminer. Nous aborderons aussi les opérations possibles (somme, multiplication par un scalaire, composition, puissances, nilpotence), qui montrent que l'ensemble des applications linéaires possède une structure riche.

Une partie sera consacrée aux isomorphismes et au groupe linéaire, qui permettent d'identifier des espaces de même dimension comme étant équivalents du point de vue algébrique. Enfin, nous introduirons des notions essentielles comme le noyau, l'image, la dimension, le rang et le théorème du rang, qui sont des outils puissants pour analyser les applications linéaires.

Ainsi, ce chapitre fournit les bases nécessaires pour comprendre et utiliser les transformations linéaires, ouvrant la voie à de nombreuses applications en géométrie, en analyse, en informatique et dans d'autres domaines scientifiques.

2.1 Définitions et premiers exemples

La structure d'espace vectoriel ne devient vraiment intéressante que si l'on introduit la notion d'application linéaire. Il s'agit des applications entre espaces vectoriels qui, dans un sens que nous allons préciser, «conservent la structure d'espace vectoriel».

Dans cette partie, $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ désignent deux espaces vectoriels définis sur un même corps (commutatif, en général $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Ces espaces peuvent avoir des dimensions quelconques (finies ou infinies), et pas nécessairement égales.

Définition 2.1.1 *Soient* $(E,+,\cdot)$ *et* $(F,+,\cdot)$ *deux espaces vectoriels sur un même corps* $\mathbb{K}$.

1. On appelle application linéaire (ou morphisme d'espaces vectoriels) de E dans F toute application $f : E \longrightarrow F$ qui vérifie les propriétés suivantes
(a) Conservation de l'addition des vecteurs

$$\forall x, y \in E : f(x+y) = f(x) + f(y).$$

(b) Conservation de la multiplication par un scalaire ·

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E : f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x).$$

Autrement dit, une application linéaire est une application qui préserve la structure d'un espace vectoriel, c'est-à-dire qu'elle conserve l'addition des vecteurs et la multiplication par un scalaire.
2. On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Certains types d'applications linéaires jouent un rôle particulièrement important. Nous en donnons ci-dessous les définitions.

Définition 2.1.2 ***(Cas particuliers)***
Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On distingue plusieurs cas particuliers importants.
(1) ***Endomorphisme :***
(a) Si $E = F$, on dit que f est un endomorphisme de E. Autrement dit, il s'agit d'une application linéaire qui envoie l'espace sur lui-même.
(b) L'ensemble de tous les endomorphismes de E est noté $End_{\mathbb{K}}(E)$.
(2) ***Isomorphisme*** *:*
(a) Si f est bijective, alors on dit que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
(b) Dans ce cas, E et F sont dits isomorphes, ce qui signifie qu'ils ont la même dimension et la même structure algébrique. On note alors

$$E \approx F.$$

En pratique, un isomorphisme permet de considérer deux espaces différents comme étant «essentiellement les mêmes».
(c) L'ensemble de tous les isomorphismes de E dans F est noté $Iso_{\mathbb{K}}(E, F)$.
3. ***Automorphisme.***
(a) Si f est à la fois un endomorphisme de E et un isomorphisme (c'est-à-dire bijectif), alors f est un automorphisme de E.
(b) Un automorphisme est donc une application linéaire bijective de E dans lui-même.
(c) L'ensemble de tous les automorphismes de E est noté $Aut_{\mathbb{K}}(E)$.
4. ***Forme linéaire.***
(a) Si $F = \mathbb{K}$, alors une application linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est appelée une forme linéaire sur E.
(b) L'ensemble de toutes les formes linéaires sur E est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$.
(c) Cet ensemble est un espace vectoriel lui-même, appelé l'espace dual de E, et noté en général E^*. On a donc

$$E^* = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K}).$$

Exemple 2.1.1 ***(Exemples classiques d'applications linéaires (et non linéaires))***
Les applications linéaires sont très nombreuses. Voici quelques exemples significatifs.
1. ***Identité.*** *Pour tout $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E, +, \cdot)$, l'application identité Id_E de E est un automorphisme de E (linéaire, bijective, inverse égale à elle-même).*
2. L'application

$$\begin{array}{llll} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_2 - x_3), \end{array}$$

est linéaire sur $\mathbb{R}$*. En effet, si* $x = (x_1, x_2, x_3)$*,* $y = (y_1, y_2, y_3)$*, et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, alors on a*

$$f(x+y) = f(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = (2(x_1+y_1)+(x_2+y_2), (x_2+y_2)-(x_3+y_3))$$
$$= ((2x_1+x_2)+(2y_1+y_2), (x_2-x_3)+(y_2-y_3)) = f(x)+f(y),$$

et

$$f(\lambda \cdot x) = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (2\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda x_2 - \lambda x_3) = \lambda \cdot (2x_1 + x_2, x_2 - x_3) = \lambda \cdot f(x).$$

Ainsi, f *est bien une application linéaire.*
Comme on peut s'en rendre compte par cet exemple, la linéarité de f *tient au fait que les composantes* x_i *dans l'espace d'arrivée (ici* $\mathbb{R}^2$*) apparaissent toutes à la puissance 1 : plus précisément chaque composante dans l'espace d'arrivée est un polynôme homogène de degré* 1 *en les* x_i*. Nous verrons cela d'une manière plus précise dans la suite. Ainsi, par exemple, l'application*

$$\begin{array}{lcl} h : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & h(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2, x_2 + x_3), \end{array}$$

n'est pas linéaire (ni a), ni b) de la définition 2.1.1 ne sont satisfaites à cause du terme au carré.
3. ***Dérivation sur les polynômes.*** *L'application*

$$\begin{array}{ccl} f : \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & f(P) = P', \end{array}$$

est une application linéaire sur $\mathbb{R}$*.*
4. L'application

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = x + iy, \end{array}$$

est un isomorphisme sur $\mathbb{R}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{C}$*. En effet :*
(a) Linéarité sur $\mathbb{R}$*. Soient* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Alors*

$$f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2),$$

et

$$f(\lambda \cdot (x_1, y_1)) = f(\lambda x_1, \lambda y_1) = \lambda x_1 + i\lambda y_1 = \lambda \cdot (x_1 + iy_1) = \lambda \cdot f(x_1, y_1).$$

Donc f *est linéaire sur* $\mathbb{R}$*.*
(b) Injectivité. Si $f(x, y) = 0_{\mathbb{C}}$*, alors* $x + iy = 0$*, ce qui implique* $x = 0$ *et* $y = 0$*. Donc*

$$\ker(f) = \{(0, 0)\},$$

et f *est injective.*
(c) Surjectivité. Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ *s'écrit* $z = a + ib$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$*. Or* $z = f(a, b)$*. Donc* f *est surjective.*
L'application f *est linéaire, bijective, et donc un isomorphisme réel entre* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{C}$*.*
5. ***Linéarité de l'opérateur de dérivation sur un intervalle.*** *Pour tout intervalle non vide* I *de* $\mathbb{R}$*, l'application*

$$\begin{array}{ccl} f : \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ g & \longmapsto & f(g) = g' \text{ (dérivée de } g\text{)}, \end{array}$$

est linéaire sur $\mathbb{R}$ *telle que* $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ *désigne le* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel des applications de* I *dans* $\mathbb{R}$ *dérivables sur* I*. En effet,*
Soient $g_1, g_2 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. On a*

$$f(g_1 + g_2) = (g_1 + g_2)' = g_1' + g_2' = f(g_1) + f(g_2),$$

et

$$f(\lambda \cdot g_1) = (\lambda g_1)' = \lambda g_1' = \lambda \cdot f(g_1).$$

Ainsi, f est linéaire sur $\mathbb{R}$.

*6. **Linéarité de l'opérateur d'intégration (forme linéaire).** Pour tout intervalle non vide $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, l'application*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ g & \longmapsto & f(g) = \int\limits_a^b g(x)dx, \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des applications de I dans $\mathbb{R}$ continues sur I. En effet,
Soient $g_1, g_2 \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(g_1+g_2) = \int_a^b (g_1(x)+g_2(x))\,dx = \int_a^b g_1(x)dx + \int_a^b g_2(x)\,dx = f(g_1)+f(g_2),$$

et

$$f(\lambda \cdot g_1) = \int_a^b \lambda g_1(x)dx = \lambda \int_a^b g_1(x)\,dx = \lambda \cdot f(g_1).$$

Ainsi, f est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
7. L'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (y^2, x-y, 3x+2y), \end{array}$$

n'est pas linéaire sur $\mathbb{R}$ car

$$f(2\cdot(0,1)) = f(0,2) = (4,-2,4) \neq (2,-2,4) = 2\cdot f(0,1).$$

8. Les applications suivantes

$$\begin{array}{rcl} g_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g_1(x) = \sin(x), \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} g_2 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g_2(x) = \exp(x), \end{array}$$

ne sont pas linéaires sur $\mathbb{R}$. En effet, en général on a

$$\sin(x+y) \neq \sin(x)+\sin(y) \;\; et \;\; \exp(x+y) \neq \exp(x)+\exp(y),$$

tels que $x,y \in \mathbb{R}$. Donc les propriétés de linéarité ne sont pas vérifiées.

Proposition 2.1.1 ***(Caractérisation des applications linéaires)***
Soient $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors f est une application linéaire sur $\mathbb{K}$ si et seulement si elle préserve les combinaisons linéaires, c'est-à-dire

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \forall x,y \in E : f(\alpha\cdot x+\beta\cdot y) = \alpha\cdot f(x)+\beta\cdot f(y).$$

Autrement dit, l'image par f d'une combinaison linéaire de vecteurs est égale à la combinaison linéaire (avec les mêmes coefficients) de leurs images.

Preuve.
1. Supposons que f soit une application linéaire. Soient x,y deux vecteurs de E et α,β deux scalaires de $\mathbb{K}$. Par définition de la linéarité, on a

$$f(\alpha\cdot x+\beta\cdot y) = f(\alpha\cdot x)+f(\beta\cdot y) = \alpha\cdot f(x)+\beta\cdot f(y).$$

2. Réciproquement, Supposons maintenant que f vérifie la propriété précédente.
• En prenant $\alpha = \beta = 1_K$ et $(x, y) \in E^2$, on obtient

$$f(x + y) = f(1_{\mathbb{K}} \cdot x + 1_{\mathbb{K}} \cdot y) = 1_{\mathbb{K}} \cdot f(x) + 1_{\mathbb{K}} \cdot f(y) = f(x) + f(y),$$

car

$$1_{\mathbb{K}} \cdot f(x) = f(x) \text{ et } 1_{\mathbb{K}} \cdot f(y) = f(y).$$

ce qui montre que f respecte l'addition.
• En prenant $\beta = 0_{\mathbb{K}}$, on a

$$f(\alpha \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + 0_{\mathbb{K}} \cdot f(y) = \alpha \cdot f(x) + 0_F = \alpha \cdot f(x),$$

car $0_{\mathbb{K}} \cdot f(y) = 0_F$. Or, puisque $0_{\mathbb{K}} \cdot y = 0_E$,

$$f(\alpha \cdot x + 0_E) = f(\alpha \cdot x).$$

On a ainsi montré que

$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x).$$

Ce qui montre que f respecte la multiplication par un scalaire. Ainsi, f est bien une application linéaire. □

2.2 Applications linéaires particulières

Les applications linéaires particulières sont des relations importantes qui respectent la structure des espaces vectoriels. Elles incluent, par exemple, l'inclusion canonique, les projections, les symétries, les affinités et les projecteurs. Nous présentons maintenant quelques-unes de ces applications linéaires, ainsi que leurs principales propriétés.

Définition 2.2.1 ***(Inclusion canonique)***
Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E. On définit l'inclusion (ou injection canonique) par

$$\begin{array}{llll} i_F : F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & i_F(x) = x, \end{array}$$

Autrement dit, chaque vecteur de F est envoyé sur lui-même, mais vu comme élément de E. Donc i_F est bien une application linéaire injective.

Définition 2.2.2 ***(Projection canonique)*** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \ldots, E_n$ des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, on définit la $i-$ème projection canonique, notée pr_i, par*

$$\begin{array}{lll} pr_i : E_1 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & E_i \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & pr_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i, \end{array}$$

Autrement dit, la projection canonique pr_i extrait simplement la $i-$ème composante d'un $n-$uplet. Donc pr_i est bien une application linéaire. Par exemple, pour $n = 2$

$$pr_1 : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1, (x_1, x_2) \longmapsto x_1,$$

$$pr_2 : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_2, (x_1, x_2) \longmapsto x_2.$$

Proposition 2.2.1 *Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, la $i-$ème projection canonique*

$$pr_i : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow E_i,$$

est une application linéaire.

Preuve. Soient $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$ des éléments de $E_1 \times \cdots \times E_n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors
(i). Pour l'additivité,

$$pr_i(u + v) = pr_i(u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) = u_i + v_i = pr_i(u) + pr_i(v).$$

(ii) Pour l'homogénéité,

$$pr_i(\alpha \cdot u) = pr_i(\alpha u_1, \ldots, \alpha u_n) = \alpha \cdot u_i = \alpha \cdot pr_i(u).$$

Ainsi, la projection canonique vérifie les deux propriétés de linéarité. Donc pr_i est bien une application linéaire. $\square$

Définition 2.2.3 ***(Symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel)***
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E ($E = F \oplus G$).
(a) On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, (ou de direction G), l'application s_F définie par,

$$\begin{array}{llll} s_F : E & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & s_F(x) = x_F - x_G. \end{array}$$

(b) De même, on appelle symétrie par rapport à G parallèlement à F, (ou de direction F), l'application s_G définie par,

$$\begin{array}{llll} s_G : E & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & s_G(x) = x_G - x_F. \end{array}$$

Proposition 2.2.2 *Les applications s_F et s_G sont des endomorphismes de E.*

Preuve.
1. **Cas de s_F.**
(i) s_F **est bien définie**. La définition de $s_F(x)$ fait intervenir la décomposition $x = x_F + x_G$. Comme la somme est directe, cette décomposition est unique ; donc x_F et x_G sont bien déterminés par x. Par conséquent $s_F(x)$ est bien définie (ne dépend pas d'un choix).
(ii) **Linéarité de s_F.** Soient $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$ avec $x_F, y_F \in F$, $x_G, y_G \in G$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$s_F(x + y) = (x_F + y_F) - (x_G + y_G) = (x_F - x_G) + (y_F - y_G) = s_F(x) + s_F(y).$$

et

$$s_F(\lambda \cdot x) = \lambda x_F - \lambda x_G = \lambda(x_F - x_G) = \lambda \cdot s_F(x).$$

Ainsi s_F est linéaire.
(iii) **Endomorphisme.** Par construction $s_F(x) = x_F - x_G$ appartient à E pour tout E. Donc s_F est une application linéaire de E dans E, autrement dit un endomorphisme.
2. **Cas de s_G.** On peut répéter les mêmes étapes pour s_G, ou observer la relation simple

$$s_G(x) = x_G - x_F = -(x_F - x_G) = -s_F(x).$$

Comme s_F est linéaire, s_G l'est aussi. Cela achève la preuve. $\square$

Définition 2.2.4 ***(Affinité)***
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, G un supplémentaire de F dans E (c'est-à-dire $E = F \oplus G$). Fixons un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$.
1. On appelle affinité de base F, de direction G et de rapport λ, l'application u définie par,

$$\begin{array}{rcl} u : E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & u(x) = x_F + \lambda x_G. \end{array}$$

où $x_F \in F$ et $x_G \in G$ désignent les composantes de x dans la décomposition directe $E = F \oplus G$.
2. L'application u vérifie :
Si $\lambda = 1$, alors $u = Id_E$.
Si $\lambda = 0$, alors u est la projection sur F de direction G.
Si $\lambda = -1$, alors u est la symétrie par rapport à F de direction G.
Si p_F est la projection sur F parallèlement à G, alors on a

$$u = \lambda Id_E + (1 - \lambda)p_F.$$

Proposition 2.2.3 *L'application u d'affinité est endomorphisme de E.*

Preuve.
(i) u **est bien définie**. Pour tout $x \in E$, la décomposition $x = x_F + x_G$ est unique car $E = F \oplus G$. Les composantes x_F et x_G sont donc bien déterminées par x. L'expression $u(x) = x_F + \lambda x_G$ est donc bien définie (ne dépend pas d'un choix).
(ii) **Linéarité de** u. Soient $x, y \in E$ et écrivons leurs décompositions uniques

$$x = x_F + x_G, y = y_F + y_G, (x_F, y_F \in F, x_G, y_G \in G).$$

Alors,

$$x + y = (x_F + y_F) + (x_G + y_G),$$

avec $x_F + y_F \in F$ et $x_G + y_G \in G$. Par définition de u,

$$u(x + y) = (x_F + y_F) + \lambda(x_G + y_G) = (x_F + \lambda x_G) + (y_F + \lambda y_G) = u(x) + u(y).$$

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, en écrivant

$$\alpha \cdot x = (\alpha x_F) + (\alpha x_G),$$

où $\alpha x_F \in F$ et $\alpha x_G \in G$, on obtient

$$u(\alpha \cdot x) = \alpha x_F + \lambda(\alpha x_G) = \alpha \cdot (x_F + \lambda x_G) = \alpha \cdot u(x).$$

Ainsi, u respecte l'addition et la multiplication par un scalaire, donc u est linéaire. De plus, par définition $u(x) \in E$ pour tout $x \in E$. Donc u est un endomorphisme de E. $\square$

Définition 2.2.5 ***(Projecteurs)***
Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, c'est-à-dire $E = F \oplus G$, alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$x = x_F + x_G, x_F \in F, x_G \in G.$$

1. ***Projecteur sur F parallèlement à G.*** *L'application*

$$\begin{array}{rcl} p_1 : E & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & p_1(x) = x_F, \end{array}$$

*est appelée le **projecteur** sur F parallèlement à G.*
*2. **Projecteur sur G parallèlement à F.** L'application*

$$\begin{array}{rcl} p_2 : E & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & p_2(x) = x_G, \end{array}$$

*est appelée le **projecteur** sur G parallèlement à F.*
3. On a les relations fondamentales

$$p_1 + p_2 = Id_E \quad , \quad p_1^2 = p_1 \quad , \quad p_2^2 = p_2.$$

Proposition 2.2.4 *Les applications p_1 et p_2 sont des endomorphismes de E.*

Preuve. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On peut écrire

$$x = x_F + x_G, y = y_F + y_G,$$

avec $x_F, y_F \in F$ et $x_G, y_G \in G$. Alors

$$x + y = (x_F + y_F) + (x_G + y_G),$$

où

$$x_F + y_F \in F, x_G + y_G \in G.$$

Par définition de p_1,

$$p_1(x + y) = x_F + y_F = p_1(x) + p_1(y).$$

De même,

$$p_1(\lambda \cdot x) = p_1(\lambda x_F + \lambda x_G) = \lambda x_F = \lambda \cdot p_1(x).$$

Ainsi p_1 est linéaire, donc un endomorphisme de E. Le même raisonnement s'applique à p_2. □

2.3 Propriétés fondamentales

Les applications linéaires possèdent des propriétés fondamentales qui montrent qu'elles conservent la structure des espaces vectoriels. Elles préservent notamment l'addition des vecteurs, la multiplication par un scalaire, l'élément neutre et les opposés. Nous verrons aussi un résultat important : la détermination d'une application linéaire. Il explique qu'il suffit de connaître l'image des vecteurs d'une base pour connaître toute l'application linéaire.

Proposition 2.3.1 ***(Propriétés)***
Toute application linéaire $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est un morphisme de groupes additifs entre les groupes $(E, +)$ et $(F, +)$, donc
*1. **Conservation de l'élément neutre.***

$$f(0_E) = 0_F.$$

*2. **Conservation des opposés.***

$$\forall x \in E : f(-x) = -f(x).$$

Preuve.
1. Conservation de l'élément neutre. Soit $x \in E$. Comme 0_E est l'élément neutre de E, on a

$$x = x + 0_E.$$

En appliquant f des deux côtés
$$f(x) = f(x + 0_E).$$
Or, par linéarité
$$f(x + 0_E) = f(x) + f(0_E).$$
Donc
$$f(x) = f(x) + f(0_E).$$
En simplifiant par $f(x)$ dans le groupe additif $(F, +)$, il vient

$$f(0_E) = 0_F.$$

2. Conservation des opposés. Soit $x \in E$. Par définition de l'opposé, on a

$$x + (-x) = 0_E.$$

En appliquant f
$$f(x + (-x)) = f(0_E).$$
Par linéarité
$$f(x + (-x)) = f(x) + f(-x).$$
D'après (1), on sait que $f(0_E) = 0_F$. Donc

$$f(x) + f(-x) = 0_F.$$

Ainsi
$$f(-x) = -f(x).$$

□

Proposition 2.3.2 *Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ et tous vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n \in E$, on a*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

En d'autres termes, toute application linéaire préserve les combinaisons linéaires.

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante

$$\mathcal{P}(n) : f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k),$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $x_1, \ldots, x_n \in E$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$.
- Pour $n = 1$, on a
$$f(\lambda_1 x_1) = \lambda_1 f(x_1),$$

ce qui est vrai par la linéarité de f. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.
• Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right).$$

Par la linéarité de f

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) + f(\lambda_{n+1} x_{n+1}).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence et la linéarité

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k).$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée. Par le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

□

L'application linéaire f préserve les combinaisons linéaires, ce qui est une propriété essentielle des applications linéaires entre espaces vectoriels. Cela signifie que l'image d'une combinaison linéaire de vecteurs est la combinaison linéaire des images de ces vecteurs. La proposition suivante permet de comprendre qu'une application linéaire définie entre un espace vectoriel de dimension n et un autre espace vectoriel est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Proposition 2.3.3 ***(Détermination d'une application linéaire)*** *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n, F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On suppose que*
$(\mathcal{H}_1)$ $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E.
$(\mathcal{H}_2)$ $\mathcal{F} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ est une famille de vecteurs de F.
Alors,
1. ***Existence et unicité :*** *Il existe une et une seule application linéaire*

$$u : E \longrightarrow F,$$

telle que

$$\forall i \in \{1, ..., n\} : u(e_i) = y_i. \tag{2.1}$$

2. ***Formule explicite.*** *Pour tout vecteur $x \in E$ ayant pour coordonnées $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ dans la base B, c'est-à-dire*

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k,$$

on a

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k.$$

En particulier, une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ.

Preuve.
1. **(a) Unicité.** Soit $v : E \longrightarrow F$ une autre application linéaire vérifiant (2.1). Prouvons que $u = v$. Soit $x \in E$. Comme B est une base de E, il existe des scalaires uniques $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$

Par linéarité, on a

$$u(x) = u\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k,$$

et de même,

$$v(x) = v\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k.$$

Par conséquent, $u(x) = v(x)$ pour tout $x \in E$, ce qui entraîne $u = v$.
(b) Existence. On construit une application $u : E \longrightarrow F$ de la manière suivante : pour $x \in E$, écrivons (par décomposition unique dans la base B)

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k,$$

et posons

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k.$$

Il faut vérifier que u est bien définie et linéaire, et qu'elle satisfait (2.1).
(i) **Bien-définie.** La décomposition de x dans la base B est unique, donc les scalaires λ_k sont uniques ; l'expression

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k,$$

ne dépend pas d'un choix et $u(x)$ est bien définie.
(ii) **Linéarité.** Soient

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in E, x' = \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k e_k \in E,$$

et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors

$$\alpha x + \beta x' = \sum_{k=1}^{n} (\alpha\lambda_k + \beta\lambda'_k) e_k,$$

d'où

$$u(\alpha x + \beta x') = \sum_{k=1}^{n} (\alpha\lambda_k + \beta\lambda'_k) y_k = \alpha \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k\right) + \beta \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda'_k y_k\right) = \alpha \cdot u(x) + \beta \cdot u(x').$$

Ainsi, u est bien linéaire.
(iii) **Valeurs sur la base.** Un vecteur de la base, disons e_i, peut lui aussi s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. En effet

$$e_i = 0_{\mathbb{K}} \cdot e_1 + 0_{\mathbb{K}} \cdot e_2 + \cdots + 1_{\mathbb{K}} \cdot e_i + \cdots + 0_{\mathbb{K}} \cdot e_n.$$

Cela signifie que les coefficients λ_k sont tous nuls sauf le $i^{\text{ème}}$, qui vaut $1_{\mathbb{K}}$. En utilisant le symbole de Kronecker δ_{ki} (qui vaut $1_{\mathbb{K}}$ si $k = i$ et $0_{\mathbb{K}}$ sinon), on écrit

$$e_i = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ki} e_k.$$

Par définition de u, pour chaque i,

$$u(e_i) = u\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{ki} e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ki} y_k.$$

Puisque tous les δ_{ki} sont nuls sauf pour $k = i$, la somme garde seulement le terme y_i, ainsi

$$u(e_i) = y_i.$$

Donc u existe et satisfait les conditions demandées.
2. **Formule explicite.** Par construction même de u, si

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in E,$$

alors

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k.$$

Cela achève la preuve de l'existence, de l'unicité et de la formule explicite. $\square$

Remarque 2.3.1 ***(Conséquences importantes).*** *Ce résultat montre que la connaissance de l'image d'une base suffit à déterminer complètement une application linéaire. Autrement dit, une application linéaire est entièrement caractérisée par les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ. Cette caractérisation a deux conséquences essentielles :*
(a) elle offre une définition équivalente, souvent plus pratique, des applications linéaires ;
(b) elle constitue un outil de construction simple : il suffit de fixer une base de l'espace de départ et de choisir arbitrairement une famille de vecteurs dans l'espace d'arrivée pour obtenir, de manière unique, une application linéaire associée.
Ce résultat met ainsi en évidence le rôle fondamental des bases dans l'étude et la construction des applications linéaires.

Exemple 2.3.1
1. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^2$, avec la base canonique $B = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$. On définit

$$f(e_1) = (2, 1), f(e_2) = (0, -1).$$

Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = f(xe_1 + ye_2) = xf(e_1) + yf(e_2) = (2x,\ x - y).$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = (2x,\ x - y). \end{array}$$

Donc f est complètement déterminée par ses valeurs sur e_1 et e_2.
2. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré $\leqslant 2$ avec la base canonique $B = \{1, X, X^2\}$, et $F = \mathbb{R}_2[X]$. On définit

$$f(1) = 0, f(X) = 1, f(X^2) = 2X.$$

Alors pour tout $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$f(P) = f(a + bX + cX^2) = af(1) + bf(X) + cf(X^2) = b + 2cX.$$

On obtient

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P = a + bX + cX^2 & \longmapsto & f(P) = b + 2cX. \end{array}$$

3. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}$, et $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique. On définit

$$f(e_1) = 1, f(e_2) = 0, f(e_3) = -1.$$

Alors pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$f(x, y, z) = x \cdot f(e_1) + y \cdot f(e_2) + z \cdot f(e_3) = x - z.$$

C'est une forme linéaire déterminée uniquement par ses valeurs sur la base. Alors

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z) = x - z. \end{array}$$

2.4 Opérations sur les applications linéaires

Une fois la notion d'application linéaire introduite, il est naturel de s'intéresser aux opérations que l'on peut définir sur l'ensemble de toutes les applications linéaires entre deux espaces vectoriels. Cet ensemble possède une structure particulièrement riche : d'une part, il forme un espace vectoriel, puisque l'on peut additionner deux applications linéaires et les multiplier par des scalaires ; d'autre part, il est stable par composition, ce qui confère une structure encore plus puissante dans le cas des endomorphismes. Ainsi, l'étude de ces opérations permet non seulement de manipuler les applications linéaires comme des objets algébriques, mais aussi de préparer le terrain pour des notions fondamentales en algèbre linéaire telles que la représentation matricielle, la diagonalisation et les endomorphismes.

2.4.1 Somme et multiplication par un scalaire

Définition 2.4.1 ***(Proposition)*** *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$.*
1. ***Somme d'applications linéaires.*** *Si $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, on définit leur somme $f + g$ par*

$$\forall x \in E : (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

2. ***Multiplication par un scalaire.*** *Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit l'application $\lambda \cdot f$ par*

$$\forall x \in E : (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

Alors $f + g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, $\lambda \cdot f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, c'est-à-dire que la somme et la multiplication par un scalaire d'applications linéaires sont encore des applications linéaires. En particulier, toute combinaison linéaire de deux applications linéaires définies sur les mêmes espaces vectoriels est une application linéaire

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) : \lambda \cdot f + \mu \cdot g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F).$$

Preuve.
1. Linéarité de la somme $f + g$. Soient $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $x, y \in E$.
(a) Pour l'additivité, on a

$$(f + g)(x + y) = f(x + y) + g(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) \text{ (par linéarité de } f \text{ et } g)$$

$$= (f(x) + g(x)) + (f(y) + g(y)) = (f + g)(x) + (f + g)(y).$$

(b) Pour l'homogénéité. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$(f + g)(\lambda \cdot x) = f(\lambda \cdot x) + g(\lambda \cdot x),$$

$$= \lambda f(x) + \lambda g(x), \text{ (par linéarité de } f \text{ et } g)$$

$$= \lambda \cdot (f(x) + g(x)) = \lambda \cdot (f + g)(x).$$

Ainsi, $f + g$ est linéaire.
2. Linéarité du multiple scalaire $\lambda \cdot f$. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
(a) Pour l'additivité, on a

$$(\lambda \cdot f)(x + y) = \lambda \cdot f(x + y) = \lambda \cdot (f(x) + f(y)) \text{ (par linéarité de } f)$$

$$= \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot f(y) = (\lambda \cdot f)(x) + (\lambda \cdot f)(y).$$

(b) Pour l'homogénéité, si $\alpha \in \mathbb{K}$, alors

$$(\lambda \cdot f)(\alpha x) = \lambda \cdot f(\alpha x) = \lambda \cdot (\alpha \cdot f(x)) \text{ (par linéarité de } f)$$

$$= \alpha \cdot (\lambda \cdot f(x)) = \alpha \cdot (\lambda \cdot f)(x).$$

Ainsi, $\lambda \cdot f$ est linéaire.
3. Combinaison linéaire. Soient $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Comme (λf) et (μg) sont linéaires, et que la somme de deux applications linéaires est linéaire, on a

$$\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F).$$

Vérification directe, pour tous $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda f + \mu g)(\alpha x + \beta y) = \lambda f(\alpha x + \beta y) + \mu g(\alpha x + \beta y),$$

$$= \lambda(\alpha f(x) + \beta f(y)) + \mu(\alpha g(x) + \beta g(y)),$$

$$= \alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) + \beta(\lambda f(y) + \mu g(y)),$$

$$= \alpha(\lambda f + \mu g)(x) + \beta(\lambda f + \mu g)(y).$$

Donc $(\lambda f + \mu g)$ est bien linéaire. □

Corollaire 2.4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$. L'ensemble $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), +, \cdot)$ des applications linéaires de E vers F, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire définies pour tout $x \in E$ par*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

et

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x),$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve. Nous vérifions les axiomes d'un espace vectoriel (les égalités sont vérifiées en évaluant en un vecteur arbitraire $x \in E$ et en utilisant les axiomes de l'espace F).
1. **Fermeture par addition et multiplication scalaire.** D'après la définition 2.4.1, on a $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est stable par addition et stable par multiplication par un scalaire.
2. **Commutativité de l'addition.** Soient $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Pour tout $x \in E$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x).$$

Donc
$$f + g = g + f.$$
3. **Associativité de l'addition**. Soient $f, g, h \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Pour tout $x \in E$,
$$[(f + g) + h](x) = (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g + h)(x) = [f + (g + h)](x).$$
Donc
$$(f + g) + h = f + (g + h).$$
4. **Élément neutre pour l'addition.** L'application nulle $0 : E \longrightarrow F$ définie par $0(x) = 0_F$ pour tout $x \in E$ est linéaire et vérifie
$$(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0_F = f(x).$$
Donc $f + 0 = f$ pour tout $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Ainsi 0 est l'élément neutre pour l'addition.
5. **Tout élément a un opposé.** Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Définissons l'application
$$-f : E \longrightarrow F,$$
par pour tout $x \in E$,
$$(-f)(x) = -f(x).$$
Alors $-f$ est linéaire et
$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0_F = 0(x).$$
Donc
$$f + (-f) = 0.$$
6. **Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition des vecteurs.** Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Pour tout $x \in E$,
$$(\lambda(f + g))(x) = \lambda(f + g)(x) = \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = (\lambda f + \lambda g)(x).$$
Donc
$$\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g.$$
7. **Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition des scalaires.** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Pour tout $x \in E$,
$$((\lambda + \mu)f)(x) = (\lambda + \mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda f)(x) + (\mu f)(x) = ((\lambda + \mu)f)(x) = (\lambda f + \mu f)(x).$$
Donc
$$(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f.$$
8. **Compatibilité de la multiplication avec la multiplication dans $\mathbb{K}$.** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Pour tout $x \in E$,
$$((\lambda\mu)f)(x) = (\lambda\mu)f(x) = \lambda(\mu f(x)) = \lambda((\mu f)(x)) = (\lambda(\mu f))(x).$$
Donc
$$(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f).$$
9. **Elément neutre pour la multiplication par un scalaire.** Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Pour tout $x \in E$,
$$(1_{\mathbb{K}} \cdot f)(x) = 1_{\mathbb{K}} \cdot f(x) = f(x).$$
Donc
$$1_{\mathbb{K}} \cdot f = f.$$
Tous les axiomes étant vérifiés, $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

Proposition 2.4.1 *Si E et F sont de dimensions finies, avec* $\dim(E) = n$ *et* $\dim(F) = m$, *alors* $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ *est de dimension finie et*
$$\dim(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)) = m.n.$$

2.4.2 Composition des applications linéaires

La composition des applications linéaires est un moyen de combiner deux applications linéaires successives pour former une nouvelle application, tout en conservant les propriétés de linéarité. La composition consiste à appliquer ces deux applications l'une après l'autre, on commence par transformer un vecteur du premier espace à l'aide de la première application, puis on transforme le résultat obtenu à l'aide de la seconde application pour arriver dans le troisième espace.

Définition 2.4.2 ***(Composition des applications linéaires)***
Soient E, F, et G trois espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. La composition de f et g, notée $g \circ f$, est l'application définie par

$$\forall x \in E : (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Ainsi, on applique d'abord f au vecteur x, puis on applique g au résultat obtenu. Si

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G,$$

alors

$$g \circ f \quad E \longrightarrow G.$$

Exemple 2.4.1
1. (a) Soient les applications linéaires suivantes

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = (x + y, 2x, y - x), \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & g(x, y, z) = (x - y, y + z). \end{array}$$

Calculons la composition $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f)(x, y) & = & g(f(x, y)) \\ & = & g(x + y, 2x, y - x) \\ & = & ((x + y) - 2x, 2x + (y - x)) \\ & = & (-x + y,\ x + y). \end{array}$$

Ainsi,

$$(g \circ f)(x, y) = (-x + y,\ x + y).$$

(b) Calculons la composition $f \circ g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. On a

$$(f \circ g)(x, y, z) = f(g(x, y, z)) = f(x - y,\ y + z) = ((x - y) + (y + z),\ 2(x - y),\ (y + z) - (x - y)).$$

En simplifiant, on obtient

$$(f \circ g)(x, y, z) = (x + z,\ 2x - 2y,\ -x + 2y + z).$$

Ces deux compositions sont donc différentes $(g \circ f \neq f \circ g)$, ce qui illustre le fait général que la composition d'applications linéaires n'est pas commutative.

Proposition 2.4.2 *La composée d'applications linéaires compatibles est une application linéaire. Autrement dit*

$$\forall f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G) : g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, G)$$

Preuve. Pour prouver que la composition de deux applications linéaires est une application linéaire, nous devons démontrer qu'elle respecte les deux conditions de linéarité : l'additivité et l'homogénéité.
1. Additivité. Soient $x, y \in E$

$$\begin{array}{rcl}(g \circ f)(x+y) & = & g(f(x+y)) \\ & = & g(f(x)+f(y)) \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ & = & g(f(x))+g(f(y)) \quad (\text{car } g \text{ est linéaire}) \\ & = & (g \circ f)(x)+(g \circ f)(y).\end{array}$$

2. Homogénéité. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$,

$$\begin{array}{rcl}(g \circ f)(\lambda x) & = & g(f(\lambda x)) \\ & = & g(\lambda f(x)) \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ & = & \lambda g(f(x)) \quad (\text{car } g \text{ est linéaire}) \\ & = & \lambda(g \circ f)(x).\end{array}$$

Ainsi $g \circ f$ est bien linéaire. □

Proposition 2.4.3 ***(Compatibilité de la composition avec l'addition et la multiplication par un scalaire)*** *Soient E, F, et G trois espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$.*
(a) Distributivité à droite.

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G) : g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2.$$

(b) Distributivité à gauche.

$$\forall f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), \forall g_1, g_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G) : (g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f.$$

(c) Compatibilité avec la multiplication par un scalaire.

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G) : \alpha \cdot (g \circ f) = (\alpha \cdot g) \circ f = g \circ (\alpha \cdot f).$$

Preuve.
1. Distributivité à droite. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{array}{rcl}(g \circ (f_1+f_2))(x) & = & g((f_1+f_2)(x)) \\ & = & g(f_1(x)+f_2(x)) \quad (\text{définition de la somme}) \\ & = & g(f_1(x))+g(f_2(x)) \quad (\text{linéarité de } g) \\ & = & (g \circ f_1)(x)+(g \circ f_2)(x) \\ & = & (g \circ f_1+g \circ f_2)(x).\end{array}$$

Comme l'égalité est vraie pour tout $x \in E$, on en déduit

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2.$$

2. Distributivité à gauche. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{array}{rcl}((g_1+g_2) \circ f)(x) & = & (g_1+g_2)(f(x)) \\ & = & g_1(f(x))+g_2(f(x)) \quad (\text{définition de la somme}) \\ & = & (g_1 \circ f)(x)+(g_2 \circ f)(x) \\ & = & (g_1 \circ f+g_2 \circ f)(x).\end{array}$$

Donc

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f.$$

3. Compatibilité avec la multiplication par un scalaire. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$. On a :

$$\begin{array}{rcl}(\alpha(g \circ f))(x) & = & \alpha\,(g \circ f)(x) \\ & = & \alpha\, g(f(x)) \\ & = & (\alpha g)(f(x)) \\ & = & ((\alpha g) \circ f)(x),\end{array}$$

et également

$$\begin{array}{rcl}(\alpha(g \circ f))(x) & = & \alpha\, g(f(x)) \\ & = & g(\alpha f(x)) \\ & = & (g \circ (\alpha f))(x).\end{array}$$

Ainsi, on obtient

$$\alpha(g \circ f) = (\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f).$$

Toutes les propriétés sont donc démontrées. $\square$

Une conséquence importante de la composition des applications linéaires est la notion de nilpotence. Une application linéaire (ou un endomorphisme) est dite nilpotente lorsqu'une itération suffisante de sa composition avec elle-même conduit à l'application nulle.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f : E \longrightarrow F$ un endomorphisme de E. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on définit la puissance f^k par

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

Définition 2.4.3
1. ***Application linéaire nilpotente****. Un endomorphisme f de E est dit nilpotent si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$f^k = 0,$$

c'est-à-dire s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k(x) = 0_E$ pour tout $x \in E$. Autrement dit un endomorphisme est dit nilpotent si sa composition avec elle-même, répétée un certain nombre de fois, donne l'application nulle.
2. ***Indice de nilpotence.*** *Si f est nilpotent, alors l'ensemble*

$$\left\{k \in \mathbb{N}^* : f^k = 0\right\},$$

est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, donc admet un plus petit élément, noté $v(f)$, et appelé indice de nilpotence de f. On a
(a) Par définition de $v(f)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$k < v(f) \Longrightarrow f^k \neq 0.$$

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$k \geqslant v(f) \Longrightarrow f^k = 0,$$

car

$$f^k = f^{k-v(f)} \circ f^{v(f)} = f^{k-v(f)} \circ 0 = 0.$$

Remarque 2.4.1 *Si l'espace E est de dimension finie, alors l'indice de nilpotence d'un endomorphisme de E est nécessairement inférieur ou égal à $\dim(E)$.*

Exemple 2.4.2 *On considère l'espace vectoriel*

$$\mathbb{R}_3[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\},$$

formé des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$*. C'est un espace vectoriel de dimension* 4*. On définit l'application linéaire*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & f(P) = P', \end{array}$$

où P' *désigne la dérivée usuelle de* P*. Alors* f *est nilpotente et son indice de nilpotence vaut*

$$v(f) = 4.$$

En effet, pour tout $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$*, on a*

$$f(P) = P^{(1)} = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2,$$

$$f^2(P) = (f \circ f)(P) = f(f(P)) = f(P^{(1)}) = P^{(2)} = 2a_2 + 6a_3X$$
$$f^3(P) = (f \circ f \circ f)(P) = f\left(f^2(P)\right) = f(P^{(2)}) = P^{(3)} = 6a_3,$$
$$f^4(P) = (f \circ f \circ f \circ f)(P) = f\left(f^3(P)\right) = f(P^{(3)}) = P^{(4)} = 0.$$

Ainsi, f *est nilpotente d'indice* $v(f) = 4$*.*
2. On définit l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = (y, 0). \end{array}$$

Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, on obtient*

$$f^2(x, y) = (f \circ f)(x, y) = f(f(x, y)) = f(y, 0) = (0, 0).$$

On en déduit que

$$f^2 = 0.$$

Donc f *est une application linéaire nilpotente d'indice*

$$v(f) = 2.$$

3. On définit l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & g(x, y) = (-y, x). \end{array}$$

Calculons les puissances successives de g*. Tout d'abord, on a directement*

$$g(x, y) = (-y, x).$$

En composant g *avec lui-même,*

$$g^2(x, y) = g(g(x, y)) = g(-y, x) = (-x, -y) = -(x, y),$$

ce qui montre que

$$g^2 = -Id_{\mathbb{R}^2}.$$

On calcule ensuite

$$g^3(x, y) = g\left(g^2(x, y)\right) = g(-x, -y) = (y, -x) = -g(x, y).$$

d'où

$$g^3 = -g.$$

Par suite

$$g^4(x,y) = g\left(g^3(x,y)\right) = g(y,-x) = (x,y).$$

On retrouve donc

$$g^4 = Id_{\mathbb{R}^2}.$$

En composant g^4 *et* g *on obtient*

$$g^5 = g^4 \circ g = Id_{\mathbb{R}^2} \circ g = g.$$

Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$g^5(x,y) = g(x,y) = (-y,x).$$

Les puissances successives de g *sont données par*

$$g^1 = g, g^2 = -Id_{\mathbb{R}^2}, g^3 = -g, g^4 = Id_{\mathbb{R}^2}, g^5 = g.$$

La suite est donc périodique de période 4*. Autrement dit, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$g^n = \begin{cases} Id_{\mathbb{R}^2} & si\ n \equiv 0 \mod (4), \\ g & si\ n \equiv 1 \mod (4), \\ -Id_{\mathbb{R}^2} & si\ n \equiv 2 \mod (4), \\ -g & si\ n \equiv 3 \mod (4). \end{cases} \text{(Justification par récurrence).}$$

En particulier, aucune puissance de g *n'est l'application nulle, donc* g *n'est pas nilpotente.*

2.5 Isomorphisme d'espaces vectoriels et groupe linéaire

Quand on étudie les espaces vectoriels, on cherche souvent à comparer leur structure. Deux espaces peuvent paraître différents, mais s'ils ont la même dimension, ils possèdent en réalité la même « forme algébrique» on dit alors qu'ils sont isomorphes. L'isomorphisme est donc une manière d'identifier deux espaces vectoriels de même dimension et de les considérer comme équivalents.

Par ailleurs, si l'on regarde toutes les applications linéaires bijectives d'un espace vectoriel dans lui-même, on obtient un ensemble particulier qui est muni naturellement de la composition des applications. Cet ensemble forme ce qu'on appelle le groupe linéaire, qui rassemble toutes les applications linéaires inversibles de l'espace et joue un rôle central en algèbre et en géométrie.

