

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
CENTRE UNIVERSITAIRE ABDELHAFID BOUSSOUF MILA  
INSTITUT DE SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET HYDRAULIQUE**



**Polycopie de Cours :**

## **Béton Précontraint, Cours et exercices corrigés**

**(Support pédagogique pour étudiants)**

**(Master en Génie civil, Option : Structures)**

**Préparer par : Dr. Djamel DJEGHADER**

**Maitre Conférence classe "A"**

**2024-2025**

## **Avant-propos**

L'objectif de cet ouvrage est d'expliquer les principes fondamentaux de la conception des éléments et des structures en béton précontraint. Il s'adresse à la fois aux étudiants de Master en Génie Civil, option structures. La conception de structures en béton précontraint exige une maîtrise approfondie du comportement de l'ouvrage à chaque phase de chargement, ainsi qu'une connaissance rigoureuse des critères normatifs applicables, incluant les règles, exigences et leur justification technique. Il est également essentiel de connaître en profondeur les critères de conception et de comportement spécifiés dans la norme de conception pertinente, y compris les règles et exigences et leur contexte. Cet ouvrage a pour ambition, d'offrir une analyse détaillée du comportement des éléments et structures en béton précontraint, tant sous charges de service (fonctionnement courant) que sous charges ultimes (rupture), de servir de guide méthodologique pour la conception structurelle, en s'appuyant sur les principes fondamentaux de la mécanique des structures, les propriétés mécaniques du béton et de l'acier et des exemples pratiques illustrant les théories et méthodes. Les approches utilisées dans cet ouvrage privilégient la simplicité et la clarté, en évitant les formalismes excessifs. Les références aux normes, notamment l'Eurocode, BAEL et BPEL, sont systématiquement contextualisées, avec une notation harmonisée pour faciliter la compréhension.

# Sommaire :

<b>Introduction générale.....</b>	<b>01</b>
<b>Chapitre 1 : Généralité sur le béton précontraint.....</b>	<b>03</b>
1.1. Introduction .....	03
1.2. Définition du béton armé.....	03
1.3. Mécanique du béton armé.....	03
1.4. Principe de la précontrainte .....	06
1.5. Méthodes de précontrainte.....	06
1.5.1 Mise en tension par Pré-tension.....	06
1.5.2 Mise en tension par poste-tension.....	07
1.6. Procédés de précontrainte par post-tension.....	10
1.6.1. Procédé Freyssinet.....	10
1.6.2. Procédé PAC .....	10
1.7. Comparaison entre les deux modes de précontrainte.....	11
1.8. Domaines d'application.....	11
1.8.1. Construction de ponts .....	11
1.8.2. Construction de bâtiments .....	12
1.8.3. Construction de structures de stationnement :.....	13
1.8.4. Construction de réservoirs de stockage.....	13
1.8.5. Voies ferrées .....	14
1.8.6. Égouts.....	15
1.8.7. Stockage des céréales .....	16
1.8.8. Lignes de transmission téléphonique et électrique.....	16
1.8.9. Pieux en béton.....	17
1.9. Application.....	18
1.9.1. Exercice 1.....	18
1.9.2. Exercice 2.....	19
1.9.3. Exercice 3.....	20
1.9.4. Exercice 4.....	22
<b>Chapitre 2 : Matériaux utilisés en béton précontraint.....</b>	<b>26</b>
2.1. Introduction .....	26
2.2. Le béton.....	26
2.2.1. Principales caractéristiques du béton.....	27
2.3. Les armatures de précontraintes.....	32
2.3.1. Diagramme contraintes-déformations .....	32
2.3.2. Types des armatures utilisés dans la précontrainte.....	34
2.3.2. 1. Les fils.....	34
2.3.2. 2. Les barres.....	35
2.3.2. 3. Les torons.....	35
2.4. Applications .....	36
2.4.1. Exercice 1.....	36
2.4.2. Exercice 2.....	38
<b>Chapitre 3 : Sollicitations et sections de calcul.....</b>	<b>41</b>
3.1. Introduction.....	41
3.2. Les états limites.....	42
3.2.1. Etat limite ultime (ELU) .....	42

3. 2.2. Etat limite de service .....	42
3.3. Actions.....	43
3.4. Sollicitations.....	44
3.4.1. Types de sollicitations.....	44
3.4.2. Importance des sollicitations.....	45
3.4.3. Sollicitations de calcul à l'ELU.....	45
3.4.4. Sollicitations de calcul à l'E.L.S .....	46
3. 5. Section de calcul.....	46
3.5. 1. Aire de la section (A) .....	47
3.5. 2. Moment statique (S) .....	47
3.5.3. Centre de gravité (G) .....	47
3.5.4. Moment d'inertie (I) .....	48
3.5.5. Modules de résistance $W_x$ et $W_y$ (cm <sup>3</sup> ) .....	48
3.5.6. Module de flexion (W) .....	48
3.5.7. Rayon de giration (i) .....	49
3.5.8. Moment d'inertie polaire (J) .....	49
3.5.9. Rendement d'une section .....	49
3.5.10. Types de section.....	50
3.6. Applications .....	51
3.6.1. Exercice 1 .....	51
3.6.1. Exercice 2 .....	53
<b>Chapitres 4 : Perte de la précontrainte.....</b>	<b>55</b>
4.1. Introduction.....	55
4.2. Contrainte à l'origine.....	55
4.3. Pertes de tension en précontrainte par post-tension.....	56
4.3.1. Pertes instantanées.....	57
4. 3.2. Pertes de tension différées.....	61
4.4. Contrainte finale probable.....	64
4.5. Applications.....	65
4.5.1. Exercice 1.....	65
4.5.2. Exercice 2.....	66
<b>Chapitre 05 : Vérification des contraintes.....</b>	<b>70</b>
5.1. Introduction .....	70
5.2. Diagramme de vérification.....	70
5.2.1. Noyau limite d'une section droite .....	71
5.3. Noyau limite.....	71
5.5. Notion des sections critique.....	74
5.5.1. Section sous critique.....	74
5.5.2. Section critique.....	75
5.5.3. Section sur-critique.....	75
5. 6.Evaluation de la précontrainte.....	75
5.6.1. Cas d'une section critique et sous critique .....	75
5.6.2. Cas d'une section sur critique .....	76
5.7. Section minimale du béton.....	77
5.7.1. Cas d'une section sous critique.....	77
5.7.2. Cas d'une section sous critique.....	77
5.8. Application.....	78
5.8.1. Exercice 1.....	78

5.8.2. Exercice 2.....	79
<b>Chapitre 6 : Justification des sections courantes.....</b>	<b>85</b>
6.1. Introduction.....	85
6.2. Justification vis-à-vis le moment fléchissant.....	85
6.2.1. Vérification à l'état limite de service.....	85
6.2.2. Vérification à l'état limite ultime.....	89
6.3. Justification vis-à-vis les efforts tranchants.....	91
6.3.1. Influence de la précontrainte.....	91
6.3.2. Effort tranchant réduit.....	92
6.3.3. Vérification à l'état limite de service.....	92
6.3.4. Vérification à l'état limite ultime.....	94
6.4. Justification du béton.....	97
6.5. Disposition constructive .....	97
6.5.1. Précontrainte par post tension.....	97
6.6. Applications.....	102
6.6.1. Exercice 1.....	102
6.6.2. Exercice 2.....	105
<b>Chapitre 7 : Poutres continues sur appuis simples.....</b>	<b>108</b>
7.1. Introduction : .....	108
7.2. Effets hyperstatiques de la précontrainte.....	108
7.2.1. Equilibre d'une structure précontrainte .....	108
7.2.2. Equilibre d'un câble de précontrainte.....	108
7.2.3. Equilibre du béton .....	110
7.2.3.1. Méthode directe.....	110
7.2.3.2 Méthode interne.....	111
7.3. Poutres continues .....	112
7.3.1. Sollicitations hyperstatiques de précontrainte.....	112
7.3.2 Calcul des moments hyperstatiques de précontrainte.....	114
7.4. Applications : .....	116
7.4.1. Exercice 1.....	116
7.4. Exercice 2.....	117

# Introduction générale

Le béton est utilisé comme matériau de construction principal depuis l'époque romaine. Étant résistant en compression, mais faible en traction, il était employé dans les arcs, les voûtes et les murs, où les contraintes sont principalement en compression.