Proposition 2.5.1 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels sur le corps* $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$*. Si* f *est un isomorphisme de* E *dans* F*, alors son inverse* $f^{-1} : F \longrightarrow E$ *est également un isomorphisme de* F *dans* E*.*

Preuve.
1. Existence de l'inverse. Comme f est un isomorphisme, elle est bijective (injective et surjective). Par définition d'une application bijective, il existe une application inverse $f^{-1} : F \longrightarrow E$ telle que

$$f^{-1} \circ f = Id_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = Id_F,$$

où Id_E et Id_F sont les applications identités sur E et F.
2. Linéarité de f^{-1}. Montrons que f^{-1} est linéaire. Soient $y_1, y_2 \in F$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Comme f est surjective, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{et} \quad f(x_2) = y_2.$$

Alors, par linéarité de f

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2).$$

En appliquant f^{-1} des deux côtés

$$f^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = f^{-1}(f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2.$$

Or $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$, donc

$$f^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 f^{-1}(y_1) + \lambda_2 f^{-1}(y_2),$$

ce qui prouve que f^{-1} est linéaire. Puisque f^{-1} est bijective et linéaire, c'est un isomorphisme de F dans E. $\square$

Définition 2.5.1 ***(Isomorphisme d'espaces vectoriels)*** *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$. On dit que E et F sont isomorphes s'il existe une application linéaire bijective*

$$f : E \longrightarrow F.$$

Une telle application f est appelée un isomorphisme de E sur F, et l'on note alors

$$E \approx F.$$

Exemple 2.5.1
1. Isomorphisme entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}_1[X]$. On considère les deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}_1[X] = \{a_0 + a_1 X : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}.$$

On définit l'application f par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = x + yX. \end{array}$$

(a) ***Vérification de la linéarité de f.*** *Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)X \\ &= (x_1 + y_1 X) + (x_2 + y_2 X) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2), \end{aligned}$$

et

$$f(\lambda \cdot (x, y)) = f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \lambda y X = \lambda \cdot f(x, y).$$

Ainsi, f est bien linéaire sur $\mathbb{R}$.
(b) ***Vérification de la bijectivité.***
(i) Injectivité : Si $f(x, y) = 0$, alors

$$x + yX = 0 = 0.1 + 0.X \implies x = 0, y = 0.$$

$$\implies \ker(f) = \{(0, 0)\}.$$

donc f est injective.
(ii) Surjectivité : Tout polynôme $a_0 + a_1X \in \mathbb{R}_1[X]$, on a

$$f(a_0, a_1) = a_0 + a_1X.$$

où $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$. Donc f est surjective.
L'application f est linéaire et bijective, donc c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}_1[X]$. En d'autres termes, les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}_1[X]$ sont isomorphes.
2. Isomorphisme entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. On considère les espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}, \mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\},$$

On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$f(x, y) = x + iy.$$

(a) ***Vérification de la linéarité de f.*** *Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

$$f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2).$$

et

$$f(\lambda \cdot (x, y)) = f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + i\lambda y = \lambda \cdot f(x, y).$$

Ainsi, f est linéaire.
(b) ***Vérification de la bijectivité.***
(i) Injectivité. Si $f(x, y) = 0$, alors

$$x + iy = 0 \implies x = 0 \wedge y = 0.$$
$$\implies \ker(f) = \{(0, 0)\}.$$

Donc f est injective.
(ii) Surjectivité. Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on a

$$f(a, b) = a + ib = z.$$

Donc f est surjective.
L'application f est linéaire et bijective. Ainsi, f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$.

Proposition 2.5.2
1. ***Caractérisation des isomorphismes par la dimension.*** *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$, de dimension finie. Alors*

$$E \text{ et } F \text{ sont isomorphes} \iff \dim(E) = \dim(F).$$

2. ***Isomorphisme avec*** *$\mathbb{K}^n$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, tout espace vectoriel E de dimension finie n sur $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$,*

$$E \approx \mathbb{K}^n.$$

Exemple 2.5.2
1. L'espace $\mathbb{R}^3$ et l'espace des polynômes de degré $\leqslant 2$, $\mathbb{R}_2[X]$, ont tous deux dimension 3. Donc ils sont isomorphes

$$\mathbb{R}^3 \approx \mathbb{R}_2[X].$$

2. L'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré $\leqslant 3$ $(\dim = 4)$ est isomorphe à $\mathbb{R}^4$,

$$\mathbb{R}_3[X] \approx \mathbb{R}^4.$$

Un isomorphisme explicite est

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 & \longmapsto & (a_0, a_1, a_2, a_3). \end{array}$$

Proposition 2.5.3 ***(Définition)***
Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. L'ensemble

$$\mathcal{GL}(E) = \{\, f : E \to E : f \ \textit{est linéaire et bijective}\},$$

muni de la composition $\circ$ est un groupe, appelé groupe linéaire de E. En général, $\mathcal{GL}(E)$ n'est pas commutatif (la composition d'applications ne commute pas en général).

Preuve. On vérifie les axiomes de groupe pour la loi $\circ$.
1. Stabilité pour loi interne. Si $f, g \in \mathcal{GL}(E)$, alors f et g sont linéaires et bijectives. La composée $g \circ f$ est linéaire (composition d'applications linéaires) et bijective (composition de bijections). Ainsi $g \circ f \in \mathcal{GL}(E)$.
2. Élément neutre. L'identité

$$Id_E : E \longrightarrow E,$$

est linéaire et bijective, donc $Id_E \in \mathcal{GL}(E)$; de plus, pour tout $f \in \mathcal{GL}(E)$, on a

$$Id_E \circ f = f = f \circ Id_E.$$

3. Associativité. Pour toutes applications

$$f, g, h : E \longrightarrow E,$$

on a

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

En particulier, la composition est associative sur $\mathcal{GL}(E)$.
4. Existence d'inverses. Si $f \in \mathcal{GL}(E)$, alors f est bijective ; son inverse

$$f^{-1} : E \longrightarrow E$$

est linéaire (inverse d'un isomorphisme linéaire) et bijective. Ainsi

$$f^{-1} \in \mathcal{GL}(E),$$

et

$$f^{-1} \circ f = Id_E = f \circ f^{-1}.$$

Les quatre axiomes étant satisfaits, $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ est un groupe. □

2.6 Noyau, image d'une application linéaire

Dans l'étude des applications linéaires, deux notions fondamentales jouent un rôle central pour caractériser le fonctionnement d'une application : le noyau et l'image. Le noyau est l'ensemble des vecteurs de l'espace de départ qui sont envoyés sur le vecteur nul. Il représente donc tous les vecteurs annulés par l'application. L'image est l'ensemble des vecteurs de l'espace d'arrivée qui peuvent être obtenus à partir de vecteurs de l'espace de départ. Elle correspond à tous les résultats possibles de l'application.

Définition 2.6.1 *Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f, \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ une application linéaire. Alors*
1. ***Noyau.*** *On appelle noyau de f, noté $\ker(f)$, le sous-ensemble de E défini par*

$$\ker(f) = \{x \in E : f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}) \subset E.$$

2. ***Image.*** *On appelle image de f, et l'on note $Im(f)$ ou encore $f(E)$, le sous-ensemble de F défini par*

$$Im(f) = f(E) = \{y \in F, \exists x \in E : f(x) = y\} = \{f(x) \in F : x \in E\} \subset F.$$

Ainsi, l'image de f regroupe l'ensemble des vecteurs de F qui peuvent être atteints par l'application linéaire

Remarque 2.6.1
1. ***Interprétations équivalentes du noyau d'une application linéaire.*** *Le noyau peut être vu de plusieurs manières équivalentes :*
(a) Ensemble des vecteurs annulés par f. Le noyau est l'ensemble des vecteurs dont l'image par f est le vecteur nul.
(b) Ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0_F$. Le noyau est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène associée à f.
(c) Ensemble des antécédents du vecteur nul. Le noyau est la préimage du singleton $\{0_F\}$ par f, notée $f^{-1}(\{0_F\})$.
2. ***Interprétations équivalentes de l'image d'une application linéaire****. De la même façon, l'image peut être interprétée de différentes manières équivalentes :*
(a) Ensemble des images des vecteurs de E. L'image est l'ensemble de tous les vecteurs $y \in F$ tels qu'il existe $x \in E$ avec $f(x) = y$.
(b) Ensemble des valeurs prises par f. L'image regroupe toutes les valeurs que prend $f(x)$ quand x parcourt E.
(c) Image directe de E par f. L'image correspond à l'image directe de l'espace E par f, notée $f(E)$.
3. ***Noyau non vide.*** *La linéarité de f garantit que son noyau n'est jamais vide, car il contient toujours au moins le vecteur nul 0_E, c'est-à-dire*

$$0_E \in \ker(f).$$

Exemple 2.6.1 *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant 2$. On définit l'application linéaire*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & f(P) = P', \end{array}$$

c'est-à-dire que f associe à chaque polynôme son polynôme dérivé.
1. Calcul du noyau : *Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in E$. Alors*

$$f(P) = P' = a_1 + 2a_2X.$$

Pour que P appartienne au noyau de f, il faut que $f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Ceci équivaut à

$$a_1 = 0 \quad et \quad a_2 = 0.$$

Ainsi,

$$\ker(f) = \{P = a_0 : a_0 \in \mathbb{R}\} = Vect(\{P_1 = 1\}),$$

c'est-à-dire l'ensemble des polynômes constants.
2. Calcul de l'image : *L'image est constituée de tous les polynômes qui peuvent s'écrire comme $f(P)$ pour un certain $P \in E$. Or, on a vu que*

$$f(P) = a_1 + 2a_2X,$$

qui est un polynôme de degré $\leqslant 1$. Ainsi,

$$Im(f) = \mathbb{R}_1[X],$$

c'est-à-dire l'ensemble des polynômes réels de degré $\leqslant 1$. Dans cet exemple, on a

$$\ker(f) = \mathbb{R}, Im(f) = \mathbb{R}_1[X].$$

Proposition 2.6.1 ***(Image directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application lineaire)*** *Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f, \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ une application linéaire .*
1. Pour tout sous-espace vectoriel S_1 de E, l'image directe de S_1 par f, notée $f(S_1)$ est un sous-espace vectoriel de F. En particulier, l'image $Im(f) = f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Pour tout sous-espace vectoriel S_2 de F, l'image réciproque $f^{-1}(S_2)$ de S_2 par f est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, le noyau $\ker(f)$ de f est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve.
1. Image directe. Soit S_1 un sous-espace vectoriel de E. Rappelons que

$$f(S_1) = \{\, f(x) : x \in S_1\}.$$

(i) Comme S_1 est un sous-espace, $0_E \in S_1$. Par linéarité de f on a

$$f(0_E) = 0_F,$$

donc $0_F \in f(S_1)$ et $f(S_1)$ est non vide.
(ii) Soient $y_1, y_2 \in f(S_1)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Par définition il existe $x_1, x_2 \in S_1$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Par linéarité de f on obtient

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

Comme S_1 est stable par combinaison linéaire, $\alpha x_1 + \beta x_2 \in S_1$. Par conséquent

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \in f(S_1).$$

Ainsi $f(S_1)$ est stable par combinaisons linéaires et contiendra le vecteur nul ; c'est donc un sous-espace vectoriel de F.
En prenant

$$S_1 = E,$$

on déduit que $Im(f) = f(E)$ est un sous-espace de F (puisque E est un sous-espace vectoriel de lui-même).
2. Image réciproque. Soit S_2 un sous-espace de F. On définit

$$f^{-1}(S_2) = \{x \in E : f(x) \in S_2\}.$$

(i) Puisque $0_F \in S_2$ et $f(0_E) = 0_F$, on a

$$0_E \in f^{-1}(S_2),$$

l'ensemble est non vide.
(ii) Soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(S_2)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors $f(x_1), f(x_2) \in S_2$, par linéarité

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Or S_2 est un sous-espace, donc

$$\alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \in S_2.$$

Il s'ensuit que

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \in f^{-1}(S_2).$$

Ainsi $f^{-1}(S_2)$ est stable par combinaisons linéaires et contient le vecteur nul, donc c'est un sous-espace de E.
En prenant

$$S_2 = \{0_F\},$$

on obtient

$$f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E : f(x) = 0_F\} = \ker(f),$$

donc $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. $\square$

Proposition 2.6.2 ***(Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire)***
Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ une application linéaire .
1. L'application linéaire f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
2. L'application linéaire f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.

Preuve.
1) (a) Supposons que f est injective. Comme $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, alors $0_E \in \ker(f)$, donc

$$\{0_E\} \subset \ker(f).$$

D'autre part, soit $x \in \ker(f)$, alors

$$f(x) = 0_F = f(0_E).$$

Comme f est injective, on en déduit que $x = 0_E$. Ainsi,

$$\ker(f) \subset \{0_E\}.$$

Par double inclusion, on conclut que

$$\ker(f) = \{0_E\}.$$

(b) Réciproquement, supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$ et soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Par linéarité de f, on en déduit que

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) = 0_F.$$

Donc, $x_1 - x_2 \in \ker(f)$. Comme $\ker(f) = \{0_E\}$, on a $x_1 - x_2 = 0_E$, c'est-à-dire que $x_1 = x_2$. Ainsi, f est injective.
2. On a

$$f \text{ est surjective } \iff \forall y \in F, \exists x \in E : f(x) = y \iff f(E) = F \iff Im(f) = F.$$

□

Exemple 2.6.2
1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y).$$

Le noyau de f est

$$\ker(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (0, 0)\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + y, x - y) = (0, 0)\right\} = \{(0, 0)\}.$$

Ainsi, f est injective.
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y, y - z).$$

L'image de f est

$$Im(f) = \{(x + y, y - z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

On vérifie que

$$Im(f) = \mathbb{R}^2,$$

car pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on peut trouver $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x, y, z) = (a, b).$$

Ainsi, f est surjective.

Proposition 2.6.3 ***(Applications linéaires et familles de vecteurs)***
Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ une application linéaire. Soit L une famille de vecteurs de E.
(1) ***Conservation de la dépendance linéaire :*** *Si L est linéairement dépendante dans E, alors $f(L)$ est linéairement dépendante dans F.*
(2) ***Conservation de l'indépendance linéaire par réciproque :*** *Si $f(L)$ est linéairement indépendante dans F, alors L est linéairement indépendante dans E.*
(3) ***Conservation de l'ensemble générateur :*** *Si L engendre E, alors $f(L)$ engendre $Im(f)$.*
(4) ***Injection et l'indépendance linéaire :*** *Si L est linéairement indépendante dans E et f est injective, alors $f(L)$ est linéairement indépendante dans F.*
(5) ***Surjection et engendrement :*** *Si L engendre E, et f est surjective, alors $f(L)$ engendre F.*
(6) ***Caractérisation de la bijectivité :*** *Si L est une base de E, alors*

$$f \text{ est bijective (isomorphisme)} \iff f(L) \text{ est une base de } F.$$

Preuve. Nous traitons les points un par un. Considérons une famille L de E et supposons que cette famille est finie, alors

$$L = \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

1. **Conservation de la dépendance linéaire.** Supposons que L est linéairement dépendante dans E, il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0_E.$$

En appliquant f des deux côtés, et en utilisant la linéarité de f, on obtient

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n) = f(0_E) = 0_F.$$

Comme au moins un λ_i est non nul, cela montre que $f(L)$ est aussi est linéairement dépendante F.
2. **Conservation de l'indépendance par réciproque.** Supposons maintenant que $f(L)$ est linéairement indépendante dans F. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, tels que

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0_E.$$

En appliquant f des deux côtés, et en utilisant la linéarité de f, on obtient

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n) = f(0_E) = 0_F.$$

Comme $f(L)$ est linéairement indépendante, alors tous les scalaires λ_i sont nuls. Cela signifie que L est linéairement indépendante dans E.
3. **Conservation de l'ensemble générateur.** Supposons que L engendre E et soit $y \in Im(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme L engendre E, x s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs x_i,

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

En appliquant f des deux côtés, et en utilisant la linéarité de f, on obtient

$$y = f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n).$$

Cela signifie que $y \in Im(f)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$. Ainsi

$$Im(f) \subset Vect(f(L)).$$

L'inclusion inverse est évidente, donc $Im(f) = Vect(f(\mathcal{L}))$, c.-à-d. $f(L)$ engendre $Im(f)$.
4. **Indépendance et injectivité.** Supposons que L est linéairement indépendante dans E et que f est injective. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, tels que

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n) = 0_F.$$

En utilisant la linéarité de f, on obtient

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) = f(0_E).$$

Comme f est injective, donc

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0_E.$$

Comme L est linéairement indépendante, alors tous les scalaires λ_i sont nuls. Cela signifie que $f(L)$ est linéairement indépendante dans F.
5. **Surjectivité et engendrement.** Supposons que L engendre E et que f est surjective. Comme f est surjective,

$$Im(f) = F.$$

D'après le point 3, $f(L)$ engendre $Im(f) = F$. Ainsi, $f(L)$ engendre F.
6. **Caractérisation de la bijectivité.**
(i) Supposons que f est bijective. Comme L est une base de E , $f(L)$ est linéairement indépendante (d'après le point 4) et engendre F (d'après le point 5). Ainsi, $f(L)$ est une base de F.
(ii) Supposons que $f(L)$ est une base de F. Alors $f(L)$ est linéairement indépendante et engendre F. Soient $x, y \in E$, alors

$$\begin{cases} \exists! \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} : x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n \\ \exists! \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K} : y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n. \end{cases}$$

On obtient

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) = f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n).$$

La linéarité de f implique que

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)$$

$$\Longrightarrow (\lambda_1 - \alpha_1) f(x_1) + (\lambda_2 - \alpha_2) f(x_2) + ... + (\lambda_n - \alpha_n) f(x_n) = 0_F.$$

Comme $f(L)$ est linéairement indépendante, on a

$$\begin{cases} \lambda_1 - \alpha_1 = 0_{\mathbb{K}} \\ \lambda_2 - \alpha_2 = 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ \lambda_n - \alpha_n = 0_{\mathbb{K}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \alpha_1 \\ \lambda_2 = \alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda_n = \alpha_n. \end{cases}$$

On obtient $x = y$. Ce qui montre que f est injective. De plus, comme $f(L)$ engendre F, alors tout élément de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des $f(x_i)$, ce qui montre que f est surjective. Par conséquent, f est bijective. □

2.7 Rang d'une application linéaire et théorème du rang

Le théorème du rang est un résultat fondamental qui établit une relation clé entre la dimension de l'espace de départ d'une application linéaire et les dimensions de son noyau et de son image. Cette relation permet de déduire des propriétés importantes concernant l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications linéaires.

Définition 2.7.1 ***(Rang d'une application linéaire)***
Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ une application linéaire.
1. On appelle rang de f, et on note $rg(f)$ l'entier naturel défini par

$$rg(f) = \dim_{\mathbb{K}}(Im(f)).$$

En d'autres termes, le rang de f est la dimension de l'image de f.
2. Si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$ et $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de E alors le rang de f est le rang de la famille de vecteurs $\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\} = f(B)$. On a donc

$$rg(f) = rg(f(B)) = \dim_{\mathbb{K}}(Vect(f(B)) = \dim_{\mathbb{K}}(Im(f)).$$

Autrement dit, le rang de f est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de la famille $f(B)$. Cela revient à la dimension de l'espace vectoriel engendré par $f(B)$, c'est-à-dire $\dim_{\mathbb{K}}(Im(f))$.
3. De plus, on a

$$rg(f) \leqslant \min\left\{\dim_{\mathbb{K}}(E), \dim_{\mathbb{K}}(F)\right\}.$$

Remarque 2.7.1
*1. $Im(f)$ est bien de dimension finie, puisque $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de F et que F est de dimension finie, ou bien, autrement, parce que E est de dimension finie. Plus généralement, soient E, F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels (non nécessairement de dimension finie), $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que f est **de rang fini** si et seulement si $Im(f)$ est de dimension finie, et, dans ce cas, on appelle **rang** de f l'entier naturel, noté $rg(f)$, défini par*

$$rg(f) = \dim_{\mathbb{K}}(Im(f)).$$

2. Si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$ et $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de E alors le rang de f est le rang de la famille de vecteurs

$$\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\} = f(B).$$

On obtient donc

$$rg(f) = rg(f(B)) = \dim_{\mathbb{K}}(Vect(f(B)).$$

Autrement dit, le rang de f est égal au nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de la famille $f(B)$. C'est donc la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille.
3. Pour toute $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$,

$$rg(f) \leqslant \min\left\{\dim_{\mathbb{K}}(E), \dim_{\mathbb{K}}(F)\right\}.$$

Exemple 2.7.1 *Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par*

$$f(x, y) = (x + y, 2x - z).$$

On prend la base canonique $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.On calcule les images des vecteurs de B, on obtient

$$\begin{cases} f(e_1) = (1, 0) \\ f(e_2) = (0, -1) \\ f(e_3) = (1, 2). \end{cases}$$

On cherche le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants dans $f(B)$. La famille $f(B)$ est de rang 2, car les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, -1)$ sont linéairement indépendants (ils ne sont pas colinéaires), et $(1, 2)$ est une combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

Après avoir introduit la notion de rang d'une application linéaire, nous pouvons établir le théorème du rang. Aussi appelé formule du rang, ce théorème met en relation le noyau et l'image d'une application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie. Plus précisément, si f est une application linéaire de E vers F, alors la dimension de E est égale à la somme de la dimension du noyau de f et de la dimension de son image.

Théorème 2.7.1 ***(Théorème du rang ou Formule du rang)***
Soient $(E, +, \cdot)$ *et* $(F, +, \cdot)$ *deux* $\mathbb{K}-$*espaces vectoriels et soit* $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ *une application linéaire. Si* E *est de dimension finie (mais* F *n'est pas nécessairement de dimension finie), alors*

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}} \ker(f) + \dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) = \dim_{\mathbb{K}} \ker(f)) + rg(f). \tag{2.2}$$

Ce théorème établit que la dimension de l'espace de départ E *se décompose en la somme de la dimension du noyau et du rang de* f*.*

Remarque 2.7.2
1. ***Rôle de l'hypothèse de finitude de*** $\dim(E)$***.*** *Elle garantit que* $\ker(f)$ *et* $Im(f)$ *sont également de dimension finie, ce qui rend le théorème du rang bien défini :*
(a) $\ker(f)$ *est un sous-espace de* E*. Comme tout sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie, il est nécessairement de dimension finie.*
(b) $Im(f)$ *est engendré par les images des vecteurs d'une base de* E*. Or, une base de* E *est finie, donc* $Im(f)$ *est aussi de dimension finie.*
2. ***Cas où*** F ***est de dimension infinie.*** *Le théorème du rang reste valable. Même si* F *est de dimension infinie,* $Im(f)$ *reste fini-dimensionnel dès lors que* E *est de dimension finie. En effet,* $\dim(Im(f)) \leqslant \dim(E)$*. L'image est donc toujours contrôlée par la dimension de* E*, indépendamment de celle de* F*.*

Exemple 2.7.2 *Soit l'application linéaire*

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \longmapsto & f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4, -x_1 - 2x_3 - x_4). \end{array}$$

Calculons le rang de f *et la dimension du noyau de* f*.*
Première méthode. *On calcule d'abord le noyau, on a*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(f) \Longleftrightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

On résout ce système et on trouve qu'il est équivalent à

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

On choisit x_3 *et* x_4 *comme paramètres et on trouve*

$$\ker(f) = \{(-2x_3 - x_4, -x_3 - x_4, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x_3(-2, -1, 1, 0) + x_4(-1, -1, 0, 1) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$= Vect(\{(-2, -1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\}).$$

Les deux vecteurs définissant le noyau sont linéairement indépendants, donc

$$\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 2.$$

On applique maintenant le théorème du rang pour en déduire, sans calculs supplémentaires, la dimension de l'image

$$\dim_{\mathbb{R}}(Imf) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) - \dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 4 - 2 = 2.$$

Donc le rang de f est 2.

$$rg(f) = 2.$$

*2. **Deuxième méthode**. On calcule d'abord l'image. Calculons les images des vecteurs de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$.*

$$\begin{aligned} v_1 &= f(e_1) = f(1,0,0,0) = (1,2,-1), \\ v_2 &= f(e_2) = f(0,1,0,0) = (-1,2,0), \\ v_3 &= f(e_3) = f(0,0,1,0) = (1,6,-2), \\ v_4 &= f(e_4) = f(0,0,0,1) = (0,4,-1). \end{aligned}$$

L'image de f est l'espace engendré par ces quatre vecteurs

$$Im\,(f) = Vect(\{v_1, v_2, v_3, v_4\}).$$

Nous cherchons la plus grande sous-famille libre parmi ces vecteurs. Observons les relations suivantes

$$v_3 = 2v_1 + v_2, v_4 = v_1 + v_2.$$

Ces égalités se vérifient en comparant coordonnées,

$$2v_1 + v_2 = 2(1,2,-1) + (-1,2,0) = (2-1, 4+2, -2+0) = (1,6,-2) = v_3,$$

et

$$v_1 + v_2 = (1,2,-1) + (-1,2,0) = (0,4,-1) = v_4.$$

Ainsi v_3 et v_4 sont combinaisons linéaires de v_1 et v_2. Il suffit donc d'analyser l'indépendance linéaire de v_1 et v_2. Pour cela, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v_2 = \lambda v_1$. En comparant la première coordonnée on obtient $-1 = \lambda \cdot 1$, donc $\lambda = -1$. Mais en comparant la deuxième coordonnée on obtiendrait $2 = \lambda \cdot 2 = -2$, contradiction. Donc v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires et sont linéairement indépendants. Par conséquent

$$Im\,(f) = Vect(\{v_1, v_2\}) \text{ et } \dim_{\mathbb{R}}(Imf) = 2.$$

On obtient

$$\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 2, \dim_{\mathbb{R}}(Imf) = 2.$$

La formule du rang donne bien

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) = 4 = \dim_{\mathbb{R}}(\ker f) + \dim_{\mathbb{R}}(Imf) = 2 + 2 = 4.$$

Les deux méthodes sont cohérentes et fournissent les mêmes résultats.

Exemple 2.7.3 *Soit l'application linéaire*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto f(P) = P''. \end{aligned}$$

Où P'' est la dérivée seconde de P. Quel est le rang et la dimension du noyau de f ?
1. ***Première méthode.*** *On calcule d'abord le noyau. On a*

$$\begin{aligned} P \in \ker(f) &\iff f(P) = 0 \\ &\iff P'' = 0 \\ &\iff P' = a \\ &\iff P = aX + b, \end{aligned}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes. Cela prouve que $\ker(f)$ est engendré par les deux polynômes 1 (le polynôme constant) et X. Ainsi

$$\ker(f) = Vect(\{1, X\}).$$

Donc

$$\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f)) = 2.$$

Par le théorème du rang,

$$rg(f) = \dim_{\mathbb{R}}(Im(f)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n[X]) - \dim_{\mathbb{R}}(\ker(f)) = (n+1) - 2 = n - 1.$$

2. ***Deuxième méthode.*** *On commence par calculer l'image de f. La famille $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ est une base de l'espace de départ $\mathbb{R}_n[X]$, donc*

$$rg(f) = \dim(Im(f)) = \dim\left(Vect(\{f(1), f(X), \ldots, f(X^n)\})\right).$$

Calculons les images des éléments de cette base,

$$f(1) = 0, f(X) = 0,$$

et pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$f(X^k) = \left(X^k\right)'' = \left(kX^{k-1}\right)' = k(k-1)X^{k-2}.$$

Ainsi,

$$\{f(X^2), f(X^3), \ldots, f(X^n)\} = \{2, 6X, 12X^2, \ldots, n(n-1)X^{n-2}\},$$

Ces polynômes sont non nuls et deux à deux de degrés distincts $(0, 1, \ldots, n-2)$. Ils sont donc linéairement indépendants, et engendrent un espace de dimension $(n-1)$. On en déduit

$$rg(f) = n - 1, \text{ si } n \geqslant 2.$$

Par le théorème du rang, on obtient

$$\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n[X]) - rg(f) = (n+1) - (n-1) = 2.$$

Cas particuliers.

(a) Si $n = 0$, alors $\mathbb{R}_0[X] = Vect(\{1\})$ et $f = 0$. Donc

$$\dim(\ker(f)) = 1, rg(f) = 0.$$

(b) Si $n = 1$, alors $\mathbb{R}_1[X] = Vect(\{1, X\})$, et encore $f = 0$. Donc

$$\dim(\ker(f)) = 2, rg(f) = 0.$$

On obtient

$$rg(f) = \begin{cases} 0, & n \leqslant 1, \\ n-1, & n \geqslant 2, \end{cases}, \dim(\ker(f)) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \geqslant 1. \end{cases}$$

Le résultat suivant stipule que l'on ne change pas le rang d'une application linéaire lorsque l'on compose celle-ci à gauche ou à droite par une application linéaire bijective.

Proposition 2.7.1 *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies, f une application linéaire de E vers F et g une application linéaire de F vers G.*
1. Si f est bijective (isomorphisme) alors

$$rg(g \circ f) = rg(g).$$

2. Si g est bijective (isomorphisme) alors

$$rg(g \circ f) = rg(f).$$

Preuve. Rappelons que, par définition,

$$rg(g \circ f) = \dim_{\mathbb{K}}(Im(g \circ f)) \quad \text{et} \quad Im(g \circ f) = g(f(E)).$$

1. Supposons f bijective (et g quelconque) et montrons que

$$rg(g \circ f) = rg\,(g)\,.$$

On a, en tenant compte que $f(E) = F$ (puisque f est bijective),

$$rg(g \circ f) = \dim_{\mathbb{K}}(g(f(E))) = \dim_{\mathbb{K}}(g(F)) = \dim_{\mathbb{K}}(Im(g)) = rg\,(g)\,.$$

On a ainsi vérifié que

$$rg(g \circ f) = rg\,(\,g)\,.$$

2. Supposons à présent g bijective (et f quelconque) et montrons que

$$rg(g \circ f) = rg\,(\,f)\,.$$

On désigne par $\tilde{g}$ l'application de $Im(f)$ dans G définie comme la restriction de l'application g au sous-espace $Im(f)$, c'est-à-dire

$$\tilde{g} = g|_{Im(f)}.$$

Appliquons le théorème du rang à l'application linéaire

$$\tilde{g} : Im(f) \longrightarrow G.$$

On a

$$rg\,(f) = \dim_{\mathbb{K}}(Im\,(\,f)) = rg\,(\tilde{g}) + \dim_{\mathbb{K}}(\ker\,(\tilde{g})).$$

On vérifie sans peine que

$$\ker\,(\tilde{g}) \subset \ker\,(g)\,.$$

On en déduit que $\dim_{\mathbb{K}}(\ker\,(\tilde{g})) = 0$ puisque, g étant bijective,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\ker\,(g)) = 0.$$

De plus, d'une part par définition

$$rg\,(\tilde{g}) = \dim_{\mathbb{K}}(Im\,(\tilde{g})) = \dim_{\mathbb{K}}(\tilde{g}(Im\,(\,f))) = \dim_{\mathbb{K}}(\tilde{g}(f(E))), \tag{2.3}$$

et d'autre part

$$\tilde{g}(f(E)) = g(f(E)) \quad \text{(c'est immédiat)}.$$

Ainsi

$$rg\,(\tilde{g}) = rg(g \circ f).$$

L'égalité (2.3) s'écrit alors

$$rg\,(\,f) = rg(g \circ f).$$

□

Remarque 2.7.3 *On déduit de la proposition 2.7.1 que si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F,G)$ et $h \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(G,H)$ avec E, F, G et H quatre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et si f et h sont bijectives alors*

$$rg(h \circ g \circ f) = rg\,(g)\,.$$

Autrement dit, on ne change pas le rang lorsque l'on compose à gauche et à droite par des applications linéaires bijectives.

2.7.1 Conséquences du théorème du rang

Le théorème du rang établit une relation fondamentale entre la dimension d'un espace vectoriel, le noyau et l'image d'une application linéaire. Cette relation est valable indépendamment de la dimension de l'espace d'arrivée F, qui peut être finie ou infinie. Dans le cas particulier où F est de dimension finie, le théorème conduit à des conséquences importantes concernant l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application linéaire. Plus généralement, au-delà de sa formule, il permet de caractériser la bijectivité, d'établir des liens entre rang, injectivité et surjectivité, et de simplifier l'étude des systèmes linéaires.

Proposition 2.7.2 ***(Caractérisation de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité)***
Soient $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ une application linéaire. On a
1. Une application linéaire f est injective si et seulement si son rang est égal à la dimension de E, c'est-à-dire

$$f \text{ est injective } \Longleftrightarrow rg(f) = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

2. Une application linéaire f est surjective si et seulement si son rang est égal à la dimension de F, c'est-à-dire

$$f \text{ est surjective } \Longleftrightarrow rg(f) = \dim_{\mathbb{K}}(F).$$

3. Une application linéaire f est bijective si et seulement si son rang est égal à la dimension de F et à la dimension de E, c'est-à-dire

$$f \text{ est bijective } \Longleftrightarrow rg(f) = \dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

Preuve. Ces propriétés découlent directement du théorème du rang, qui établit la relation fondamentale

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(\ker(f)) + \dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) = \dim_{\mathbb{K}}(\ker(f)) + rg(f).$$

En appliquant cette égalité, on déduit immédiatement les conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit injective, surjective ou bijective.
1. On a

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow \ker(f) = \{0_E\} \Longleftrightarrow rg(f) = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

2. On a

$$f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow Im(f) = F \Longleftrightarrow rg(f) = \dim_{\mathbb{K}}(F).$$

3. On a

$$f \text{ est bijective} \Longleftrightarrow f \text{ est injective et surjective } \Longleftrightarrow rg(f) = \dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

□

Cette proposition admet un corollaire essentiel. En général, pour qu'une application linéaire soit bijective, il faut établir à la fois son injectivité et sa surjectivité. Toutefois, dans le cas où les deux espaces vectoriels ont la même dimension finie, il suffit de vérifier l'une des deux propriétés seulement : si l'application est injective, elle est automatiquement surjective, et réciproquement.

Corollaire 2.7.1 ***(Caractérisation des isomorphismes)*** *Soient* $(E, +, \cdot)$ *et* $(F, +, \cdot)$ *deux* $\mathbb{K}-$*espaces vectoriels de dimension finie et* $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ *une application linéaire. Si* $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$*, alors les propriétés d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité de* f *sont équivalentes. Autrement dit*

$$f \text{ est bijective} \Longleftrightarrow f \text{ est injective} \Longleftrightarrow f \text{ est surjective.}$$

Cela signifie que pour qu'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie soit bijective, il suffit de vérifier soit l'injectivité, soit la surjectivité.

Preuve. C'est immédiat à partir du théorème du rang. En effet, la propriété f est injective équivaut à $\ker(f) = \{0_E\}$, donc d'après le théorème du rang, f est injective si et seulement si

$$\dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

D'après l'hypothèse sur l'égalité des dimensions de E et de F, ceci équivaut à

$$\dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) = \dim_{\mathbb{K}}(F).$$

Cela équivaut donc à

$$Im(f) = F,$$

c'est-à-dire f est surjective. □

Exemple 2.7.4
1. Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = (x - y, x + y). \end{array}$$

Une façon simple de montrer que l'application linéaire f *est bijective est de remarquer que l'espace de départ et l'espace d'arrivée ont même dimension. Ensuite on calcule le noyaun, soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, alors*

$$\begin{aligned} (x, y) \in \ker(f) &\Longleftrightarrow f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow (x - y, x + y) = (0, 0) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow (x, y) = (0, 0). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\ker(f) = \{(0, 0)\},$$

est réduit au vecteur nul, ce qui prouve que f *est injective et donc, par le corollaire 2.7.1, que* f *est un isomorphisme (automorphisme).*
2. Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ (a, b) & \longmapsto & f(a, b) = a + bX, \end{array}$$

où $\mathbb{R}_1[X]$ *désigne l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à* 1.
Étape 1 : Comparaison des dimensions. *On a*

$$\dim(\mathbb{R}^2) = 2, \dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2,$$

car une base de $\mathbb{R}_1[X]$ *est* $\{1, X\}$*. Ainsi,* E *et* F *sont de même dimension.*
Étape 2 : Calcul du noyau. *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*. Alors*

$$f(a, b) = 0 \iff a + bX = 0 \ \ \textit{dans} \ \ \mathbb{R}_1[X].$$

Ceci implique

$$a = 0 \quad \textit{et} \quad b = 0.$$

Donc

$$\ker(f) = \{(0, 0)\}.$$

Le noyau est réduit au vecteur nul, donc f *est injective. Comme* $\dim(E) = \dim(F)$*, on en déduit que* f *est également surjective. Ainsi,* f *est bijective et constitue un* ***isomorphisme*** *entre* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}_1[X]$*.*

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons étudié les applications linéaires, leurs définitions, exemples et cas particuliers. Nous avons vu leurs principales propriétés, les opérations qu'elles admettent, ainsi que des notions essentielles comme le noyau, l'image, la dimension, le rang et le théorème du rang. Ces résultats permettent de caractériser l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications linéaires, et jouent un rôle fondamental dans l'étude des systèmes linéaires et dans la représentation matricielle. Ce chapitre constitue donc une base indispensable pour la suite du cours et pour de nombreuses applications en mathématiques et en informatique.

Chapitre 3

Matrices

Les matrices sont un outil fondamental de l'algèbre linéaire. Elles se présentent sous la forme de tableaux de nombres disposés en lignes et en colonnes. Elles permettent de représenter des systèmes d'équations linéaires, de décrire des transformations géométriques et de manipuler des données. Leur utilisation s'étend à de nombreux domaines tels que la physique, l'informatique, l'économie et l'ingénierie.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux matrices à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ (généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Après avoir introduit les définitions et notations de base, nous classerons les matrices selon leur structure : matrices rectangulaires et carrées, matrices nulles, identité, diagonales, triangulaires, ainsi que les matrices élémentaires qui forment la base canonique de l'espace matriciel. Nous examinerons ensuite des opérations fondamentales sur les matrices : addition, multiplication par un scalaire, transposition, produit matriciel, ainsi que leurs propriétés algébriques. Ces opérations permettront de montrer que l'ensemble des matrices constitue un espace vectoriel de dimension finie et qu'il possède des sous-espaces remarquables (diagonales, triangulaires, symétriques, antisymétriques). Le chapitre aborde également des opérations plus spécifiques telles que les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes, outils indispensables pour simplifier les matrices et résoudre des systèmes linéaires. Cette étude sera complétée par l'analyse de la manière dont les matrices représentent des familles de vecteurs ou des applications linéaires, ce qui ouvre la voie à une compréhension plus profonde des changements de bases et des matrices de passage. Une partie importante est consacrée au déterminant des matrices carrées. Nous présenterons différentes méthodes de calcul, les propriétés fondamentales de la fonction déterminant (multilinéarité, alternance, invariance par transposition, etc.), et nous montrerons son rôle dans la caractérisation de l'inversibilité des matrices. Le lien entre déterminant et comatrice sera mis en évidence à travers la formule explicite de l'inverse.

Enfin, ce chapitre propose une approche progressive et rigoureuse, en illustrant chaque concept par des exemples concrets et des applications variées. L'objectif est de donner à l'étudiant les bases nécessaires pour manipuler les matrices avec assurance et pour comprendre leur importance aussi bien en mathématiques pures qu'en sciences appliquées.

3.1 Définitions et notations

Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres disposés en lignes et en colonnes, généralement encadré par des parenthèses ou des crochets. Elle occupe une place essentielle en algèbre linéaire, où elle sert notamment à représenter les applications linéaires et à résoudre les systèmes d'équations. Les matrices trouvent aussi de nombreuses applications en physique, en informatique et en économie.

Définition 3.1.1 ***(Matrice)***
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ deux entiers naturels strictement positifs.
1. On appelle matrice à m lignes et n colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute application

$$A : \ \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \ \longrightarrow \ \mathbb{K},$$

qui associe à chaque couple (i, j) un scalaire $a_{ij} \in \mathbb{K}$. On écrit

$$\begin{array}{rccl} A: & \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (i, j) & \longmapsto & A(i, j) = a_{ij} \ (ou\ a_{i,j}). \end{array}$$

2. ***Représentation.*** *Une matrice A se représente sous forme d'un tableau rectangulaire de m lignes et n colonnes*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = (a_{ij})_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & & \underbrace{j-\text{ème colonne}} & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \underbrace{i-\text{ème ligne}} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. ***Terminologie.***
(a) Le couple (m, n) est appelé la taille (ou : le format, le type) de la matrice A et on dit aussi que A est une matrice de type (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
(b) L'indice i (variant de 1 à m) désigne le numéro de ligne.
(c) L'indice j (variant de 1 à n) désigne le numéro de colonne.
(d) Pour tout $(i, j) \in \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\}$, le scalaire a_{ij} est appelé le coefficient (ou le terme) de A situé à l'intersection de la $i-$ème ligne et de la $j-$ème colonne de A.
4. ***Notation.*** *On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (m, n) et à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Définition 3.1.2 ***(Cas particulier : matrices carrées)***
1. Si $m = n$, alors on dit que A est une matrice carrée d'ordre n. Elle s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
3. Les scalaires (a_{ii}) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont appelés les éléments diagonaux de A, et le $n-$uplet $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ est appelé la diagonale de A.

Exemple 3.1.1
1. ***Exemple de matrice rectangulaire :*** *Soit la matrice A_1 définie dans $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ par*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a 3 lignes, 2 colonnes, et ses coefficients sont des réels.
2. ***Exemple de matrice carrée :***
(a) Soit la matrice A_2 définie dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une matrice carrée d'ordre 3, dont les coefficients sont des réels.
3. ***Exemple de matrice définie par une formule générale :*** *Soit la matrice $A_3 = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont définis par la relation*

$$\forall (i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2\} : a_{ij} = ij + 1.$$

En appliquant cette règle, nous obtenons

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Définition 3.1.3 ***(Égalité de deux matrices)***
Soient

$$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K), B = (b_{ij}) \in M_{p,q}(K).$$

On dit que A et B sont ***égales****, et l'on écrit $A = B$, si et seulement si*
(i) elles ont le même type, c'est-à-dire $m = p$ et $n = q$ (même nombre de lignes et même nombre de colonnes) ;
(ii) et leurs coefficients correspondants sont égaux

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,m\} \times \{1,2,\ldots,n\} : a_{ij} = b_{ij}.$$

En d'autres termes, deux matrices sont égales si elles ont la même dimension et si chaque coefficient de la première coïncide avec le coefficient correspondant de la seconde.

Exemple 3.1.2
1. ***Cas d'égalité.*** *Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et considérons les matrices $A, B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ définies par*

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & x^2 - y & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour que $A = B$, les deux matrices doivent avoir le même type (ce qui est le cas ici) et des coefficients égaux deux à deux. Cela conduit au système

$$\begin{cases} x = 1, \\ x^2 - y = 2. \end{cases}$$

La résolution donne $x = 1$ et $y = -1$. Ainsi, $A = B$ si et seulement si $x = 1$ et $y = -1$.
2. ***Matrices de types différents****. Considérons les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est de type $(2,2)$, tandis que B est de type $(2,3)$. Comme leurs dimensions diffèrent, les deux matrices ne peuvent pas être égales ($A \neq B$).
3. ***Matrices de même type mais avec un coefficient différent.*** *Considérons enfin les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices sont de type $(2,2)$. Toutefois, leurs coefficients différent en position $(2,2)$

$$a_{22} = 2 \neq b_{22} = 3.$$

Elles ne sont donc pas égales.

3.2 Matrices spéciales

Dans ce qui suit, nous allons introduire certaines matrices particulières, appelées matrices spéciales. Elles se répartissent en deux grandes catégories : Les matrices rectangulaires spéciales et les matrices carrées spéciales. Chaque catégorie regroupe des matrices ayant des propriétés spécifiques et jouant un rôle important en algèbre linéaire ainsi que dans de nombreuses applications pratiques.

3.2.1 Matrices spéciales rectangulaires

Une matrice rectangulaire est une matrice dont le nombre de lignes m est différent du nombre de colonnes n (c'est-à-dire $m \neq n$). Parmi ces matrices, on distingue plusieurs cas particuliers d'importance.