Au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle, on découvrit que des barres de fer, puis d'acier, pouvaient être intégrées au béton, lui conférant ainsi une résistance à la traction. Cela permit son utilisation pour les poutres et les dalles, où il travaille en flexion. Bâtiments, ponts, murs de soutènement et bien d'autres structures furent alors réalisés en béton armé. Cependant, bien qu'il soit l'un des matériaux de construction les plus utilisés au monde, il présente des limites. Les poutres et dalles en béton armé fléchissent significativement sous charge, nécessitant des sections massives pour assurer une rigidité suffisante ; cette flexion entraîne des fissures qui altèrent son apparence et exposent les armatures à la corrosion. Le grand nombre de barres requis pour renforcer les poutres de grande portée dans les ponts et bâtiments complique la mise en œuvre du béton, rendant le processus gourmand en main-d'œuvre et lent.

La précontrainte a été développée dans les années 1920 par l'ingénieur français Eugène Freyssinet, le béton précontraint repose sur un principe simple, mais révolutionnaire : pré-comprimer le béton pour qu'il résiste mieux aux forces de traction. En effet, le béton excellent en compression, mais fragile en traction, tend à se fissurer sous l'effet de charges variables (poids propre, trafic, vent, etc.). En introduisant des câbles d'acier à haute résistance (tendons) préalablement tendus, on comprime le béton en amont, réduisant ainsi les risques de fissuration et augmentant sa capacité portante. Les câbles de précontrainte pouvaient être conçus pour contrebalancer la flexion des poutres et dalles, permettant la construction de structures bien plus élancées. Comme ces câbles étaient environ quatre fois plus résistants que les barres traditionnelles, leur nombre fut réduit, limitant l'encombrement dans les poutres et accélérant la construction.

Aujourd'hui, la plupart des ponts en béton, à l'exception des petites structures ou celles isolées, utilisent la précontrainte. Elle est également de plus en plus répandue dans les bâtiments, où les dalles plates ultrafines qu'elle permet créent un encombrement minimal pour les réseaux techniques.

L'objectif de ce cours est d'expliquer clairement les concepts de base du béton précontraint, en se basant sur les normes en vigueur, les théories de bases et les travaux pratiques. En effet, le présent polycopié est divisé sur sept Chapitres :

Le premier chapitre présente des généralités sur le béton précontraint, les différents modes de mise en tension et les domaines d'utilisation de ce type du béton. Les deux modes de précontrainte ont été présentés plus en détail, avec l'explication des différentes étapes d'exécution et de fabrication des éléments en béton précontraint.

Le deuxième chapitre porte sur les matériaux utilisés dans la précontrainte et les caractéristiques préconisées afin de garantir la stabilité et la fiabilité des structures en béton précontraint.

Le troisième chapitre présente les sollicitations agissantes sur les éléments en béton précontraints, les combinaisons de charge à l'état limite ultime et à l'état limite de service, ainsi que les caractéristiques géométriques des sections.

Le quatrième chapitre consacré au calcul des pertes de précontrainte à court terme et à long terme (pertes instantanées et pertes déferées). Ces pertes doivent être soigneusement calculée et prise en compte lors de la conception pour garantir la performance et la sécurité de la structure.

Le cinquième chapitre explique les méthodes de vérification des contraintes dues la mise en tension des câbles, des fils et des tourons. Ces méthodes de vérification sont classées selon des critères définis par les normes, afin de garantir la durabilité, la sécurité et la performance de la structure.

Le sixième chapitre est réservé aux calculs et aux justifications des sections et des éléments sollicités en béton précontraint à l'état limite ultime et à l'état limite de service. Ces justifications et vérifications visent à garantir que la structure reste fonctionnelle, durable et esthétique sous les charges d'exploitation, sans dépasser les contraintes ou déformations admissibles.

Le dernier chapitre consacré au calcul des poutres continues sur appuis simple par l'utilisation de la méthode interne et de la méthode directe. Ces méthodes permettant de déterminer les effets complémentaires induits par la précontrainte dans les structures hyperstatiques.

Chaque chapitre contient des exemples et des exercices de calcul afin de mieux comprendre l'application des formules et des équations utilisées dans la précontrainte.

# Chapitre 1 : Généralité sur le béton précontraint

## 1.1. Introduction :

Ce chapitre a pour but de présenter une synthèse bibliographique sur le béton précontraint, les différents modes de mise en tension et les domaines d'utilisation de ce type du béton. Les deux méthodes de précontrainte (mise en tension par pré-tension et par post-tension) vont être exposées en détail avec l'explication des différentes étapes d'exécution et de fabrication des éléments en béton précontraint.