Définition 3.2.1 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de type (m,n) à coefficients dans $\mathbb{K}$. On distingue plusieurs types de matrices rectangulaires spéciales :*
(1) ***Matrice colonne.*** *Si $n = 1$, alors A est appelée matrice colonne ou unicolonne de type $(m,1)$ notée*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, une matrice colonne est une matrice qui ne possède qu'une seule colonne. L'ensemble des matrices colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$.
(2) ***Matrice ligne.*** *Si $m = 1$, alors A est appelée matrice ligne ou uniligne de type $(1,n)$ notée*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, une matrice ligne est une matrice qui ne possède qu'une seule ligne. L'ensemble des matrices lignes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

(3) ***Matrice nulle.*** *La matrice A est dite nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. On la note $O_{m,n}$ et elle vérifie*

$$\forall(i,j) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\} : a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Remarque 3.2.1
1. Les matrices ligne et colonne sont utiles pour représenter respectivement des vecteurs lignes et des vecteurs colonnes ; on identifie souvent $\mathbb{K}^n$ (ou $\mathbb{R}^n$) à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. La matrice nulle $O_{m,n}$ joue le rôle d'élément neutre pour l'addition dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Après avoir vu les matrices nulles, lignes et colonnes, intéressons-nous maintenant à un autre type fondamental : les matrices élémentaires où Chaque matrice contient un seul coefficient non nul, généralement égal à $1_{\mathbb{K}}$, situé en une position particulière, tandis que tous les autres coefficients sont nuls. Ces matrices sont importantes car elles permettent de construire n'importe quelle matrice comme une somme de matrices élémentaires et constituent ainsi la base canonique de l'espace des matrices $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. De plus, elles servent d'outil pratique pour étudier et manipuler les matrices et les applications linéaires.

Définition 3.2.2 ***(Matrices élémentaires*** $E_{i,j}$***)***
1. Pour tout couple $(i,j) \in \{1,2,\ldots,m\} \times \{1,2,\ldots,n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la position (i,j), qui est égal à 1_K (l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{K}$). Chaque matrice élémentaire $E_{i,j}$ a donc la forme

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix},$$

où le $1_{\mathbb{K}}$ est placé à l'intersection de la $i-$ième ligne et de la $j-$ième colonne.
2. On peut également exprimer $E_{i,j}$ à l'aide du ***symbole de Kronecker*** *$\delta_{x,y}$, défini par*

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}}, \ si \ x = y \\ 0_{\mathbb{K}}, \ si \ x \neq y, \end{cases}$$

on a

$$E_{ij} = (\delta_{k,i} \cdot \delta_{l,j})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant m \\ 1 \leqslant l \leqslant n}}.$$

Alors le coefficient (k,l) de $E_{i,j}$ s'écrit

$$(E_{i,j})_{k,l} = \delta_{k,i} \cdot \delta_{l,j} = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}}, \ si \ (k,l) = (i,j) \\ 0_{\mathbb{K}}, \ si \ (k,l) \neq (i,j). \end{cases}$$

Remarque 3.2.2
1. Les matrices $E_{i,j}$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Autrement dit, toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ peut s'exprimer de manière unique comme une combinaison linéaire de ces matrices

$$A = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{i,j} \right).$$

Dans cette décomposition, chaque coefficient a_{ij} de A correspond au coefficient de la matrice élémentaire $E_{i,j}$ dans cette décomposition.
2. Le nombre total de matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est égal au produit du nombre de lignes et du nombre de colonnes

$$m.n,$$

ce qui correspond au nombre total de couples (i.e, le nombre de couples (i,j) possibles).

Exemple 3.2.1 *Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, il y a $2.3 = 6$ matrices élémentaires,*

Matrice	*Position de* 1	*Forme Matricielle*	*Notation* δ
$E_{1,1}$	$(1,1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(\delta_{k,1}\cdot\delta_{l,1})_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2\\ 1\leqslant l\leqslant 3}} = \begin{pmatrix} \delta_{1,1}\cdot\delta_{1,1} & \delta_{1,1}\cdot\delta_{2,1} & \delta_{1,1}\cdot\delta_{3,1} \\ \delta_{2,1}\cdot\delta_{1,1} & \delta_{2,1}\cdot\delta_{21} & \delta_{2,1}\cdot\delta_{3,1} \end{pmatrix}$
$E_{1,2}$	$(1,2)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$E_{1,2} = (\delta_{k,1}\cdot\delta_{l,2})_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2\\ 1\leqslant l\leqslant 3}}$
$E_{1,3}$	$(1,3)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$E_{1,3} = (\delta_{k,1}\cdot\delta_{l,3})_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2\\ 1\leqslant l\leqslant 3}}$
$E_{2,1}$	$(2,1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$E_{2,1} = (\delta_{k,2}\cdot\delta_{l,1})_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2\\ 1\leqslant l\leqslant 3}}$
$E_{2,2}$	$(2,2)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$E_{2,1} = (\delta_{k,2}\cdot\delta_{l,2})_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2\\ 1\leqslant l\leqslant 3}}$
$E_{2,3}$	$(2,2)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$E_{2,3} = (\delta_{k,2}\cdot\delta_{l,3})_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2\\ 1\leqslant l\leqslant 3}}.$

3.2.2 Matrices spéciales carrées

Les matrices carrées sont des matrices où le nombre de lignes mmm est égal au nombre de colonnes nnn (c'est-à-dire $m = n$). Parmi elles, on trouve les matrices diagonales, la matrice identité, et les matrices triangulaires (supérieures ou inférieures).

Définition 3.2.3 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. On distingue plusieurs types de matrices carrées spéciales :*
(1) ***Matrice diagonale.***
(i) Une matrice carrée A est dite diagonale si tous ses éléments situés hors de la diagonale principale sont tous nuls. Formellement

$$\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\} \times \{1,2,...,n\} : i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Autrement dit, une matrice diagonale a la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & a_{22} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(ii) On note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
(2) La matrice diagonale d'ordre n dont les éléments de la diagonale principale valent $1_{\mathbb{K}}$ est appelée matrice unité et est notée I_n. Formellement

$$a_{ij} = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}}, & si\ i = j, \\ 0_{\mathbb{K}}, & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Elle est de la forme

$$I_n = \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} \end{pmatrix}.$$

(3) ***Matrice triangulaire.*** *Une matrice triangulaire est une matrice carrée dont certains coefficients sont nuls de manière systématique, formant ainsi une structure en triangle. On distingue deux types principaux,*
(a) ***Matrice triangulaire inférieure :***
(i) Une matrice carrée $A = (a_{ij})$ est dite triangulaire inférieure si tous les coefficients situés au-dessus de la diagonale principale sont nuls. Formellement

$$\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\} \times \{1,2,...,n\} : i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Alors, elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, seuls les éléments situés sur la diagonale ou en dessous peuvent être non nuls.
(ii) On note $T_{n,\text{inf}}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices Triangulaires inférieures d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
(b) ***Matrice triangulaire inférieure stricte.*** *Une matrice carrée $A = (a_{ij})$ est dite triangulaire inférieure stricte si*

$$\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\} \times \{1,2,...,n\} : i \leqslant j \Longrightarrow a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Autrement dit, tous les éléments au-dessus de la diagonale principale sont nuls, et tous les éléments sur la diagonale sont également nuls. Alors, elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ a_{21} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix}.$$

(b) ***Matrice triangulaire supérieure.***
(i) Une matrice carrée $A = (a_{ij})$ est dite triangulaire supérieure si tous les coefficients situés en dessous de la diagonale principale sont nuls. Formellement

$$\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\} \times \{1,2,...,n\} : i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Alors, elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0_{\mathbb{K}} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, seuls les éléments situés sur la diagonale ou au-dessus peuvent être non nuls.
(ii) On note $T_{n,\sup}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices Triangulaires supérieures d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
(d) ***Matrice triangulaire supérieure stricte.*** *Une matrice carrée $A = (a_{ij})$ est dite triangulaire supérieure stricte si*

$$\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\} \times \{1,2,...,n\} : i \geqslant j \Longrightarrow a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Autrement dit, tous les éléments en dessous de la diagonale principale sont nuls, et tous les éléments sur la diagonale sont également nuls. Alors, elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.2.2 *Soient les matrices carrées de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors A_1 est triangulaire supérieure, A_2 est triangulaire supérieure stricte, A_3 est triangulaire inférieure et A_4 est triangulaire inférieure stricte.

Définition 3.2.4 ***(Trace d'une matrice)*** *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle* ***trace*** *de la matrice A, et l'on note $Tr(A)$, la somme des coefficients situés sur sa diagonale principale. Autrement dit,*

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemple 3.2.3
1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Les éléments diagonaux sont $a_{11} = 1$, $a_{22} = -1$, $a_{33} = 0$. Ainsi,

$$Tr(A) = 1 + (-1) + 0 = 0.$$

2. Soit

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Les éléments diagonaux sont $b_{11} = 2$, $b_{22} = 3$. *Par conséquent,*

$$Tr(B) = 2 + 3 = 5.$$

3. Pour la matrice identité I_n *d'ordre* n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

les n *éléments diagonaux valent* 1, *donc*

$$Tr(I_n) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

3.3 Transposition, matrices symétriques et antisymétriques

L'une des opérations les plus importantes sur les matrices est la transposition. Elle consiste à échanger les lignes et les colonnes d'une matrice : l'élément placé en position (i, j) devient l'élément (j, i) dans la transposée. Cette opération permet de définir deux familles importantes de matrices carrées. Une matrice est dite symétrique lorsqu'elle est égale à sa transposée, ce qui signifie que ses éléments sont disposés de manière symétrique par rapport à la diagonale principale. À l'inverse, une matrice est dite antisymétrique lorsque sa transposée est égale à son opposée ; dans ce cas, la diagonale est nécessairement nulle et les éléments situés de part et d'autre de la diagonale apparaissent avec des signes contraires.

Définition 3.3.1 ***(Transposition)***
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. *On appelle* ***transposée*** *de* A *la matrice notée* ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, *définie par*

$${}^tA = (a_{ji}).$$

Autrement dit, l'élément situé à la $i -$ *ème ligne et* $j -$ *ème colonne de* A *devient l'élément situé à la* $j -$ *ème ligne et* $i -$ *ème colonne de* ${}^tA$.

Exemple 3.3.1
1. La transposée d'une matrice colonne est une matrice ligne et réciproquement, alors si

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}), A_2 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_j & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}),$$

alors

$$
{}^tA_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_j & \cdots & a_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{K}), A_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).
$$

2 . Consiérons la matrice

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R}).
$$

C'est une matrice de taille $(2, 3)$. *Sa transposée est la matrice*

$$
{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R}),
$$

qui est de taille $(3, 2)$. *On observe que les lignes de A deviennent les colonnes de ${}^tA$.*
3. Soit la matrice

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).
$$

Sa transposée est

$$
{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.
$$

On remarque que les éléments situés symétriquement par rapport à la diagonale principale ont été échangés : par exemple $a_{12} = 2$ devient $a_{21} = 2$, et $a_{23} = 6$ devient $a_{32} = 6$.

Définition 3.3.2 ***(Matrice symétrique, antisymétrique)***
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée d'ordre n, alors on distingue les cas suivants :
(1) A est symétrique si et seulement si

$$
{}^tA = A.
$$

C'est-à-dire si et seulement si

$$
\forall (i, j) \in \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., n\} : a_{ji} = a_{ij}.
$$

L'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
(2) A est antisymétrique (ou ***skew-symétrique****) si et seuelment si*

$$
{}^tA = -A.
$$

C'est-à-dire si et seulement si

$$
\forall (i, j) \in \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., n\} : a_{ji} = -a_{ij}.
$$

L'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 3.3.1 ***(Interprétation de la transposée d'une matrice)***
1. ***Transposition et symétrie.***
(a) La transposée d'une matrice A est obtenue en échangeant ses lignes et ses colonnes : la première

ligne de A devient la première colonne de ${}^tA$, la deuxième ligne devient la deuxième colonne, et ainsi de suite.
(b) La transposition peut être vue comme une symétrie par rapport à la diagonale principale (celle qui relie le coin supérieur gauche au coin inférieur droit),
- *La diagonale principale reste inchangée.*
- *Chaque élément situé au-dessus de la diagonale est échangé avec son symétrique situé en dessous.*

2. ***Matrices symétriques.*** *Pour la matrice symétrique, on a*

$$\forall(i,j) \in \{1,2,...,n\} \times \{1,2,...,n\} : \begin{cases} a_{ii} = a_{ii}, \text{ si } i = j \\ a_{ji} = a_{ij}, \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Cela signifie que les éléments sur la diagonale principale peuvent être quelconques, mais que les éléments hors diagonale sont symétriques par rapport à cette diagonale. En d'autres termes, une matrice symétrique est invariante par transposition.
3. ***Matrices antisymétriques.*** *Pour la matrice antisymétrique, on a*
- *Les éléments sont opposés par rapport à la diagonale principale.*
- *Tous les éléments diagonaux sont nuls, c'est-à-dire*

$$\forall(i,j) \in \{1,2,...,n\} \times \{1,2,...,n\} : i = j \Longrightarrow a_{ii} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Cela signifie que toutes les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

Exemple 3.3.2 *1. Considérons la matrice suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Sa transposée est

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Puisque ${}^tA = A$, la matrice A est bien symétrique.
2. Considérons maintenant la matrice suivante

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Sa transposée est

$${}^tB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque ${}^tB = -B$, la matrice B est bien antisymétrique.
3. La matrice unité d'ordre n notée I_n est symétrique car

$${}^tI_n = I_n.$$

4. La seule matrice à la fois symétrique et antisymétrique est la matrice carrée nulle O_n, car ${}^tA = A$ et ${}^tA = -A$ impliquent $A = -A$, donc $A = O_n$.

3.4 Opérations sur les matrices

On peut effectuer plusieurs opérations sur les matrices, comme l'addition, la multiplication, la multiplication par un scalaire ou encore la transposition. Ces opérations sont fondamentales pour résoudre des systèmes d'équations, étudier des transformations linéaires ou manipuler des données dans divers domaines. Dans cette section, nous allons présenter ces principales opérations et les illustrer par des exemples concrets afin de mieux les comprendre.

3.4.1 Addition et opposé de matrices

Définition 3.4.1 *Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ deux matrices de même type (m, n).*
1. ***Addition de matrices.*** *On appelle somme de A et B, et on note $A + B$, la matrice S de type (m, n) définie par*

$$A + B = S = (s_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

avec

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} : s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Autrement dit, la somme de deux matrices de même type s'obtient en additionnant élément par élément leurs coefficients correspondants (ou en sommant "terme à terme" les éléments de A et de B). On a donc

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1j} + b_{1j} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2j} + b_{2j} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{ij} + b_{ij} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mj} + b_{mj} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. ***Matrice opposée.*** *L'opposé d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, notée $-A$, est la matrice définie par*

$$-A = (-a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

Autrement dit,

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1j} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2j} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{ij} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mj} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. On définit la différence de deux matrices A et B de la façon suivante

$$A - B = A + (-B).$$

Autrement dit, on soustrait élément par élément les coefficients de B à ceux de A. C'est-à-dire que soustraire B revient à additionner A et l'opposé de B.

Remarque 3.4.1
1. ***Compatibilité des matrices pour l'addition et la soustraction.*** *L'addition ou la soustraction de deux matrices n'est possible que si elles sont de même type, c'est-à-dire si elles possèdent le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.*
2. ***Addition de matrices.*** *Pour additionner deux matrices, on additionne les coefficients situés aux mêmes positions dans chaque matrice. La matrice obtenue constitue leur somme.*
3. ***Opposé d'une matrice.*** *L'opposé d'une matrice A, noté $-A$, est la matrice dont chaque coefficient est l'oposé du coefficient correspondant de A.*
4. ***Propriété fondamentale de l'opposé.*** *La matrice $-A$ est l'unique matrice vérifiant*

$$A + (-A) = (-A) + A = O_{m,n},$$

où $O_{m,n}$ désigne la matrice nulle de type (m, n).

Exemple 3.4.1 *Soient les matrices de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Somme de matrices *: La somme $A+B$ s'obtient en additionnant les coefficients correspondants*

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+5 & -1+3 & 3+(-1) \\ 4+(-2) & 0+7 & -2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Opposé d'une matrice *: L'opposé de B, noté $-B$, est la matrice dont chaque coefficient est l'opposé du coefficient correspondant de B*

$$-B = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 2 & -7 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Différence de matrices *: La différence $A - B$ se définit par $A - B = A + (-B)$, soit*

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-5 & -1-3 & 3-(-1) \\ 4-(-2) & 0-7 & -2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 6 & -7 & -6 \end{pmatrix}.$$

3.4.2 Multiplication par un scalaire

La multiplication d'une matrice par un scalaire consiste à multiplier chacun des éléments de la matrice par un nombre appartenant au corps $\mathbb{K}$. Cette opération peut être interprétée comme une transformation qui "agrandit" ou "réduit" la matrice en fonction de la valeur du scalaire, tout en conservant la taille de la matrice.

Définition 3.4.2 *Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. La multiplication de A par λ est la matrice notée $\lambda \cdot A$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ définie par*

$$\lambda \cdot A = B = (r_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

avec

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} : r_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}.$$

Autrement dit, on multiplie chaque élément de la matrice par le scalaire λ. Ainsi

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1j} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2j} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{ij} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mj} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.4.2 *Soit la matrice suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

et soit $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$. On effectue la multiplication, on obtient

$$\lambda A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

L'opération ne change pas la taille de la matrice : A et $2 \cdot A$ sont de type $(2, 3)$.

3.4.3 Propriétés de l'addition des matrices, de la multiplication par un scalaire et de la transposée

L'addition des matrices, la multiplication par un scalaire et l'opération de transposition possèdent plusieurs propriétés fondamentales. Ces propriétés sont essentielles car elles montrent que l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ muni de ces opérations constitue un espace vectoriel (sur le corps $\mathbb{K}$) et que la transposition est une opération bien structurée.

Proposition 3.4.1
1. Addition de matrices. *L'addition des matrices vérifie*
(a) Commutativité,

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) : A + B = B + A.$$

(b) Associativité,

$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) : (A + B) + C = A + (B + C).$$

(c) Élément neutre. La matrice nulle est l'élément neutre de l'addition

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) : A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A.$$

(d) Élément opposé. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $(-A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$A + (-A) = (-A) + A = O_{m,n}.$$

2. Multiplication par un scalaire. *La multiplication par un scalaire satisfait*
(a) Distributivité par rapport aux scalaires,

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) : (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A.$$

La somme de deux scalaires multipliée par une matrice est égale à la somme des produits de chaque scalaire avec la matrice.
(b) Distributivité par rapport aux matrices,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) : \lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B.$$

Un scalaire multiplié par une somme de matrices est égal à la somme des matrices multipliées séparément par ce scalaire.
(c) Associativité mixte,

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) : (\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A) .$$

La multiplication d'une matrice par le produit de deux scalaires est équivalente à la multiplication successive par chaque scalaire.
(d) Élément neutre,

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) : 1_{\mathbb{K}} \cdot A = A,$$

où $1_{\mathbb{K}}$ est l'unité du corps $\mathbb{K}$.
3. Propriétés de la transposée.
(a) Transposée d'une somme de matrices,

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) :^t (A + B) =^t A +^t B.$$

La transposée d'une somme est égale à la somme des transposées.
(b) Transposée d'une multiplication par un scalaire,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) :^t (\lambda \cdot A) = \lambda \cdot^t A.$$

Le scalaire reste inchangé et se multiplie à la transposée.
(c) Transposée de la transposée,

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) :^t \left({}^t(A)\right) = A.$$

Preuve. Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Nous utilisons la définition élémentaire : si $X = (x_{ij})$ et $Y = (y_{ij})$ sont deux matrices de même taille, alors

$$X = Y \iff \forall (i, j) : x_{ij} = y_{ij}.$$

1. Addition de matrices.
(a) Commutativité. Par définition

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ pour tout}(i, j).$$

Or dans le corps $\mathbb{K}$ l'addition est commutative

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}.$$

Donc

$$(A + B)_{ij} = (B + A)_{ij} \text{ pour tout}(i, j),$$

d'où

$$A + B = B + A.$$

(b) Associativité. On a, pour tout (i, j),

$$((A + B) + C)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij},$$

et

$$(A + (B + C))_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}).$$

Dans $\mathbb{K}$ l'addition est associative, donc

$$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}).$$

Ainsi

$$((A + B) + C)_{ij} = (A + (B + C))_{ij} \text{ pour tout } (i, j),$$

donc

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

(c) Élément neutre. Soit $O_{m,n}$ la matrice nulle (tous ses coefficients sont 0). Pour tout (i, j),

$$(A + O_{m,n})_{ij} = a_{ij} + 0_{\mathbb{K}} = a_{ij}.$$

Donc

$$A + O_{m,n} = A.$$

(d) Élément opposé. Définissons $(-A)$ comme la matrice $(-a_{ij})$. Alors pour tout (i, j),

$$(A + (-A))_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0_{\mathbb{K}},$$

car

$$a_{ij} + (-a_{ij}) = 0_{\mathbb{K}},$$

dans $\mathbb{K}$. Donc

$$A + (-A) = O_{m,n}.$$

2. Multiplication par un scalaire.
(a) Distributivité par rapport aux scalaires. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Pour tout (i, j),

$$((\lambda + \mu)A)_{ij} = (\lambda + \mu)a_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu a_{ij} = (\lambda A)_{ij} + (\mu A)_{ij}.$$

Donc

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$$

(En utilisant la distributivité dans $\mathbb{K}$).
(b) Distributivité par rapport aux matrices. Pour tout (i, j),

$$(\lambda(A + B))_{ij} = \lambda(a_{ij} + b_{ij}) = \lambda a_{ij} + \lambda b_{ij} = (\lambda A)_{ij} + (\lambda B)_{ij}.$$

D'où l'égalité matricielle.
(c) Associativité mixte. Pour tout (i, j),

$$((\lambda\mu)A)_{ij} = (\lambda\mu)a_{ij} = \lambda(\mu a_{ij}) = (\lambda(\mu A))_{ij},$$

puisque la multiplication dans $\mathbb{K}$ est associative.
(d) Élément neutre. Pour tout (i, j),

$$(1_{\mathbb{K}} \cdot A)_{ij} = 1_{\mathbb{K}} \cdot a_{ij} = a_{ij},$$

puisque $1_{\mathbb{K}}$ est l'unité multiplicative de $\mathbb{K}$. Donc

$$1_{\mathbb{K}} \cdot A = A.$$

3. Propriétés de la transposée.
(a) Transposée d'une somme de matrices. Pour des indices i, j (de tailles adaptés),

$$({}^t(A + B))_{ij} = (A + B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji}.$$

D'autre part,
$$({}^tA+{}^tB)_{ij} = ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ij} = a_{ji} + b_{ji}.$$
Les deux coefficients coïncident pour tout (i, j), donc
$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB.$$

(b) Transposée d'une multiplication par un scalaire. Pour tout (i, j),
$$({}^t(\lambda A))_{ij} = (\lambda A)_{ji} = \lambda a_{ji},$$
et
$$(\lambda {}^tA)_{ij} = \lambda({}^tA)_{ij} = \lambda a_{ji}.$$
Donc
$${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA.$$
(c) Transposée de la transposée. Par définition
$$({}^t({}^tA))_{ij} = ({}^tA)_{ji} = a_{ij}.$$
Ainsi tous les coefficients sont identiques, donc
$${}^t({}^tA) = A.$$
□

Remarque 3.4.2 *Les preuves ci-dessus montrent que toutes les identités s'obtiennent en comparant les coefficients à la position (i, j) et en utilisant simplement les propriétés algébriques du corps $\mathbb{K}$ (associativité, commutativité, distributivité, existence d'un neutre et d'opposés). Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ muni de l'addition matricielle et de la multiplication par un scalaire est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. De plus, l'opération de transposition est une application linéaire qui préserve l'addition et la multiplication par un scalaire.*

Proposition 3.4.2 *L'ensemble $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ muni de l'addition (loi interne) des matrices et de la multiplication des matrices par un scalaire (loi externe) est un espace vectoriel sur K de dimension finie $m.n$.*
$$\dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})) = m.n.$$

Preuve.
1. Pour démontrer que $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel, il suffit de vérifier que les axiomes définissant un espace vectoriel sont satisfaits. Or, ces axiomes découlent directement des propriétés de l'addition des matrices et de la multiplication par un scalaire, déjà établies.
2. Pour déterminer la dimension de cet espace, considérons les matrices élémentaires unitaires $E_{i,j}$, qui possèdent un unique $1_{\mathbb{K}}$ en position (i, j) et des $0_{\mathbb{K}}$ ailleurs. Ces matrices forment une famille libre et génératrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, constituant ainsi une base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, de cardinal $m.n$ vecteurs. Ainsi, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $m.n$. □

Corollaire 3.4.1 *L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. triangulaires inférieures) et l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes (resp. triangulaires inférieures strictes) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitue lui aussi un sous-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Preuve.
1. Matrices triangulaires supérieures. Définissons

$$T_{n,\sup}(\mathbb{K}) = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : a_{ij} = 0_{\mathbb{K}} \text{ pour tout } i > j\}.$$

(i) La matrice nulle O_n vérifie

$$a_{ij} = 0_{\mathbb{K}} \text{ pour tout } i > j.$$

$$a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$$

donc $O_n \in T_{n,\sup}(\mathbb{K})$.
(ii) Stabilité par addition. Si $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in T_{n,\sup}(\mathbb{K})$, alors pour tout $i > j$ on a

$$a_{ij} = b_{ij} = 0_{\mathbb{K}},$$

avec les coefficients $(A + B)_{ij}$ vérifient

$$a_{ij} + b_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Ainsi $T_{n,\sup}(\mathbb{K})$.
(iii) Stabilité par multiplication par un scalaire. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A = (a_{ij}) \in T_{n,\sup}(\mathbb{K})$, si $i > j$ alors $(\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda a_{ij} = 0$. Donc $\lambda \cdot AT_{n,\sup}(\mathbb{K})$. Ainsi, $T_{n,\sup}(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. **Matrices triangulaires supérieure strictes.** Les mêmes vérifications que pour $T_{n,\sup}(\mathbb{K})$ s'appliquent, avec la condition indexée par $i \geqslant j$ au lieu de $i > j$.
3. **Matrices triangulaires inférieures.**
(i) La matrice nulle O_n appartient à $T_{n,\inf}(\mathbb{K})$ puisque tous ses coefficients sont nuls.
(ii) Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in T_{n,\inf}(\mathbb{K})$. Pour tout $i < j$, on a $a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$ et $b_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$, donc

$$(a_{ij} + b_{ij}) = 0_{\mathbb{K}},$$

ce qui montre que $A + B \in T_{n,\inf}(\mathbb{K})$.
(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A = (a_{ij}) \in T_{n,\inf}(\mathbb{K})$. Alors pour tout $i < j$, $\lambda \cdot a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$. Donc $\lambda \cdot A \in T_{n,\inf}(\mathbb{K})$. Ainsi, $T_{n,\inf}(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
4. **Matrices triangulaires inférieures strictes.** Les mêmes vérifications que pour $T_{n,\inf}(\mathbb{K})$ s'appliquent, avec la condition indexée par $i \leqslant j$ au lieu de $i < j$.
5. **Matrices diagonales.** Définissons

$$D_n(\mathbb{K}) = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : a_{ij} = 0_{\mathbb{K}} \text{ pour tout } i \neq j\}.$$

(i) La matrice nulle O_n est diagonale, donc $O_n \in D_n(\mathbb{K})$.
(ii) Si $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in D_n(\mathbb{K})$, alors pour $i \neq j$ on a

$$a_{ij} = b_{ij} = 0_{\mathbb{K}},$$

donc

$$(A + B)_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Ainsi

$$A + B \in D_n(\mathbb{K}).$$

(iii) Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in D_n(\mathbb{K})$, si $i \neq j$ alors

$$(\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} = \lambda \cdot 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}},$$

donc $\lambda A \in D_n(\mathbb{K})$. Donc $D_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel.
Remarque. On peut aussi observer que

$$D_n(\mathbb{K}) = T_{n,\sup}(\mathbb{K}) \cap T_{n,\inf}(\mathbb{K}),$$

or l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est toujours un sous-espace vectoriel. Cela fournit une autre preuve que $D_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace. $\square$

Proposition 3.4.3 *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. L'application*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & f(A) = {}^t A, \end{array}$$

est linéaire. Autrement dit, l'opération de transposition définit une application linéaire.

Preuve. La linéarité de f découle immédiatement des propriétés de la transposition établies précédemment (proposition 3.4.1). $\square$

3.4.4 Produit matriciel

Nous allons à présent définir le concept de produit de matrices. Le produit de deux matrices, appelé produit matriciel, est une opération particulière qui n'est pas toujours possible. En effet, toutes les matrices ne peuvent pas être multipliées entre elles : il faut que leurs dimensions soient compatibles. Cela signifie que le nombre de colonnes de la première matrice doit être exactement égal au nombre de lignes de la seconde. Lorsque cette condition est respectée, le produit est défini et il donne une nouvelle matrice dont le nombre de lignes correspond à celui de la première matrice et dont le nombre de colonnes correspond à celui de la seconde.

Définition 3.4.3 ***(Produit matriciel)***
Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de type (m, n) et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de type (n, p). On définit le produit de A par B, noté $A \cdot B$, comme la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$ de type (m, p) dont les coefficients sont donnés, pour tout couple $(i, j) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, p\}$, par la relation

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Ainsi, l'élément c_{ij} du produit $A \cdot B$ est obtenu en effectuant la somme des produits des éléments de la $i-$ème ligne de A avec ceux de la $j-$ème colonne de B.

Remarque 3.4.3
1. Le produit de deux matrices n'est défini que si leurs dimensions sont compatibles, c'est-à-dire lorsque le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde. Cette condition peut se résumer ainsi

$$(m, n) \times (n, p) = (m, p).$$

2. Chaque coefficient c_{ij} de la matrice AB, situé à l'intersection de la $i -$ ème ligne et la $j -$ ème colonne, s'obtient en calculant le produit scalaire entre la $i -$ ème ligne de A et la $j -$ ème colonne de B.
3. Même lorsque les produits AB et BA existent et sont de même type (par exemple pour deux matrices carrées de même ordre), on n'a en général pas $AB = BA$. Autrement dit, le produit matriciel n'est pas commutatif.

Exemple 3.4.3 *Soient les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

Le produit AB est bien défini car le nombre de colonnes de A (qui est 3) est égal au nombre de lignes de B (qui est aussi 3). Le résultat sera une matrice de type $(2,2)$. On a donc

$$AB = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Les coefficients de C sont obtenus en effectuant le produit scalaire des lignes de A avec les colonnes de B,

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0 \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 0 \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0 \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

On obtient

$$AB = C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 \text{ (matrice carrée nulle).}$$

D'autre part, le produit BA est également défini, car B est de type $(3,2)$ et A de type $(2,3)$, ce qui donne une matrice de type $(3,3)$, notée D,

$$BA = D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 \\ 7 & -5 & -2 \\ 7 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cet exemple illustre plusieurs faits importants sur le produit matriciel :
(a) Le produit AB peut être la matrice nulle, même si ni A ni B ne sont nulles.
(b) Le produit matriciel n'est pas commutatif en général, c'est-à-dire que $AB \neq BA$. Ici, $AB = O_2 \neq BA$.

À partir des propriétés bien connues des opérations algébriques sur les applications linéaires, on peut établir des propriétés analogues pour les matrices.

Proposition 3.4.4 *Le produit matriciel vérifie les propriétés fondamentales suivantes*
1. Distributivité à gauche,

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \forall B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

2. Distributivité à droite,

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

3. Compatibilité avec la multiplication par un scalaire,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : (\lambda A) \cdot B = \lambda(A \cdot B) = A \cdot (\lambda B).$$

4. Associativité du produit matriciel,

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}) : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

5. Élément neutre à gauche/droite,

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) : A \cdot I_n = I_m \cdot A = A.$$

6. Produit par la matrice nulle,

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) : A \cdot O_{n,p} = O_{m,p} \text{ et } O_{p,m} \cdot A = O_{p,n}.$$

7. Transposition d'un produit,

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) :^t (A \cdot B) =^t B \cdot^t A.$$

Preuve. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ des matrices dont les tailles seront précisées à chaque propriété. Les sommes et produits ci-dessous sont des sommes et produits dans $\mathbb{K}$.
1. Distributivité à gauche]. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, et $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$,

$$(A(B+C))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(b_{kj} + c_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \text{ (distributivité dans } \mathbb{K}) = (AB)_{ij} + (AC)_{ij}.$$

Comme cette égalité vaut pour tous i, j, on en déduit

$$A(B+C) = AB + AC.$$

telle que la notation $(A(B+C))_{ij}$ représente le coefficient de la matrice $A(B+C)$ situé à la $i-ème$ ligne A et la $j-ème$ colonne.
2. Distributivité à droite. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, et $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$,

$$((A+B)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik})\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj} = (AC)_{ij} + (BC)_{ij}.$$

D'où

$$(A+B)C = AC + BC.$$

3. Compatibilité avec la multiplication par un scalaire. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$,

$$((\lambda A)B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_{ik})\, b_{kj} = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \lambda(AB)_{ij}.$$

De même,

$$(A(\lambda B))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\lambda b_{kj}\right) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \lambda(AB)_{ij}.$$

Ainsi

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

4. Associativité du produit matriciel. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$**.** Fixons $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, \ldots, r\}$. Par définition des produits matriciels,

$$\begin{aligned}((AB)C)_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}\right) c_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{\ell k}c_{kj}\right) \text{ (réarrangement des sommes finies)}\\ &= \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\,(BC)_{\ell j} = (A(BC))_{ij}.\end{aligned}$$

Comme ceci vaut pour tous i, j, on conclut

$$(AB)C = A(BC).$$

(l'échange d'ordre des sommes est permis car il s'agit de sommes finies dans $\mathbb{K}$.)
5. Elément neutre à gauche/droite. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Rappel

$$(I_n)_{kj} = \delta_{kj},$$

(delta de Kronecker). Pour tout i, j

$$(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(I_n)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\delta_{kj} = a_{ij}.$$

et

$$(I_mA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (I_m)_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}\,a_{kj} = a_{ij}.$$

D'où

$$AI_n = I_mA = A.$$

6. Produit par la matrice nulle. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, pour tout i, j,

$$\left(AO_{n,p}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}},$$

et

$$\left(O_{p,m}A\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} 0_{\mathbb{K}} \cdot a_{kj} = 0_{\mathbb{K}}.$$

D'où les égalités annoncées.
7. Transposition d'un produit. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$. Par définition,

$$\left({}^t(AB)\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}.$$

D'autre part,

$$\left({}^tB{}^tA\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tB)_{ik}({}^tA)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk}.$$

Les deux sommes sont identiques terme à terme, donc

$${}^t(AB) =^t B^tA.$$

Toutes ces preuves s'appuient uniquement sur les propriétés élémentaires de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{K}$ et sur la définition terme à terme du produit matriciel. La non-commutativité du produit matriciel se déduit simplement : dans la plupart des cas AB et BA n'ont pas la même taille, et même lorsqu'ils sont définis et de même taille on a en général $AB \neq BA$. □

Proposition 3.4.5 *Soient $D = (d_{ij})$ et $D' = (d'_{ij})$ deux matrices diagonales d'ordre n à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. Alors*
1. Le produit $A = D \cdot D'$ est une matrice diagonale.
2. Les coefficients diagonaux de A sont donnés par

$$\forall i \in \{1, ..., n\} : a_{ii} = d_{ii}d'_{ii}.$$

Autrement dit

$$A = \begin{pmatrix} d_{11}d'_{11} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & d_{22}d'_{22} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & d_{ii}d'_{ii} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & d_{nn}d'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Preuve. Par définition d'une matrice diagonale, pour tout couple d'indices (i, j) avec $i \neq j$, on a

$$d_{ij} = 0_{\mathbb{K}}, d'_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Soit $A = D \cdot D' = (a_{ij})$ le produit. Les coefficients de A sont définis par la règle générale du produit matriciel

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} d'_{kj}.$$

Cas 1 : $i \neq j$. Comme D est diagonale, $d_{ik} = 0_{\mathbb{K}}$ pour tout $k \neq i$ et comme D' est diagonale, $d'_{kj} = 0_{\mathbb{K}}$ pour tout $k \neq j$.
Or ici $i \neq j$. Donc, il n'existe aucun indice k qui soit à la fois i et j. Ainsi tous les termes de la somme sont nuls, donc

$$a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Cela montre que les coefficients hors diagonale de A sont nuls.
Cas 2 : $i = j$. La somme se réduit à un seul terme correspondant à $k = i$. On obtient

$$a_{ii} = d_{ii}\, d'_{ii}.$$

On en conclut que A est bien une matrice diagonale, dont la diagonale est le produit terme à terme des diagonales de D et D'. □

Après avoir défini le produit de matrices, il est naturel de considérer le cas particulier où une même matrice est multipliée plusieurs fois par elle-même. C'est ce qui conduit à la notion de puissances d'une matrice. Cette opération n'a de sens que pour les matrices carrées, puisque le produit $A \cdot A$ n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal à son nombre de lignes.

Définition 3.4.4 ***(Puissances d'une matrice carrée)***
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On définit les puissances entières naturelles de A de la manière suivante

$$\begin{cases} A^0 = I_n, \text{ où } I_n \text{ est la matrice identité d'ordre } n, \\ \forall k \geqslant 1 : A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ fois}} = A \cdot A^{k-1} = A^{k-1} \cdot A, \end{cases}$$

autrement dit, A^k est le produit de A par elle-même k fois.

Exemple 3.4.4
1. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée d'ordre n définie par

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., n\} : a_{ij} = 1.$$

Autrement dit, A est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Nous allons montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : A^k = n^{k-1} A.$$

Le résultat est vrai pour $k = 1$, puisque

$$A^1 = A = n^0 A.$$

et de même pour $k = 2$, car chaque coefficient de A^2 est la somme de n produits de 1 par 1, donc vaut n. Ainsi,

$$A^2 = nA.$$

Supposons que pour un certain $k \geqslant 1$, on ait

$$A^k = n^{k-1}A.$$

Alors

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = A \cdot (n^{k-1}A) = n^{k-1}(A \cdot A) = n^{k-1}(nA) = n^k A.$$

Par le principe de récurrence, la formule est vraie pour tout entier $k \geqslant 1$.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice carrée d'ordre 3 définie par

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons ses premières puissances,

$$B^0 = I_3, B^1 = B, B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

Ainsi, on constate que la suite des puissances de B s'annule à partir de l'exposant 3. On a donc

$$\forall k \geqslant 3 : B^k = O_3.$$

3. Puissance d'une matrice diagonale. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale, c'est-à-dire

$$\forall i \neq j : a_{ij} = 0_{\mathbb{K}},$$

et A s'écrit sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & a_{22} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant la puissance A^k pour un entier $k \in \mathbb{N}$. Comme le produit de deux matrices diagonales est encore une matrice diagonale et sur la diagonale principale, chaque coefficient est simplement multiplié par lui-même à chaque étape de la puissance. Ainsi, le coefficient situé en position (i, i) devient a_{ii}^k. On obtient donc

$$\forall k \in \mathbb{N} : A^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & a_{22}^k & \cdots & 0 & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & a_{ij}^k & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & a_{nn}^k \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, si A est diagonale, alors A^k est aussi diagonale, et ses coefficients diagonaux sont les puissances $k-$ièmes des coefficients diagonaux de A.

On vérifie facilement les propriétés suivantes.

Proposition 3.4.6 ***(Propriétés fondamentales des puissances matricielles)*** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n, alors*
1. Produit de puissances (Addition des exposants),

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N} : A^{k_1} \cdot A^{k_2} = A^{k_1+k_2}.$$

2. Puissance d'une puissance (Multiplication des exposants),

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N} : \left(A^{k_1}\right)^{k_2} = A^{k_1 k_2}.$$

3. Puissance d'un multiple scalaire,

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall k \in \mathbb{N} : (\alpha \cdot A)^k = \alpha^k \cdot A^k.$$

4. Transposée d'une puissance (Commutativité avec la transposition),

$$\forall k \in \mathbb{N} :^t \left(A^k\right) = \left({}^t A\right)^k.$$

Définition 3.4.5 ***(Matrice nilpotente).***
1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$A^k = O_n,$$

où O_n désigne la matrice nulle d'ordre n.
2. Le plus petit entier k satisfaisant cette condition est appelé l'indice de nilpotence de A, et se note $\nu(A)$,

$$\nu(A) = \min\{k \in \mathbb{N}^* : A^k = O_n\}.$$

Exemple 3.4.5
1. Soit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

On a successivement

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

Ainsi, B est nilpotente d'indice $\nu(B) = 3$.
2. Toute matrice triangulaire stricte (supérieure ou inférieure) est nilpotente d'indice de nilpotence inférieure ou égale à sa taille.

Formule du binôme de Newton . La formule du binôme de Newton est l'une des identités les plus importantes en algèbre. Elle décrit la manière de développer une puissance d'une somme et s'écrit, pour deux scalaires a et b, sous la forme

$$(a + b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k}, m \in \mathbb{N}.$$

Cette relation repose sur la commutativité de la multiplication des nombres réels ou complexes. Dans le cadre matriciel, la multiplication n'est pas commutative en général, ce qui empêche d'appliquer directement la formule du binôme. Néanmoins, lorsque deux matrices A et B commutent, c'est-à-dire lorsque $AB = BA$, elles se comportent de manière analogue aux scalaires pour le produit. Dans ce cas particulier, la formule du binôme de Newton reste valable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Elle permet alors de développer $(A + B)^m$ comme une somme de termes de la forme $A^k B^{m-k}$, chacun pondéré par le coefficient binomial correspondant.

Cette propriété joue un rôle essentiel dans de nombreux calculs matriciels, notamment pour les matrices diagonales ou triangulaires, ainsi que dans l'étude des polynômes de matrices.

Considérons deux matrices carrées A et B, toutes les deux d'ordre n. Commençons par développer l'expression $(A+B)^2$. On a

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Si on suppose que les matrices A et B commutent alors on a

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Poursuivons en développant l'expression $(A+B)^3$. On a

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B)\cdot(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A^2+AB+BA+B^2)\\ &= A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3.\end{aligned}$$

Si on suppose que les matrices A et B commutent alors on a

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

Plus généralement, on a le résultat suivant qui se démontre par récurrence sur le même principe.

Définition 3.4.6 ***(Formule du binôme de Newton dans $M_n(K)$)***
Soient A et B deux matrice carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si les matrices A et B commutent, autrement dit si $AB = BA$, alors

$$\forall m \in \mathbb{N} : (A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k B^{m-k}$$

où

$$C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!k!}$$

désigne le coefficient binomial.

Preuve. La démonstration repose sur un raisonnement par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$. □

Exemple 3.4.6 *Soit $m \in \mathbb{N}$, calculer la matrice A^m où*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

On observe que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2 + B, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que

$$B^2 = O_2.$$

$$\forall k \geqslant 2 : B^k = O_2.$$

Comme I_2 et B commutent ($I_2B = BI_2 = B$), on peut appliquer la formule du binôme

$$A^m = (I_2+B)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k B^k I_2^{m-k} = \sum_{k=0}^{1} C_m^k B^k = I_2 + mB.$$

car dans la somme le terme B^k est nul si $k \geqslant 2$. On a donc

$$A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.4.4.1 Inverse d'une matrice carrée

L'inverse d'une matrice carrée est une notion importante en algèbre linéaire. On peut la comparer à l'inverse d'un nombre. Par exemple, pour un nombre non nul, il existe un autre nombre qui, multiplié par le premier, donne un. De la même manière, une matrice carrée est dite inversible lorsqu'il existe une autre matrice qui, multipliée par elle, donne la matrice identité.

L'inverse d'une matrice est très utile, car il permet de résoudre des systèmes d'équations linéaires, de changer de base et d'étudier les applications mathématiques plus complexes.

Définition 3.4.7 ***(Inverse d'une matrice carrée)***
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n.
1. On dit que la matrice A est inversible (ou non-singulière, régulière) si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n,$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n.
2. Si A est inversible, alors B est unique et est appelée inverse de A, notée $B = A^{-1}$.
3. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Exemple 3.4.7 *1. Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Cette matrice est inversible, car il existe une matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

tel que

$$AB = BA = I_2.$$

L'inverse de A est donc

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale, c'est-à-dire que

$$\forall i \neq j : a_{ij} = 0_{\mathbb{K}},$$

Alors, A est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} : a_{ii} \neq 0_{\mathbb{K}},$$

Dans ce cas, l'inverse de A, noté A^{-1} , est également une matrice diagonale où les éléments diagonaux sont les inverses des éléments diagonaux de A,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & a_{22}^{-2} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & a_{ij}^{-1} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.4.4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
1. A est inversible à gauche ; c'est-à-dire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$
2. A est inversible à droite ; c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC = I_n$.
3. A est inversible.
Ainsi, pour une matrice carrée, le fait d'être inversible à gauche ou à droite implique nécessairement l'existence d'un inverse unique, qui joue simultanément le rôle d'inverse à gauche et d'inverse à droite. En d'autres termes, l'inversibilité unilatérale suffit à assurer l'inversibilité complète.

Proposition 3.4.7
*1. **Inverse de l'inverse.** Si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible alors sa matrice inverse est elle-même inversible et*

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

*2. **Inverse d'un produit.** Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices inversibles, alors la matrice produit $A \cdot B$ est inversible et son inverse, la matrice $(A \cdot B)^{-1}$ est donnée par*

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

*3. **Transposée d'une matrice inversible.** Si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible alors sa matrice transposée est elle-même inversible et l'inverse de la transposée de A est donné par*

$${}^t\left(A^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1}.$$

*4. **Puissances négatives**. Pour toute matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout entier $m \geqslant 0$, on a*

$$A^{-m} = \left(A^{-1}\right)^m.$$

*5. **Loi des exposants.** Pour tout $m, k \in \mathbb{Z}$, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, on a*

$$A^{m+k} = A^m \cdot A^k.$$

Autrement dit l'application $n \longmapsto A^n$ est un morphisme de groupes $(\mathbb{Z}, +) \to (GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$.

Preuve. On remarque, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet à la fois un inverse à gauche B (i.e. $BA = I_n$) et un inverse à droite C (i.e. $AC = I_n$), alors $B = C$. En effet

$$B = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Ainsi, lorsqu'une matrice carrée possède un inverse à gauche et un inverse à droite, ces inverses sont égaux : on parle de l'inverse unique A^{-1}.
1. Par définition de l'inverse, on a

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Donc A est à la fois un inverse à gauche et un inverse à droite de A^{-1}. Par unicité de l'inverse, l'inverse de A^{-1} est A. Autrement dit $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Posons

$$C = B^{-1}A^{-1}.$$

Calculons

$$(AB)C = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$

et de même

$$C(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

Ainsi C est à la fois inverse à gauche et inverse à droite de AB. Par unicité de l'inverse,

$$C = (AB)^{-1}.$$

Donc

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(on a utilisé l'associativité de la multiplication matricielle et l'identité $BB^{-1} = I_n$, etc.)
3. Pour toutes matrices X, Y de dimensions compatibles,

$${}^t(XY) =^t Y^t X.$$

En particulier, si A est inversible avec A^{-1}, on a

$$({}^tA)^t(A^{-1}) =^t (A^{-1}A) =^t I_n = I_n,$$

et aussi

$${}^t(A^{-1})\,({}^tA) =^t (AA^{-1}) =^t I_n = I_n.$$

Donc ${}^t(A^{-1})$ est inverse à gauche et à droite de ${}^tA$, d'où[1]

$$({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1}).$$

4. Pour $m = 0$ la formule est vraie (les deux membres valent I_n). Pour $m \geqslant 1$, notons d'abord que A et A^{-1} commutent, en effet

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

On montre par récurrence que si X et Y commutent alors $(XY)^m = X^mY^m$; en appliquant cela à $X = A$ et $Y = A^{-1}$ on obtient

$$I_n = (AA^{-1})^m = A^m(A^{-1})^m.$$

De même

$$(A^{-1})^m A^m = I_n.$$

Ainsi $(A^{-1})^m$ est l'inverse de A^m, donc

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m.$$

Par définition

$$A^{-m} = (A^m)^{-1},$$

d'où

$$A^{-m} = (A^{-1})^m.$$

5. On définit les puissances entières de A par

$$\begin{cases} A^0 = I_n, \\ \text{pour } n > 0 : A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A \ (n \text{ facteurs}), \\ \text{pour } n < 0 : A^n = (A^{-1})^{-n}. \end{cases}$$

On raisonne par analyse de cas.
(a) **Cas $m, k \geqslant 0$.** C'est la loi usuelle des puissances d'un entier naturel, démontrée par récurrence

$$A^{m+k} = A^m A^k.$$

(b) Cas $m, k \leqslant 0$. Écrivons $m = -p$, $k = -q$ avec $p, q \geqslant 0$. Alors

$$A^{m+k} = A^{-(p+q)} = (A^{-1})^{p+q} = (A^{-1})^p(A^{-1})^q = A^m A^k.$$

(c) Cas $m \geqslant 0$, $k < 0$. Posons $k = -p$ avec $p > 0$. On veut montrer que

$$A^{m-p} = A^m A^{-p}.$$

• *Si* $m \geqslant p$, posons $r = m - p \geqslant 0$. Alors

$$A^m A^{-p} = A^{p+r} A^{-p} = (A^r A^p) A^{-p} = A^r (A^p A^{-p}) = A^r I_n = A^r = A^{m-p}.$$

(On a utilisé que les puissances de A commutent entre elles.)
• Si $m < p$, posons $s = p - m > 0$. Alors

$$A^m A^{-p} = A^m A^{-(m+s)} = (A^m A^{-m}) A^{-s} = I_n A^{-s} = A^{-s} = A^{m-p}.$$

Dans les deux sous-cas on obtient

$$A^m A^k = A^{m+k}.$$

(d) Cas $m < 0$, $k \geqslant 0$. Symétrique du cas précédent.
Ces cas couvrent toutes les possibilités pour m et k. On conclut donc que

$$A^{m+k} = A^m A^k : \forall m, k \in \mathbb{Z}.$$

□

Proposition 3.4.8 *L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, muni de la multiplication matricielle, forme un groupe, appelé groupe linéaire général d'ordre n sur $\mathbb{K}$.*

Preuve. Il faut vérifier les quatre axiomes d'un groupe pour l'ensemble $G = GL_n(\mathbb{K})$ muni de la loi $\cdot$: fermeture, associativité, élément neutre et existence d'inverses.
1. **Fermeture.** Si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ alors A et B sont inversibles. On vérifie que le produit AB est inversible et que son inverse est $B^{-1}A^{-1}$, en effet

$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$

et de même

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n.$$

Donc $AB \in GL_n(\mathbb{K})$. Ainsi $GL_n(\mathbb{K})$ est stable par multiplication.
2. **Existence d'un élément neutre.** La matrice identité I_n appartient à $GL_n(\mathbb{K})$ (c'est son propre inverse). Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a

$$I_n A = A I_n = A.$$

Donc I_n est l'élément neutre de la loi de multiplication.
3. **Associativité.** La multiplication de matrices est associative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour toutes $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$(AB)C = A(BC).$$

Cette propriété est héritée de la définition du produit matriciel (ou se vérifie par calcul des composantes). Par conséquent l'associativité tient sur $GL_n(\mathbb{K})$ aussi.
4. **Existence des inverses.** Par définition d'éléments de $GL_n(\mathbb{K})$, chaque $A \in GL_n(\mathbb{K})$ possède un inverse $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il reste à noter que cet inverse appartient lui-même à $GL_n(\mathbb{K})$ (puisqu'il possède pour inverse A). L'inverse est unique : si B et C sont deux inverses de A, alors

$$B = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

Ainsi les quatre axiomes d'un groupe sont satisfaits, donc $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$ est un groupe. $\square$

Le rang d'une matrice représente le nombre maximal de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes, ce qui correspond à la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces lignes ou colonnes. Cette notion joue un rôle essentiel dans l'étude des systèmes d'équations linéaires, car elle permet de déterminer si un système admet une solution, et combien de solutions il peut avoir.

La notion de rang a déjà été définie pour une famille finie de vecteurs. Cela nous avait alors permis de définir le rang d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ comme la dimension du sous-espace $Im(f)$ de F, à la condition que E soit de dimension finie.

Nous définissons maintenant le rang d'une matrice rectangulaire.

Définition 3.4.8 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de taille (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle rang de A, et on le note $rg(A)$ ou $rang(A)$, le rang de la famille de ses vecteurs colonnes, ou de manière équivalente, le rang de la famille de ses vecteurs lignes. Ainsi, on a*

$$rg(A) = rg(C_1, C_2, \ldots, C_n) = rg(L_1, L_2, \ldots, L_m),$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ désignent les colonnes de A et $L_1, L_2, \ldots, L_m$ ses lignes. En d'autres termes, le rang d'une matrice correspond au nombre maximal de colonnes ou de lignes linéairement indépendantes.

Exemple 3.4.8
1. Considérons la matrice $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ses colonnes sont

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux colonnes correspondent aux vecteurs

$$c_1 = (2, 4, 0), c_2 = (2, 0, 1) \in \mathbb{R}^3.$$

Comme ces deux vecteurs sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\{C_1, C_2\}$ est libre. On en déduit que le rang de A est

$$rg(A) = 2.$$

On a le résultat suivant.

Proposition 3.4.9
1. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors
(a) Le rang de A vérifie

$$rg(A) \leqslant \min\{m, n\}.$$

(b) Le rang de A est égal au rang de sa transposée,

$$rg(A) = rg({}^tA).$$

(c) Le rang de A est nul si et seulement si A est la matrice nulle,

$$rg(A) = 0 \Longleftrightarrow A = O_{m,n}.$$

2. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n, alors A est inversible si et seulement $rg(A) = n$.

Le rang d'une matrice est invariant par multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible. Autrement dit, multiplier une matrice par une matrice inversible (que ce soit à gauche ou à droite) ne modifie pas son rang.

Proposition 3.4.10 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice rectangulaire de type (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors*
1. Si $B \in GL_m(\mathbb{K})$ alors
$$rg(B \cdot A) = rgA.$$
2. Si $C \in GL_n(\mathbb{K})$ alors
$$rg(A \cdot C) = rgA.$$
3. Si $B \in GL_m(\mathbb{K})$ et $C \in GL_n(\mathbb{K})$ alors
$$rg(B \cdot A \cdot C) = rgA.$$

3.5 Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice

Dans l'étude des matrices et la résolution des systèmes d'équations linéaires, il est souvent nécessaire de transformer une matrice afin de la simplifier, tout en conservant certaines de ses propriétés fondamentales comme le rang ou l'ensemble des solutions associées. Pour cela, on utilise ce que l'on appelle les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Ces opérations consistent à modifier une matrice de manière simple et réversible. Elles sont de trois types : échanger deux lignes (ou deux colonnes), multiplier une ligne (ou une colonne) par un nombre non nul, ou encore ajouter à une ligne (ou à une colonne) un multiple d'une autre. Ces transformations, bien que très simples, sont à la base de méthodes puissantes comme la réduction des matrices par la méthode du pivot de Gauss, et permettent d'étudier efficacement les propriétés des matrices et des systèmes linéaires.

Définition 3.5.1 *Soient $m, n \geqslant 2$ deux entiers (c'est-à-dire $(m, n) \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}^2$), et soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.*
*1. On appelle **opérations élémentaires** sur les colonnes de A (abrégé : OEC) les transformations suivantes :*
*(a) **Permutation de deux colonnes :** Échange entre elles de deux colonnes de A, c'est-à-dire pour $i \neq j$, on effectue l'opération*
$$C_i \leftrightarrow C_j.$$
*(b) **Multiplication d'une colonne par un scalaire non nul :** Remplacement d'une colonne C_j de A par $\alpha \cdot C_j$ où $\alpha \in \mathbb{K}^*$, c'est-à-dire*
$$C_j \longleftarrow \alpha \cdot C_j.$$
*(c) **Addition d'une colonne à une autre :** Remplacement d'une colonne C_j de A par une combinaison linéaire de colonnes C_j et C_k où $j \neq k$, c'est-à-dire*
$$C_j \longleftarrow \alpha \cdot C_j + \beta C_k, \alpha, \beta \in \mathbb{K}^*.$$
*2. **Opérations élémentaires sur les lignes** (abrégé : OEL). De manière analogue, on définit les opérations élémentaires sur les lignes de A, qui suivent les mêmes principes que celles définies pour les colonnes (qui sont les opérations élémentaires sur les colonnes de la transposée de A). Elles*

consistent à :
(a) Echage entre elles de deux lignes
$$L_i \leftrightarrow L_j, i \neq j.$$

(b) Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul $\lambda \in \mathbb{K}^*$ *;*
$$L_i \longleftarrow \lambda \cdot L_i.$$

(c) Remplacement d'une ligne L_i *de* A *par une combinaison linéaire de lignes* L_i *et* L_k *où* $i \neq k$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$, *c'est-à-dire*
$$L_i \longleftarrow \alpha \cdot L_i + \beta \cdot L_k.$$

Remarque 3.5.1 *Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice ne changent pas son rang. Autrement dit, si* $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *se déduit de* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *par une suite d'opérations élémentaires, alors*
$$rg(A) = rg(B).$$

Exemple 3.5.1 *Soit* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *la matrice carrée d'ordre* 3 *définie par*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

On effectue les opérations élémentaires sur les ligne de A *suivantes*
$$\begin{array}{lll} L_2 & \longleftarrow & L_2 - L_1 \text{ (On remplace la ligne 2 par la différence entre la ligne 2 et de la ligne 1)} \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - L_1 \text{ (On remplace la ligne 3 par la différence entre la ligne 3 et de la ligne 1)} \end{array}$$

On obtient
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on applique l'opération suivante
$$L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2 \text{ (On remplace la ligne 3 par la combinaison linéaire } L_3 - 2L_2\text{)}$$

Ce qui nous permet d'obtenir la matrice
$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une matrice triangulaire supérieure.

3.6 Matrices d'une famille de vecteurs, et d'une application linéaire

Dans un espace vectoriel, on peut représenter les vecteurs et les applications linéaires à l'aide de matrices. Cela permet de passer d'objets abstraits à des calculs concrets. La matrice d'une famille de vecteurs est construite en choisissant une base de l'espace. Chaque vecteur de la famille s'écrit alors comme combinaison des vecteurs de cette base. Les coefficients obtenus sont placés dans une colonne de la matrice. Ainsi, la matrice rassemble tous les vecteurs de la famille et permet de savoir, par exemple, s'ils sont liés ou indépendants.

De la même façon, une application linéaire peut être représentée par une matrice. Pour cela, on choisit une base dans l'espace de départ et une base dans l'espace d'arrivée. On calcule ensuite l'image de chaque vecteur de la base de départ, et on écrit cette image dans la base d'arrivée. Les coordonnées trouvées forment les colonnes de la matrice de l'application. Grâce à cette représentation, appliquer l'application linéaire à un vecteur revient simplement à faire un produit matriciel.

3.6.1 Matrice d'une famille de vecteurs relativement à une base

Dans un espace vectoriel, la notion de base joue un rôle essentiel : elle permet de décrire chaque vecteur à l'aide de coordonnées. Ces coordonnées indiquent comment un vecteur se construit à partir des vecteurs de la base. En les disposant les unes sous les autres, on obtient la matrice d'un vecteur relativement à cette base, qui n'est autre qu'un vecteur-colonne.

Lorsqu'on considère plusieurs vecteurs à la fois, on peut regrouper leurs coordonnées dans un seul tableau. Chaque vecteur fournit alors une colonne, et l'ensemble de ces colonnes forme la matrice de la famille de vecteurs relativement à la base choisie. Cette matrice permet d'étudier la famille de manière compacte et efficace, notamment pour déterminer si les vecteurs sont indépendants ou non.

Ainsi, la matrice d'un vecteur traduit sa position dans une base donnée, tandis que la matrice d'une famille rassemble en une seule écriture les coordonnées de plusieurs vecteurs. Ces représentations facilitent l'analyse et les calculs en algèbre linéaire.

Définition 3.6.1 ***(Matrice d'un vecteur relativement à une base)***
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie m, et soit $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ une base de E. Un vecteur $v \in E$ peut toujours s'écrire de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_me_m,$$

où les scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{K}$ sont appelés les coordonnées de v dans la base B.
(a) On appelle matrice du vecteur v relativement à la base B, et l'on note $\underset{B}{Mat}(v)$, la matrice colonne formée par ses coordonnées

$$\underset{B}{Mat}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}).$$

(b) Lorsque $A = \underset{B}{Mat}(v)$, on dit que A est la représentation matricielle du vecteur v dans la base B.

Exemple 3.6.1 *Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. Soit le vecteur $v = (1, -2, 3) \in \mathbb{R}^3$. Ses coordonnées dans la base canonique sont naturellement données par les composantes du vecteur 1, -2 et 3. La matrice de v relativement à la base B est donc*

$$\underset{B}{Mat}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Autrement dit, le vecteur x est représenté dans la base canonique par la matrice colonne ci-dessus.

Définition 3.6.2 ***(Matrice d'une famille de vecteurs relativement à une base)*** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie m sur un corps $\mathbb{K}$, et soit $B = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ une base de E. Considérons une famille de vecteurs $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ appartenant à E. Chaque vecteur v_j de la famille peut être exprimé de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base*

$$\forall j \in \{1, 2, ..., n\} : v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i,$$

où les scalaires $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ sont appelés les coordonnées de v_j dans la base B. On appelle matrice de la famille $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ relativement à la base B, et on la note

$$\underset{B}{Mat}(v_1, v_2, ..., v_n),$$

la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ obtenue en disposant dans chaque colonne les coordonnées d'un vecteur de la famille. Ainsi, la $j-$ème colonne correspond exactement aux coordonnées de v_j dans la base B. On a donc

$$A = \underset{B}{Mat}(v_1, v_2, ..., v_n) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_j & \cdots & v_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_m \end{array} \end{array}.$$

Remarque 3.6.1
1. Si la famille se réduit à un seul vecteur ($n = 1$), on retrouve la définition de la matrice-colonne d'un vecteur relativement à une base.
2. Cette représentation matricielle permet d'étudier facilement les propriétés de la famille, comme l'indépendance linéaire, l'engendrement ou la recherche d'un système de vecteurs de base.

Exemple 3.6.2 *On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. Soient les vecteurs*

$$v_1 = (-1, 3, 0), v_2 = (0, -1, 5), v_3 = (-3, 2, 1), v_4 = (1, 0, -1).$$

La matrice de la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ relativement à la base canonique s'écrit en assemblant les coordonnées de chaque vecteur en colonne

$$A = \underset{B}{Mat}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.6.1 ***(Propriétés de la matrice d'une famille de vecteurs).*** *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension m, $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ une base de E, et $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset E$ une famille de vecteurs de E. On note*

$$A = \underset{B}{Mat}(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),$$

la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des v_j dans la base B. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées
1. ***Somme de familles de vecteurs.*** *Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset E$ est une autre famille, alors*

$$\underset{B}{Mat}(v_1 + u_1, \ldots, v_n + u_n) = \underset{B}{Mat}(v_1, \ldots, v_n) + \underset{B}{Mat}(u_1, \ldots, u_n).$$

Autrement dit, la matrice de la somme se déduit par addition des matrices colonnes.
2. ***Multiplication par un scalaire.*** *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\underset{B}{Mat}(\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n) = \lambda \cdot \underset{B}{Mat}(v_1, \ldots, v_n).$$

Autrement dit, multiplier chaque vecteur par λ revient à multiplier toute la matrice par λ.

Preuve. Soit E un espace vectoriel de dimension m sur un corps $\mathbb{K}$, et $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ une base de E. Considérons deux familles de vecteurs

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \subset E, \{u_1, \ldots, u_n\} \subset E,$$

et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. On note les matrices associées

$$A = \underset{B}{Mat}(v_1, \ldots, v_n), U = \underset{B}{Mat}(u_1, \ldots, u_n).$$

Chaque vecteur s'écrit en coordonnées dans la base B, pour chaque $j \in \{1, ..., n\}$

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i, u_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} e_i,$$

où $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{K}$.
1. Somme de familles de vecteurs. On considère la famille

$$\{v_1 + u_1, \ldots, v_n + u_n\}.$$

Pour chaque j, on a

$$v_j + u_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij}) e_i.$$

Ainsi, les coordonnées de $v_j + u_j$ dans la base B sont $a_{ij} + b_{ij}$.
La matrice associée est donc

$$\underset{B}{Mat}(v_1 + u_1, \ldots, v_n + u_n) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Mais ceci n'est rien d'autre que la somme des matrices $A + U$,

$$\underset{B}{Mat}(v_1 + u_1, \ldots, v_n + u_n) = A + U.$$

Ce qui prouve la propriété pour la somme.
2. Multiplication par un scalaire. Considérons la famille

$$\{\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n\}.$$

Pour chaque j, on a

$$\lambda v_j = \lambda \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda a_{ij}) e_i.$$

Donc les coordonnées de λv_j sont λa_{ij}. La matrice associée est

$$\underset{B}{Mat}(\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = \lambda A.$$

Ce qui prouve la propriété pour la multiplication par un scalaire. $\square$

Exemple 3.6.3
1. ***Somme de familles de vecteurs.*** *Soit $E = \mathbb{R}^3$ avec la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, et deux familles de vecteurs*

$$v_1 = (1,2,0)\,, v_2 = (0,1,3)\,, u_1 = (2,0,1)\,, u_2 = (-1,1,1)\,.$$

Les matrices associées à ces familles sont

$$\underset{B}{Mat}(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \underset{B}{Mat}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule la somme des vecteurs correspondants

$$v_1 + u_1 = (3,2,1)\,, v_2 + u_2 = (-1,2,4)\,.$$

La matrice de la somme est donc

$$\underset{B}{Mat}(v_1 + u_1, v_2 + u_2) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vérification par addition des matrices

$$\underset{B}{Mat}(v_1, v_2) + \underset{B}{Mat}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Propriété confirmée la matrice de la somme correspond à la somme des matrices.
2. ***Multiplication par un scalaire.*** *Soit $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$ et la famille de vecteurs*

$$v_1 = (1,-1,0)\,, v_2 = (2,0,1)\,.$$

Donc la matrice associée à cette famille est

$$\underset{B}{Mat}(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On multiplie chaque vecteur par $\lambda = 2$,

$$2v_1 = (2,-2,0)\,, 2v_2 = (4,0,2)\,.$$

La matrice associée à cette nouvelle famille est

$$\underset{B}{Mat}(2v_1, 2v_2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \underset{B}{Mat}(v_1, v_2).$$

Propriété confirmée : la multiplication des vecteurs par un scalaire se traduit par la multiplication de la matrice par le même scalaire.

Remarque 3.6.2 $\underset{B}{Mat}(x)$ *représente les coordonnées du vecteur x dans la base B. Il y a bien sûr une correspondance biunivoque entre les vecteurs de E et les matrices colonnes de taille n (qui contiennent les composantes de ces vecteurs dans une base fixée). De plus, « effectuer des calculs avec ces vecteurs» correspond à « effectuer des calculs avec ces matrices ». C'est le sens de la proposition suivante.*

Proposition 3.6.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit B une base de E. L'application*

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & f(x) = \underset{B}{Mat}(x), \end{array}$$

qui à un vecteur associe la matrice colonne de ses coordonnées dans la base B est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. En particulier, tout $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Preuve.
Étape 1 : Montrons la linéarité de f. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Écrivons leurs coordonnées dans la base B,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i, x_i, y_i \in \mathbb{K}.$$

Alors

$$x + y = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i.$$

Par définition de $\underset{B}{Mat}$,

$$\underset{B}{Mat}(x+y) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underset{B}{Mat}(x) + \underset{B}{Mat}(y).$$

De même, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\underset{B}{Mat}(\lambda \cdot x) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \underset{B}{Mat}(x).$$

Donc f est linéaire.
Étape 2 : Montrons la bijectivité de f.
(a) **Injectivité.** Si $x \in \ker(f)$, alors

$$\underset{B}{Mat}(x) = 0_{n,1} \implies x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_{\mathbb{K}} \implies x = 0_E.$$

Donc f est injective.
(b) **Surjectivité.** On sait que

$$\dim(E) = n = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})).$$

Une application linéaire entre deux espaces de même dimension, injective, est automatiquement surjective. Donc f est bijective, donc un isomorphisme. □

3.6.2 Matrice d'une application linéaire dans des bases finies

Après avoir vu comment représenter une famille de vecteurs par une matrice, on peut maintenant élargir cette idée aux applications linéaires. De la même façon qu'un vecteur est décrit par ses coordonnées dans une base, une application linéaire peut être représentée par une matrice une fois que l'on a choisi une base dans l'espace de départ et une base dans l'espace d'arrivée. Cette représentation permet de transformer l'étude d'applications linéaires abstraites en calculs matriciels concrets et pratiques.

Définition 3.6.3 ***(Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases)***
Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n muni d'une base $B_E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension m muni d'une base $B_F = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Alors
1. On appelle matrice associée à f relativement aux bases B_E et B_F et on la note $\underset{B_E,B_F}{Mat}(f) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice de type (m, n) sur $\mathbb{K}$ dont la $j-$ème colonne est formée par les coordonnées de $f(e_j)$ l'image du $j-$ième vecteur e_j de la base de départ B_E par rapport à la base d'arrivée B_F. On note alors

$$A = \underset{B_E,B_F}{Mat}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_m \end{array} \end{array}.$$

Telle que, pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$, $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})$ les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base B_F, c'est-à-dire

$$\forall j \in \{1, 2, ..., n\} : f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i.$$

Autrement dit chaque colonne correspond à l'image d'un vecteur de la base B_E exprimée dans la base B_F. On dit que la matrice $\underset{B_E,B_F}{Mat}(f)$ représente f dans les bases B_E et B_F.
2. En particulier, si $E = F$ et $B_E = B_F$, on dit que

$$A = \underset{B_E}{Mat}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

est la matrice de f dans la base B_E.
3. Si $f = Id_E$ est l'application identité sur E, alors

$$\underset{B_E}{Mat}(Id_E) = I_n,$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n.

Remarque 3.6.3 *Lorsque l'on écrit $\underset{B_E,B_F}{Mat}(f) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, l'ordre des deux indices m et n dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est inversé par rapport à l'ordre des deux bases B_E et B_F dans $\underset{B_E,B_F}{Mat}(f)$. Le premier indice (ici m) correspond à la dimension de l'espace d'arrivée (ici F) et le second (ici n) à la dimension de l'espace de départ (ici E). Cette notation est, certes, malheureuse mais il s'agit de la notation usuelle.*

Exemple 3.6.4
1. Considérons $E = \mathbb{R}^2$ avec la base canonique $B_E = \{e_1, e_2\}$, $F = \mathbb{R}^3$ avec la base canonique $B_F = \{w_1, w_2, w_3\}$, et l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (x + y, 2x, y).$$

Pour construire la matrice associée à f, on calcule l'image des vecteurs de la base de départ et on écrit ces images dans la base d'arrivée

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0) = (1, 2, 0) = 1w_1 + 2w_2 + 0w_3 \\ f(e_2) &= f(0, 1) = (1, 0, 1) = 1w_1 + 0w_2 + 1w_3. \end{aligned}$$

On place ces coordonnées dans les colonnes de la matrice

$$A = \underset{B_{\mathbb{R}^2}, B_{\mathbb{R}^3}}{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

Ainsi, la première colonne correspond à $f(e_1)$, et la deuxième colonne correspond à $f(e_2)$. Cette matrice représente complètement l'application linéaire f dans les bases choisies et permet de calculer facilement $f(x, y)$ pour tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ via un produit matriciel.
2. Soit $E = F = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace des polynômes réels de degré $\leqslant 2$, muni de la base canonique $B = \{1, X, X^2\}$, et soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$f(P) = P'.$$

On calcule l'image des vecteurs de base

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2, \\ f(X) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2, \\ f(X^2) &= 2X = 0 \cdot 1 + 2 \cdot X + 0 \cdot X^2. \end{aligned}$$

On place ces coordonnées en colonnes

$$A = \underset{B}{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

3.6.2.1 Écriture matricielle d'une égalité vectorielle

L'intérêt de connaître la matrice associée à une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ (relativement à deux bases B_E et B_F) est de pouvoir réécrire une égalité vectorielle de la forme $y = f(x)$ sous la forme d'une égalité matricielle. Considérons la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ associée à l'application linéaire f relativement aux bases B_E et B_F, c'est-à-dire

$$A = \underset{B_E, B_F}{Mat}(f).$$

Décomposons le vecteur $x \in E$ et son image $y \in F$ par f dans leurs bases respectives $B_E = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ et $B_F = (e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$,

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \qquad y = \sum_{i=1}^{m} y_i e'_i,$$

et cherchons à exprimer chacune des coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_m$ du vecteur y en fonction des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ du vecteur x. Pour cela, commençons par calculer $f(x)$. On a

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i\right),$$

puisque pour $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i.$$

Par conséquent,

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}x_ja_{ij}e'_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}x_ja_{ij}e'_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)e'_i.$$

Nous en déduisons l'équivalence suivante

$$y=f(x)\iff\sum_{i=1}^{m}y_ie'_i=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)e'_i.$$

Par identification des coordonnées (la décomposition d'un vecteur dans une base étant unique), on obtient

$$\forall i\in\{1,2,\ldots,m\}:y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\\ \vdots\\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n.\end{cases}$$

Ces relations se nomment équations (ou représentation analytique) de f relativement à B_E et B_F. Ainsi, en notant X la matrice-colonne constituée des coordonnées $x_1,x_2,\ldots,x_n$ du vecteur x dans la base B_E,

$$X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),$$

et en notant Y la matrice-colonne constituée des coordonnées $y_1,y_2,\ldots,y_m$ du vecteur y dans la base B_F,

$$Y\in\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}),$$

le système d'équations linéaires précédent s'écrit sous la forme matricielle

$$Y=AX,$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

Donc on a le résultat suivant.

Proposition 3.6.3 *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies, avec* $\dim(E)=n$ *et* $\dim(F)=m$. *Soient B_E une base de E et B_F une base de F. Soit $f\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ une application linéaire, et $A=\underset{B_E,B_F}{Mat}(f)$ sa matrice relativement aux bases (B_E,B_F).*
Pour tout $x\in E$, notons
- *$X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice-colonne des coordonnées de x dans B_E,*
- *$Y\in\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ la matrice-colonne des coordonnées de $y=f(x)$ dans B_F.*

Alors on a l'équivalence fondamentale

$$f(x)=y\iff Y=AX.$$

Autrement dit,

$$\underset{B_F}{Mat}(f(x)) = \underset{B_E,B_F}{Mat}(f) \cdot \underset{B_E}{Mat}(x).$$

En particulier, si $E = F$ et $B_E = B_F$, cette formule s'écrit simplement

$$\underset{B_E}{Mat}(f(x)) = \underset{B_E}{Mat}(f) \cdot \underset{B_E}{Mat}(x).$$

Exemple 3.6.5 *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ une application linéaire (un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$). Sa matrice associée dans la base canonique B est*

$$A = \underset{B}{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soient

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Posons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire f est alors représentée par la relation matricielle

$$Y = AX \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Ce qui équivaut au système

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -x_1 + x_3 = y_2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = y_3 \end{cases}$$

On peut donc écrire f explicitement comme suit

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & f(x) = y = (y_1, y_2, y_3) = (2x_1 - x_2 + 3x_3, -x_1 + x_3, x_1 - 3x_2 + 2x_3). \end{array}$$

2. Prenons l'exemple de l'application linéaire $f : E \longrightarrow F$, avec E et F deux $\mathbb{K}-$espaces de dimensions respectives 2 et 3, définie par les images des vecteurs de la base de départ

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e'_1 + 3e'_2 - e'_3 \\ f(e_2) = e'_1 - e'_2 + 4e'_3, \end{cases}$$

où $B_E = \{e_1, e_2\}$ est une base de E et $B_F = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ une base de F. Soient $x \in E$ et $y = f(x)$. Décomposons x dans la base de départ B_E et y dans la base d'arrivée B_F. On a

$$x = x_1e_1 + x_2e_2, \qquad y = y_1e'_1 + y_2e'_2 + y_3e'_3.$$

Puisque l'application f est linéaire, on a

$$f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) = x_1(2e'_1 + 3e'_2 - e'_3) + x_2(e'_1 - e'_2 + 4e'_3)$$

$$= (2x_1 + x_2)e'_1 + (3x_1 - x_2)e'_2 + (-x_1 + 4x_2)e'_3.$$

L'égalité vectorielle $y = f(x)$ se réécrit alors

$$y_1 e'_1 + y_2 e'_2 + y_3 e'_3 = (2x_1 + x_2)e'_1 + (3x_1 - x_2)e'_2 + (-x_1 + 4x_2)e'_3.$$

En procédant à l'identification des coordonnées, on en déduit les expressions de y_1, y_2, y_3 en fonction de x_1, x_2

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 \\ y_2 = 3x_1 - x_2 \\ y_3 = -x_1 + 4x_2 \end{cases}.$$

Ce sont les équations de f relativement aux deux bases B_E et B_F. Ce système s'écrit aussi sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

3. Soient $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$ une application linéaire et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}),$$

est la matrice de f relative aux bases canoniques. Pour $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ on pose la colonne des coordonnées de P dans $B_{\mathbb{R}_2[X]}$,

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

On note $Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ la colonne des coordonnées de $y = f(P)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. La proposition affirme que

$$f(P) = y \iff Y = AX.$$

On obtient

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b + c \\ -a + b - c \end{pmatrix}.$$

Donc, en écrivant

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$y_0 = a - b + c, y_1 = -a + b - c.$$

Ainsi, par la proposition $f(P) = y$ se traduit par le polynôme

$$f(a + bX + cX^2) = y_0 + y_1 X = (a - b + c) + (-a + b - c)\, X = (a - b + c)\,(1 - X).$$

3.6.2.2 Interprétation des opérations sur les matrices

Les matrices servent à représenter les applications linéaires quand on choisit des bases dans les espaces vectoriels. Dans ce cadre, les opérations sur les applications linéaires (somme, produit par un scalaire, composition, identité, inverse) se traduisent directement par des opérations sur leurs matrices. Autrement dit, additionner deux applications, les multiplier par un scalaire, les composer ou encore prendre l'identité ou l'inverse, revient à effectuer les opérations analogues sur leurs matrices. Cela permet d'étudier les applications linéaires à travers des calculs matriciels plus concrets et plus faciles à manipuler.

Proposition 3.6.4 *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie, munis respectivement des bases B_E, B_F, B_G, et soient $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F), f_3 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F,G), f_4 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,E)$ des applications linéaires et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Alors*
1. ***Somme d'applications linéaires.*** *La matrice de la somme de deux applications linéaires est la somme de leurs matrices.*

$$\underset{B_E,B_F}{Mat}(f_1+f_2) = \underset{B_E,B_F}{Mat}(f_1) + \underset{B_E,B_F}{Mat}(f_2).$$

2. ***Multiplication par un scalaire.*** *La matrice d'une application linéaire multipliée par un scalaire est le produit de sa matrice par ce scalaire.*

$$\underset{B_E,B_F}{Mat}(\lambda \cdot f_1) = \lambda \cdot \underset{B_E,B_F}{Mat}(f_1).$$

3. ***Composition d'applications linéaires.*** *La matrice de la composée de deux applications linéaires est le produit matriciel de leurs matrices.*

$$\underset{B_E,B_G}{Mat}(f_3 \circ f_1) = \underset{B_F,B_G}{Mat}(f_3) \cdot \underset{B_E,B_F}{Mat}(f_1).$$

4. ***Application identité.*** *L'application identité est représentée par la matrice identité.*

$$f_4 = Id_E \Longleftrightarrow \underset{B_E,B_E}{Mat}(f_4) = I_n.$$

5. ***Inverse d'une application linéaire.*** *Si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$, alors f_1 est bijective si et si $\underset{B_E,B_F}{Mat}(f_1)$ est inversible. Dans ce cas on a*

$$\underset{B_F,B_E}{Mat}(f_1^{-1}) = \left(\underset{B_E,B_F}{Mat}(f_1)\right)^{-1}.$$

Autrement dit, une application linéaire est bijective (donc inversible) si et seulement si sa matrice est inversible. De plus, la matrice de l'application réciproque est l'inverse de la matrice de l'application initiale.

Preuve.
1. Il suffit de revenir à la définition d'une matrice associée à une application linéaire. Si $f_1 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ alors $f_1 + f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$. Soient $B_E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E et $B_F = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ une base de F. On note A (resp. B) la matrice de type (m,n) sur $\mathbb{K}$ représentant f_1 (resp. f_2) dans les bases B_E et B_F. Par définition, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$f_1(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i \text{ et } f_2(e_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} e'_i.$$

Puisque $f_1 + f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, la matrice représentant $f_1 + f_2$ relativement aux bases B_E et B_F est de type (m, n). On note $C = (c_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$ cette matrice. Par définition, pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$(f_1 + f_2)(e_j) = \sum_{i=1}^{m} c_{ij} e'_i. \tag{3.1}$$

Pour déterminer la matrice C, il suffit de calculer $(f_1 + f_2)(e_j)$ pour $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On a

$$(f_1 + f_2)(e_j) = f_1(e_j) + f_2(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij} e'_i,$$

c'est-à-dire

$$(f_1 + f_2)(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \left(\underbrace{a_{ij} + b_{ij}}_{=c_{ij}} \right) e'_i. \tag{3.2}$$

De (3.1) et (3.2), par identification des coordonnées, il vient que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

c'est-à-dire que le coefficient c_{ij} est le coefficient de la $i - ième$ ligne et de la $j - ième$ colonne de la matrice $(A + B)$. On a ainsi vérifié que

$$C = \underset{B_E, B_F}{Mat}(f_1 + f_2) = A + B = \underset{B_E, B_F}{Mat}(f_1) + \underset{B_E, B_F}{Mat}(f_2).$$

2. Notons $A = (a_{ij})$ la matrice de f_1 dans ces bases. Par définition, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$f_1(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, e'_i.$$

Considérons maintenant l'application λf_1. Sa matrice (notée $B = (b_{ij})$) est définie pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$(\lambda f_1)(e_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\, e'_i.$$

Or, pour tout j,

$$(\lambda f_1)(e_j) = \lambda\, f_1(e_j) = \lambda \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i \right) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda a_{ij}) e'_i.$$

Par identification des coordonnées dans la base B_F, on obtient

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \forall i, j.$$

Ainsi,

$$B = \lambda A.$$

Donc,

$$\underset{B_E, B_F}{Mat}(\lambda \cdot f_1) = \lambda \cdot \underset{B_E, B_F}{Mat}(f_1).$$

3. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies, munis respectivement des bases

$$B_E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, B_F = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}, B_G = \{e''_1, e''_2, \ldots, e''_k\}.$$

Soient $f_1 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $f_3 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$. Notons

$$A = \underset{B_E, B_F}{Mat}(f_1) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), B = \underset{B_F, B_G}{Mat}(f_3) = (b_{\ell i}) \in M_{k,m}(\mathbb{K}), C = \underset{B_E, B_G}{Mat}(f_3 \circ f_1) = (c_{\ell j}) \in M_{k,n}(\mathbb{K}).$$

Par définition, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$

$$f_1(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i,$$

et pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$

$$f_3(e'_i) = \sum_{\ell=1}^{k} b_{\ell i} e''_\ell.$$

Calculons $(f_3 \circ f_1)(e_j)$.

$$(f_3 \circ f_1)(e_j) = f_3(f_1(e_j)) = f_3\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_3(e'_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \left(\sum_{\ell=1}^{k} b_{\ell i} e''_\ell\right).$$

En interchangeant les sommes

$$(f_3 \circ f_1)(e_j) = \sum_{\ell=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{\ell i} a_{ij}\right) e''_\ell.$$

D'autre part, par définition de C,

$$(f_3 \circ f_1)(e_j) = \sum_{\ell=1}^{k} c_{\ell j} e''_\ell.$$

Par identification des coordonnées dans la base B_G, on obtient

$$c_{\ell j} = \sum_{i=1}^{m} b_{\ell i} a_{ij}, \forall \ell, j.$$

Ainsi,

$$C = B \cdot A,$$

c'est-à-dire

$$\underset{B_E, B_G}{Mat}(f_3 \circ f_1) = \underset{B_F, B_G}{Mat}(f_3) \cdot \underset{B_E, B_F}{Mat}(f_1).$$

ce qui démontre la formule.
4. Soit $f_4 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E)$. Notons

$$A = \underset{B_E, B_E}{Mat}(f_4) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

(i) **Sens direct** : Supposons $f_4 = Id_E$. Alors, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$f_4(e_j) = Id_E(e_j) = e_j.$$

Or, par définition de la matrice de f_4,

$$f_4(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i.$$

Par identification des coordonnées dans la base B_E, on obtient

$$a_{ij} = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}} & \text{si } i = j, \\ 0_{\mathbb{K}} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ainsi,

$$A = I_n,$$

c'est-à-dire
$$\underset{B_E,B_E}{Mat}(f_4) = I_n.$$
(ii) **Sens inverse** : Supposons
$$\underset{B_E,B_E}{Mat}(f_4) = I_n.$$
Alors, pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$,
$$f_4(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i = e_j,$$
puisque
$$a_{ij} = \delta_{ij},$$
(symbole de Kronecker). Ainsi, f_4 coïncide avec l'identité sur la base B_E. Par linéarité, $f_4 = Id_E$. Alors
$$f_4 = Id_E \iff \underset{B_E,B_E}{Mat}(f_4) = I_n.$$
□

Proposition 3.6.5 ***(Une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice dans deux bases)***
Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n muni d'une base $B_E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension m muni d'une base $B_F = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ une application linéaire de E dans F. Soit $A = \underset{B_E,B_F}{Mat}(f)$ la matrice associée à f relativement aux bases B_E et B_F. On définit l'application
$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) = \underset{B_E,B_F}{Mat}(f), \end{array}$$
qui associe à toute application linéaire sa matrice relative aux bases B_E et B_F. Alors φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$espaces vectoriels.

Remarque 3.6.4 *Cet isomorphisme montre que, une fois les bases fixées, l'étude des applications linéaires et celle des matrices sont équivalentes. En effet :*
• *à toute application linéaire f correspond une unique matrice $Mat(f)$,*
• *et réciproquement, à toute matrice correspond une unique application linéaire.*
Ainsi, toute propriété de f se traduit en une propriété de sa matrice, et inversement. Autrement dit, travailler avec les applications linéaires ou avec les matrices revient exactement au même, dès lors que les bases de départ et d'arrivée sont choisies.

Preuve. On a pour $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$, on écrit pour chaque $j \in \{1,\dots,n\}$
$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i,$$
et l'on pose
$$\varphi(f) = A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$
Par définition la j-ième colonne de A est le vecteur colonne des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base B_F.
1. **Linéarité de φ.** Soient $f, g \in \mathcal{L}_K(E,F)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. D'après la proposition 3.6.4 précédente, on a
$$\varphi(\alpha f + \beta g) = \underset{B_E,B_F}{Mat}(\alpha f + \beta g) = \underset{B_E,B_F}{Mat}(\alpha f) + \underset{B_E,B_F}{Mat}(\beta g) = \alpha \cdot \underset{B_E,B_F}{Mat}(f) + \beta \cdot \underset{B_E,B_F}{Mat}(g).$$

Ainsi,

$$\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \varphi(f) + \beta \cdot \varphi(g).$$

On en conclut que l'application φ est linéaire.
2. (a) **Injectivité de φ.** Supposons $\varphi(f) = 0_{m,n}$ (matrice nulle). Alors pour tout j, la colonne j de $\underset{B_E,B_F}{Mat}(f)$ est nulle, donc $f(e_j) = 0_{\mathbb{K}}$. Montrons que f est l'application nulle. Soit $x \in E$ arbitraire. Comme B_E est une base de E, il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j.$$

Par linéarité de f,

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(e_j).$$

Mais nous avons vu que pour chaque j, $f(e_j) = 0_F$. Donc

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 0_F = 0_F.$$

Ainsi $f(x) = 0_F$ pour tout $x \in E$. On en déduit que f est l'application nulle $0_{\mathcal{L}_K(E,F)}$. Ainsi

$$\ker(\varphi) = \{f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) : \varphi(f) = 0_{m,n}\} = \{0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)}\}.$$

Alors φ est injective.
(b). **Surjectivité de φ.** Montrons que pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ telle que $\underset{B_E,B_F}{Mat}(f) = A$. Posons, pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \in F.$$

Par la propriété fondamentale des applications linéaires définies par les images d'une base, il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que

$$f(e_j) = v_j, \forall j.$$

En effet, pour tout

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in E,$$

on définit

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j.$$

Cette définition est bien posée et assure la linéarité de f. Ainsi, l'application f est bien définie et unique. De plus, par construction,

$$f(e_j) = v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i,$$

donc la j-ième colonne de $\underset{B_E,B_F}{Mat}(f)$ est exactement $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$. Autrement dit, $\underset{B_E,B_F}{Mat}(f) = A$. Comme A était arbitraire, on conclut que l'application φ est surjective. Comme φ est linéaire, injective et surjective ; donc c'est un isomorphisme. $\square$

3.6.2.3 Applications linéaires canoniquement associées aux matrices

Définition 3.6.4 ***(Application linéaire canoniquement associée à une matrice)*** *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle* ***application linéaire canoniquement associée*** *à A l'application f_A définie par*

$$\begin{array}{rccc} f_A: & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ & X & \longmapsto & f_A(X) = AX. \end{array}$$

Remarque 3.6.5 *En réalité, le produit AX n'est défini que si l'on considère X comme une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour simplifier les écritures, on identifie donc $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^m$. Dans ce cadre, la définition s'écrit plus rigoureusement*

$$\begin{array}{rccc} f_A: & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \\ & X & \longmapsto & f_A(X) = AX. \end{array}$$

Ainsi, la matrice A représente exactement l'application linéaire f_A relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$.