## 1.2. Définition du béton armé

Le béton armé est un matériau de construction dans lequel des barres d'armature ou d'autres types de renforcement ont été intégrés pour améliorer une ou plusieurs propriétés du béton. Depuis de nombreuses années, il est utilisé comme matériau de construction économique dans les bâtiments, les ponts et de nombreux autres types de structures à travers le monde. Une grande partie de son attrait mondial est due au fait que les matériaux constitutifs de base (ciment, sable, agrégats, eau et barres d'armature) sont largement disponibles et qu'il est possible de construire une structure par l'utilisation des sources, de main-d'œuvre et de matériaux locaux..

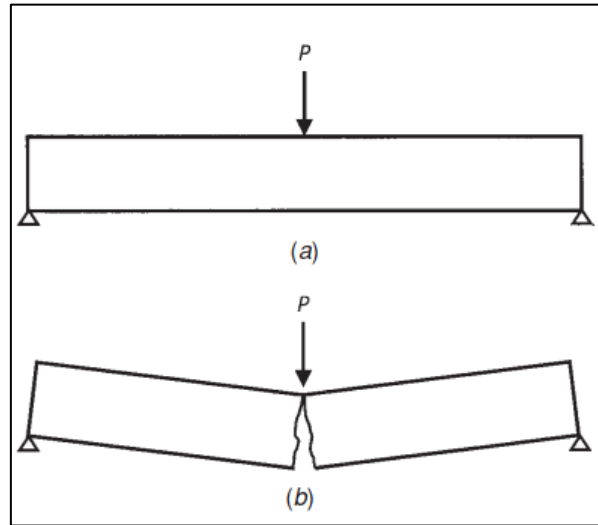
## 1.3. Mécanique du béton armé

Le béton est un matériau composite qui se caractérise par leur fragilité importante avec une faible résistance à la traction et une bonne résistance à la compression. La fissuration se produit lorsque la contrainte de traction du béton dans un élément atteint la résistance à la traction en raison de charges appliquées de l'extérieur, de changements de température ou d'un retrait. Les éléments en béton qui ne contiennent aucun type de renfort ont subi une rupture, généralement très soudainement une fois que les premières fissures de traction se produite, car rien n'empêche les fissures de se propager au sein du matériau en béton.

Considérez la poutre en béton non renforcée à appui simple illustrée à la Fig. 1.1 qui est soumise à une charge concentrée  $P$  à mi- portée. D'après la résistance des matériaux, la contrainte de flexion en traction maximale se produit dans les fibres inférieures de la section de poutre à mi- portée et la contrainte de flexion en compression maximale se produit dans les fibres supérieures. Le béton étant plus résistant en compression qu'en traction, la poutre pourra supporter la charge concentrée et son poids propre tant que la



contrainte de flexion maximale est inférieure à la résistance à la traction du béton en flexion (Fig. 1.1a). Si la contrainte de flexion est égale ou supérieure à la résistance à la traction, une fissure se formera immédiatement dans la fibre inférieure de la poutre et se propagera instantanément vers la fibre supérieure (Fig. 1.1b).



**Figure 1.1** Poutre simplement soumise au chargement externe. (a) Contrainte de flexion  $<$  la résistance à la traction du béton en flexion. (b) Contrainte de flexion  $>$  à la résistance à la traction du béton en flexion.

Une séquence d'évènements différente se produirait si des barres d'armature étaient présentes près de la partie inférieure de la poutre simplement appuyée. Comme dans le cas d'une poutre en béton non armé, une fissure se formera dans la fibre inférieure de la poutre en béton armé à mi-portée lorsque la contrainte de flexion est égale ou supérieure à la résistance à la traction du béton en flexion. Contrairement à la poutre non armée, la propagation des fissures sera arrêtée par la présence de l'armature, qui a une résistance à la traction beaucoup plus élevée que celle du béton. Si la grandeur de la charge concentrée augmente, la fissure à la mi-portée se propagera vers le haut de manière stable et des fissures supplémentaires se formeront à d'autres endroits le long de la travée où la contrainte de flexion dépasse la résistance à la traction du béton (voir Fig. 1.2). En supposant que la poutre possède une résistance au cisaillement suffisante, ce processus se poursuit jusqu'à ce que le béton s'écrase en compression ou jusqu'à ce que l'armature cède en traction. Les chapitres suivants de ce livre montrent qu'il est souhaitable que l'armature cède en traction avant que le béton ne cède en compression.

Ce qu'il faut retenir de cette discussion est que les armatures, qui ont une résistance à la traction bien supérieure à celle du béton, sont utilisées pour prendre les contraintes de

traction dans un élément en béton armé, et que les armatures ne deviennent efficaces pour résister à la traction qu'après l'apparition de fissures.