On peut définir l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice exactement de la même façon que pour l'application linéaire associée, mais en se restreignant au cas où la matrice est carrée ($n = m$).

Définition 3.6.5 ***(Endomorphisme canoniquement associé à une matrice).*** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle endomorphisme canoniquement associé à A l'application linéaire*

$$\begin{array}{rccc} f_A: & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & X & \longmapsto & f_A(X) = AX. \end{array}$$

où l'on identifie $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Ainsi, A est précisément la matrice de l'endomorphisme f_A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Remarque 3.6.6 *(Différences entre application linéaire associée et application linéaire canoniquement associée à une matrice).*
1. ***L'application linéaire associée à une matrice :***
- *C'est une notion générale.*
- *Elle dépend du choix de bases dans les espaces de départ et d'arrivée.*
- *Une même matrice peut représenter des applications linéaires différentes si les bases changent.*

2. ***L'application linéaire canoniquement associée à une matrice :***
- *Elle est définie de manière unique.*
- *On considère toujours les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$.*
- *À chaque matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on associe l'application*

$$f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m, X \longmapsto AX.$$

Cette association ne dépend d'aucun choix arbitraire de bases.

Exemple 3.6.6
1. ***Application linéaire canoniquement associée à une matrice non carrée.*** *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}).$$

On définit l'application linéaire canoniquement associée

$$f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, X \longmapsto AX.$$

Si

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

alors

$$f_A(X) = AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x + 3z \end{pmatrix}.$$

Ici, f_A est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$.
2. Endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée. *Soit*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

On définit l'endomorphisme canoniquement associé

$$f_B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, X \longmapsto BX.$$

Pour

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

on obtient

$$f_B(X) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}.$$

Ici, f_B est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, et la matrice B est précisément la matrice de f_B dans la base canonique.

Définition 3.6.6 ***(Noyau et image d'une matrice)*** *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, et f_A l'application linéaire canoniquement associée à A.*
1. On appelle ***noyau*** *de A le sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{K})$, noté $\ker(A)$, défini par*

$$\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = 0_{m,1}\}.$$

Autrement dit, le noyau de A coïncide avec le noyau de f_A.
2. On appelle ***image*** *de A le sous-espace vectoriel de $M_{m,1}(\mathbb{K})$, noté $Im(A)$, défini par*

$$Im(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}), \exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : Y = AX\} = \{AX : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}.$$

Autrement dit, l'image de A est exactement l'image de f_A. Ainsi, les notations $\ker(A)$, $Im(A)$ traduisent le fait qu'une matrice A peut être vue naturellement comme une application linéaire.
3. On dit que A est injective si et seulement si $\ker(A) = \{0_{n,1}\}$.
4. On dit que A est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(A) = M_{m,1}(\mathbb{K})$.

Remarque 3.6.7 *Notons $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ l'application linéaire canoniquement associée à A.*
1. Pour un vecteur $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \ker(f) \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(A).$$

Ainsi, f est injective si et seulement si A est injective. De plus en identifiant $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(K)$, on peut donc écrire

$$\ker(A) = \ker(f).$$

2. De même, pour un vecteur $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{K}^m$, on a

$$(y_1, \ldots, y_m) \in Im(f) \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in Im(A).$$

Ainsi f est surjective si et seulement si A est surjective. De plus en identifiant $\mathbb{K}^m$ et $\mathcal{M}_{m,1}(K)$, on peut donc écrire

$$Im(A) = Im(f).$$

Exemple 3.6.7

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

L'application linéaire canoniquement associée à A est

$$f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, X \longmapsto AX.$$

On détermine le noyau et l'image de A.
(a) ***Noyau.*** *Par définition,*

$$\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) : AX = 0_{2,1}\}.$$

On pose

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Alors

$$AX = 0_{2,1} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cela donne le système

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0. \end{cases}$$

On obtient

$$x = -2y.$$

Donc

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Comme le vecteur est non nul, donc

$$\dim(\ker(A)) = 1.$$

donc A n'est pas injective.
(b) ***Image.*** *Par définition,*

$$Im(A) = \{AX : X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\}.$$

Comme AX est toujours une combinaison linéaire des colonnes de A, car

$$AX = x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},$$

alors

$$Im(A) = Vect\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\}\right).$$

Or la deuxième colonne est un multiple de la première, donc

$$Im(A) = Vect\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}\right).$$

Comme le vecteur est non nul, donc

$$\dim(Im(A)) = 1 < 2.$$

donc A n'est pas surjective.
2. Soit

$$B = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

L'application linéaire canoniquement associée à B est

$$f_B : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, X \longmapsto BX.$$

*(a) **Noyau.** Par définition,*

$$\ker(B) = \{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) : BX = 0_{3,1}\}.$$

On pose

$$X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Alors

$$BX = 0_{3,1} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\x+y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Le système

$$x = 0, y = 0, x + y = 0,$$

donne la solution unique

$$x = y = 0.$$

Donc

$$\ker(B) = \{0_{2,1}\}.$$

Ainsi, B est injective.
*(b) **Image.** Par définition,*

$$Im(B) = \{BX : X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\}.$$

C'est donc l'espace engendré par les colonnes de B,

$$Im(B) = Vect\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right).$$

Comme ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, on a

$$\dim(Im(B)) = 2 < 3.$$

Donc B n'est pas surjective.

3.7 Changement de base, matrices de passage et transformations associées

La matrice de passage est l'outil qui permet de passer d'une base à une autre. Elle explique comment exprimer les vecteurs d'une base en fonction des vecteurs de l'autre base. Grâce à elle, on peut transformer facilement les coordonnées d'un vecteur ou la matrice d'une application linéaire.

Pour un vecteur, le changement de base ne modifie pas le vecteur : il reste le même dans l'espace, mais ses coordonnées changent selon la base utilisée. Pour une application linéaire, c'est le même principe : une même application peut être représentée par des matrices différentes selon les bases choisies pour l'espace de départ et pour l'espace d'arrivée ; les matrices de passage permettent alors de passer correctement d'une représentation à l'autre. Pour un endomorphisme, c'est-à-dire une application linéaire qui agit sur le même espace vectoriel, le changement de base est plus simple : une seule matrice de passage suffit pour relier les deux matrices représentant le même endomorphisme.

En conclusion, le changement de base ne modifie pas les objets étudiés, mais uniquement leur écriture. Les matrices de passage sont donc essentielles pour traduire les coordonnées des vecteurs et les matrices des applications linéaires lorsqu'on change de base.

3.7.1 Changement de bases pour un vecteur

Quand on change de base, le vecteur ne change pas, mais ses coordonnées prennent une nouvelle forme. Pour passer d'une écriture à l'autre, on utilise la matrice de passage, qui permet de traduire les coordonnées d'une base vers une autre.

Définition 3.7.1 ***(Matrice de passage)***
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. On considère deux bases de E,

$$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \text{ (ancienne base)},\ B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\} \text{ (nouvelle base)}.$$

1. On appelle matrice de passage de B vers B' (ou matrice de changement de base) et on note $Pass(B, B')$ la matrice carrée

$$P = Pass(B, B') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base B' exprimés dans l'ancienne base B. Autrement dit

$$P = Pass(B, B') = \underset{B}{Mat}(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n),$$

où $\underset{B}{Mat}(\cdot)$ *désigne la matrice d'une famille de vecteurs relativement à la base* B.
2. ***Inverse.*** *Si* $P = Pass(B, B')$, *alors sa matrice inverse est donnée par*

$$P^{-1} = Pass(B', B) = \underset{B'}{Mat}(e_1, e_2, ..., e_n).$$

Autrement dit, les colonnes de P^{-1} *sont les coordonnées des vecteurs de l'ancienne base* B *exprimés dans la nouvelle base* B'.
3. ***Cas particulier.*** *Le passage d'une base vers elle-même donne la matrice identité*

$$Pass(B, B) = I_n.$$

Exemple 3.7.1
1. ***Changement de base dans*** $\mathbb{R}_2[X]$. *Considérons l'espace vectoriel* $E = \mathbb{R}_2[X]$, *c'est-à-dire l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. On se donne l'ancienne base*

$$B = \{P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2\},$$

et la nouvelle base

$$B' = \{P'_0 = 1, P'_1 = X - 1, P'_2 = (X - 1)^2\}.$$

Pour construire la matrice de passage $P = Pass(B, B')$, *on exprime chaque vecteur de la nouvelle base* B' *comme combinaison linéaire des vecteurs de l'ancienne base* B. *On a donc*

$$\begin{cases} P'_0 = 1 = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 \\ P'_1 = X - 1 = (-1) \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 \\ P'_2 = (X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1 = 1 \cdot P_0 + (-2) \cdot P_1 + 1 \cdot P_2. \end{cases}$$

Ainsi, les colonnes de P *sont précisément ces coordonnées, ce qui donne*

$$P = Pass(B, B') = \underset{B}{Mat}(P'_0, P'_1, P'_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

2. Changement de base dans $\mathbb{R}^3$. *Considérons l'espace vectoriel* $E = \mathbb{R}^3$. *On se donne, l'ancienne base (canonique)*

$$B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\},$$

et la nouvelle base

$$B' = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 0, 1)\}.$$

Pour construire la matrice de passage $P = Pass(B, B')$, *on exprime les vecteurs de la nouvelle base* B' *en fonction de l'ancienne base* B.
Comme B *est la base canonique, les coordonnées sont simplement les composantes des vecteurs*

$$\begin{cases} u_1 = (1, 1, 0) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \\ u_2 = (0, 1, 1) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ u_3 = (1, 0, 1) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3. \end{cases}$$

On construit la matrice de passage P *en plaçant ces coordonnées en colonnes*

$$P = Pass(B, B') = \underset{B}{Mat}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La question suivante se pose naturellement : quelle application linéaire remarquable est associée à une matrice de passage ? La réponse donnée par la proposition suivante nous sera d'une grande utilité.

Proposition 3.7.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des bases B et C. La matrice de passage P de B à C est la matrice représentant l'application identité*

$$Id_E : x \in E \longmapsto x \in E,$$

relativement aux bases C et B. En d'autres termes

$$P = Pass(B, C) = \underset{C,B}{Mat}(f = Id_E).$$

Preuve. Notons $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$ et écrivons la matrice $\underset{C,B}{Mat}(Id_E)$ associée à l'application Id_E relativement à la base de départ $C = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et à la base d'arrivée B. En appliquant la définition 3.6.3, pour j variant de 1 à n, la j-ième colonne de la matrice $\underset{C,B}{Mat}(Id_E)$ est constituée des coordonnées du vecteur $Id_E(u_j)$ dans la base d'arrivée B. Or pour $j \in \{1, ..., n\}$,

$$Id_E(u_j) = u_j.$$

Ainsi la j-ième colonne de la matrice $\underset{C,B}{Mat}(Id_E)$ est constituée des coordonnées du vecteur u_j dans la base B. C'est précisément la matrice P (d'après la définition 3.7.1). $\square$

Remarque 3.7.1 *Si P est la matrice de passage de B à C alors P représente l'application identité avec pour base de départ la nouvelle base C et pour base d'arrivée l'ancienne base B, et non l'inverse. Schématiquement,*

$$(E, C) \quad \underbrace{P = Pass(B, C) = \underset{C,B}{Mat}(f = Id_E).}_{\longrightarrow} \quad (E, B)$$

Une matrice de passage est toujours inversible, puisqu'elle représente l'application identité Id_E, qui est nécessairement bijective. Dès lors, connaître la matrice de passage de B à C permet d'en déduire immédiatement la matrice de passage de C à B.

Proposition 3.7.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des bases B et C. Si $P = Pass(B, C)$ est la matrice de passage de B à C, alors P^{-1}, la matrice inverse de P, est la matrice de passage de C à B,*

$$P^{-1} = Pass(C, B) = \underset{B,C}{Mat}(Id_E).$$

Autrement dit, les colonnes de P^{-1} sont les coordonnées des vecteurs de l'ancienne base B exprimés dans la nouvelle base B'. Schématiquement,

$$(E, B) \quad \underbrace{P^{-1} = Pass(C, B) = \underset{B,C}{Mat}(f = Id_E).}_{\longrightarrow} \quad (E, C)$$

Preuve. Supposons que $\dim(E) = n$, alors P la matrice de passage de B à C est toujours inversible, donc

$$P \in GL_n(\mathbb{K}),$$

où $GL_n(\mathbb{K})$ désigne le groupe linéaire, c'est-à-dire l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre n.
Appelons $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de C à B. En appliquant la proposition 3.7.1, la matrice Q représente l'application

$$Id_E : E \longrightarrow E,$$

relativement aux bases B et C (remarquer l'ordre des deux bases), c'est-à-dire

$$Q = \underset{B,C}{Mat}(Id_E).$$

Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de B à C. D'après la proposition 3.7.1,

$$P = \underset{C,B}{Mat}(Id_E).$$

Calculons l'un des deux produits matriciels $Q \cdot P$ et $P \cdot Q$. Rappelons que la matrice associée à l'application identité relativement à n'importe quelle base est la matrice unité. On a

$$Q \cdot P = \underset{B,C}{Mat}(Id_E) \cdot \underset{C,B}{Mat}(Id_E).$$

Or, par compatibilité entre composition et produit de matrices,

$$Q \cdot P = \underset{C,C}{Mat}(Id_E \circ Id_E) = \underset{C}{Mat}(Id_E) = I_n.$$

On en déduit directement que

$$P^{-1} = Q,$$

Ce qui achève la démonstration. $\square$

Exemple 3.7.2
1. Reprenons l'exemple de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de l'ancienne base

$$B = \{P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2\},$$

et la nouvelle base

$$B' = \{P'_0 = 1, P'_1 = X - 1, P'_2 = (X-1)^2\}.$$

La matrice de passage de B à B' est

$$P = Pass(B, B') = \underset{B}{Mat}(P'_0, P'_1, P'_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

***Calcul de** P^{-1}. On sait que*

$$P^{-1} = Pass(B', B) = \underset{B'}{Mat}(P_0, P_1, P_2).$$

Autrement dit, les colonnes de P^{-1} sont les coordonnées des vecteurs de l'ancienne base B exprimés dans la nouvelle base B'.
Pour construire la matrice de passage P^{-1}, on exprime chaque vecteur de l'ancienne base $B = \{1, X, X^2\}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la nouvelle base $B' = \{1, X-1, (X-1)^2\}$.
Écrivons la combinaison générale

$$a \cdot 1 + b \cdot (X-1) + c \cdot (X-1)^2 = (a - b + c) + (b - 2c)X + cX^2, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Les coordonnées par rapport à la base canonique $(1, X, X^2)$ *sont donc*

$$(a-b+c, b-2c, c).$$

Nous résolvons ce système pour chaque vecteur de B*.*
• *Pour* $P_0 = 1$ *(coordonnées* $(1,0,0)$*),*

$$\begin{cases} a-b+c=1 \\ b-2c=0 \\ c=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}.$$

Coordonnées de 1 *dans* B' *sont* $(1,0,0)$*.*
• *Pour* $P_1 = X$ *(coordonnées* $(0,1,0)$*),*

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ b-2c=1 \\ c=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}.$$

Coordonnées de X *dans* B'*sont* $(1,1,0)$*.*
• *Pour* $P_2 = X^2$ *(coordonnées* $(0,0,1)$*),*

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ b-2c=0 \\ c=1 \end{cases} \implies \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}.$$

Coordonnées de X^2 *dans* B' *sont* $(1,2,1)$*.*
Les colonnes obtenues forment P^{-1}*,*

$$P^{-1} = Pass(B', B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On retrouve bien le résultat obtenu précédemment ; vérification rapide

$$P \cdot P^{-1} = I_3.$$

2. Reprenons l'exemple de $\mathbb{R}^3$ *muni de l'ancienne base (canonique)* $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *et de la nouvelle base*

$$B' = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,0,1)\}.$$

La matrice de passage $P = Pass(B, B')$ *s'écrit*

$$P = \underset{B}{Mat}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcul de P^{-1}***.*** *On a*

$$P^{-1} = Pass(B', B) = \underset{B'}{Mat}(e_1, e_2, e_3).$$

Autrement dit, les colonnes de P^{-1} *sont les coordonnées des vecteurs de l'ancienne base* B *exprimés dans la nouvelle base* B'*.*
Pour construire la matrice de passage P^{-1}*, on exprime chaque vecteur de la base canonique* $B =$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la nouvelle base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$.
Écrivons la combinaison générale

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = (a + c, a + b, b + c), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Pour chaque vecteur canonique e_i on résout

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = e_i,$$

et le vecteur (a, b, c) obtenu sera la i-ième colonne de $P^{-1} = Pass(B', B)$.
• *Pour $e_1 = (1, 0, 0)$, on obtient*

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

•*Pour $e_2 = (0, 1, 0)$, on obtient*

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 1 \\ b + c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

• *Pour $e_3 = (0, 0, 1)$, on obtient*

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ b + c = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

On obtient donc

$$P^{-1} = Pass(B', B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Après avoir défini la matrice de passage, il est naturel de donner la formule de changement de base qui relie les coordonnées d'un vecteur dans deux bases différentes.

Proposition 3.7.3 ***(Formule de Changement de Base)*** *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie non nulle muni des bases B et B' et soient $X_B = \underset{B}{Mat}(x)$ et $X'_{B'} = \underset{B'}{Mat}(x)$ les matrices-colonnes des coordonnées de $x \in E$ dans les bases respectives B et B'. Si $P = Pass(B, B')$, est la matrice de passage de B à B'. Alors*

$$X_B = P \cdot X'_{B'} \text{ et } X'_{B'} = P^{-1} \cdot X_B.$$

Autrement dit, pour exprimer les coordonnées d'un vecteur dans l'une des deux bases, il suffit de multiplier les coordonnées exprimées dans l'autre base par la matrice de passage P (ou par son inverse).

Preuve. Supposons que E un $\mathbb{K}-$espace de dimension n muni des deux bases $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ et $B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Un vecteur x appartenant à E peut se décomposer dans chacune des deux bases B et B'. On note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées du vecteur x dans l'ancienne base B et on qualifie ces coordonnées d'« anciennes »

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n. \tag{3.3}$$

On désigne par $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ les nouvelles coordonnées de x dans la nouvelle base B',

$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j u_j = x'_1 u_1 + x'_2 u_2 + \ldots + x'_n u_n. \tag{3.4}$$

On cherche les relations liant anciennes et nouvelles coordonnées du vecteur x. En partant de (3.4), on a

$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j u_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right),$$

puisque $u_j = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ (par définition de P). Ainsi,

$$x = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x'_j p_{ij} \boldsymbol{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \boldsymbol{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) e_i. \tag{3.5}$$

En comparant (3.3)et (3.5), on déduit l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right)}_{x_i} e_i.$$

En identifiant les coordonnées, on obtient l'expression des anciennes coordonnées du vecteur x en fonction de ses nouvelles coordonnées

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} : x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j,$$

Sous forme matricielle, cela s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

C'est-à-dire

$$X_B = P \cdot X'_{B'},$$

ce qui établit la formule de changement de base.
À partir de la formule démontrée

$$X_B = P \cdot X_{B'},$$

comme P est une matrice de passage donc inversible ($P \in GL_n(\mathbb{K})$), on peut multiplier à gauche par P^{-1}. On obtient

$$P^{-1} \cdot X_B = P^{-1} \cdot (P \cdot X_{B'}) = (P^{-1} P) \cdot X_{B'} = I_n \cdot X_{B'} = X_{B'}.$$

Donc

$$X_{B'} = P^{-1} \cdot X_B.$$

□

Exemple 3.7.3

1. Soit $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et de la base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ avec $u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (1, -1, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$, et considérons le vecteur $x = (3, 6, 9)$ de $\mathbb{R}^3$. Puisque B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a immédiatement

$$x = 3e_1 + 6e_2 + 9e_3.$$

On note x'_1, x'_2 et x'_3 les coordonnées de ce même vecteur x dans la nouvelle base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$. On a

$$x = x'_1 u_1 + x'_2 u_2 + x'_3 u_3.$$

Calculons x'_1, x'_2 et x'_3. On a

$$X_B = P \cdot X_{B'} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix},$$

ou encore, de manière équivalente,

$$X_{B'} = P^{-1} \cdot X_B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

telle que

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $X_{B'}$ s'obtient en effectuant le produit matriciel $P^{-1} \cdot X_B$. On obtient

$$x'_1 = -3, x'_2 = 0, x'_3 = 6,$$

c'est-à-dire

$$x = -3u_1 + 6u_3.$$

2. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de l'ancienne base

$$B = \{P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2\},$$

et la nouvelle base

$$B' = \{P'_0 = 1, P'_1 = X - 1, P'_2 = (X-1)^2\}.$$

La matrice de passage de B à B' est

$$P = Pass(B, B') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Considérons le polynôme $R \in \mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$R = 1.P'_0 + 1.P'_1 + 1.P'_2.$$

Dans la base B', la matrice des coordonnées de R est donc

$$X'_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On applique la formule de changement de base. Cela donne la relation

$$X_B = P \cdot X'_{B'} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$R = 1 - X + X^2.$$

3.7.2 Changement de bases pour une application linéaire

Une application linéaire est une relation qui associe à chaque vecteur d'un espace vectoriel un autre vecteur, éventuellement situé dans un espace différent. Cette transformation peut être représentée par une matrice, mais cette représentation dépend toujours du choix des bases dans l'espace de départ et dans l'espace d'arrivée.

Lorsque l'on change de bases, l'application linéaire elle-même ne se modifie pas : elle reste la même relation entre les deux espaces. En revanche, la matrice qui la représente change, car elle traduit maintenant les coordonnées des vecteurs par rapport aux nouvelles bases. Cette nouvelle matrice est liée à l'ancienne grâce aux matrices de passage, qui permettent de convertir la représentation d'une base à une autre. On dit alors que les deux matrices sont équivalentes, car elles correspondent à une même application linéaire exprimée dans des systèmes de coordonnées différents.

Effet d'un changement de bases pour une application linéaire. On considère une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ où l'espace de départ E est de dimension n et l'espace d'arrivée F de dimension m. On munit l'espace E des bases B_1 et B'_1. On note X_{B_1} et $X'_{B'_1}$ les matrices-colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituées des coordonnées d'un vecteur x de E respectivement dans B_1 et B'_1. Si $P \in GL_n(\mathbb{K})$ désigne la matrice de passage de B_1 à B'_1 alors on peut écrire

$$X_{B_1} = PX'_{B'_1}.$$

On munit l'espace F des bases B_2 et B'_2 et on note Y_{B_2} et $Y'_{B'_2}$ les matrices-colonnes de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ constituées des coordonnées du vecteur $y = f(x)$ de F respectivement dans B_2 et B'_2. Si $Q \in GL_m(\mathbb{K})$ désigne la matrice de passage de B_2 à B'_2 alors on peut écrire

$$Y_{B_2} = QY'_{B'_2},$$

ou de manière équivalente

$$Y'_{B'_2} = Q^{-1}Y_{B_2}.$$

On représente par A (respectivement par B) la matrice associée à f relativement aux deux bases B_1 et B'_1 (resp. B_2 et B'_2), c'est-à-dire

$$A = \underset{B_1,B_2}{Mat}(f) \quad \text{et} \quad B = \underset{B'_1,B'_2}{Mat}(f).$$

D'après la proposition 3.6.3, l'égalité vectorielle $y = f(x)$ peut s'écrire relativement aux bases B_1 et B_2 sous la forme matricielle

$$Y_{B_2} = AX_{B_1}, \tag{3.6}$$

et relativement aux bases B'_1 et B'_2 sous la forme matricielle

$$Y'_{B'_2} = BX'_{B'_1}. \tag{3.7}$$

On cherche une relation liant les deux matrices A et B. Partons de l'égalité (3.6). Puisque $Q \in GL_m(\mathbb{K})$, on a l'équivalence suivante

$$Y_{B_2} = AX_{B_1} \iff Q^{-1}Y_{B_2} = Q^{-1}AX_{B_1}.$$

En utilisant $Q^{-1}Y_{B_2} = Y'_{B'_2}$ et $X_{B_1} = PX'_{B'_1}$, on obtient

$$Y'_{B'_2} = (Q^{-1}AP)X'_{B'_1}. \tag{3.8}$$

En comparant la dernière égalité (3.8) avec l'égalité (3.7), on en déduit, par identification, une relation donnant la matrice B en fonction de la matrice A,

$$B = Q^{-1}AP.$$

On a ainsi le théorème suivant.

Théorème 3.7.1 ***(Matrices équivalentes)***
Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n, B_1 et B'_1 deux bases de E et $P = Pass(B_1, B'_1)$ la matrice de passage de B_1 à B'_1. Soient F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension m, B_2 et B'_2 deux bases de F et $Q = Pass(B_2, B'_2)$ la matrice de passage de B_2 à B'_2 et soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ une application linéaire. Posons $A = \underset{B_1,B_2}{Mat}(f)$ la matrice associée à f relativement aux bases B_1 et B_2. Alors

$$B = \underset{B'_1,B'_2}{Mat}(f) = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

et

$$A = \underset{B_1,B_2}{Mat}(f) = Q \cdot B \cdot P^{-1}.$$

et on dit que les matrices A et B sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elle représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Remarque 3.7.2
1. Il est à noter que les deux matrices rectangulaires A et B sont du même type puisqu'elles représentent la même application linéaire $f : E \longrightarrow F$. En revanche, les deux matrices carrées inversibles P et Q ne sont a priori pas du même ordre, sauf si $\dim(E) = \dim(F)$, auquel cas A, B, P et Q sont quatre matrices du même ordre.
2. Les colonnes de la matrice B sont les coordonnées des images par f des vecteurs de la base B'_1 exprimés dans la base B'_2. Autrement dit,

$$B = \underset{B'_2}{Mat}(f(B'_1)).$$

3. L'égalité

$$B = Q^{-1}AP$$

n'est rien d'autre que l'écriture matricielle de l'égalité fonctionnelle suivante

$$f = Id_F \circ f \circ Id_E$$

que l'on vérifie aisément puisque pour tout $x \in E$, on a

$$(Id_F \circ f \circ Id_E)(x) = Id_F(f(Id_E(x))) = Id_F(f(x)) = f(x),$$

et que l'on schématise par

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ Id_E \downarrow & & \downarrow Id_F \\ E & \underset{f=Id_F\circ f\circ Id_E}{\longrightarrow} & F \end{array}$$

Il suffit alors de compléter ce schéma en munissant l'espace E des deux bases B_1 et B_1', et l'espace F des deux bases B_2 et B_2', puis en écrivant les matrices associées à chacune des applications relativement aux bases des espaces de départ et des espaces d'arrivée (le sens des flèches nous indique dans chaque cas l'espace de départ et l'espace d'arrivée). On obtient alors le schéma

$$\begin{array}{ccc} (E, B_1) & \overset{A=\underset{B_1,B_2}{Mat}(f)}{\longrightarrow} & (F, B_2) \\ P = \underset{B_1',B_1}{Mat}(Id_E) \downarrow & & \downarrow \underset{B_2,B_2'}{Mat}(Id_F) = Q^{-1} \\ (E, B_1') & \underset{B=\underset{B_1',B_2'}{Mat}(f)}{\longrightarrow} & (F, B_2') \end{array}$$

et on retrouve l'égalité matricielle

$$\underbrace{\underset{B_1',B_2'}{Mat}(f)}_{B} = \underbrace{\underset{B_2,B_2'}{Mat}(Id_F)}_{Q^{-1}} \cdot \underbrace{\underset{B_1,B_2}{Mat}(f)}_{A} \cdot \underbrace{\underset{B_1',B_1}{Mat}(Id_E)}_{P}$$

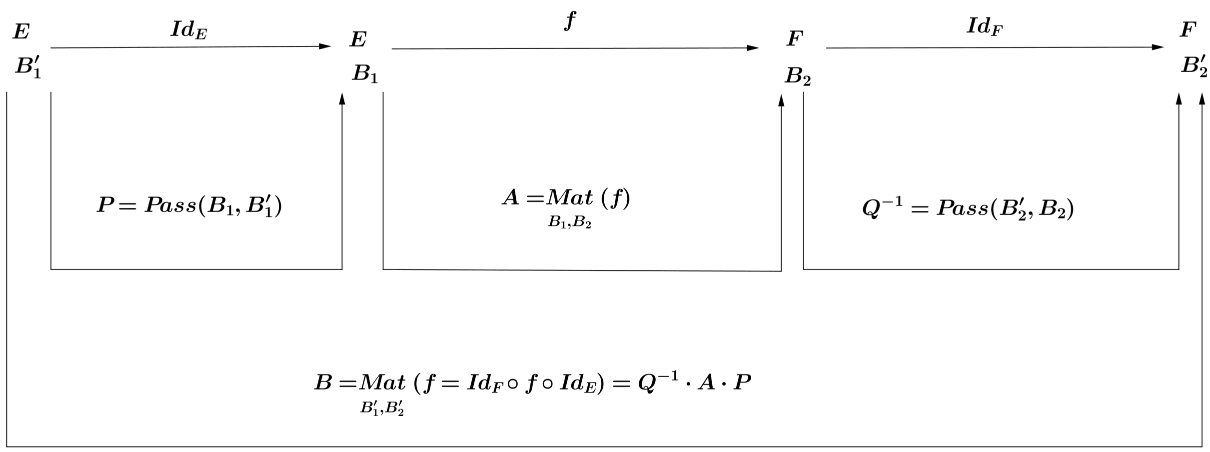

Figure 3.1 – Changement de bases pour une application linéaire

Exemple 3.7.4 *Soit l'application linéaire suivante*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, f(x, y, z) = (x + y, y + z, x, z).$$

On prend pour bases, ancienne base de $\mathbb{R}^3$ (canonique),

$$B_1 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}.$$

Nouvelle base de $\mathbb{R}^3$,

$$B_1' = \{e_1' = (1,1,0), e_2' = (1,0,1), e_3' = (0,1,1)\}.$$

Ancienne base de $\mathbb{R}^4$ *(canonique),*

$$B_2 = \{u_1 = (1,0,0,0), u_2 = (0,1,0,0), u_3 = (0,0,1,0), u_4 = (0,0,0,1)\}.$$

Nouvelle base de $\mathbb{R}^4$,

$$B_2' = \{u_1' = (1,1,0,0), u_2' = (0,1,1,0), u_3' = (0,0,1,1), u_4' = (1,0,0,0)\}.$$

On calcule les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$f(e_1) = (1,0,1,0), f(e_2) = (1,1,0,0), f(e_3) = (0,1,0,1).$$

Les colonnes de $A = \underset{B_1,B_2}{Mat}(f)$ *la matrice associée à* f *relativement aux bases* B_1 *et* B_2 *sont ces images exprimées dans la base canonique de* $\mathbb{R}^4$

$$A = \underset{B_1,B_2}{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, la matrice de passage de B_1 *à* B_1' *est*

$$P = Pass(B_1, B_1') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de B_2 *à* B_2' *est*

$$Q = Pass(B_2, B_2') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par la proposition de changement de bases, la nouvelle matrice associée à f *relativement aux bases* B_1' *et* B_2' *est donnée par*

$$B = \underset{B_1',B_2'}{Mat}(f) = Q^{-1} \cdot A \cdot P.$$

On calcule d'abord Q^{-1},

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$B = \underset{B_1',B_2'}{Mat}(f) = Q^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ici, A et B sont différentes, mais elles représentent la même application linéaire f *dans deux bases différentes.*

Vérification (Autre méthode)*. Les colonnes de B doivent être les coordonnées dans B_2' des vecteurs $f(e_1'), f(e_2'), f(e_3')$. Autrement dit*

$$B = \underset{B_2'}{Mat}(f(B_1')).$$

Calcul des images des vecteurs de B_1',

$$f(e_1') = f(1,1,0) = (2,1,1,0), f(e_2') = f(1,0,1) = (1,1,1,1), f(e_3') = f(0,1,1) = (1,2,0,1).$$

Exprimons $f(e_j')$ dans la base $B_2' = \{u_1', u_2', u_3', u_4'\}$. On résout pour chaque $j \in \{1,2,3\}$,

$$f(e_j') = \alpha_1^{(j)} u_1' + \alpha_2^{(j)} u_2' + \alpha_3^{(j)} u_3' + \alpha_4^{(j)} u_4'.$$

ceci est équivalent à

$$f(e_j') = (\alpha_1^j + \alpha_4^j, \alpha_1^j + \alpha_2^j, \alpha_2^j + \alpha_3^j, \alpha_3^j)$$

Pour $f(e_1')$, on a

$$\begin{cases} \alpha_1^{(1)} + \alpha_4^{(1)} = 2 \\ \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 1 \\ \alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(1)} = 1 \\ \alpha_3^{(1)} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1^{(1)} = 0, \alpha_2^{(1)} = 1, \alpha_3^{(1)} = 0, \alpha_4^{(1)} = 2.$$

Pour $f(e_2')$, on a

$$\begin{cases} \alpha_1^{(2)} + \alpha_4^{(2)} = 1 \\ \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} = 1 \\ \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} = 1 \\ \alpha_3^{(2)} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1^{(2)} = 1, \alpha_2^{(2)} = 0, \alpha_3^{(2)} = 1, \alpha_4^{(2)} = 0.$$

Pour $f(e_3')$, on a

$$\begin{cases} \alpha_1^{(3)} + \alpha_4^{(3)} = 1 \\ \alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(3)} = 2 \\ \alpha_2^{(3)} + \alpha_3^{(3)} = 0 \\ \alpha_3^{(3)} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1^{(3)} = 3, \alpha_2^{(3)} = -1, \alpha_3^{(3)} = 1, \alpha_4^{(3)} = -2.$$

Ainsi

$$B = \underset{B_2'}{Mat}(f(B_1')) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = Q^{-1} \cdot A \cdot P.$$

On a bien vérifié que les colonnes de B sont les coordonnées dans B_2' des images $f(e_1'), f(e_2'), f(e_3')$. Ainsi A et B représentent la même application linéaire f, exprimée dans deux couples de bases différents.

Corollaire 3.7.1 *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n, B_1 et B_1' deux bases de E et $P = Pass(B_1, B_1')$ la matrice de passage de B_1 à B_1'. Soient F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension m, B_2 et B_2' deux bases de F et $Q = Pass(B_2, B_2')$ la matrice de passage de B_2 à B_2' et soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ une application linéaire. Posons $A = \underset{B_1,B_2}{Mat}(f)$ la matrice associée à f relativement aux bases B_1 et B_2. Soient*

$$X_{B_1} = \underset{B_1}{Mat}(x) \quad , \qquad X'_{B_1'} = \underset{B_1'}{Mat}(x) \ ,$$

les matrices-colonnes des coordonnées de $x \in E$ dans les bases respectives B_1 et B'_1.Soient

$$Y_{B_2} = \underset{B_2}{Mat}(y) \quad , \qquad Y'_{B'_2} = \underset{B'_2}{Mat}(y) \ ,$$

les matrices-colonnes des coordonnées de $y = f(x) \in F$ dans les bases respectives B_2 et B'_2. Alors on peut écrire

$$X_{B_1} = PX'_{B'_1}, Y_{B_2} = QY'_{B'_2}, Y_{B_2} = AX_{B_1}.$$

On obtient

$$Y'_{B'_2} = BX'_{B'_1} \Longleftrightarrow Y'_{B'_2} = (Q^{-1}AP)X'_{B'_1}.$$

Ici, la formule montre clairement comment transformer la matrice d'une application linéaire quand on change de bases à la fois dans l'espace de départ et dans l'espace d'arrivée.

3.7.3 Chagement de bases pour un endomorphisme

Un endomorphisme est une application linéaire qui transforme un espace vectoriel dans lui-même. Comme pour toute application linéaire, on peut le représenter par une matrice, et cette matrice dépend du choix de la base. Quand on change de base, l'endomorphisme reste le même, mais sa matrice change. La nouvelle matrice n'est pas arbitraire : elle est directement liée à l'ancienne grâce à la matrice de passage qui traduit les coordonnées d'une base vers l'autre. On dit alors que les deux matrices sont semblables, car elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Corollaire 3.7.2 ***(Matrices semblables)*** *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Considérons deux bases B_1 et B'_1 de E, et notons $P = Pass(B_1, B'_1)$ la matrice de passage de la base B_1 vers la base B'_1. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E)$ un endomorphisme de E.*
1. Si $A = \underset{B_1}{Mat}(f)$ est la matrice représentant f dans la base B_1, alors la matrice $B = \underset{B'_1}{Mat}(f)$, représentant f dans la base B'_1, est obtenue par la relation

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Inversement, on a aussi

$$A = P \cdot B \cdot P^{-1}.$$

Autrement dit, les matrices A et B représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. On dit que ces deux matrices sont semblables.
2. Les colonnes de la matrice B sont constituées des coordonnées, dans la base B'_1, des images par f des vecteurs de cette base. Autrement dit

$$B = \underset{B'_1}{Mat}(f(B'_1)).$$

Remarque 3.7.3 *On retrouve cette écriture matricielle à partir de l'égalité suivante*

$$f = Id_E \circ f \circ Id_E,$$

et en munissant les espaces E et F des deux bases B_1 et B'_1, puis en écrivant les matrices associées à chacune des applications. On obtient le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} (E, B_1) & \xrightarrow{A = \underset{B_1}{Mat}(f)} & (E, B_1) \\ P = \underset{B'_1, B_1}{Mat}(Id_E) \downarrow & & \uparrow \underset{B_1, B'_1}{Mat}(Id_E) = P^{-1} \\ (E, B'_1) & \xrightarrow[B = \underset{B'_1}{Mat}(f)]{} & (E, B'_1) \end{array}$$

On retrouve l'égalité matricielle

$$\underbrace{\underset{B_1'}{Mat}(f)}_{B} = \underbrace{\underset{B_1,B_1'}{Mat}(Id_E)}_{P^{-1}} \cdot \underbrace{\underset{B_1}{Mat}(f)}_{A} \cdot \underbrace{\underset{B_1',B_1}{Mat}(Id_E)}_{P}$$

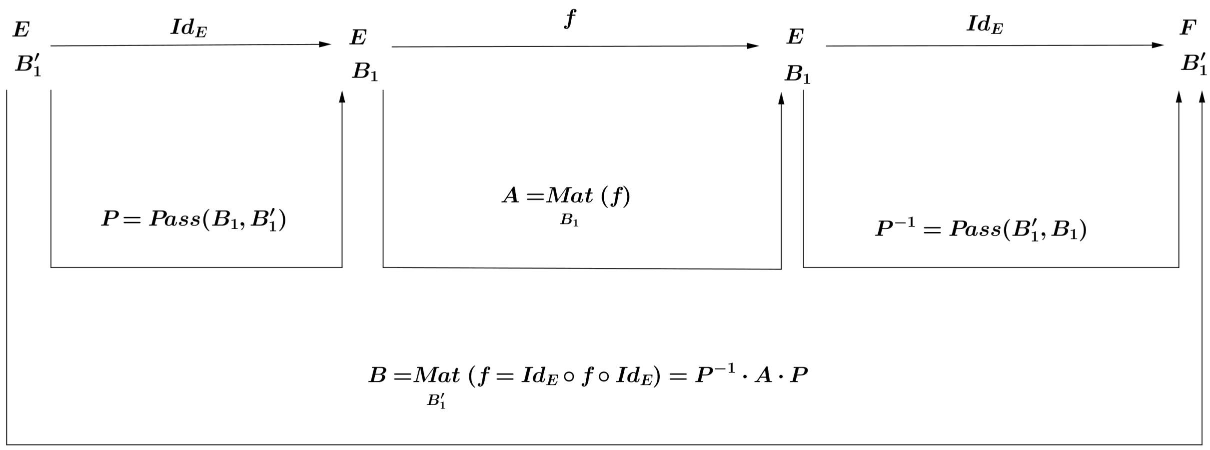

FIGURE 3.2 – Chagement de bases pour un endomorphisme

Exemple 3.7.5
1. ***Exemple dans*** $\mathbb{R}^3$***.*** *Considérons l'endomorphisme* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *défini par*

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z).$$

On prend pour bases, ancienne base de $\mathbb{R}^3$ *(canonique),*

$$B_1 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}.$$

Nouvelle base de $\mathbb{R}^3$*,*

$$B_1' = \{e_1' = (1, 1, 0), e_2' = (1, 0, 1), e_3' = (0, 1, 1)\}.$$

Dans la base B_1*, on calcule les images des vecteurs de la base canonique*

$$f(e_1) = (1, 0, 1), f(e_2) = (1, 1, 0), f(e_3) = (0, 1, 1).$$

En écrivant ces vecteurs comme colonnes, on obtient la matrice de f *dans la base* B_1*,*

$$A = \underset{B_1}{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage $P = Pass(B_1, B_1')$ *s'obtient en écrivant les vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule du changement de base, la matrice de f dans la base B_1' est donnée par

$$B = \underset{B_1'}{Mat}(f) = P^{-1}AP.$$

On calcule P^{-1}. Ici on trouve explicitement

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit on obtient

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B sont différentes, mais elles représentent le même endomorphisme. Elles sont donc semblables.
2. ***Exemple dans*** $\mathbb{R}_2[X]$. *Considérons l'endomorphisme $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ défini par la dérivation*

$$f(P) = P'.$$

Prenons la base canonique

$$B_1 = \{1, X, X^2\}.$$

On calcule l'image des vecteurs de la base,

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\ f(X) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\ f(X^2) &= 2X = 0 \cdot 1 + 2 \cdot X + 0 \cdot X^2 \end{aligned}$$

Donc la matrice de f dans la base canonique est

$$A = \underset{B_1}{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prenons une nouvelle base

$$B_1' = \{1, 1 + X, 1 + X + X^2\}.$$

La matrice de passage de B_1 à B_1' est obtenue en écrivant les vecteurs de B_1' dans la base canonique

$$P = Pass(B_1, B_1') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule du changement de base, la matrice de f dans la base B_1' est donnée par

$$B = \underset{B_1'}{Mat}(f) = P^{-1}AP.$$

Telle que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant le calcul, on trouve

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B sont semblables, car elles représentent le même endomorphisme (la dérivation) exprimé dans deux bases différentes de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Reprenons l'exemple de l'endomorphisme f qui au vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$y = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Soient $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B_1' = \{u_1, u_2, u_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (1, -1, 0), u_3 = (1, 1, 1).$$

En notant P la matrice de passage de B_1 à B_1', on vérifie que l'on a

$$B = \underset{B_1'}{Mat}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.8 Déterminant d'une matrice

Après avoir défini les matrices et leurs principales propriétés, il est naturel d'introduire la notion de déterminant. Le déterminant d'une matrice carrée est une valeur scalaire unique associée à cette matrice, noté $\det(A)$ ou $|A|$. Ce nombre permet surtout de savoir si une matrice est inversible : si le déterminant est nul, la matrice n'est pas inversible ; s'il est non nul, elle l'est. Il est utilisé dans la résolution de systèmes d'équations linéaires, dans le calcul d'aires ou de volumes, et dans l'étude des propriétés des matrices. Son calcul est simple pour les petites matrices, mais pour les grandes, on préfère des méthodes comme la réduction de Gauss. Pour certaines matrices particulières, comme les matrices triangulaires ou diagonales, le déterminant se calcule très facilement en multipliant les éléments de la diagonale.

Définition 3.8.1 ***(Déterminant d'une matrice)***
1. On appelle déterminant d'une matrice toute application qui associe à chaque matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ un scalaire de $\mathbb{K}$, noté $\det(A)$ ou encore $|A|$. On a donc

$$\begin{array}{rccl} \det : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & A = (a_{ij}) & \longmapsto & \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{array}$$

2. Le déterminant d'une matrice carrée A peut s'écrire indifféremment comme une fonction des colonnes de A

$$\det(A) = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

ou comme une fonction de ses lignes

$$\det(A) = \det(L_1, L_2, \ldots, L_n),$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ désignent les colonnes de A, et $L_1, L_2, \ldots, L_n$ ses lignes.

3.8.1 Calcul de déterminant d'une matrice carrée.

Le déterminant d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se définit et se calcule par récurrence sur l'ordre n de la matrice.

3.8.1.1 Cas 1 : Déterminant d'une matrice d'ordre 1

Dans ce cas, la matrice A est simplement $A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$. Alors le déterminant est simplement

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}.$$

3.8.1.2 Cas 2 : Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Dans ce cas, la matrice A est $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, et le déterminant se calcule par la formule

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Ces deux premiers cas constituent la base de la définition par récurrence du déterminant des matrices d'ordre supérieur ($n \geqslant 3$), qui se calcule à l'aide du développement selon une ligne ou une colonne.

3.8.1.3 Cas général : Déterminant d'une matrice d'ordre $n \geqslant 3$, mineurs et cofacteurs

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 3$, on ne peut plus utiliser les formules directes des cas $n = 1$ ou $n = 2$. On emploie une méthode appelée développement par rapport à une ligne ou une colonne. Afin de mettre en œuvre cette méthode, il est nécessaire d'introduire deux notions fondamentales : les mineurs et les cofacteurs. Ces outils permettent de décomposer le calcul d'un déterminant d'ordre n en plusieurs déterminants d'ordres inférieurs, ce qui rend la méthode applicable par récurrence.

Définition 3.8.2 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
*1. **Mineur**. On appelle mineur de A d'indice (i, j), et l'on note M_{ij}, la sous-matrice carrée d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant de A la $i-$ème ligne et la $j-$ème colonne.*
*2. **Cofacteur.** On appelle cofacteur de A d'indice (i, j), et l'on note Δ_{ij} le scalaire défini par*

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

Remarque 3.8.1 *Le facteur $(-1)^{i+j}$ est toujours égal à $(+1)$ ou à (-1) selon les indices i et j du cofacteur. Le cofacteur d'indice (i, j) d'une matrice est donc le déterminant signé du mineur de même indice. Les signes qui accompagnent les mineurs sont toujours en alternance. Pour une matrice carrée d'ordre 3, nous avons les signes suivants*

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}.$$

Cette alternance de signes joue un rôle essentiel dans le calcul du déterminant par développement selon une ligne ou une colonne.

Exemple 3.8.1
1. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Le mineur M_{23} est obtenu en éliminant la ligne 2 et la colonne 3 de la matrice A tandis que le mineur M_{21} est obtenu en éliminant la ligne 2 et la colonne 1 de la matrice A,

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Les cofacteurs correspondants sont,
(a) Pour l'indice $(2,3)$, le cofacteur Δ_{23} est

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3}\det(M_{23}) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

(b)Pour l'indice $(2,1)$, le cofacteur Δ_{21} est

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\det(M_{21}) = -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-10) = 10.$$

Après avoir introduit les notions de mineurs et de cofacteurs, on peut établir une règle générale pour le calcul du déterminant d'une matrice de n'importe quel ordre. Cette règle, appelée développement de Laplace, exprime le déterminant d'une matrice comme une combinaison linéaire de certains coefficients de la matrice et de leurs cofacteurs. Elle fournit une méthode systématique de calcul, qui peut être appliquée en choisissant n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne de la matrice.

Théorème 3.8.1 ***(Développement d'un déterminant par rapport à une rangée)*** *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On peut calculer son déterminant en développant suivant une ligne ou une colonne.*
1. Développement par rapport à la ligne i (fixée).

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(M_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot\Delta_{ij}.$$

où M_{ij} est le mineur d'indice (i,j) et $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ est le cofacteur associé.
2. Développement par rapport à la colonne j (fixée).

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(M_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}a_{ij}\cdot\Delta_{ij}.$$

Autrement dit, le déterminant d'une matrice carrée peut être calculé en choisissant n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne, puis en effectuant la somme des produits de chaque coefficient de cette ligne ou colonne par son cofacteur.

Remarque 3.8.2 ***(Calcul d'un déterminant et choix d'une rangée ou d'une colonne)***
1. On appelle **rangée** *d'une matrice ou d'un déterminant toute ligne ou colonne de cette matrice ou de ce déterminant.*
2. Il est souvent utile de développer un déterminant par rapport à une rangée lorsque cette rangée comporte peu de termes non nuls (plusieurs termes nuls).

3. ***Étapes pour le développement par ligne ou colonne.***
(a) ***Choisir une rangée.*** *Pour simplifier le calcul, il est conseillé de choisir une ligne ou une colonne contenant le plus grand nombre de zéros.*
(b) ***Calculer les cofacteurs*** Δ_{ij} *pour chaque élément de la rangée choisie,*

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

(c) ***Former la somme*** *des produits des éléments par leurs cofacteurs. Cette somme donne* $\det(A)$*.*
Le développement par colonne s'effectue de manière analogue

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, \Delta_{ij}.$$

4. Pour des calculs numériques, des méthodes plus rapides que le développement par rangée ou colonne existent, surtout pour les matrices de grande taille.

Exemple 3.8.2
1. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a). Développons par rapport à la deuxième ligne ($i = 2$*), on a*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{2+j} a_{2j} \det(M_{2j}) = \sum_{j=1}^{3} \Delta_{2j} \cdot a_{2j}.$$

$$= (-1)^{2+1} a_{21} \det(M_{21}) + (-1)^{2+2} a_{22} \det(M_{22}) + (-1)^{2+3} a_{23} \det(M_{23})$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 5 \cdot (-2) = 22.$$

(b). Développons par rapport à la troisième colonne ($j = 3$*), on a*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+3} a_{i3} \det(M_{i3}) = \sum_{i=1}^{3} \Delta_{i3} \cdot a_{i3}.$$

$$= (-1)^{1+3} a_{13} \det(M_{13}) + (-1)^{2+3} a_{i3} \det(M_{23}) + (-1)^{3+3} a_{33} \det(M_{33})$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 4 = 22.$$

On retrouve bien le même résultat

$$\det(A) = 22.$$

2. Calculons le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) En effectuant son développement de Laplace selon la deuxième ligne,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{2+j} a_{2j} \det(M_{2j}) = \sum_{j=1}^{3} \Delta_{2j} \cdot a_{2j}.$$

$$= (-1)^{2+1} a_{21} \det(M_{21}) + (-1)^{2+2} a_{22} \det(M_{22}) + (-1)^{2+3} a_{23} \det(M_{23})$$
$$= 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= -2(4-9) + (8-15) - 4(12-10) = -5.$$

(b) Reprenons le calcul du déterminant de la matrice A, mais cette fois en effectuant son développement de Laplace selon la troisième colonne,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+3} a_{i3} \det(M_{i3}) = \sum_{i=1}^{3} \Delta_{i3} \cdot a_{i3}.$$

$$= (-1)^{1+3} a_{13} \det(M_{13}) + (-1)^{2+3} a_{23} \det(M_{23}) + (-1)^{3+3} a_{33} \det(M_{33})$$
$$= 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 3(6-5) - 4(12-10) + 2(4-4) = -5.$$

On retrouve le même résultat

$$\det(A) = -5.$$

Ainsi, le déterminant d'une matrice est unique : il ne dépend ni de la ligne, ni de la colonne choisie pour le développement.

3.8.1.4 Règle de Sarrus

Le calcul du déterminant d'une matrice peut devenir long et compliqué lorsque la taille augmente. Cependant, pour les matrices carrées d'ordre 3, il existe une méthode rapide et intuitive appelée règle de Sarrus. Elle repose sur un procédé visuel qui évite le développement par mineurs et cofacteurs, et permet d'obtenir le résultat en quelques étapes simples.

Principe de la règle de Sarrus. La règle consiste à
1. Recopier les deux premières colonnes de la matrice à droite, pour obtenir 5 colonnes au total.
2. Additionner les produits des diagonales descendantes (de gauche à droite, vers le bas).
3. Additionner les produits des diagonales montantes (de gauche à droite, vers le haut).
4. Le déterminant est la différence entre ces deux sommes

$$\det(A) = S_+ - S_-.$$

Étapes d'application de la règle de Sarrus. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}).$$

1. Recopier les deux premières colonnes à droite

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

2. Calculer la somme des produits des diagonales descendantes

$$S_+ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}.$$

3. Calculer la somme des produits des diagonales montantes

$$S_- = a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}.$$

4. Déterminant

$$\det(A) = S_+ - S_- = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}).$$

Remarque 3.8.3 *La règle de Sarrus est valable uniquement pour les matrices* 3×3. *Pour les matrices d'ordre supérieur, il faut utiliser le développement de Laplace.*

Exemple 3.8.3 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Étape 1 : *recopier les deux premières colonnes à droite.*
On ajoute à droite de la matrice les deux premières colonnes pour visualiser plus facilement les diagonales

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Étape 2 : *Calcul de la somme des produits des diagonales descendantes (* S_+*).*

$$S_+ = 2\cdot(-1)\cdot5 + 1\cdot4\cdot1 + 3\cdot0\cdot2 = -10 + 4 + 0 = -6.$$

Étape 3 : *Calcul de la somme des produits des diagonales montantes (*S_-*).*

$$S_- = 3\cdot(-1)\cdot1 + 2\cdot4\cdot2 + 1\cdot0\cdot5 = -3 + 16 + 0 = 13.$$

Étape 4 : *Calcul du déterminant.*

$$\det(A) = S_+ - S_- = -6 - 13 = -19.$$

On peut vérifier ce résultat en utilisant le développement de Laplace (par exemple le long de la première colonne), ce qui confirme que le calcul par la règle de Sarrus est correct.

3.8.2 Multilinéarité et autres propriétés fondamentales du déterminant

Dans cette section, nous présentons les propriétés essentielles de l'application déterminant. Ces propriétés, dites fondamentales, jouent un rôle central dans l'étude des matrices carrées et des systèmes linéaires. Elles permettent notamment de comprendre la nature du déterminant en tant qu'application multilinéaire et alternée, et justifier les règles usuelles de calcul du déterminant.

Proposition 3.8.1 *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On note* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *les colonnes de* A *et* $L_1, L_2, \ldots, L_n$ *ses lignes. Alors*
1. ***Linéarité par rapport à une colonne.***
Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, *l'application déterminant est linéaire en la* $j-$*ième colonne, c'est-à-dire pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et pour toutes colonnes* $C'_j, C''_j \in \mathbb{K}^n$,

$$\det(C_1, \ldots, \lambda C'_j, \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C'_j, \ldots, C_n),$$

et
$$\det(C_1,\ldots,C'_j+C''_j,\ldots,C_n)=\det(C_1,\ldots,C'_j,\ldots,C_n)+\det(C_1,\ldots,C''_j,\ldots,C_n).$$

2. ***Linéarité par rapport à une ligne.***
De façon analogue, pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, le déterminant est linéaire en la $i-$ième ligne, c'est-à-dire pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$ et pour toutes lignes $L'_i, L''_i\in\mathbb{K}^n$,

$$\det(L_1,\ldots,\lambda L'_i,\ldots,L_n)=\lambda\det(L_1,\ldots,L'_i,\ldots,L_n),$$

et
$$\det(L_1,\ldots,L'_i+L''_i,\ldots,L_n)=\det(L_1,\ldots,L'_i,\ldots,L_n)+\det(L_1,\ldots,L''_i,\ldots,L_n).$$

Le déterminant est donc multilinéaire par rapport à ses colonnes, et de même par rapport à ses lignes.

Preuve. Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et fixons une colonne j. On note $C_1,C_2,\ldots,C_n$ les colonnes de A. Par le développement de Laplace suivant la colonne j, on a

$$\det(A)=\sum_{i=1}^n a_{ij}\Delta_{ij},$$

où chaque $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ est un cofacteur associé à l'entrée a_{ij}. On observe que ces cofacteurs ne dépendent pas des éléments de la colonne j, mais uniquement des autres colonnes.
1. Linéarité par rapport à une colonne.
(a). Homogénéité (multiplication par un scalaire). Si la colonne j est remplacée par $\lambda C'_j$ ($\lambda\in\mathbb{K}$), alors chaque coefficient devient
$$a_{ij}=\lambda a'_{ij}.$$
Ainsi,

$$\det(C_1,\ldots,\lambda C'_j,\ldots,C_n)=\sum_{i=1}^n(\lambda a'_{ij})\Delta_{ij}=\lambda\sum_{i=1}^n a'_{ij}\Delta_{ij}=\lambda\det(C_1,\ldots,C'_j,\ldots,C_n).$$

(b). Additivité (somme de colonnes). Si la colonne j est la somme

$$C'_j+C''_j,$$

alors
$$a_{ij}=a'_{ij}+a''_{ij}.$$
On obtient

$$\det(C_1,\ldots,C'_j+C''_j,\ldots,C_n)=\sum_{i=1}^n(a'_{ij}+a''_{ij})\Delta_{ij}=\sum_{i=1}^n a'_{ij}\Delta_{ij}+\sum_{i=1}^n a''_{ij}\Delta_{ij}.$$

D'où

$$\det(C_1,\ldots,C'_j+C''_j,\ldots,C_n)=\det(C_1,\ldots,C'_j,\ldots,C_n)+\det(C_1,\ldots,C''_j,\ldots,C_n).$$

Ces deux propriétés montrent que le déterminant est une application linéaire en chaque colonne. Comme le choix de la colonne j est arbitraire, la linéarité vaut pour toutes les colonnes.
1. Linéarité par rapport à une ligne.
Le raisonnement est entièrement analogue si l'on fixe une ligne, ce qui établit la linéarité du déterminant par rapport à une ligne. $\square$

Exemple 3.8.4
1. ***Linéarité par rapport à une colonne.*** *Considérons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

La 2ème colonne se décompose en

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{C_2'} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{C_2''}.$$

Posons les matrices obtenues en remplaçant la colonne C_2 par C_2' puis par C_2'',

$$A' = (C_1, C_2', C_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A'' = (C_1, C_2'', C_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par la propriété de multilinéarité du déterminant en chaque colonne, on a

$$\det(A) = \det(C_1, C_2, C_3) = \det(C_1, C_2' + C_2'', C_3) = \det(C_1, C_2', C_3) + \det(C_1, C_2'', C_3),$$

c'est-à-dire

$$\det(A) = \det(A') + \det(A'').$$

Nous vérifions maintenant numériquement cette égalité en calculant chacun des déterminants.
(a) Calcul de $\det(A)$*. On développe par la première ligne*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot |M_{11}| - 2 \cdot |M_{12}| + 1 \cdot |M_{13}| = 1 \cdot (-4) - 2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-3) = -4 + 8 - 3 = 1.$$

(b) Calcul de $\det(A')$*. On développe par la première ligne*

$$\det(A') = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot |M_{11}| - 2 \cdot |M_{12}| + 1 \cdot |M_{13}| = 1 \cdot (-4) - 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 0 = -4 + 8 + 0 = 4.$$

(c) Calcul de $\det(A'')$*. On développe par la première ligne*

$$\det(A'') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot |M_{11}| - 0 \cdot |M_{12}| + 1 \cdot |M_{13}| = 1 \cdot 0 - 0 + 1 \cdot (-3) = -3.$$

On vérifie la relation donnée par la multilinéarité

$$\det(A') + \det(A'') = 4 + (-3) = 1 = \det(A).$$

Ce qui confirme la multilinéarité du déterminant en la 2ème colonne.
2. ***Linéarité par rapport à une ligne.***
Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Sa deuxième ligne est

$$L_2 = \begin{pmatrix}3 & 1 & 4\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{L_2'} + \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\end{pmatrix}}_{L_2''}.$$

On définit alors les matrices obtenues en remplaçant L_2 par chacune de ces parties

$$A' = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}, A'' = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Par la propriété de multilinéarité du déterminant en chaque ligne, on a

$$\det(A) = \det(L_1, L_2, L_3) = \det(L_1, L_2' + L_2'', L_3) = \det(A') + \det(A'').$$

Nous vérifions maintenant numériquement cette égalité en calculant chacun des déterminants.
(a) Calcul de $\det(A)$. *Développement (par la* 1*ère ligne)*

$$\det(A) = \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot(1\cdot 5 - 4\cdot 2) - 2\cdot(3\cdot 5 - 4\cdot 0) + 1\cdot(3\cdot 2 - 1\cdot 0) = -27.$$

(b) Calcul de $\det(A')$. *Développement (par la* 1*ère ligne)*

$$\det(A') = \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot(0\cdot 5 - 0\cdot 2) - 2\cdot(3\cdot 5 - 0) + 1\cdot(3\cdot 2 - 0) = -24.$$

(c) Calcul de $\det(A'')$. *Développement (par la* 1*ère ligne)*

$$\det(A'') = \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot(1\cdot 5 - 4\cdot 2) - 2\cdot(0\cdot 5 - 4\cdot 0) + 1\cdot(0\cdot 2 - 1\cdot 0) = -3$$

On obtient

$$\det(A') + \det(A'') = (-24) + (-3) = -27 = \det(A).$$

Cela confirme la linéarité du déterminant par rapport à une ligne (ici la deuxième ligne).

Le déterminant est une application qui associe à chaque matrice carrée un nombre du corps de base. Pour bien l'utiliser, il est important de connaître ses propriétés fondamentales. Celles-ci décrivent comment le déterminant se comporte lorsqu'on effectue des opérations élémentaires sur les colonnes ou les lignes. Elles précisent aussi les cas où le déterminant est nul, par exemple lorsqu'une colonne est nulle, que deux colonnes sont égales ou qu'une colonne est combinaison linéaire des autres. Enfin, toutes ces propriétés sont valables aussi bien pour les lignes que pour les colonnes, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.8.2 ***(Propriétés fondamentales du déterminant)*** *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $C_1, C_2, ..., C_n$ (resp. $L_1, L_2, ..., L_n$) les colonnes (resp. lignes) de A. Alors*
1. Effet des opérations élémentaires.
(a) ***Permutation de deux colonnes****. Si on permute deux colonnes de A on multiplie* $\det(A)$ *par* (-1),

$$\det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = -\det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n).$$

Cette propriété exprime le caractère alterné du déterminant.
(b) ***Multiplication d'une colonne par un scalaire****. Si l'on multiplie une colonne C_j par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, le déterminant est multiplié par λ,*

$$\det(C_1, \ldots, \lambda C_j, \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n).$$

Cela traduit la linéarité du déterminant par rapport à chaque colonne.
(c) ***Ajout d'une combinaison linéaire des autres colonnes à une colonne.*** *Si l'on remplace une colonne C_j par une combinaison linéaire des autres colonnes*

$$C_j \longleftarrow C_j + \sum_{k \neq j} \lambda_k C_k,$$

alors le déterminant reste inchangé

$$\det(C_1, \ldots, C_j + \sum_{k \neq j} \lambda_k C_k, \ldots, C_n) = \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n).$$

2. ***Cas particuliers entraînant un déterminant nul.***
(a) ***Colonne nulle.*** *Si une des colonnes de A est le vecteur nul, alors*

$$\det(A) = 0_{\mathbb{K}}.$$

C'est une conséquence directe de la linéarité : multiplier une colonne par $0_{\mathbb{K}}$ annule le déterminant.
(b) ***Deux colonnes égales.*** *Si deux colonnes sont identiques, alors*

$$\det(A) = 0_{\mathbb{K}}.$$

3. ***Colonne combinaison linéaire des autres.*** *Si une colonne est une combinaison linéaire des autres, alors les colonnes sont linéairement dépendantes, et*

$$\det(A) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Cette propriété exprime le fait que le déterminant est nul lorsque les colonnes (ou lignes) de la matrice ne forment pas une famille libre.
4. ***Symétrie lignes/colonnes.*** *Toutes les propriétés ci-dessus, énoncées pour les colonnes, restent valables pour les lignes.*

Nous allons appliquer les propriétés fondamentales du déterminant pour calculer le déterminant de Vandermonde dans l'exemple suivant.

Exemple 3.8.5 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle* ***déterminant de Vandermonde****, et on note $V(x_1, \ldots, x_n)$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par*

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1_{\mathbb{K}} & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1_{\mathbb{K}} & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1_{\mathbb{K}} & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \det\left((x_i^{j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right).$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

En effet. Par récurrence sur n.

- ***Si*** $n = 1$, *alors la matrice est* $(1_{\mathbb{K}})$ *donc* $V(x_1) = 1_{\mathbb{K}}$, *et la formule (produit vide) est vraie.*
- ***Si*** $n = 2$, *alors*

$$V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1_{\mathbb{K}} & x_1 \\ 1_{\mathbb{K}} & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1,$$

ce qui correspond bien au produit

$$\prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 2} (x_i - x_j) = x_2 - x_1.$$

- ***Si*** $n = 3$,

$$V(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1_{\mathbb{K}} & x_1 & x_1^2 \\ 1_{\mathbb{K}} & x_2 & x_2^2 \\ 1_{\mathbb{K}} & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

On effectue les opérations suivantes

$$C_3 \longleftarrow C_3 - x_1 C_2, C_2 \longleftarrow C_2 - x_1 C_1.$$

On obtient

$$V(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ 1_{\mathbb{K}} & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 \\ 1_{\mathbb{K}} & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 \end{vmatrix}$$

En développant le déterminant par la première ligne, on obtient

$$V(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2),$$

ce qui correspond bien au produit

$$\prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 3} (x_i - x_j) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2),$$

Supposons la formule vraie pour $n-1$ ($n \geqslant 3$). Considérons la matrice de Vandermonde $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = x_i^{j-1}$. Pour $j = 2, \ldots, n$, on effectue les opérations élémentaires sur les colonnes

$$C_2 \longleftarrow C_2 - x_1 C_1, C_3 \longleftarrow C_3 - x_1 C_2, \ldots, C_n \longleftarrow C_n - x_1 C_{n-1}.$$

Autrement dit

$$C_j \longleftarrow C_j - x_1 C_{j-1}.$$

Ces opérations élémentaires sur les colonnes ne changent pas la valeur du déterminant. La matrice résultante a donc la forme

$$\begin{pmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 1_{\mathbb{K}} & (x_2 - x_1)x_2 & (x_2 - x_1)x_2^2 & \cdots & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1_{\mathbb{K}} & (x_n - x_1)x_n & (x_n - x_1)x_n^2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

En développant le déterminant par rapport à la première ligne, on obtient

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1) \cdot V(x_2, \ldots, x_n).$$

Par l'hypothèse de récurrence,

$$V(x_2, \ldots, x_n) = \prod_{2 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

D'où

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \left(\prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1) \right) \left(\prod_{2 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) \right) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

Cela conclut la récurrence et la preuve.

Le déterminant d'une matrice carrée n'est pas seulement caractérisé par ses propriétés de multilinéarité et d'alternance ; il possède également un ensemble de propriétés algébriques fondamentales qui en font un outil central en algèbre linéaire. Celles-ci décrivent son comportement vis-à-vis de la multiplication par un scalaire, du produit de matrices, de la transposition et de l'inversibilité. Elles constituent à la fois des moyens pratiques pour simplifier les calculs et des outils théoriques essentiels pour comprendre la structure des matrices et leurs applications.

Proposition 3.8.3 ***(Propriétés algébriques du déterminant)*** *Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors*
1. ***Multiplication par un scalaire****. Si l'on multiplie tous les coefficients de la matrice A par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ^n,*

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A).$$

2. ***Compatibilité avec le produit matriciel.*** *Le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit de leurs déterminants*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Cela montre que le déterminant «respecte » la multiplication de matrices.
3. ***Invariance par transposition.*** *Le déterminant d'une matrice reste inchangé lorsqu'on la transpose*

$$\det({}^t A) = \det(A).$$

4. ***Critère d'inversibilité.*** *La matrice A est inversible si et seulement si*

$$\det(A) \neq 0_{\mathbb{K}}.$$

Autrement dit, un déterminant nul indique que la matrice est singulière (non inversible).
5. ***Déterminant de l'inverse.*** *Si A est inversible, le déterminant de son inverse est l'inverse de son déterminant*

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

6. ***Déterminant d'une matrice triangulaire.*** *Si A est une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure). Alors*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Autrement dit, le déterminant d'une matrice triangulaire est simplement le produit de ses éléments diagonaux.

Corollaire 3.8.1 ***(Conséquences algébriques du déterminant)***
1. ***Déterminant des puissances entières positives.*** *À partir de la propriété de compatibilité du déterminant avec le produit matriciel, on établit par récurrence que*

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall k \in \mathbb{N}^* : \det(A^k) = (\det(A))^k.$$

2. ***Déterminant des puissances entières relatives.*** *Si A est inversible ($A \in GL_n(\mathbb{K})$), on a*

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \det(A^k) = (\det(A))^k.$$

3. ***Déterminant des matrices nilpotentes.*** *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$. Par conséquent*

$$\det(A^k) = (\det(A))^k = 0_{\mathbb{K}},$$

et donc

$$\det(A) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Autrement dit, toute matrice nilpotente est non inversible.
4. ***Déterminant des matrices antisymétriques d'ordre impair.*** *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique et si n est impair, alors*

$$\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A),$$

d'où

$$\det(A) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Preuve.
1. On procède par récurrence sur k. Pour $k = 1$ on a bien

$$\det(A^1) = \det A = (\det A)^1.$$

Supposons qu'il existe $k \geqslant 1$ tel que

$$\det(A^k) = (\det A)^k.$$

Alors, en utilisant la propriété multiplicative du déterminant

$$\det(XY) = \det X \det Y,$$

on obtient

$$\det(A^{k+1}) = \det(A^k A) = \det(A^k)\det(A) = (\det A)^k \det(A) = (\det A)^{k+1}.$$

Par le principe de récurrence, l'égalité est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible et A^{-1} existe et

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

Dès lors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
• Si $k \geqslant 0$, on utilise le point (1).
• Si $k < 0$, on écrit

$$k = -m, m > 0,$$

alors

$$\det(A^k) = \det(A^{-m}) = \det((A^{-1})^m) = (\det(A^{-1}))^m = \left((\det(A))^{-1}\right)^m = (\det(A))^{-m} = (\det(A))^k.$$

Dans tous les cas on a pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$,

$$\det(A^k) = (\det(A))^k.$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Par définition, il existe un entier $k > 0$ tel que

$$A^k = 0_n.$$

En prenant les déterminants des deux côtés et en utilisant la multiplicativité du déterminant et le fait que

$$\det(0_n) = 0_{\mathbb{K}},$$

on obtient

$$\det(A^k) = \det(0_n) = 0_{\mathbb{K}}.$$

D'après le point (1) (cas des puissances positives),

$$\det(A^k) = (\det A)^k.$$

Ainsi

$$(\det A)^k = 0_{\mathbb{K}}.$$

Comme $\mathbb{K}$ est un corps (donc sans diviseurs de zéro), l'équation $x^k = 0_{\mathbb{K}}$ n'a pour solution que $x = 0_{\mathbb{K}}$. On en déduit

$$\det(A) = 0_{\mathbb{K}}.$$

4. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique, on a

$${}^tA = -A.$$

Or le déterminant d'une transposée est égal à celui de la matrice initiale,

$$\det({}^tA) = \det(A).$$

D'autre part

$$\det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det(A).$$

Si n est impair, alors $(-1)^n = -1$. Donc

$$\det(A) = \det({}^tA) = (-1)^n \det(A) = -\det(A).$$

Ainsi

$$\det(A) = -\det(A) \implies \det(A) = 0_{\mathbb{K}}.$$

□

Exemple 3.8.6
1. ***Déterminant des puissances entières positives en dimension 3.*** *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Or A est triangulaire supérieure, donc $\det(A)$ *est le produit des éléments diagonaux*

$$\det(A) = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12.$$

Calculons maintenant A^2 et A^3 et leurs déterminants pour vérifier $\det(A^k) = (\det A)^k$.
On a

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Comme A^2 est encore triangulaire, son déterminant est le produit des diagonales

$$\det(A^2) = 144.$$

Or

$$(\det A)^2 = 12^2 = 144.$$

Donc

$$\det(A^2) = (\det A)^2.$$

On a

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 26 & 16 \\ 0 & 27 & 37 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\det(A^3) = 1728,$$

et

$$(\det A)^3 = 12^3 = 1728.$$

Ainsi

$$\det(A^3) = (\det A)^3.$$

Pour une matrice triangulaire (ici supérieure), A^k est aussi triangulaire et ses éléments diagonaux sont les puissances des éléments diagonaux de A. Par conséquent

$$\det(A^k) = \prod_{i=1}^{3} (a_{ii})^k = \left(\prod_{i=1}^{3} a_{ii} \right)^k = (\det A)^k,$$

ce qui illustre et confirme la propriété pour ce cas concret en dimension 3.
2. ***Déterminant des puissances entières relatives en dimension 3.*** *Choisissons la matrice inversible*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) On calcule $\det(A)$ par développement selon la première ligne

$$\det(A) = a_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 25 \neq 0.$$

Ainsi $A \in GL_3(\mathbb{R})$.
(b) On calcule la matrice inverse de A, obtient donc

$$A^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 12 & 1 & -3 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

On n'a pas besoin de développer le déterminant de A^{-1} à partir de cette forme, la propriété générale donne directement la valeur.
(c) Vérification de la propriété pour quelques valeurs de k.
• *Pour $k = 1$,*

$$\det(A^1) = \det(A) = 25 = (25)^1.$$

• *Pour $k = 2$, par la propriété (1) (puissances positives),*

$$\det(A^2) = (\det A)^2 = 25^2 = 625.$$

• *Pour $k = -1$, puisque $A \in GL_3(\mathbb{R})$,*

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 25^{-1} = \frac{1}{25}.$$

Ceci est cohérent avec A^{-1} calculé ci-dessus (dont le déterminant vaut bien $1/25$ par la propriété générale).
• *Pour $k = -2$,*

$$\det(A^{-2}) = \det\left((A^{-1})^2\right) = (\det(A^{-1}))^2 = \left(\frac{1}{25}\right)^2 = \frac{1}{625} = 25^{-2}.$$

Ainsi, pour ces valeurs vérifiées explicitement,

$$\det(A^k) = (\det A)^k, \textit{ pour } k = 1, 2, -1, -2,$$

et la formule vaut en général pour tout $k \in \mathbb{Z}$ comme l'énoncé l'affirme.
3. ***Matrice nilpotente et déterminant nul en dimension 3.*** *Considérons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) Vérifions la nilpotence de A. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Donc A est nilpotente d'indice $k = 3$ (i.e. $A^3 = 0_3$ et $A^2 \neq 0_3$).
(b) Calcul du déterminant. Comme A est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale, donc

$$\det(A) = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

(c) Vérification via la propriété des puissances. Par la propriété déjà établie,

$$\det(A^3) = (\det A)^3.$$

Or $A^3 = 0_3$ donc

$$\det(A^3) = \det(0_3) = 0 \Longrightarrow (\det A)^3 = 0,$$

donc $\det(A) = 0$ *dans le corps* $\mathbb{R}$.
4. ***Déterminant des matrices antisymétriques d'ordre impair.*** *Considérons la matrice antisymétrique suivante dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Vérification que A est antisymétrique. Par définition, une matrice est antisymétrique si

$${}^tA = -A.$$

Ici,

$${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair. On sait que pour n impair,

$$\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det(A).$$

Or ici $n = 3$ *(impair), donc*

$$\det(A) = (-1)^3 \det(A) = -\det(A).$$

Cela implique

$$\begin{aligned} \det(A) = -\det(A) &\Longrightarrow 2\det(A) = 0 \\ &\Longrightarrow \det(A) = 0. \end{aligned}$$

(c) Vérification directe. Si on calcule directement le déterminant de A,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Le calcul donne bien 0*, ce qui confirme la propriété. Par conséquent, Toute matrice antisymétrique d'ordre impair (ici en dimension* 3*) est non inversible car son déterminant est nul.*

Le déterminant est un outil puissant pour analyser les familles de vecteurs dans un espace vectoriel. Il permet non seulement de déterminer si une famille de vecteurs est libre, mais aussi, lorsque le nombre de vecteurs est égal à la dimension de l'espace, de vérifier si elle constitue une base. La proposition suivante formalise cette relation essentielle entre le déterminant et l'indépendance linéaire.

Corollaire 3.8.2 ***(Définition)***
Critère de l'indépendance linéaire via le déterminant. *Soient E un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base* $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$*. Soit* $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *une famille de n vecteurs de E. On désigne par* $\underset{B}{Mat}(v_1, v_2, ..., v_n)$ *la matrice de la famille de vecteurs dans la base B et on définit le déterminant de la famille de vecteurs* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *par*

$$\det_B(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \det\left(\underset{B}{Mat}(v_1, v_2, ..., v_n)\right).$$

Alors $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *est une famille libre si, et seulement si,* $\det_B(\mathcal{F}) \neq 0_{\mathbb{K}}$*. Dans ce cas, la famille* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *forme une base de E.*

Remarque 3.8.4 *Cette condition n'est valable que lorsque le nombre de vecteurs est égal à la dimension de l'espace. Si la famille contient moins de n vecteurs, on ne peut pas conclure par le déterminant.*

Exemple 3.8.7
1. ***Famille libre.*** *Soit* $E = \mathbb{R}^3$ *muni de la base canonique* B. *Prenons la famille* $\mathcal{F}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ *où*

$$v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 1, 4), v_3 = (2, -1, 1).$$

La matrice des vecteurs (colonnes = coordonnées dans B*) est*

$$A = \underset{B}{Mat}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons le déterminant (par la règle de Sarrus ou par Laplace)

$$\det(A) = \det_B(v_1, v_2, \ldots, v_n) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = 15 \neq 0,$$

la famille $\mathcal{F}_1$ *est linéairement indépendante et puisqu'elle contient* 3 *vecteurs dans un espace de dimension* 3, *donc* $\mathcal{F}_1$ *est une base de* E.
2. ***Famille liée.*** *Prenons maintenant la famille* $\mathcal{F}_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ *où*

$$u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (2, 4, 6), u_3 = (0, 1, 1).$$

Matrice des colonnes est

$$A' = \underset{B}{Mat}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons $\det(A')$ *par la même formule. On obtient*

$$\det(A') = 0,$$

la famille $\mathcal{F}_2$ *est liée (ce qui correspond à l'observation* $u_2 = 2u_1$*).*

3.8.3 Calcul de l'inverse d'une matrice à l'aide de la comatrice

Le calcul de l'inverse d'une matrice carrée est très important en algèbre linéaire, notamment pour résoudre des systèmes d'équations linéaires ou pour étudier des applications linéaires. Cependant, toutes les matrices ne sont pas inversibles : une matrice A est inversible seulement si son déterminant est non nul. L'une des méthodes classiques pour calculer l'inverse d'une matrice consiste à utiliser la comatrice (ou matrice des cofacteurs). Cette méthode établit un lien direct entre le déterminant, les cofacteurs et la formule de A^{-1}.

Définition 3.8.3 ***(Comatrice)***
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On appelle comatrice de* A *ou matrice des cofacteurs, la matrice carrée d'ordre* n, *notée* $com(A)$ *dont les coefficients sont les cofacteurs de* A. *On a donc*

$$com(A) = (\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1j} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2j} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{i1} & \Delta_{i2} & \cdots & \Delta_{ij} & \cdots & \Delta_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nj} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix},$$

où Δ_{ij} est le cofacteur d'indice (i,j) dans A.

Exemple 3.8.8 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

On calcule les cofacteurs

$$\Delta_{11} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 12, \quad \Delta_{12} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 0, \quad \Delta_{13} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{21} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -8, \quad \Delta_{22} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4, \quad \Delta_{23} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{31} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \Delta_{32} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1, \quad \Delta_{33} = (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3.$$

Donc

$$com(A) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La comatrice d'une matrice carrée n'est pas seulement un outil pour calculer son inverse ; elle satisfait aussi une relation remarquable qui relie directement la matrice, sa comatrice et son déterminant. Cette identité, appelée formule fondamentale de la comatrice. Elle permet notamment de justifier la formule explicite de l'inverse d'une matrice inversible

Proposition 3.8.4 ***(Formule fondamentale de la comatrice)*** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,*

$$A \cdot^t (com(A)) =^t (com(A)) \cdot A = \det(A) \cdot I_n. \tag{3.9}$$

Exemple 3.8.9 *Considérons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a déjà calculé sa comatrice

$$com(A) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est

$$\det(A) = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12.$$

Vérifions maintenant l'identité

$$A \cdot^t (com(A)) =^t (com(A)) \cdot A = \det(A) \cdot I_3.$$

On calcule

$$A \cdot^t (com(A)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -8 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = 12 I_3.$$

De même

$$^t(com(A)) \cdot A = \begin{pmatrix} 12 & -8 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = 12I_3.$$

On retrouve bien que

$$A \cdot^t (com(A)) =^t (com(A)) \cdot A = \det(A) \cdot I_3.$$

Après avoir défini la comatrice d'une matrice carrée A, on peut utiliser cette notion pour établir une formule générale de l'inverse. En effet, grâce à l'identité fondamentale (3.9), il est possible d'exprimer l'inverse d'une matrice inversible directement à l'aide de sa comatrice.

Corollaire 3.8.3 ***(Formule de l'inverse via la comatrice)***
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si la matrice A est inversible ($\det(A) \neq 0_{\mathbb{K}}$), alors son inverse A^{-1} est donné par la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot^t (com(A)) = (\det(A))^{-1} \cdot^t (com(A)) .$$

où $^t\,(com(A))$ désigne la transposée de la comatrice de A.

Preuve. Rappelons l'identité fondamentale

$$A \cdot^t (com(A)) = \det(A) \cdot I_n$$

Comme $\det(A) \neq 0_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$, l'élément $\det(A)$ est inversible dans le corps $\mathbb{K}$. On peut donc multiplier l'égalité précédente par le scalaire $\dfrac{1}{\det(A)}$ et obtenir

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot^t (com(A)) \right) = I_n.$$

De même, en partant de l'égalité symétrique

$$^t\,(com(A)) \cdot A = \det(A) \cdot I_n,$$

et en multipliant cette fois-ci à gauche par $\dfrac{1}{\det(A)}$, on obtient

$$\left(\frac{1}{\det(A)}^t (com(A)) \right) A = I_n.$$

Ainsi la matrice

$$\frac{1}{\det(A)}^t (com(A)) ,$$

est à la fois un inverse à gauche et un inverse à droite de A. Dans les anneaux de matrices sur un corps, un inverse à gauche et un inverse à droite coïncident et donnent l'unique inverse de la matrice. Donc

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}^t (com(A)) .$$

□

Exemple 3.8.10 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

On calcule d'abord son déterminant en développant selon la première ligne

$$\det(A) = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1.$$

Ainsi, $\det(A) = 1 \neq 0$*, donc* A *est inversible.*
On détermine ensuite les cofacteurs

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

On obtient

$$\begin{aligned} &\Delta_{11} = -24, && \Delta_{12} = 20, && \Delta_{13} = -5, \\ &\Delta_{21} = 18, && \Delta_{22} = -15, && \Delta_{23} = 4, \\ &\Delta_{31} = 5, && \Delta_{32} = -4, && \Delta_{33} = 1. \end{aligned}$$

La comatrice est alors

$$com(A) = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule de l'inverse via la comatrice, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^{t}(com(A)) = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons découvert les bases de la théorie des matrices, un outil essentiel de lalgèbre linéaire. Nous avons appris à reconnaître les différents types de matrices (nulles, diagonales, triangulaires, symétriques, etc.) et à effectuer les opérations fondamentales : addition, multiplication par un scalaire, transposition et produit matriciel.

Nous avons vu que ces opérations donnent aux matrices une structure algébrique utile et quelles sont étroitement liées à la résolution des systèmes déquations linéaires. Nous avons aussi étudié le rôle des matrices dans la représentation des applications linéaires et dans le changement de base.

Enfin, létude du déterminant nous a permis de comprendre ses propriétés, son lien avec linversibilité dune matrice et son utilisation pour calculer linverse à laide de la comatrice.

Ce chapitre constitue ainsi une base solide pour la suite du cours, où les matrices serviront à approfondir létude des systèmes linéaires, des transformations linéaires et des valeurs propres.

Chapitre 4

Systèmes d'équations linéaires

L'étude des systèmes d'équations linéaires constitue une étape essentielle de l'algèbre linéaire. Elle permet de modéliser et de résoudre simultanément plusieurs équations faisant intervenir plusieurs inconnues. Cette problématique se retrouve dans de nombreux domaines : mathématiques, physique, informatique, économie, ou encore sciences de l'ingénieur.

Dans ce chapitre, nous commencerons par définir ce qu'est une équation linéaire, avant d'étendre cette notion à celle de système linéaire, c'est-à-dire un ensemble d'équations à résoudre simultanément. Nous analyserons les différentes manières de représenter un système linéaire. La forme matricielle offre un cadre algébrique efficace, permettant de manipuler les équations à l'aide de matrices et d'opérations élémentaires. Une seconde approche consiste à considérer le système comme une application linéaire entre deux espaces vectoriels, ce qui nous permettra d'introduire des concepts fondamentaux comme le noyau, l'image, ainsi que les notions d'injectivité et de surjectivité. Enfin, nous explorerons également une interprétation vectorielle, dans laquelle les équations sont vues comme des combinaisons linéaires de vecteurs.

Nous distinguerons ensuite plusieurs types de systèmes, en fonction du nombre et de la nature de leurs solutions. Les systèmes homogènes, par exemple, admettent toujours la solution triviale. Parmi les systèmes dits compatibles, certains sont déterminés (ils possèdent une solution unique), d'autres indéterminés (ils admettent une infinité de solutions). À l'inverse, les systèmes incompatibles ne possèdent aucune solution.

Pour résoudre ces systèmes, nous étudierons différentes méthodes. La méthode de substitution, bien que simple, est adaptée aux petits systèmes. La règle de Cramer, fondée sur les déterminants, s'applique uniquement aux systèmes carrés. La méthode du pivot de Gauss, quant à elle, s'avère particulièrement puissante pour traiter des systèmes plus complexes, grâce à une élimination systématique des variables.

Ce chapitre introduira également des outils théoriques fondamentaux, comme la matrice augmentée, qui fournit une représentation structurée du système, ou encore le théorème de Rouché-Fontené, qui permet de déterminer avec précision l'existence et le nombre de solutions d'un système.

L'objectif principal de ce chapitre est d'apprendre à analyser et résoudre un système d'équations linéaires, en déterminant s'il admet une solution, plusieurs ou aucune, tout en maîtrisant les différentes méthodes de résolution et les concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire qui y sont associés.

Dans ce chapitre, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ désigne un corps commutatif, et en général, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4.1 Équations linéaires

Avant d'aborder l'étude des systèmes d'équations linéaires, il est essentiel de commencer par les équations linéaires elles-mêmes. En effet, comprendre la structure et les propriétés fondamentales d'une équation linéaire — telles que la forme générale, les solutions possibles et les conditions d'existence et d'unicité — constitue une étape préalable indispensable. Cette étude fournit les bases nécessaires pour analyser ensuite des ensembles d'équations linéaires combinées au sein d'un système, et pour mieux saisir les méthodes de résolution qui en découlent.

Une équation linéaire est une équation dans laquelle les variables apparaissent uniquement à la puissance 1, sans être multipliées entre elles ni élevées à une puissance supérieure. Elle peut contenir une ou plusieurs variables. Les équations linéaires sont très importantes en algèbre, car elles constituent la base de nombreuses méthodes de calcul et trouvent des applications en mathématiques, en physique et en informatique.

4.1.1 Définitions et exemples

Dans cette section, nous présentons les notions de base des équations linéaires, en donnant leur définition formelle et en illustrant chaque notion par des exemples concrets pour faciliter la compréhension.