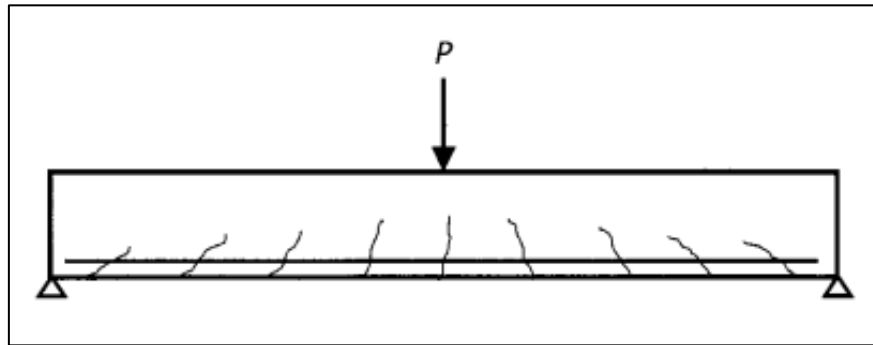


Figure 1.2 Réponse d'une poutre en béton armé simplement appuyée en raison d'une charge externe.

Les largeurs de fissures sont approximativement proportionnelles à la déformation, et donc à la contrainte de traction, dans l'armature. Les contraintes de l'acier doivent donc être limitées à une valeur suffisamment faible afin d'éviter des fissures trop larges. De même, une déformation importante de l'acier est le résultat d'une courbure importante, qui à son tour est associée à une déflexion importante. Il n'y a donc que peu d'avantages à utiliser de l'acier ou du béton à plus haute résistance, car pour satisfaire aux exigences de service, la capacité de déformation accrue offerte par l'acier à plus haute résistance ne peut pas être utilisée.

**Le béton précontraint** est une forme particulière de béton armé. La précontrainte consiste à appliquer une charge de compression initiale sur une structure pour réduire ou éliminer les forces de traction internes et ainsi contrôler ou éliminer la fissuration. La charge de compression initiale est imposée et maintenue par des armatures en acier fortement tendues qui réagissent sur le béton. Lorsque la fissuration est réduite ou éliminée, une section précontrainte est considérablement plus rigide que la section renforcée équivalente (généralement fissurée). La précontrainte peut également imposer des forces internes qui sont de signe opposé aux charges externes et peut donc réduire considérablement, voire éliminer, les déformations de traction.

Avec l'amélioration du comportement de charge de service, l'utilisation d'armatures en acier à haute résistance et de béton à haute résistance devient à la fois économique et efficace sur le plan structurel. Comme nous le verrons plus loin, seul l'acier qui peut être tendu avec de grandes déformations élastiques initiales convient à la précontrainte du béton. L'utilisation d'acier à haute résistance n'est donc pas seulement un avantage pour le béton précontraint, c'est une nécessité. La précontrainte permet d'obtenir des

éléments plus légers, des portées plus longues et une augmentation de la gamme d'application économique du béton armé.

#### 1.4. Principe de la précontrainte

La précontrainte a pour objectif, en imposant aux éléments un effort de compression axial judicieusement appliqué, de supprimer (ou fortement limiter) les sollicitations de traction dans le béton

Cette précontrainte peut être :

- **Une précontrainte partielle** : autorisation des contraintes de traction limitées.
- **Une précontrainte totale** : élimination totale des contraintes de traction

#### 1.5. Méthodes de précontrainte

Comme mentionné dans la section précédente, la précontrainte est généralement conférée à un élément en béton par une armature en acier fortement tendue (fil, toron ou barre) réagissant sur le béton. L'acier de précontrainte à haute résistance est le plus souvent tendu à l'aide de vérins hydrauliques. L'opération de mise en tension peut avoir lieu avant ou après la coulée du béton et, en conséquence, les éléments précontraints sont classés comme pré-tension ou post-contraints.

##### 1.5.1 Mise en tension par Pré-tension

Les câbles de précontrainte sont initialement tendus entre des culées fixes et ancrés. Une fois le coffrage en place, le béton est coulé autour des câbles en acier fortement sollicité et durci. Lorsque le béton a atteint la résistance requise, les câbles sont coupés ou libérés des culées. Lorsque l'acier fortement sollicité tente de se contracter, le béton est comprimé. La pré-tension est conférée par la liaison entre l'acier et le béton.