Définition 4.1.1 ***(Équation linéaire)***
1. ***Équation linéaire.*** *Une équation linéaire à n variables (ou inconnues) $x_1, ..., x_n$ est une relation de la forme*

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = b,$$

où $a_1, ..., a_n$ sont les coefficients et b est le terme constant, tous appartenant à $\mathbb{K}$.
2. ***Solution.*** *Une solution de cette équation est tout $n-$uplet $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ qui satisfait l'égalité, c'est-à-dire qui rend la somme des termes égale à b.*
3. ***Équation linéaire homogène.*** *Une équation linéaire homogène est une équation linéaire dont le terme constant est nul. Elle s'écrit*

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

Remarque 4.1.1 *Une équation linéaire est une équation du premier degré par rapport à ses variables, c'est-à-dire que chaque variable apparaît uniquement avec un exposant 1 (et non au carré, au cube, etc.) et n'est pas multipliée par une autre variable (pas de produit croisé comme xy ou x_1x_2).*

Exemple 4.1.1 ***(Exemples d'Équations Linéaires)***
1. ***Exemple en trois variables réelles.*** *Considérons l'équation suivante à trois variables réelles x_1, x_2, x_3,*

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7.$$

Il s'agit d'une équation linéaire, car les inconnues apparaissent uniquement au premier degré, sans puissances supérieures ni produits entre variables. Les coefficients sont $a_1 = 2, a_2 = -3, a_3 = 5$, et le terme constant est $b = 7$, tous appartenant à $\mathbb{R}$.
Pour trouver les solutions, nous devons exprimer deux variables en fonction de la troisième. Par exemple, nous pouvons résoudre pour x_1 en fonction de x_2 et x_3,

$$x_1 = \frac{1}{2}(7 + 3x_2 - 5x_3).$$

Ainsi, la solution générale est donnée par tous les triplets $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *de la forme*

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}(7 + 3x_2 - 5x_3), x_2, x_3\right),$$

où x_2 *et* x_3 *sont des paramètres libres.*
2. ***Exemple en deux variables complexes.*** *Considérons maintenant une équation en deux variables complexes* $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$*,*

$$(2 + i)x_1 - (3 - 2i)x_2 = 5 + 4i.$$

Cette équation est également linéaire : chaque variable apparaît au premier degré, et les coefficients ainsi que le terme constant appartiennent à $\mathbb{C}$*. Les coefficients sont* $a_1 = (2 + i), a_2 = -(3 - 2i)$*, et le terme constant est* $b = 5 + 4i$*.*
Résolvons cette équation en exprimant x_1 *en fonction de* x_2

$$x_1 = \frac{1}{2 + i}\left(5 + 4i + (3 - 2i)x_2\right).$$

Pour simplifier cette expression, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué de $(2+i)$*, qui est* $(2 - i)$*. On obtient alors après calcul*

$$x_1 = \left(\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i\right)x_2 + \left(\frac{14}{5} + \frac{3}{5}i\right).$$

La solution générale est donc donnée par tous les couples $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ *de la forme*

$$(x_1, x_2) = \left(\left(\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i\right)x_2 + \left(\frac{14}{5} + \frac{3}{5}i\right), x_2\right).$$

où x_2 *est un paramètre complexe libre.*
3. ***Exemple d'équation homogène en quatre variables.*** *Considérons l'équation suivante*

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_4 = 0.$$

C'est une équation linéaire homogène à quatre inconnues x_1, x_2, x_3 *et* x_4*.*
On remarque que la variable x_3 *n'apparaît pas dans l'équation. Cela veut dire que son coefficient est nul. Ainsi, bien que* x_3 *ne figure pas dans l'expression, elle fait partie intégrante des inconnues du problème. Cette remarque montre qu'il est essentiel de préciser l'espace vectoriel dans lequel on cherche les solutions. Ici, les solutions sont des vecteurs de* $\mathbb{R}^4$*, car il y a quatre variables, même si toutes n'apparaissent pas explicitement dans l'équation.*

4.1.2 Interprétation des équations linéaires comme applications linéaires

Une équation linéaire peut être interprétée comme l'expression d'une application linéaire (ou forme linéaire) entre deux espaces vectoriels. Cette approche permet de relier les équations à des notions clés telles que le noyau, l'image, le rang, l'injectivité et la surjectivité.

Définition 4.1.2 *Soit une équation linéaire*

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = b.$$

1. On lui associe l'application linéaire suivante

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n. \end{array}$$

Cette application f est linéaire. Elle est appelée une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$.
2. ***Interprétation de l'équation.***
(a). ***Écriture fonctionnelle.*** *L'équation initiale peut être reformulée sous forme fonctionnelle*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = b.$$

Autrement dit, le vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ est une solution de l'équation si et seulement si son image par f est égale à b. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des antécédents de b par f

$$\{x \in \mathbb{K}^n : f(x) = b\} = f^{-1}(\{b\}) \subset \mathbb{K}^n.$$

(b). ***Cas particulier : équation homogène.***
Lorsque le second membre est nul ($b = 0_{\mathbb{K}}$), l'équation devient

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0_{\mathbb{K}} \iff f(x) = 0_{\mathbb{K}}.$$

On dit alors que l'équation est homogène. Dans ce cas, l'ensemble des solutions correspond au noyau de l'application linéaire f, noté $\ker(f)$. *C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.*

Exemple 4.1.2 ***(Interprétation comme application linéaire)***
1. ***Cas non homogène.*** *Considérons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante à trois inconnues*

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5.$$

On lui associe l'application (forme) linéaire suivante

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 3x_3. \end{array}$$

L'équation s'écrit alors sous forme fonctionnelle

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est exactement l'ensemble des antécédents de 5 par f,

$$S = f^{-1}(\{5\}) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = 5\right\}.$$

2. ***Cas homogène.*** *Considérons maintenant l'équation associée, homogène*

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0.$$

On utilise la même application linéaire f. L'ensemble des solutions est alors le noyau de f,

$$\ker(f) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = 0\right\} = \left\{(\frac{x_2 - 3x_3}{2}, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

4.2 Systèmes d'équations linéaires

Après avoir étudié les équations linéaires, nous abordons maintenant les systèmes d'équations linéaires. Un système est un ensemble d'équations linéaires que l'on cherche à résoudre simultanément. L'étude des systèmes permet de déterminer si un ensemble d'équations possède une solution unique, plusieurs solutions ou aucune solution. Elle permet également de distinguer les systèmes homogènes, lorsque le second membre est nul, des systèmes non homogènes. Enfin, cette étude ouvre la voie aux méthodes de résolution, notamment celles utilisant les matrices et le concept de rang, et permet de passer de l'analyse d'une seule équation à celle d'un ensemble d'équations interconnectées.

4.2.1 Définitions et notations

Définition 4.2.1 ***(Systèmes d'équations linéaires)*** *Soit m et n deux entiers naturels non nuls.*
1. On appelle système d'équations linéaires de m équations à n inconnues $x_1, ..., x_n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute liste (ou famille) de n équations linéaires de la forme

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = b_m. \end{array} \right.$$

Où
(a) Les scalaires $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de $\mathbb{K}$ sont appelés les coefficients du système (S).
(b) Les scalaires $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ de $\mathbb{K}$ constituent le second membre du système (S).
(c) Les symboles $x_1, ..., x_n$ sont les inconnues du système.

Notation 4.2.1
1. ***Notation des inconnues.*** *Lorsque le nombre d'inconnues est réduit (par exemple 2 ou 3), il est courant d'utiliser les lettres x, y, z au lieu de x_1, x_2, x_3, afin d'alléger l'écriture et de faciliter la lecture.*
2. ***Convention d'indexation.*** *Les coefficients a_{ij} respectent une convention universelle en algèbre linéaire, également adoptée par les logiciels de calcul (Scilab, MATLAB, NumPy, etc.). Cette uniformité garantit une compréhension et une utilisation cohérentes.*
3. ***Signification des indices dans*** *a_{ij}. Le coefficient a_{ij} désigne le coefficient de l'inconnue x_j dans la $i-$ème équation L_i du système. Autrement dit :*
- *Le premier indice i correspond à la ligne (numéro de l'équation).*
- *Le second indice j correspond à la colonne (numéro de l'inconnue x_j).*

Cette notation est fondamentale pour passer à la représentation matricielle des systèmes.

Exemple 4.2.1
1. Considérons le système linéaire suivant

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} x_1+2x_2- x_3= 4 \\ 3x_1- x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1+ x_2+ x_3= 3. \end{array} \right.$$

On en extrait les éléments suivants,
(a) Inconnues sont x_1, x_2, x_3.
(b) Coefficients du système sont

$$a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = -1, a_{21} = 3, a_{22} = -1, a_{23} = 2, a_{31} = 2, a_{32} = 1, a_{33} = 1.$$

(c) Second membre est

$$(b_1, b_2, b_3) = (4, -1, 3).$$

2. Considérons le système linéaire suivant

$$(S) : \left\{ \begin{array}{r} x_1+2x_2-x_3= 4 \\ x_2+x_3=1. \end{array} \right.$$

Remarques importantes,
(a) Ici $m = 2$ *et* $n = 3$ *(donc* $m < n$*).*
(b) Dans la deuxième équation, la composante en x_1 *est* 0 *(on n'a pas* x_1 *dans cette équation).*
(c) Inconnues sont x_1, x_2, x_3.
(d) Coefficients,

$$a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = -1, a_{21} = 0, a_{22} = 1, a_{23} = 1.$$

(e) Second membre est

$$(b_1, b_2) = (4, 1).$$

Un cas particulier essentiel des systèmes linéaires est celui des systèmes homogènes, c'est-à-dire ceux dont tous les seconds membres sont nuls.

Définition 4.2.2 ***(Systèmes d'équations linéaires homogènes)***
Un système d'équations linéaires homogène est un système dans lequel toutes les équations ont un second membre nul. On le note en général (S_H)*, et il s'écrit sous la forme*

$$(S_H) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0_{\mathbb{K}} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0_{\mathbb{K}}. \end{cases}$$

Exemple 4.2.2 *Considérons le système linéaire homogène suivant*

$$(S_H) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

On en extrait les éléments suivants
(a) Inconnues sont x_1, x_2, x_3.
(b) Coefficients du système sont

$$a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = -1, a_{21} = 2, a_{22} = 4, a_{23} = -2, a_{31} = 3, a_{32} = 6, a_{33} = -3.$$

(c) Second membre est nul

$$(b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0).$$

Définition 4.2.3 ***(Solution d'un système)***
1. On appelle ***solution*** *d'un système d'équations linéaires* (S) *tout* $n-$*uplet* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ *qui vérifie simultanément toutes les équations du système. Autrement dit, si l'on remplace chaque inconnue* x_j *par sa valeur dans le* $n-$*uplet, toutes les égalités du système doivent être satisfaites.*
2. Un système linéaire (S) *est dit*
(a) ***Compatible*** *s'il existe au moins un* $n-$*uplet* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ *qui en est une solution. Parmi les systèmes compatibles, on distingue*
• *Les systèmes* ***compatibles déterminés****, qui admettent une solution unique.*
• *Les systèmes* ***compatibles indéterminés****, qui admettent une infinité de solutions.*
(b) ***Incompatible*** *si aucun* $n-$*uplet de* $\mathbb{K}^n$ *ne satisfait simultanément l'ensemble des équations.*

Remarque 4.2.1
1. Un système linéaire homogène est toujours compatible, car il admet au moins la solution triviale (ou nulle)

$$(x_1, ..., x_n) = (0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, ..., 0_{\mathbb{K}}) .$$

2. Un système homogène peut admettre d'autres solutions que la triviale (appelées solutions non triviales), en particulier lorsque le nombre d'inconnues est strictement supérieur au rang du système. Dans ce cas, il existe une infinité de solutions.
3. Géométriquement, les équations d'un système homogène représentent des droites, des plans ou des hyperplans passant tous par l'origine. Ainsi, le vecteur nul appartient toujours à leur intersection. Dans le cas de deux équations à deux inconnues, cela correspond à deux droites passant par l'origine du plan.

Exemple 4.2.3
1. ***Système compatible déterminé (solution unique).*** *Considérons le système linéaire suivant*

$$(S_1) : \begin{cases} x+y+z= 2 \\ 2x-y+z= 3 \\ 3x \quad +z=4. \end{cases}$$

Ici, les trois équations sont indépendantes et ne se contredisent pas. Leur intersection correspond à un seul point de l'espace $\mathbb{R}^3$. Le système admet une solution unique : il est compatible déterminé.
2. ***Système compatible indéterminé (infinité de solutions).*** *Considérons le système linéaire suivant*

$$(S_2) : \begin{cases} x+ y+ z= 2 \\ 2x+2y+2z= 4 \\ 3x+3y+3z=6. \end{cases}$$

On remarque que la deuxième équation est le double de la première, et la troisième est son triple. Les trois équations expriment donc la même relation. Le système admet une infinité de solutions : il est compatible indéterminé.
3. ***Système incompatible (aucune solution).*** *Considérons le système linéaire suivant*

$$(S_3) : \begin{cases} x+y+z= 1 \\ x+y+z= 2 \\ x-y+z=0. \end{cases}$$

Les deux premières équations sont contradictoires : elles décrivent deux plans parallèles distincts (qui n'ont aucun point commun). Quelle que soit la troisième équation, il n'existe aucun triplet (x, y, z) qui satisfasse en même temps les deux premières. Le système n'a aucune solution : il est incompatible.

Lorsqu'on résout un système d'équations linéaires, il est souvent utile de transformer les équations pour simplifier leur écriture, tout en conservant l'ensemble des solutions. Par exemple, on peut échanger deux équations, multiplier une équation par un scalaire non nul, ou ajouter à une équation un multiple d'une autre. Ces transformations produisent un nouveau système qui, bien qu'écrit différemment, possède exactement les mêmes solutions que le système initial. On dit alors que les deux systèmes sont équivalents.

Définition 4.2.4 ***(Systèmes équivalents)***
Deux systèmes d'équations linéaires (S_1) et (S_2) sont dits équivalents s'ils possèdent exactement le même ensemble de solutions. Autrement dit, un $n-$uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ est solution de (S_1) si et seulement s'il est aussi solution de (S_2).

Cette notion est particulièrement utile, car elle permet de transformer un système complexe en un système équivalent plus simple à résoudre, sans modifier ses solutions.

Exemple 4.2.4
1. Considérons les deux systèmes suivants à deux inconnues x_1 et x_2

$$(S_1) : \begin{cases} -x_1+x_2=2 \\ 2x_1-x_2=1 \end{cases}, (S_2) : \begin{cases} -x_1+x_2= 2 \\ x_1 \quad\quad =3. \end{cases}$$

Les deux systèmes (S_1) et (S_2) sont équivalents, car ils ont exactement les mêmes solutions. En effet : On remarque que le système (S_2) est obtenu à partir de (S_1) en ajoutant les deux équations de (S_1)

$$(-x_1 + x_2) + (2x_1 - x_2) = 3 \Longrightarrow x_1 = 3.$$

En remplaçant dans la première équation $-x_1 + x_2 = 2$, on obtient

$$x_2 = 5.$$

Ainsi, les deux systèmes ont la même solution unique

$$x_1 = 3, x_2 = 5.$$

Ils sont donc équivalents.
2. Considérons les deux systèmes

$$(S_1) : \begin{cases} x_1+ x_2+x_3=3 \\ 2x_1- x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2 \quad =4 \end{cases}, (S_2) : \begin{cases} x_1+ x_2+ x_3= 3 \\ x_1+2x_2 \quad = 4 \\ x_1- x_2+2x_3=-1. \end{cases}$$

Les systèmes (S_1) et (S_2) sont équivalents. En effet, en procédant par substitution à partir de (S_1), on trouve la solution unique :

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{7}{4}, x_3 = \frac{3}{4}.$$

De plus, ce même triplet $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right)$ satisfait également toutes les équations de (S_2). Ainsi, (S_1) et (S_2) possèdent exactement le même ensemble de solutions et sont donc équivalents.

4.2.2 Représentations et interprétations d'un système linéaire

Un système linéaire peut être vu de plusieurs façons. Chaque représentation donne un point de vue différent mais complémentaire. Les trois interprétations principales sont les suivantes :

1. Interprétation matricielle : Le système est représenté sous forme d'une égalité entre une matrice de coefficients, un vecteur d'inconnues et un vecteur de résultats. Cette forme est particulièrement adaptée aux méthodes de résolution systématiques, comme l'élimination de Gauss ou l'inversion matricielle.

2. Interprétation en termes d'applications linéaires : le système est vu comme l'image d'un vecteur par une application linéaire. Cette perspective permet l'étude du système à travers les notions de noyau, d'image, d'injectivité et de surjectivité de l'application.

3. Interprétation en termes de combinaisons linéaires. Chaque équation est interprétée comme une contrainte sur une combinaison linéaire de vecteurs. Résoudre le système revient alors à déterminer si un vecteur donné peut être exprimé comme une combinaison linéaire d'un ensemble de vecteurs (les colonnes de la matrice des coefficients).

Définition 4.2.5 ***(Interprétation matricielle)***
Soit (S) un système linéaire de m équations à n inconnues suivant

$$(S):\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots + & a_{1n}x_n= & b_1\\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \cdots + & a_{2n}x_n= & b_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{i1}x_1+ & a_{i2}x_2+ & \cdots + & a_{in}x_n= & b_i\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \cdots + & a_{mn}x_n= & b_m \end{array}\right.$$

(a) ***Écriture matricielle.*** *Ce système peut être représenté sous forme matricielle*

$$AX=B,$$

où
$A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *est la matrice des coefficients du système, appelée matrice associée au système (S).*
$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ *est la matrice colonne des inconnues.*
$B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$ *est la matrice colonne des constants (ou second membre).*
Ainsi, le système ***(S)*** *s'écrit simplement*

$$(S):AX=B\Longleftrightarrow\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_i\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_i\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

(b) ***Système homogène.*** *Si le second membre est nul, c'est-à-dire $B=0_{m,1}$, alors le système est dit homogène et s'écrit*

$$(S_H):AX=0_{m,1}.$$

(c) ***Résolution****. Résoudre le système (S), c'est trouver toutes les matrices colonnes X (c'est-à-dire tous les $n-$uplets $(x_1,...,x_n)$) qui satisfont l'équation matricielle*

$$AX=B.$$

Exemple 4.2.5 *Considérons le système suivant à trois équations et trois inconnues*

$$(S):\left\{\begin{array}{rrrr} 2x_1+ & 3x_2- & x_3= & 5\\ 4x_1- & x_2+ & 2x_3= & 6\\ -3x_1+ & 2x_2+ & x_3= & -4. \end{array}\right.$$

(i) Ce système peut s'écrire sous forme matricielle

$$(S):AX=B\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & -1 & 2\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\\-4\end{pmatrix}.$$

Après calcul (par substitution), on trouve

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{15}, -\frac{1}{15}\right).$$

(ii) Le système homogène (S_H) associé à (S) est obtenu en remplaçant le second membre par le vecteur nul

$$(S_H) : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

ou, en forme matricielle

$$(S_H) : AX = 0_{(3,1)} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Après avoir présenté la représentation matricielle d'un système linéaire, on peut utiliser cette représentation pour identifier des formes particulières de systèmes, appelées systèmes triangulaires. Ces systèmes sont utiles car ils permettent de résoudre rapidement les équations par substitution et servent de base à des méthodes plus générales, comme l'élimination de Gauss.

Définition 4.2.6 ***(Systèmes triangulaires)***
Soit (S) un système d'équations linéaires carré, c'est-à-dire un système de n équations à n inconnues $x_1, ..., x_n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note $A = (a_{ij})$ la matrice des coefficients de ce système. Alors
1. ***Système triangulaire inférieur.*** *On dit que le système (S) est triangulaire inférieur si ses coefficients vérifient la condition suivante*

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., n\} : i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Autrement dit, tous les coefficients au-dessus de la diagonale principale de la matrice A sont nuls : la matrice A est dite triangulaire inférieure. Le système s'écrit alors sous la forme

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 & & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & & & & = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & & & & = b_3 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i & & & & = b_i \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & & & & = b_n \end{cases}$$

La résolution d'un tel système se fait facilement par substitution directe, en commençant par la première équation (celle de x_1), puis en substituant successivement les inconnues déjà déterminées dans les équations suivantes.
2. ***Système triangulaire supérieur.*** *On dit que le système (S) est triangulaire supérieur si ses coefficients satisfont*

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., n\} : i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Cela signifie que la matrice $A = (a_{ij})$ est triangulaire supérieure, c'est-à-dire que tous les coefficients en dessous de la diagonale principale sont nuls. Le système s'écrit alors sous la forme

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\quad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \quad\quad\quad\quad a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \quad\quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Dans ce cas, la résolution du système se fait également par substitution directe, mais en partant de la dernière équation (celle de x_n), puis en remontant vers la première.

Exemple 4.2.6
1. Considérons le système suivant à trois inconnues x_1, x_2, x_3

$$(S_1) : \begin{cases} 2x_1 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$$

Ce système est un système triangulaire inférieur, car tous les coefficients situés au-dessus de la diagonale principale sont nuls. Sa matrice des coefficients est

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Considérons maintenant le système suivant à trois inconnues x_1, x_2, x_3

$$(S_2) : \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_2 - x_3 = 1 \\ 6x_3 = 12. \end{cases}$$

Ce système est triangulaire supérieur, car tous les coefficients situés en dessous de la diagonale principale sont nuls. Sa matrice des coefficients est

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lorsqu'on étudie un système linéaire complet $AX = B$, il est souvent utile de relier ses solutions à celles du système homogène associé $AX = 0$. En effet, une fois qu'on connaît une solution particulière du système complet, on peut obtenir toutes les autres solutions en ajoutant à cette solution particulière toutes les solutions du système homogène. Cette idée permet de décrire complètement l'ensemble des solutions d'un système linéaire non homogène.

Proposition 4.2.1 *Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de coefficients, $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur colonne et $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ le vecteur des termes constants. Supposons que*

$$AX_0 = B.$$

Alors on dit que X_0 est une solution particulière du système complet

$$(S) : AX = B.$$

Dans ce cas, pour toute $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a X est solution de (S) si et seulement si

$$X = X_0 + X_H,$$

où X_H est une solution du système homogène associé

$$AX = 0_{m,1}.$$

Remarque 4.2.2 *L'ensemble des solutions du système $AX = B$ est obtenu en ajoutant à une solution particulière X_0 toutes les solutions de l'équation homogène $AX = 0$. Ainsi, toute solution générale d'un système linéaire complet (non homogène) est la somme d'une solution particulière du système complet et d'une solution générale du système homogène associé.*

Preuve.
1. ($\Longrightarrow$) Montrons l'implication directe. Supposons que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ soit une solution du système complet, c'est-à-dire

$$AX = B.$$

Par hypothèse, on a aussi

$$AX_0 = B.$$

En soustrayant les deux égalités, on obtient

$$AX - AX_0 = A\left(X - X_0\right) = 0_{m,1}.$$

Posons

$$X_H = X - X_0.$$

Alors,

$$AX_H = 0_{m,1},$$

donc X_H est une solution du système homogène. Par conséquent

$$X = X_H + X_0.$$

Ceci montre que X peut bien s'écrire comme la somme de X_0 et d'une solution X_H du système homogène.
2. ($\Longleftarrow$) Montrons l'implication réciproque. Supposons que

$$X = X_H + X_0.$$

Où

$$AX_0 = B, AX_H = 0_{m,1}.$$

Alors

$$AX = A(X_0 + X_H) = AX_0 + AX_H = B + 0_{m,1} = B.$$

Ainsi, X est bien une solution de $AX = B$. □

Exemple 4.2.7
1. Considérons le système suivant

$$(S) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

On peut écrire ce système sous forme matricielle $AX = B$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Une solution particulière du système est

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

On considère le système homogène associé $AX_H = 0_{3,1}$ *où*

$$X_H = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

La seule solution de ce système est la solution nulle

$$X_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions du système complet est donc

$$X = X_0 + X_H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Considérons le système linéaire

$$(S) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

La forme matricielle du système est $AX = B$, *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une solution particulière du système est

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les solutions du système homogène associé $AX = 0_{3,1}$ *sont toutes les combinaisons de la forme*

$$X_H = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système complet est

$$X = X_0 + X_H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

On voit que le système admet une infinité de solutions, donc il est compatible indéterminé.

Après avoir présenté l'interprétation d'un système linéaire sous forme matricielle, on peut l'aborder sous une autre perspective : l'interprétation en termes de combinaisons linéaires. Dans cette approche, le second membre du système est considéré comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice des coefficients. Cela permet de relier directement la résolution du système à la notion d'espace engendré par les colonnes et de mieux comprendre l'existence et l'unicité des solutions.

Définition 4.2.7 ***(Interprétation d'un système linéaire en termes de combinaisons linéaires)***
Soit (S) un système linéaire de m équations à n inconnues suivant

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = b_m. \end{array} \right.$$

(a). ***Décomposition par colonnes.*** *Pour tout j de $\{1, 2, ..., n\}$, notons*

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

le $j-$ème vecteur colonne de A. Soit

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

le vecteur colonne des seconds membres. Alors l'égalité matricielle $AX = B$ s'écrit comme une combinaison linéaire des colonnes

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$x_1C_1 + x_2C_2 + ... + x_jC_j + ... + x_nC_n = B.$$

Autrement dit, le vecteur B est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A, avec les x_j comme coefficients scalaires.
(b). ***Résolution du système (S).*** *Résoudre (S) revient à trouver tous les $n-$uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ qui expriment B comme combinaison linéaire des colonnes $C_1, \ldots, C_n$.*

(c) ***Condition d'existence de solutions.*** *Le système (S) admet au moins une solution si et seulement si B appartient à l'espace engendré par les colonnes de A*

$$B \in Vect(C_1, \ldots, C_n).$$

(d) ***Système homogène associé.*** *Le système homogène associé (S_H) est*

$$x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_nC_n = 0_{m,1},$$

c'est-à-dire $AX = 0_{m,1}$. Résoudre (S_H) consiste à trouver tous les $n-$uplets $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ qui satisfont cette relation.
(e) ***Existence de solutions non triviales du système homogène.*** *Le système homogène (S_H) possède des solutions non triviales (autres que le vecteur nul) si et seulement si les colonnes $C_1, \ldots, C_n$ sont linéairement dépendantes. Autrement dit*

$$\exists (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{0_{\mathbb{K}}\} : x_1C_1 + \cdots + x_nC_n = 0_{m,1}.$$

Exemple 4.2.8 *Considérons le système suivant*

$$(S) : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$$

(i) ***Écriture par colonnes.*** *Les colonnes de la matrice des coefficients sont*

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

et le second membre est

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Le système s'écrit donc comme combinaison linéaire des colonnes

$$x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3 = B,$$

c'est-à-dire

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Le système revient à chercher des scalaires x_1, x_2, x_3 tels que la combinaison linéaire des vecteurs C_1, C_2, C_3 donne le vecteur second membre B.
(ii) Dans le cas du système homogène (S_H), il s'agit de résoudre

$$x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3 = 0_{3,1},$$

C'est-à-dire, on cherche toutes les combinaisons linéaires nulles des vecteurs C_1, C_2, C_3.

Une fois que nous avons étudié l'interprétation d'un système linéaire à travers les combinaisons linéaires, nous allons maintenant explorer une nouvelle approche : l'interprétation en termes d'applications linéaires. Cette perspective permet de relier un système linéaire à des notions fondamentales telles que l'image, le noyau, l'injectivité et la surjectivité. Elle offre ainsi une meilleure compréhension du fonctionnement du système et des conditions qui déterminent s'il admet une solution unique, plusieurs solutions ou aucune solution.

Définition 4.2.8 ***(Interprétation d'un système linéaire en termes d'applications linéaires)***

Considérons le système linéaire (S) de m équations à n inconnues

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice des coefficients, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{K}^m$.
(a) Lien avec une application linéaire. *On associe au système l'application linéaire*

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ & x & \longmapsto & f(x) = Ax. \end{array}$$

Dans ce cadre, le système linéaire (S) correspondant s'écrit alors sous la forme vectorielle

$$f(x) = b.$$

(b) Résolution du système. *Résoudre (S) revient à chercher l'ensemble des solutions*

$$\{x \in \mathbb{K}^n : f(x) = b\} = f^{-1}(\{b\}),$$

c'est-à-dire les antécédents de b par f.
(c) Condition d'existence de solutions. *Le système admet au moins une solution si et seulement si*

$$b \in Im(f).$$

Autrement dit, le vecteur second membre b doit appartenir à l'image de f, qui est exactement le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A.
(d) Système homogène associé. *Le système homogène associé (S_H) est donné par*

$$f(x) = 0_{\mathbb{K}^m} \Longleftrightarrow Ax = 0_{(m,1)}.$$

(e) Noyau de l'application. *Résoudre le système (S_H), c'est donc déterminer le noyau de f,*

$$\ker(f) = \{x \in \mathbb{K}^n : f(x) = 0_{\mathbb{K}^m}\}.$$

(f) Solutions non triviales du système homogène. *Le système homogène (S_H) admet des solutions non triviales (autres que la solution nulle) si et seulement si*

$$\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\} \Longleftrightarrow \dim(\ker f) > 0,$$

c'est-à-dire si les colonnes de A sont linéairement dépendantes.

Exemple 4.2.9 *Considérons le système linéaire (S) suivant à trois équations et trois inconnues*

$$(S) : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^3, b = (5, 6, -4)\,.$$

(a) Lien avec une application linéaire. *On associe au système l'application linéaire*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & x & \longmapsto & f(x) = Ax, \end{array}$$

c'est-à-dire

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2 - x_3, 4x_1 - x_2 + 2x_3, -3x_1 + 2x_2 + x_3).$$

Le système (S) peut alors s'écrire sous la forme vectorielle

$$f(x) = b.$$

(b) Résolution du système. *Résoudre (S) revient à chercher l'ensemble des solutions*

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = b\} = f^{-1}(\{b\}),$$

c'est-à-dire les antécédents de b par l'application linéaire f. On obtient

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = b\} = \left\{ \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{15}, \frac{-1}{15} \right) \right\}.$$

(c) Condition d'existence de solutions. *Le système admet au moins une solution si et seulement si*

$$b \in Im(f).$$

Autrement dit, le vecteur $b = (5, 6, -4)$ doit appartenir au sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de A. Ici $b \in Im(f)$ puisque

$$Im(f) = \mathbb{R}^3.$$

(d) Système homogène associé. *Le système homogène associé est donné par*

$$f(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow Ax = 0_{(3,1)}.$$

(e) Noyau de l'application. *Résoudre le système homogène, c'est déterminer le noyau de f*

$$\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

On obtient

$$\ker(f) = \{(0, 0, 0)\}.$$

4.2.3 Systèmes linéaires : classification et conditions d'existence des solutions

Les systèmes d'équations linéaires occupent une place centrale en algèbre linéaire et apparaissent dans de nombreux domaines scientifiques. Lorsqu'on en étudie un, deux questions fondamentales se posent : le système possède-t-il des solutions ? et combien en existe-t-il ?.

Répondre à ces questions conduit à classer les systèmes linéaires selon le nombre de solutions qu'ils admettent : un système peut être déterminé (une seule solution), incompatible (aucune solution) ou indéterminé (une infinité de solutions). Cette distinction constitue la base de l'analyse des systèmes et oriente le choix des méthodes de résolution (par exemple la substitution ou le pivot de Gauss).

4.2.3.1 Classification des systèmes linéaires

Le comportement d'un système dépend des relations entre ses équations, qui peuvent être cohérentes ou contradictoires, indépendantes ou dépendantes. Ces différentes situations conduisent à une classification générale des systèmes. Ainsi, tout système d'équations linéaires admet nécessairement l'un et un seul des trois types suivants de solutions : il peut avoir une solution unique, aucune solution, ou bien une infinité de solutions.

Corollaire 4.2.1 *Tout système d'équations linéaires admet nécessairement l'un et un seul des trois types suivants de solutions*
(a) ***Une solution unique :*** *Le système est alors dit déterminé ; les équations sont cohérentes et linéairement indépendantes, ce qui permet de trouver une unique combinaison de valeurs pour les variables inconnues.*
(b) ***Aucune solution :*** *Le système est dit incompatible ou incohérent, c'est-à-dire que certaines équations se contredisent et qu'il est impossible de satisfaire toutes les équations simultanément.*
(c) ***Une infinité de solutions :*** *Le système est dit compatible indéterminé ; les équations sont cohérentes mais linéairement dépendantes, de sorte qu'il existe une infinité de combinaisons de valeurs qui satisfont toutes les équations.*

Exemple 4.2.10
1. ***Système déterminé (solution unique).*** *Considérons le système suivant à trois équations et trois inconnues*

$$(S_1) : \begin{cases} x+\ y+z= 3 \\ x-\ y+z= 1 \\ x+2y-z=4. \end{cases}$$

Soustrayons la deuxième équation de la première, on obtient

$$y = 1.$$

Remplaçons $y = 1$ dans la première (ou la deuxième) équation

$$x + z = 2.$$

(Vérification avec la deuxième $x - 1 + z = 1 \Longrightarrow x + z = 2$, cohérent.)
Remplaçons $y = 1$ dans la troisième équation

$$x + 2 \cdot 1 - z = 4 \Longrightarrow x - z = 2.$$

On obtient le système linéaire en x et z

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x - z = 2. \end{cases}$$

En additionnant les deux équations

$$2x = 4 \Longrightarrow x = 2.$$

Puis

$$z = 2 - x = 2 - 2 = 0.$$

Ainsi la solution unique du système est

$$(x, y, z) = (2, 1, 0).$$

Le système (S_1) admet une unique solution (toutes les équations sont cohérentes et indépendantes).
2. ***Système incompatible (aucune solution).*** *Considérons le système*

$$(S_2) : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \\ x-y+z=0. \end{cases}$$

Observons les deux premières équations

$$x+y+z=1 \text{ et } x+y+z=2.$$

Ces équations imposent des conditions contradictoires : une même somme $x+y+z$ ne peut pas valoir à la fois 1 et 2. Cette contradiction montre que le système est incompatible, il n'existe aucun triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant simultanément les trois équations. Ainsi le système n'a aucune solution. Le système (S_2) est incompatible (contradictions entre équations).
3. ***Système compatible indéterminé (une infinité de solutions).*** *Considérons le système*

$$(S_3) : \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=6 \\ x-y+z=1. \end{cases}$$

La deuxième équation est simplement le double de la première, elle n'apporte aucune condition supplémentaire. On réduit donc le système à

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1. \end{cases}$$

C'est un système de 2 équations à 3 inconnues, donc il reste une liberté dans le choix des solutions. En posant $z = t \in \mathbb{R}$ (paramètre libre). On résout le système, on obtient les solutions sont données par

$$(x, y, z) = (2-t, 1, t), t \in \mathbb{R}.$$

Il existe donc une infinité de solutions. Le système (S_3) admet une infinité de solutions.

4.2.3.2 Conditions d'existence et de nombre de solutions d'un système linéaire

Après avoir classé les systèmes linéaires, il est naturel de se demander s'il existe un critère général permettant de déterminer l'existence et le nombre de solutions d'un tel système. Ce critère est donné par le théorème de Rouché–Fontené, un résultat fondamental de l'algèbre linéaire qui relie le rang d'un système aux différentes situations possibles pour ses solutions.

Le théorème de Rouché–Fontené énonce une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système d'équations linéaires admette au moins une solution et indique également s'il en existe une seule ou une infinité. Avant d'énoncer ce théorème, il est indispensable d'introduire la notion de rang d'un système linéaire, un outil essentiel pour analyser et déterminer le nombre de solutions d'un système.

Définition 4.2.9 ***(Rang d'un système linéaire)***
Soit (S) un système de m équations linéaires à n inconnues, de matrice des coefficients $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}^m$ est le vecteur des seconds membres.
1. On appelle rang du système (S) le rang de sa matrice des coefficients A,

$$rg(S) = rg(A).$$

Ce rang peut être caractérisé de plusieurs manières équivalentes,
(a) $rg(S)$ *est la dimension du sous-espace vectoriel* $Vect(C_1, \ldots, C_n) \subset \mathbb{K}^m$*, où* $C_1, \ldots, C_n$ *désignent les colonnes de* A*.*
(b) Équivalemment, $rg(S)$ *est le nombre maximal de colonnes linéairement indépendantes de* A*.*
(c) Enfin, si l'on associe à A *l'application linéaire canoniquement définie par*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ & x & \longmapsto & f(x) = Ax, \end{array}$$

alors le rang du système est également le rang de cette application

$$rg(S) = rg(f) = \dim(Imf).$$

Exemple 4.2.11 *Considérons le système*

$$(S): \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

La matrice des coefficients est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}).$$

(a) Colonnes et dépendance linéaire. Les colonnes sont

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On constate la relation linéaire

$$C_3 = 2C_1 - C_2,$$

donc les colonnes sont linéairement dépendantes. Par conséquent

$$Vect(C_1, C_2, C_3) = Vect(C_1, C_2).$$

Par conséquent le rang des colonnes (le rang de la matrice A*) vaut*

$$rg(S) = rg(A) = 2.$$

(b) Le nombre maximal de colonnes linéairement indépendantes est le rang, donc 2*.*
(c) L'application associée est

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + x_3, 3x_1 + 4x_2 + 2x_3).$$

Son image est le sous-espace engendré par les colonnes

$$Im(f) = Vect(C_1, C_2).$$

Donc

$$rg(S) = rg(f) = 2.$$

Corollaire 4.2.2 ***(Propriétés du rang d'un système linéaire)***
Soit (S) un système de m équations linéaires à n inconnues, de matrice des coefficients $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et de second membre $b \in \mathbb{K}^m$. On définit le rang du système par

$$rg(S) = rg(A).$$

1. ***Bornes du rang.*** *Le rang d'un système vérifie toujours*

$$0 \leqslant rg(S) = rg(A) \leqslant \min(m, n).$$

2. ***Invariance par opérations élémentaires.*** *Le rang d'un système est invariant par opérations élémentaires effectuées sur les lignes, c'est-à-dire sur les équations du système. En d'autres termes, $rg(S)$ ne change pas lorsqu'on applique aux lignes de A,*
(a) la permutation de deux lignes, la multiplication d'une ligne par un scalaire non nul,
(b) l'addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne.

Exemple 4.2.12
1. ***Bornes du rang.*** *Considérons le système*

$$(S) : \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+4x_2+6x_3=2. \end{cases}$$

La matrice des coefficients est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

On remarque que la deuxième équation est un multiple de la première ($L_2 = 2L_1$). Ainsi,

$$rg(S) = rg(A) = 1,$$

et

$$0 \leqslant 1 \leqslant \min(2, 3) = 2.$$

2. ***Invariance par opérations élémentaires.*** *Considérons le système*

$$(S) : \begin{cases} x_1+2x_2+\ x_3=1 \\ 2x_1+4x_2+2x_3=2 \\ 3x_1+6x_2+3x_3=3. \end{cases}$$

La matrice des coefficients est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Toutes les équations sont proportionnelles ($L_2 = 2L_1, L_3 = 3L_1$), donc

$$rg(S) = 1.$$

Si l'on applique une opération élémentaire (par exemple. $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$), on obtient une ligne nulle mais le rang reste 1. Cela montre l'invariance du rang par opérations élémentaires.
3. ***Rang maximal.*** *Considérons le système*

$$(S) : \begin{cases} x_1+2x_2+\ x_3=0 \\ 2x_1+\ x_2+3x_3=1. \end{cases}$$

La matrice des coefficients est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les deux lignes ne sont pas proportionnelles, donc elles sont linéairement indépendantes. Ainsi,

$$rg(S) = 2 = \min(2, 3).$$

ce qui est le rang maximal possible.

Une fois la notion de rang d'un système linéaire définie et ses propriétés étudiées, nous pouvons maintenant énoncer le critère général qui détermine l'existence et le nombre de solutions d'un système d'équations linéaires. Ce critère est donné par le théorème de Rouché-Fontené, également appelé théorème de Kronecker-Capelli.

Théorème 4.2.1 ***(Théorème de Fontené-Rouché)*** *Considérons un système* (S) *de* m *équations linéaires à* n *inconnues, à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *et de rang* r*. Trois cas sont possibles.*
• *Si* $r = m = n$ *alors le système* (S) *est de Cramer. Il admet une unique solution.*
• *Si* $r = m < n$ *alors le système* (S) *admet une infinité de solutions, quel que soit le vecteur des seconds membres.*
• *Si* $r < m$ *alors le système* (S) *admet au moins une solution si, et seulement si, le système est compatible. Dans ce cas :*
• *Si* $r = m$*, il admet une solution unique,*
• *Si* $r < m$*, il admet une infinité de solutions.*

Exemple 4.2.13
1) ***Cas de solution unique.*** *Considérons le système suivant de trois équations linéaires à trois inconnues*

$$(S) : \begin{cases} x_1 + \ x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - \ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle

$$AX = B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On calcule le déterminant de la matrice des coefficients

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Comme $\det(A) \neq 0$*, on a*

$$r = 3 = m = n.$$

Ainsi, le système (S) *est un système de Cramer et admet une solution unique*

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right).$$

2. ***Système compatible, rang*** $< m$ ***(infinité de solutions)****. Considérons le système suivant de deux équations linéaires à trois inconnues*

$$(S) : \begin{cases} x_1 + \ x_2 + \ x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Ce système peut être mis sous forme matricielle

$$AX = B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

On remarque que la deuxième ligne est le double de la première ($L_2 = 2L_1$), les deux lignes sont linéairement dépendantes, donc le rang de la matrice des coefficients est donc

$$r = 1 < m = 2 < n = 3.$$

Le rang du système est strictement inférieur au nombre d'inconnues, donc le système est compatible et admet une infinité de solutions. Une solution générale peut s'écrire en exprimant une variable en fonction des autres

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_2 - x_3 \\ x_2, x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3. ***Système avec rang*** $= m < n$ ***(compatible avec solutions infinies).*** *Considérons le système suivant de deux équations linéaires à trois inconnues*

$$(S) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Sous forme matricielle

$$AX = B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux lignes ne sont pas proportionnelles, donc elles sont linéairement indépendantes et le rang de la matrice des coefficients est donc

$$rg(A) = r = 2 = m = 2 < n = 3.$$

Le rang est égal au nombre d'équations mais inférieur au nombre d'inconnues, le système est compatible et admet une infinité de solutions, quelle que soit la valeur du second membre $(3, 1)$. *Une solution générale peut s'écrire*

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4-2x_3}{3} \\ x_2 = \frac{5-x_3}{3} \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4.2.4 Matrice augmentée d'un système linéaire

Pour résoudre un système d'équations linéaires, il est souvent pratique de rassembler tous les coefficients des inconnues et les termes constants dans une seule matrice, appelée matrice augmentée ou matrice complète. Cette représentation présente plusieurs avantages. Elle permet d'appliquer efficacement des méthodes de résolution telles que la méthode de Gauss ou la méthode de Gauss-Jordan. Elle facilite également l'exécution des opérations élémentaires sur les lignes. Enfin, elle aide à déterminer si le système est compatible, c'est-à-dire s'il admet au moins une solution, ou incompatible, c'est-à-dire s'il n'admet aucune solution.

Définition 4.2.10 *Soit* (S) *un système d'équations linéaires de* m *équations à* n *inconnues* $x_1, ..., x_n$ *à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *,*

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad\;\; \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad\;\; \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

1. On appelle matrice augmentée (ou matrice complète) du système (S) *la matrice notée* $(A \mid B)$*, obtenue en ajoutant la colonne des seconds membres* B *à droite de la matrice des coefficients* A*, où*
(a) $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *est la matrice des coefficients du système.*
(b) $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ *est le vecteur colonne des termes constants (ou second membre).*
2. La matrice augmentée s'écrit alors sous la forme

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Remarque 4.2.3 ***(Remarques sur la matrice augmentée)***
1. Nature de la matrice augmentée. *La matrice augmentée n'est pas une matrice au sens classique (appartenant à un espace vectoriel de matrices). Il s'agit d'une notation combinée qui regroupe, dans un même tableau, la matrice des coefficients et la colonne des seconds membres. Cette présentation facilite l'écriture et les manipulations algébriques lors de la résolution d'un système linéaire.*
2. ***Lien avec les opérations élémentaires****.*
Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire s'appliquent directement à la matrice augmentée. Ainsi, si un système (S) *est transformé en un système équivalent* (S') *par une suite d'opérations élémentaires, alors la matrice augmentée de* (S') *s'obtient en appliquant exactement les mêmes opérations à la matrice augmentée de* (S)*.*
3. Rôle fondamental de la matrice augmentée. *La matrice augmentée constitue un outil central dans l'étude des systèmes linéaires. Elle permet notamment*
• *de résoudre le système par des méthodes algébriques systématiques (telles que l'élimination de Gauss ou de Gauss-Jordan),*
• *d'étudier la compatibilité du système (c'est-à-dire, déterminer s'il admet au moins une solution),*
• *d'analyser la nature de l'ensemble des solutions (solution unique, infinité de solutions, ou aucune solution).*

Exemple 4.2.14 *Considérons le système linéaire suivant*

$$(S) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$$

La matrice augmentée associée au système (S) *est*

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 14 \\ -3 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Étape 1 : *Élimination des coefficients de x_1 dans les lignes L_2 et L_3.*
On veut annuler les coefficients de x_1 des lignes 2 et 3. On effectue

$$L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_1.$$

On obtient alors la matrice augmentée suivante

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & 1 & 16 \end{array}\right).$$

Étape 2 : *Élimination du coefficient de x_2 dans la troisième ligne L_3.*
On cherche maintenant à annuler le coefficient 10 de x_2 dans la troisième ligne. Pour cela, on effectue l'opération

$$L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{10}{3}L_2.$$

On obtient alors la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{68}{3} \end{array}\right).$$

Étape 3. *Retour en arrière (substitution). De la troisième ligne*

$$\frac{13}{3}x_3 = \frac{68}{3} \Longrightarrow x_3 = \frac{68}{13}.$$

De la deuxième ligne

$$-3x_2 + x_3 = 2,$$

donc

$$x_2 = \frac{14}{13}.$$

De la première ligne

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$$

donc

$$x_1 = -\frac{18}{13}.$$

Solution finale

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{18}{13}, \frac{14}{13}, \frac{68}{13}\right).$$

2. Considérons le système

$$(S) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

La matrice augmentée associée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

On cherche à annuler les coefficients de la première colonne en lignes 2 et 3 par des opérations sur les lignes. On effectue

$$L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \longleftarrow L_3 + L_1.$$

La matrice augmentée devient donc

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Après élimination, il ne reste qu'une équation indépendante

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 1.$$

Les deux autres lignes sont nulles, ce qui montre que le rang de la matrice des coefficients est $r = 1$*, le système est donc compatible. La solution générale s'obtient facilement*

$$x_1 = 1 - 2x_2 + x_3.$$

4.3 Résolution des systèmes linéaires

Résoudre un système d'équations linéaires consiste à trouver toutes les valeurs des inconnues qui satisfont toutes les équations du système. Plusieurs méthodes existent. La méthode de **substitution** consiste à isoler une variable dans une équation, puis à la remplacer dans les autres, en répétant le processus jusqu'à trouver toutes les inconnues. Cette méthode est simple mais devient difficile pour les systèmes de grande taille. La méthode de **Cramer** s'applique aux systèmes carrés dont la matrice des coefficients est inversible, et permet de calculer chaque inconnue directement à l'aide des déterminants. Elle est rapide pour les petits systèmes mais coûteuse pour les grands. La méthode du **pivot de Gauss** transforme le système en une forme échelonnée en utilisant des opérations sur les lignes, puis permet de déterminer les inconnues par substitution inverse. Cette méthode est efficace, systématique et particulièrement adaptée aux grands systèmes.

4.3.1 Méthode de substitution, principe, algorithme et exemples

La méthode de substitution consiste à choisir l'une des équations du système pour exprimer une variable en fonction des autres, puis à remplacer cette expression dans les équations restantes. En répétant ce procédé, on réduit progressivement le nombre d'inconnues jusqu'à obtenir une équation à une seule variable, dont la résolution permet ensuite de déterminer successivement toutes les autres inconnues.

Principe de la méthode de substitution. Soit (S) un système d'équations linéaires. La méthode de substitution se déroule comme suit :
• Isoler une inconnue dans l'une des équations du système.
• Remplacer cette inconnue par son expression dans toutes les autres équations.
• Répéter le processus jusqu'à obtenir une équation ne comportant qu'une seule inconnue.
• Résoudre cette équation, puis remonter les substitutions pour calculer successivement les autres inconnues.

Algorithme 4.3.1 ***(cas général)***
Entrée : *un système de* m *équations à* n *inconnues.*
Sortie : *l'ensemble des solutions (unique, infinies ou aucune).*
Étapes de l'algorithme.
Étape 1 : Choix et isolement d'une variable

• *Choisir une équation dans laquelle une inconnue peut être facilement isolée.*
• *Isoler cette inconnue dans cette équation, par exemple x_i sous la forme*

$$x_i = f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

où f_i est une combinaison linéaire des autres variables.
Étape 2 : Substitution
• *Remplacer x_i par son expression dans toutes les autres équations du système.*
• *Cette opération élimine x_i et conduit à un nouveau système (S') de $(m-1)$ équations à $(n-1)$ inconnues.*
Étape 3 : Réduction du système
• *Répéter les étapes 1 et 2 sur le système réduit (S').*
• *Poursuivre le processus jusqu'à obtenir une équation à une seule inconnue.*
• *Résoudre cette dernière équation pour déterminer la valeur de l'inconnue correspondante.*
Étape 4 : Remontée des valeurs
• *Une fois la dernière inconnue calculée, remonter progressivement les substitutions.*
• *Substituer la valeur trouvée dans l'équation précédente pour calculer une nouvelle variable.*
• *Répéter ce processus jusqu'à ce que toutes les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient déterminées.*
Étape 5 : Analyse des solutions (Conclusion)
• *Si le système conduit à une contradiction, il n'a pas de solution.*
• *Si toutes les inconnues sont déterminées, il admet une solution unique.*
• *Si certaines inconnues dépendent de paramètres libres, le système a une infinité de solutions.*

Exemple 4.3.1
1. Système carré (Résolution par substitution). *Résolvons le système suivant par substitution*

$$(S_1) : \begin{cases} x+\ y+z=6 \\ \quad 2y-z=3 \\ x-\ y+z=2. \end{cases}$$

Étape 1 : Isolement. *Isolons x à partir de la première équation*

$$x = 6 - y - z.$$

Étape 2 : Substitution. *Remplaçons x dans la troisième équation*

$$(6 - y - z) - y + z = 2.$$

En simplifiant, on obtient

$$y = 2.$$

Étape 3 : *Substitution pour z. Remplaçons $y = 2$ dans la deuxième équation*

$$2(2) - z = 3 \Longrightarrow z = 1.$$

Étape 4 : *Remontée pour x. Remplaçons $y = 2$ et $z = 1$ dans l'expression de x*

$$x = 6 - 2 - 1 = 3.$$

Conclusion. *La solution unique du système (S_1) est*

$$(x, y, z) = (3, 2, 1).$$

2. Système non carré (Résolution par substitution). *Considérons maintenant le système suivant à deux équations et trois inconnues*

$$(S_2) : \begin{cases} x+y+z= 4 \\ 2x-y+z=1. \end{cases}$$

Étape 1 : Isolement. *Isolons x à partir de la première équation*

$$x = 4 - y - z. \tag{4.1}$$

Étape 2 : Substitution. *Remplaçons x dans la deuxième équation*

$$3y + z = 7. \tag{4.2}$$

Étape 3 : Paramétrisation*. On exprime une variable en fonction de l'autre. Par exemple, isolons z dans l'équation* (4.2)

$$z = 7 - 3y.$$

Étape 4 : *Calcul de x. Remplaçons les expressions de y et z dans l'équation* (4.1)*,*

$$x = 2y - 3.$$

Conclusion. *Le système admet une infinité de solutions, dépendant du paramètre libre $y \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{cases} x = 2y - 3 \\ z = 7 - 3y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Corollaire 4.3.1 ***(Remarques sur l'applicabilité de la méthode de substitution)***
La méthode de substitution peut être appliquée à tout système linéaire, qu'il soit carré ou non carré, à condition que le système soit compatible, c'est-à-dire qu'il admette au moins une solution.
(a) Pour un système carré *: La méthode fonctionne efficacement et, si le système est déterminé (c'est-à-dire si les équations sont linéairement indépendantes), elle conduit généralement à une solution unique.*
(b) Pour un système non carré. Deux cas peuvent se présenter :
(i) Système sous-déterminé (plus d'inconnues que d'équations) : La substitution reste applicable. Certaines variables sont alors exprimées en fonction d'autres, ce qui conduit à une solution paramétrique, c'est-à-dire une infinité de solutions dépendant d'un ou plusieurs paramètres libres.
(ii) Système surdéterminé (plus d'équations que d'inconnues) : La méthode permet souvent de détecter une éventuelle contradiction entre les équations. Si certaines équations sont redondantes (elles ne fournissent pas de nouvelles informations), le système peut tout de même admettre une solution unique ou paramétrique. En revanche, si une contradiction apparaît, cela signifie que le système est incompatible (aucune solution).

Exemple 4.3.2
1. ***Pour un système carré.*** *Par exemple, le système (S_1) présenté précédemment (plus haut.)*
2. ***Système non carré sous-déterminé****. Par exemple, le système (S_2) présenté précédemment (plus haut.)*
3. ***Pour un système non carré surdéterminé.*** *Considérons le système suivant*

$$(S_3) : \begin{cases} x+y= 2 \\ x-y= 0 \\ 2x+y=5. \end{cases}$$

Ce système est non carré (3 équations, 2 inconnues) et surdéterminé.
• *Résolvons les deux premières équations. En les additionnant*

$$x = 1.$$

Remplaçons dans la deuxième équation

$$y = 1.$$

• *Vérification dans la troisième équation,*

$$3 = 5.$$

Contradiction, la troisième équation n'est pas satisfaite. Le système est donc incompatible et n'admet aucune solution.

Conclusion 4.3.1 *La méthode de substitution est facile à utiliser et convient bien aux petits systèmes d'équations. Cependant, lorsque le système comporte un grand nombre d'équations ou d'inconnues, son application devient fastidieuse et exige de nombreux calculs, ce qui la rend peu pratique. Dans ces situations, il est préférable d'utiliser des méthodes plus systématiques et efficaces, telles que la méthode du pivot de Gauss, particulièrement adaptée aux systèmes de grande taille.*

4.3.2 Méthode de Cramer

La méthode de Cramer est une technique classique pour résoudre les systèmes linéaires carrés, lorsque la matrice des coefficients est inversible (c'est-à-dire que son déterminant est non nul). Elle permet de calculer chaque inconnue du système sous forme de quotient de deux déterminants. Cette méthode porte le nom du mathématicien suisse Gabriel Cramer, qui l'a introduite au 18e siècle.

Définition 4.3.1 *On appelle système de Cramer tout système linéaire carré $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice des coefficients, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le vecteur des inconnues, et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le vecteur des termes constants tel que le déterminant de sa matrice des coefficients soit non nul*

$$\det(A) \neq 0_{\mathbb{K}}.$$

Dans ce cas, le système est dit compatible déterminé : il admet une unique solution dans $\mathbb{K}^n$, que l'on peut calculer explicitement à l'aide de la méthode de Cramer.

Principe de la méthode (Exemple explicatif, cas 2×2)
Considérons le système linéaire

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K}), B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K}).$$

On suppose $\det(A) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Calcul de x_1. Pour éliminer x_2, on multiplie la première équation par a_{22} et la seconde par a_{12}

$$(S) \iff \begin{cases} a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2. \end{cases}$$

En soustrayant la deuxième équation de la première, on obtient

$$(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

Ainsi

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},$$

où

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix},$$

est la matrice obtenue en remplaçant la première colonne de A par le vecteur B. On vérifie que

$$\det(A_1) = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}.$$

Calcul de x_2. Pour éliminer x_1, on multiplie la première équation par a_{21} et la seconde par a_{11}

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

On en déduit

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\det(A_2)}{\det(A)},$$

où

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix},$$

est la matrice obtenue en remplaçant la deuxième colonne de A par le vecteur B. On a bien

$$\det(A_2) = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Cet exemple illustre le principe fondamental de la règle de Cramer chaque inconnue s'obtient en remplaçant, dans la matrice des coefficients, la colonne correspondant à cette inconnue par le vecteur des termes constants, puis en calculant le rapport entre le déterminant ainsi obtenu et celui de la matrice initiale. Avant d'énoncer la règle de Cramer dans le cas général, rappelons que lorsqu'un système linéaire carré $AX = B$ a une matrice des coefficients A inversible (c'est-à-dire lorsque $\det(A) \neq 0_{\mathbb{K}}$), il admet toujours une unique solution. La règle de Cramer fournit alors une formule explicite pour chacune des inconnues en fonction des déterminants de certaines matrices construites à partir de A et du vecteur B. Dans ce contexte, on peut énoncer le résultat suivant.

Théorème 4.3.1 ***(Règle de Cramer)*** *Soit $AX = B$ un système linéaire carré d'ordre n, où*

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

On suppose que

$$\det(A) \neq 0_{\mathbb{K}}.$$

Alors le système admet une unique solution $X \in \mathbb{K}^n$, donnée pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$ par

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},$$

où, pour chaque j, la matrice A_j est obtenue en remplaçant la $j-$ième colonne de A par le vecteur B,

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

De manière équivalente, si l'on note $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les colonnes de A, on peut écrire

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} : x_j = \frac{\det(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \ldots, C_n)}{\det(A)}.$$

Ainsi, le numérateur correspond au déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la colonne C_j par le vecteur B.

Algorithme 4.3.2 ***(Algorithme de la Méthode de Cramer)***
Objectif : *Résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues de la forme*

$$AX = B.$$

Entrées :
• *$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: matrice des coefficients,*
• *$B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: vecteur des constantes.*
Précondition :
• *A est carrée et inversible, c'est-à-dire*

$$\det(A) \neq 0_{\mathbb{K}}.$$

Sortie :
• *Le vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, solution unique du système $AX = B$.*
Étapes de l'algorithme :
1. Vérification de la compatibilité du système :
• *Calculer* $\det(A)$.
• *Si* $\det(A) = 0_{\mathbb{K}}$*, le système n'a pas de solution unique - arrêt de l'algorithme-. Sinon, poursuivre.*
2. Initialisation du vecteur solution :
• *Définir vecteur colonne des inconnues*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

3. Calcul des composantes de la solution (règle de Cramer) :
Pour chaque $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:
• *Construire la matrice A_j en remplaçant la $j-$ième colonne de A par le vecteur B.*
• *Calculer* $\det(A_j)$.
• *Déduire*

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}.$$

4. Assemblage de la solution :
Après avoir calculé toutes les composantes x_j, on obtient

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.3.3 *Considérons le système suivant de trois équations à trois inconnues*

$$(S) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

Étape 1 : Mise sous forme matricielle. *On introduit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Le système devient alors

$$AX = B.$$

Étape 2 : Vérification de la condition de Cramer. *Le déterminant de la matrice des coefficients est*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Ainsi, A est inversible, et le système est bien un système de Cramer : il admet donc une solution unique.

Étape 3 : Calcul des déterminants auxiliaires. *Pour appliquer la règle de Cramer, on remplace successivement chaque colonne de A par le vecteur B.*

(a) Première colonne remplacée

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 14 & -1 & 3 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \det(A_1) = 4.$$

(b) Deuxième colonne remplacée

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \det(A_2) = -4.$$

(c) Troisième colonne remplacée

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 14 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \det(A_3) = -12.$$

Étape 4 : Calcul des inconnues. *La règle de Cramer donne*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{4}{-2} = -2, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-4}{-2} = 2, x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-12}{-2} = 6.$$

La solution unique est donc

$$X = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Étape 5 : Vérification. *Substituons $(-2, 2, 6)$ dans les équations originales*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2 + 2 + 6 = 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= -2 - 2 + 18 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 + 4 + 6 = 8. \end{aligned}$$

Les trois égalités sont satisfaites ; la solution est bien correcte.

Conclusion 4.3.2 *La méthode de Cramer est une méthode simple mais puissante pour résoudre les systèmes carrés de la forme $AX = B$, lorsque la matrice des coefficients A est inversible. Elle met bien en évidence le lien entre le déterminant et l'unicité de la solution. Cependant, lorsque le système contient un grand nombre d'équations, le calcul des déterminants devient long et compliqué. C'est pourquoi on utilise généralement d'autres méthodes, comme la méthode de Gauss, pour les systèmes plus grands.*

Le résultat suivant établit une équivalence fondamentale entre quatre propriétés liées à une matrice carrée : son inversibilité, la nature de ses systèmes associés, et son rang.

Proposition 4.3.1 *Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes*
(a) A est inversible.
(b) Pour tout second membre $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire $(S) : AX = B$ est un système de Cramer.
(c) Le système homogène $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ n'admet que la solution triviale $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.
(d) La matrice A est de rang maximal, c'est-à-dire $rg(A) = n$.

Preuve. Nous allons démontrer l'équivalence en suivant le cycle logique suivant

$$(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (a).$$

(i) $(a) \Longrightarrow (b)$. Si A est inversible, alors pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on peut écrire

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B.$$

Il existe donc une unique solution pour tout second membre B, ce qui signifie que le système $AX = B$ est un système de Cramer.
(ii) $(b) \Longrightarrow (c)$. Si pour tout B le système $AX = B$ admet une solution unique, alors en particulier pour $B = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$, on a

$$AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \Longrightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}.$$

Donc le système homogène n'admet que la solution triviale.
(iii) $(c) \Longrightarrow (d)$. Si le système homogène $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ n'admet que la solution triviale $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$, cela signifie que les colonnes de A sont linéairement indépendantes. Or, pour une matrice carrée, cela équivaut à dire que son rang est maximal c'est-à-dire

$$rg(A) = n.$$

(iiii) $(d) \Longrightarrow (a)$. Si $rg(A) = n$, alors les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$, ce qui implique que le déterminant de A est non nul. Ainsi, A est inversible. Ce qui prouve que les quatre propriétés sont équivalentes. □

4.3.3 Méthode du pivot de Gauss

Après avoir présenté la méthode de Cramer, nous introduisons la méthode du pivot de Gauss, ou méthode d'élimination de Gauss, qui est particulièrement adaptée aux systèmes linéaires de grande taille. Contrairement à la méthode de Cramer, qui devient lourde pour les grands systèmes, cette méthode transforme le système initial en un système équivalent sous forme échelonnée, ce qui simplifie grandement la résolution. Pour cela, on effectue des opérations élémentaires sur les lignes afin de créer des zéros sous les pivots, c'est-à-dire sous les coefficients principaux de la matrice. Une fois la forme échelonnée obtenue, les inconnues se déterminent facilement par substitution inverse, en commençant par la dernière équation non triviale. Cette méthode est fiable, car ces transformations ne changent pas l'ensemble des solutions du système.

La validité de la méthode du pivot de Gauss repose sur un résultat fondamental : les transformations appliquées au système ne changent pas son ensemble de solutions.

Proposition 4.3.2 ***(Invariance des solutions par opérations élémentaires)***
Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire ne modifient pas son ensemble de solutions. Autrement dit, deux systèmes obtenus l'un à partir de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes sont équivalents, c'est-à-dire qu'ils possèdent exactement les mêmes solutions.

Avant de présenter en détail l'algorithme de Gauss, il est essentiel de comprendre la notion de système linéaire échelonné. Cette notion permet de représenter le système sous une forme simplifiée, où les équations sont organisées de manière à isoler progressivement les inconnues. Comprendre cette structure est fondamental, car l'algorithme de Gauss repose sur la transformation du système initial en une forme échelonnée, ce qui rend la résolution des inconnues plus directe et systématique.

Définition 4.3.2 ***(Système linéaire échelonné)***
Un système linéaire est dit échelonné lorsque, dans sa représentation sous forme d'équations ou de matrice augmentée, chaque ligne comporte un nombre de zéros initiaux strictement supérieur à celui de la ligne précédente. Autrement dit, le premier coefficient non nul (appelé pivot) de chaque ligne apparaît plus à droite que celui de la ligne précédente.

Remarque 4.3.1
1. ***Importance de la forme échelonnée****. La forme échelonnée d'un système linéaire joue un rôle essentiel dans sa résolution. Une fois le système transformé sous cette forme, on peut appliquer la méthode de substitution arrière : on commence par résoudre la dernière équation non nulle, qui ne fait intervenir qu'une seule inconnue, puis on remonte progressivement en utilisant les équations précédentes pour déterminer les autres inconnues.*
2. ***Interprétation matricielle.*** *Lorsqu'un système linéaire est écrit sous forme matricielle, chaque ligne de la matrice correspond à une équation du système. En forme échelonnée, la matrice présente une structure en « marche d'escalier » : le nombre de zéros initiaux augmente de ligne en ligne. Plus précisément, la première ligne non nulle commence par un certain nombre de zéros, la suivante en contient davantage, et ainsi de suite, traduisant le décalage progressif des pivots vers la droite.*

Définition 4.3.3 ***(Définition formelle)***
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Un système d'équations linéaires à m équations et n inconnues $x_1, \ldots, x_n$, à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, est dit échelonné s'il est nul ou s'il est de la forme

$$\begin{cases} a_{1,j_1}x_{j_1} + a_{1,j_1+1}x_{j_1+1} + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{2,j_2}x_{j_2} + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{r,j_r}x_{j_r} + \cdots + a_{r,n}x_n = b_r \\ \qquad\qquad 0_{\mathbb{K}} = b_{r+1} \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad 0_{\mathbb{K}} = b_m, \end{cases}$$

avec $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $r \leqslant m$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant n$, et pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$, on a $a_{k,j_k} \neq 0_{\mathbb{K}}$ (le pivot de la ligne k). Les indices $j_1, j_2, \ldots, j_r$ désignent la position des premiers coefficients non nuls dans chaque ligne. Leur croissance stricte traduit le décalage progressif des pivots vers la droite, ce qui caractérise la structure échelonnée du système.

Remarque 4.3.2 ***(Vérification de la validité mathématique)***
1. ***Nombre d'équations et d'inconnues :***
• *Le système est posé avec m équations et n inconnues, ce qui correspond au cadre standard d'un système linéaire.*
2. ***Structure des équations non nulles (de*** 1***ère à la*** $r-$***ième) :***
• *Chaque équation non nulle commence par un terme non nul $a_{k,j_k}x_{j_k}$, éventuellement suivi de termes en $x_{j_k+1}, \dots, x_n$.*
• *Les indices des pivots $j_1, \dots, j_r$ sont strictement croissants, ce qui garantit que chaque pivot apparaît plus à droite que le précédent. C'est la condition essentielle caractérisant la forme échelonnée.*
3. ***Conditions sur les coefficients :***
• *Pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, le pivot de la $k-$ième ligne est non nul, autrement dit*

$$a_{k,j_k} \neq 0_{\mathbb{K}},$$

ce qui assure l'existence d'un pivot dans chaque ligne non nulle.
4. ***Lignes nulles :*** *Les équations $r+1$ à m sont nulles à gauche (tous les coefficients à gauche sont nuls). Dans la forme échelonnée, ces lignes s'écrivent $b_i = 0_{\mathbb{K}}$ pour $i > r$.*

Exemple 4.3.4
1. Considérons le système suivant à trois équations et quatre inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 sur $\mathbb{R}$:

$$(S_1) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ \qquad x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = 1. \end{cases}$$

Analyse d'un système échelonné.
(a) Dimensions du système.
• *Nombre d'équations, $m = 3$.*
• *Nombre d'inconnues, $n = 4$.*
• *Nombre de lignes non nulles, $r = 3$.*
(b) Vérification des pivots.
• *Ligne 1 : pivot $x_{j_1} = x_1$, position $j_1 = 1$, coefficient $a_{11} = 1 \neq 0$.*
• *Ligne 2 : pivot $x_{j_2} = x_2$, position $j_2 = 2$, coefficient $a_{22} = 1 \neq 0$.*
• *Ligne 3 : pivot $x_{j_3} = x_4$, position $j_3 = 4$, coefficient $a_{34} = 1 \neq 0$.*
(c) Croissance des indices de pivot

$$j_1 = 1 < j_2 = 2 < j_3 = 4.$$

Toutes les conditions de la définition formelle sont satisfaites. Ce système est donc échelonné, le nombre de zéros initiaux augmentant strictement d'une ligne à l'autre, $0, 1, 2$.
2. Considérons le système suivant à coefficients dans $\mathbb{R}$ suivant

$$(S_2) : \begin{cases} x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ \qquad x_3 + 2x_4 = 3 \\ \qquad\qquad x_5 = 7. \end{cases}$$

(a) Dimensions du système.
Nombre d'équations, $m = 3$.
Nombre d'inconnues, $n = 5$.
Nombre de lignes non nulles, $r = 3$.
(b) Vérification des pivots.
Ligne 1 : pivot en x_2, $j_1 = 2$, $a_{12} = 1 \neq 0$.
Ligne 2 : pivot en x_3, $j_2 = 3$, $a_{23} = 1 \neq 0$.

Ligne 3 : pivot en x_5, $j_3 = 5$, $a_{35} = 1 \neq 0$.
(c) Croissance des indices de pivot.

$$j_1 = 2 < j_2 = 3 < j_3 = 5.$$

Toutes les conditions de la définition formelle sont satisfaites. Le système est donc échelonné, le nombre de zéros initiaux augmentant strictement d'une ligne à l'autre.
3. Système linéaire non échelonné. Considérons le système suivant à trois équations et quatre inconnues à coefficients dans $\mathbb{R}$

$$(S_3) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

(a) Vérification des pivots.
Ligne 1 : le premier coefficient non nul est celui de x_1, donc pivot en x_1, $j_1 = 1$.
Ligne 2 : le premier coefficient non nul est également celui de x_1, donc pivot en x_1, $j_2 = 1$.
Ligne 3 : les coefficients de x_1 et x_2 sont nuls, le pivot est donc en x_3, $j_3 = 3$.
(b) Analyse de la croissance des indices de pivot.

$$j_1 = 1, j_2 = 1, j_3 = 3.$$

La condition de stricte croissance des indices de pivot ($j_1 < j_2 < j_3$) n'est pas satisfaite car $j_1 = j_2 = 1$ (le nombre de zéros initiaux n'augmente pas strictement de la ligne 1 à la ligne 2). Alors ce système n'est pas échelonné.
2. Considérons le système à 3 équations et 3 inconnues suivant

$$(S_4) : \begin{cases} x+2y+3z= 4 \\ y+ z= 2 \\ z=1. \end{cases}$$

• *La première équation commence par le terme x, dont le coefficient est non nul. Il y a donc 0 zéros initiaux.*
• *La deuxième équation ne contient pas de x, mais commence par y, dont le coefficient est non nul. Il y a donc 1 zéro initial (devant y).*
• *La troisième équation ne contient ni x ni y, elle commence par z, dont le coefficient est non nul. Il y a donc 2 zéros initiaux (devant z).*
On constate que le nombre de zéros initiaux augmente strictement d'une ligne à l'autre : $0, 1, 2$. Ainsi, le système est échelonné, conformément à la définition.

4.3.3.1 Principe de la méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss transforme un système linéaire en un système équivalent sous forme échelonnée, ce qui rend sa résolution plus facile grâce à la substitution arrière. Pour cela, on utilise des opérations sur les lignes qui ne changent pas les solutions : permuter deux lignes, multiplier une ligne par un nombre non nul, ou ajouter à une ligne un multiple d'une autre. Ces opérations permettent de créer des zéros sous les pivots, les premiers coefficients non nuls de chaque ligne, formant ainsi une matrice triangulaire supérieure. Ensuite, on résout le système en commençant par la dernière équation et en remontant progressivement pour trouver toutes les inconnues.

4.3.3.1.1 Mise en œuvre de la méthode du pivot de Gauss (forme équationnelle) Soit (S) un système de m équations linéaires à n inconnues $x_1, \ldots, x_n$, à coefficients dans $\mathbb{K}$,

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Étape 1 : Choix du premier pivot. On commence par examiner le coefficient a_{11} situé en haut à gauche. Trois cas peuvent se présenter :
Cas 1 : $a_{11} \neq 0_{\mathbb{K}}$. On choisit a_{11} comme pivot. On élimine les coefficients situés sous le pivot dans la première colonne (c'est-à-dire $a_{21}, a_{31}, ..., a_{m1}$) en effectuant, pour chaque $i \in \{2, \ldots, m\}$, l'opération élémentaire

$$L_i \longleftarrow L_i - a_{11}^{-1} a_{i1} L_1.$$

Variante sans fractions (utile pour les calculs entiers ou symboliques)

$$L_i \longleftarrow a_{11} L_i - a_{i1} L_1.$$

Ces opérations transforment tous les coefficients situés sous le pivot en zéros, donnant le système

$$(S_1) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \ddots \quad \vdots \\ a'_{i2}x_2 + ... + a'_{in}x_n = b'_i \\ \vdots \quad \vdots \\ a'_{m2}x_2 + ... + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

Cas 2 : Si $a_{11} = 0_{\mathbb{K}}$, alors dans ce cas, on recherche une ligne L_i (avec $i > 1$) telle que $a_{i1} \neq 0_{\mathbb{K}}$, puis on effectue une permutation de lignes $L_i \leftrightarrow L_1$. On revient alors au cas 1 avec un pivot non nul.
Cas 3 : Si tous les coefficients de la première colonne sont nuls, i.e.

$$\forall i \in \{1, ..., m\} : a_{i1} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Dans ce cas, la première colonne est entièrement nulle,

$$(S) : \begin{cases} 0_{\mathbb{K}}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0_{\mathbb{K}}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0_{\mathbb{K}}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0_{\mathbb{K}}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

On ignore alors l'inconnue x_1 et on poursuit la méthode sur le système réduit formé des colonnes restantes.

Étape 2 : Répétition du processus

On applique la même méthode à la sous-matrice restante du système réduit (S_1) en ignorant la première ligne et la première inconnue x_1. On choisit un nouveau pivot a'_{22}, et on annule les coefficients situés sous ce pivot, dans la colonne correspondante.

• Si le nouveau pivot est nul, on effectue une permutation de lignes pour obtenir un pivot non nul (comme dans le Cas 2).

• Si tous les coefficients de la colonne sont nuls, on ignore la variable correspondante (comme dans le Cas 3).

On répète ce processus jusqu'à ce que la matrice associée au système devienne échelonnée supérieure, c'est-à-dire qu'elle contient des zéros sous les pivots.

4.3.3.1.2 Méthode du pivot de Gauss avec la matrice augmentée Soit un système linéaire (S) de m équations à n inconnues $x_1, x_2, ..., x_n$, à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. On associe à ce système sa matrice augmentée

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Étape 1 : Choix et utilisation du premier pivot. On commence par le premier coefficient a_{11}, appelé pivot.
Cas 1 : Si $a_{11} \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors on utilise a_{11} comme pivot pour annuler tous les coefficients situés en dessous dans la première colonne

$$\forall i \in \{2, ..., m\} : L_i \longleftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1.$$

Une version équivalente sans fractions

$$\forall i \in \{2, ..., m\} : L_i \longleftarrow a_{11} L_i - a_{i1} L_1.$$

On obtient alors une nouvelle matrice $(A^1 \mid B^1)$ où tous les coefficients en dessous du pivot sont nuls

$$(A^1 \mid B^1) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0_{\mathbb{K}} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{in} & b'_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mj} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right).$$

Cas 2 : $a_{11} = 0_{\mathbb{K}}$

• Si un des $a_{i1} \neq 0_{\mathbb{K}}$ pour $i > 1$, on permutera la ligne L_i avec L_1 pour obtenir un pivot non nul.

• Sinon, toute la première colonne est nulle : on ignore la colonne et la variable x_1, et on passe à la suite.
Étape 2 : Itération du processus

On répète la même méthode sur la sous-matrice obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne.

• On choisit le pivot suivant (exemple. a_{22}), puis on élimine les coefficients en dessous.

• Si ce pivot est nul, on permutera avec une ligne en dessous ayant un coefficient non nul dans la même colonne.

• On répète ce processus jusqu'à obtenir une matrice échelonnée supérieure, c'est-à-dire avec des zéros sous tous les pivots.

• Une fois le système échelonné, on résout par substitution inverse (de bas en haut), en trouvant les inconnues une par une.

Suite à l'explication du principe de la méthode de Gauss, on donne maintenant l'algorithme de Gauss, qui décrit étape par étape la procédure systématique pour transformer un système linéaire en système échelonné supérieur et le résoudre.

Algorithme 4.3.3 ***(Algorithme du pivot de Gauss)***
Objectif : *Transformer un système linéaire en un système échelonné (ou triangulaire supérieur) équivalent, en utilisant des opérations élémentaires sur les équations.*
Étape 0 : Préparation
On considère un système linéaire de m équations à n inconnues.
Étape 1 : Choix du pivot dans une colonne
On commence par la colonne k (initialement $k = 1$) :
1. Chercher le premier coefficient non nul a_{kk} dans la colonne k, à partir de la ligne k.
2. Trois cas possibles :
Cas 1 : *$a_{kk} \neq 0_{\mathbb{K}}$, ce coefficient est un pivot valide, on le garde.*
Cas 2 : *$a_{kk} = 0_{\mathbb{K}}$ mais il existe un $a_{ik} \neq 0_{\mathbb{K}}$ en dessous ; alors échanger les lignes L_k et L_i et revenir au cas 1.*
Cas 3 : *Tous les $a_{ik} = 0_{\mathbb{K}}$ pour $i \geqslant k$; alors aucun pivot possible dans cette colonne. La variable x_k devient libre et on passe à la colonne suivante.*
Étape 2 : Élimination sous le pivot
Une fois le pivot a_{kk} choisi, pour chaque ligne $i > k$, on remplace l'équation L_i par :

$$L_i \longleftarrow L_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} L_k.$$

Cela permet de créer un zéro en position a_{ik}, juste sous le pivot.
Étape 3 : Répéter le processus
1. Répéter les étapes 1 et 2 pour les lignes et colonnes restantes.
2. Ignorer les lignes déjà traitées (au-dessus du pivot courant) et les colonnes des pivots déjà choisis.
3. Continuer tant qu'il reste des lignes à traiter et des colonnes où choisir un pivot.
Fin de l'algorithme
À la fin, le système est transformé en système échelonné supérieur, avec chaque pivot à droite de celui de la ligne précédente. On peut alors résoudre le système par substitution inverse (remontée).

Exemple 4.3.5 *Soit le système suivant à résoudre*

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 13x_4 & = & 5 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 17x_4 & = & 4 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 20x_4 & = & -1. \end{array} \right.$$

1) Le premier pivot doit apparaître dans la première colonne. Or, le coefficient de x_1 dans la première équation est nul. On échange donc la première ligne avec la deuxième

$$L_1 \leftrightarrow L_2,$$

on obtient

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ \quad - x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 20x_4 = -1. \end{cases}$$

Le pivot est maintenant $a_{11} = 1$. *Ce pivot sert de base pour éliminer tous les autres termes sur la même colonne.*
Pour annuler le coefficient de x_1 *dans la 3-ème ligne, on effectue l'opération élémentaire*

$$L_3 \longleftarrow L_3 + L_1.$$

Ce qui donne

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ \quad - x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5 \\ \quad x_2 - 3x_4 = 3. \end{cases}$$

On multiplie la deuxième ligne par -1 *pour obtenir un pivot égal à* 1 *(*$L_2 \longleftarrow -L_2$*, normalisation du pivot en position* $(2,2)$*). On obtient*

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ \quad x_2 - 2x_3 - 13x_4 = -5 \\ \quad x_2 - 3x_4 = 3. \end{cases}$$

On élimine x_2 *dans la 3-ème ligne en effectuant l'opération élémentaire*

$$L_3 \longleftarrow L_3 - L_2.$$

Ce qui donne

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ x_2 - 2x_3 - 13x_4 = -5 \\ 2x_3 + 10x_4 = 8. \end{cases}$$

On divise la dernière ligne par 2 *pour obtenir un pivot égal à* 1 *(*$L_3 \longleftarrow \frac{1}{2}L_3$*,normalisation du pivot en position* $(3,3)$*). Ce qui donne*

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ \quad x_2 - 2x_3 - 13x_4 = -5 \\ \quad\quad x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases}$$

Le système est maintenant sous forme échelonnée, ce qui le rend très simple à résoudre. En choisissant x_4 *comme variable libre, on peut exprimer* x_1, x_2, x_3 *en fonction de* x_4. *On commence par la dernière équation et on remonte par substitution. Alors*

$$x_3 + 5x_4 = 4 \Longrightarrow x_3 = 4 - 5x_4.$$

En remplaçant x_3 *dans la deuxième équation on obtient*

$$x_2 = 3 + 3x_4.$$

En remplaçant x_2 *et* x_3 *dans la première équation, on obtient*

$$x_1 = -2 + 4x_4.$$

Ce qui permet d'obtenir toutes les solutions du système

$$S = \{(-2 + 4x_4, 3 + 3x_4, 4 - 5x_4, x_4) : x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

2) ***Écriture sous forme de matrice augmentée.*** *On réécrit le système initial (S) sous la forme de la matrice augmentée*

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right).$$

On applique maintenant les étapes de la méthode de Gauss sur la matrice augmentée.
Étape 1 : *Étant donné que le premier pivot doit être non nul (a_{11}), on échange*

$$L_1 \leftrightarrow L_2.$$

On obtient

$$(A^{(1)} \mid B^{(1)}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right).$$

Étape 2 : *Pour annuler le coefficient de x_1 dans la 3ème ligne*

$$L_3 \longleftarrow L_3 + L_1.$$

On obtient

$$(A^{(2)} \mid B^{(2)}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right).$$

Étape 3 : *Normalisation du pivot $(2, 2)$. Multiplier la deuxième ligne par -1 pour obtenir un pivot égal à 1*

$$L_2 \longleftarrow -L_2.$$

On obtient

$$(A^{(3)} \mid B^{(3)}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right).$$

Étape 4 : *Élimination sous le pivot $(2, 2)$. Pour annuler le coefficient de x_2 dans la 3ème ligne*

$$L_3 \longleftarrow L_3 - L_2.$$

On obtient

$$(A^{(4)} \mid B^{(4)}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 8 \end{array}\right).$$

Étape 5 : *Normalisation du pivot $(3, 3)$. Diviser la troisième ligne par 2 pour obtenir un pivot égal à 1*

$$L_3 \longleftarrow \frac{1}{2} L_3.$$

On obtient

$$(A^{(5)} \mid B^{(5)}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right).$$

Le système équivalent sous forme échelonnée est

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = & 4 \\ x_2 - 2x_3 - 13x_4 = & -5 \\ x_3 + 5x_4 = & 4. \end{array}\right.$$

On choisit x_4 comme variable libre, la solution générale donc du système est

$$S = \{(-2 + 4x_4, 3 + 3x_4, 4 - 5x_4, x_4) : x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Conclusion 4.3.3 *La méthode du pivot de Gauss est une technique fondamentale pour résoudre les systèmes d'équations linéaires. Elle transforme un système initial en un système échelonné, plus facile à résoudre grâce à la substitution arrière.*

(a) Avantages :

- *Simple à comprendre et à appliquer.*
- *Convient à tous les types de systèmes.*
- *Réalisable manuellement ou par ordinateur.*
- *Sert de base à d'autres méthodes, comme Gauss-Jordan ou le calcul de l'inverse de matrices.*
- *Efficace dans la majorité des situations.*

(b) Limites :

- *En calcul numérique, les arrondis successifs peuvent introduire des erreurs.*
- *En calcul exact, l'apparition de fractions complexes peut rendre les calculs lourds.*
- *Pour les systèmes très grands ou très creux, d'autres méthodes spécialisées peuvent être plus adaptées.*

Malgré ces limites, le pivot de Gauss reste une méthode fiable, polyvalente et incontournable, constituant un fondement solide pour l'étude des systèmes linéaires en mathématiques et en informatique.

Conclusion du chapitre

Ce chapitre a présenté les notions essentielles : définition d'un système linéaire, ses différentes représentations (matricielle, vectorielle et en termes d'applications linéaires), ainsi que des concepts clés tels que le rang, le noyau et l'image. Nous avons montré qu'un système peut avoir une solution unique, aucune solution ou une infinité de solutions, selon le rang de sa matrice des coefficients. Plusieurs méthodes de résolution ont été étudiées : la substitution, simple et adaptée aux petits systèmes ; la règle de Cramer, efficace pour les systèmes carrés de rang maximal ; et la méthode du pivot de Gauss, plus générale et adaptée aux systèmes complexes. En résumé, ce chapitre fournit les bases théoriques et pratiques nécessaires pour comprendre et résoudre efficacement les systèmes linéaires, ouvrant la voie à des notions plus avancées d'algèbre linéaire et à de nombreuses applications scientifiques et techniques.

Conclusion générale

Ce document propose un parcours structuré à travers les concepts essentiels de l'algèbre linéaire, spécialement conçu pour les étudiants de première année en mathématiques et informatique. Il commence par l'étude des espaces vectoriels, en présentant les notions fondamentales de lois de composition, sous-espaces, familles libres, génératrices et bases, ainsi que la dimension finie, qui permet de travailler avec des représentations concrètes.

La deuxième partie est consacrée aux applications linéaires, qui relient naturellement les espaces vectoriels. Sont abordées leur définition, leurs propriétés fondamentales et leurs cas particuliers, tels que les endomorphismes, isomorphismes et projecteurs. Les outils centraux — noyau, image, rang et théorème du rang — permettent d'analyser ces applications de manière rigoureuse.

Enfin, les matrices et les systèmes d'équations linéaires illustrent les applications pratiques de l'algèbre linéaire. Les matrices offrent un moyen efficace de représenter et de manipuler les applications linéaires, tandis que les systèmes d'équations permettent de résoudre des problèmes concrets.

Ce manuscrit met en évidence l'unité et la cohérence de l'algèbre linéaire : chaque notion, des espaces vectoriels aux applications et à leur représentation matricielle, s'articule avec les autres pour former un ensemble logique et solide. Il constitue une base indispensable pour aborder des études plus avancées en mathématiques, informatique, physique, optimisation ou apprentissage automatique.

Bibliographie

[1] S. Balac et F. Sturm, *Algèbre et analyse : cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés*, PPUR Presses Polytechniques, 2003.

[2] A. Bégyn, *Mathématiques ECS 1re année – L'essentiel du cours avec exemples*, Paris : Éditions Ellipses, 2016.

[3] M. Boukhobza et J. Delfaud, *Tout ce qu'il faut savoir sur les mathématiques en PCSI et PTSI : cours complet avec démonstrations, 167 méthodes, 228 exemples détaillés et 387 exercices d'entraînement corrigés*, Paris : Éditions Ellipses, 2018.

[4] R. Coutens, *Colles de Mathématiques – MPSI/MP2I : Programme 2021 (416 p.)*, Paris : Éditions Ellipses, 2021.

[5] C. Deschamps et F. Moulin, *Mathématiques MPSI : Tout-en-un (4e éd.)*, Paris : Dunod, 2015.

[6] J. Grifone, *Algèbre linéaire (4e édition)*, Toulouse : Cépadues Éditions, 2011.

[7] D. Guinin et B. Joppin, *Les nouveaux Précis Bréal : Mathématiques – Algèbre et géométrie : cours, méthodes, exercices résolus*, Paris : Bréal, 2000.

[8] J.-P. Marco, L. Lazzarini, H. Boualem, R. Brouzet, *et al.*, *Mathématiques L1 : cours complet avec 1000 tests et exercices corrigés*, Paris : Pearson Éducation, 2007.

[9] J.-M. Monier, *J'intègre – Algèbre 1 : 1re année MPSI, PCSI, PTSI. Cours et 600 exercices corrigés*, Paris : Dunod, 2008.

[10] S. Rainero, *Les maths en cours – MPSI : cours complet et détaillé, enrichi de nombreux exemples*, Paris : Éditions Ellipses, 2015.

[11] A. Soyeur, F. Capaces et E. Vieillard-Baron, *Cours de Mathématiques – Sup MPSI, PCSI, PTSI, TSI*, En partenariat avec l'association Sésamath, version du 16 septembre 2010. Disponible en ligne sur : `http://www.sesamath.net`