Les éléments en béton précontraint sont souvent préfabriqués dans des lits de précontrainte suffisamment longs pour accueillir plusieurs unités identiques simultanément. Pour réduire la durée du cycle de construction, le durcissement à la vapeur peut être utilisé pour faciliter un gain rapide de résistance du béton puisque la précontrainte est effectuée dans les 24 heures suivant le coulage. Étant donné que le béton est généralement mis sous tension à un âge aussi précoce, le raccourcissement élastique du béton et les déformations de fluage ultérieures ont tendance à être élevés. Ce raccourcissement relativement élevé du béton en fonction du temps entraîne une réduction significative de la contrainte de traction dans l'acier de précontrainte collé et une perte de précontrainte relativement élevée.

- **Etapes de mise en œuvre de la précontrainte par post tension interne (Figure 1.3) :**

La précontrainte est transmise au béton par les câbles, en raison de la liaison entre eux. Lors du transfert de la précontrainte, l'élément subit un raccourcissement élastique. Si les câbles sont situés de manière excentrée, l'élément est susceptible de se plier et de se déformer (flèche). Les différentes étapes de l'opération de précontrainte sont résumées comme suit :

- A. Mise en tension des câbles par les vérins
- B. Coulage du béton
- C. Relâchement et découpage des câbles (la précontrainte de compression est transmise au béton par adhérence).

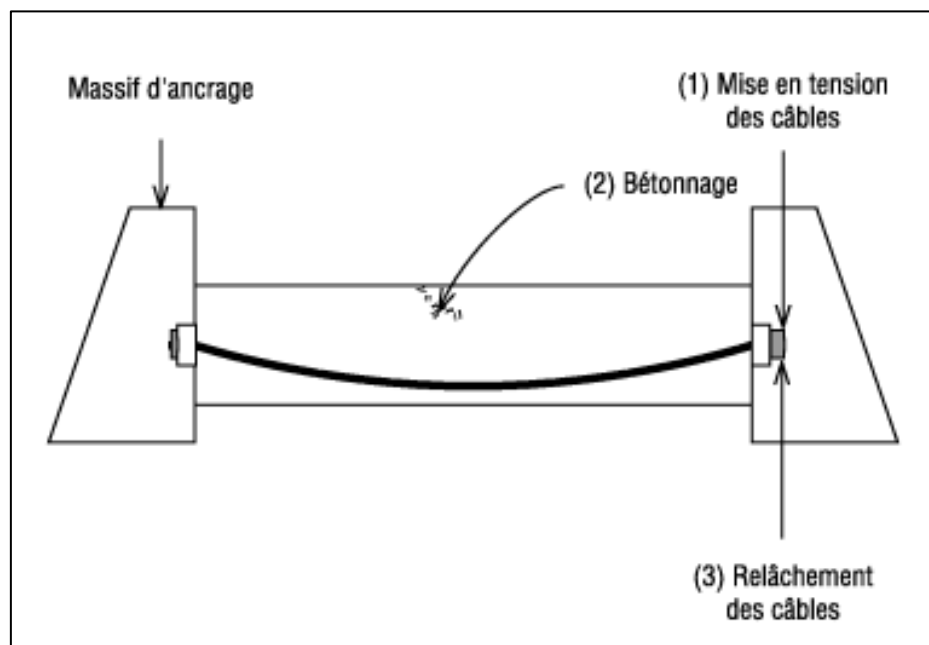


Figure 1.3. Procédure de mise en tension par pré-tension

### 1.5.2 Mise en tension par poste-tension :

Les procédures de post-tension d'un élément en béton sont illustrées à la figure 1.4. Une fois le coffrage en place, le béton est coulé autour des gaines qui sont fixées à n'importe quel profil souhaité. Les câbles en acier sont généralement en place, sans contrainte dans les conduits pendant le coulage du béton, ou peuvent être enfilés à travers les conduits ultérieurement. Lorsque le béton a atteint la résistance requise, les câbles sont tendus. Les câbles peuvent être tendus d'une extrémité (l'autre extrémité est fixe) ou peuvent être tendus des deux extrémités, comme illustrer à la figure 1.4b. Le béton a subi des

contraintes de compression pendant l'opération de mise en tension et la précontrainte est maintenue après l'ancrage des câbles sur l'extrémité. Les câbles post-tendus imposent également une force transversale à l'élément partout où la direction du câble change.

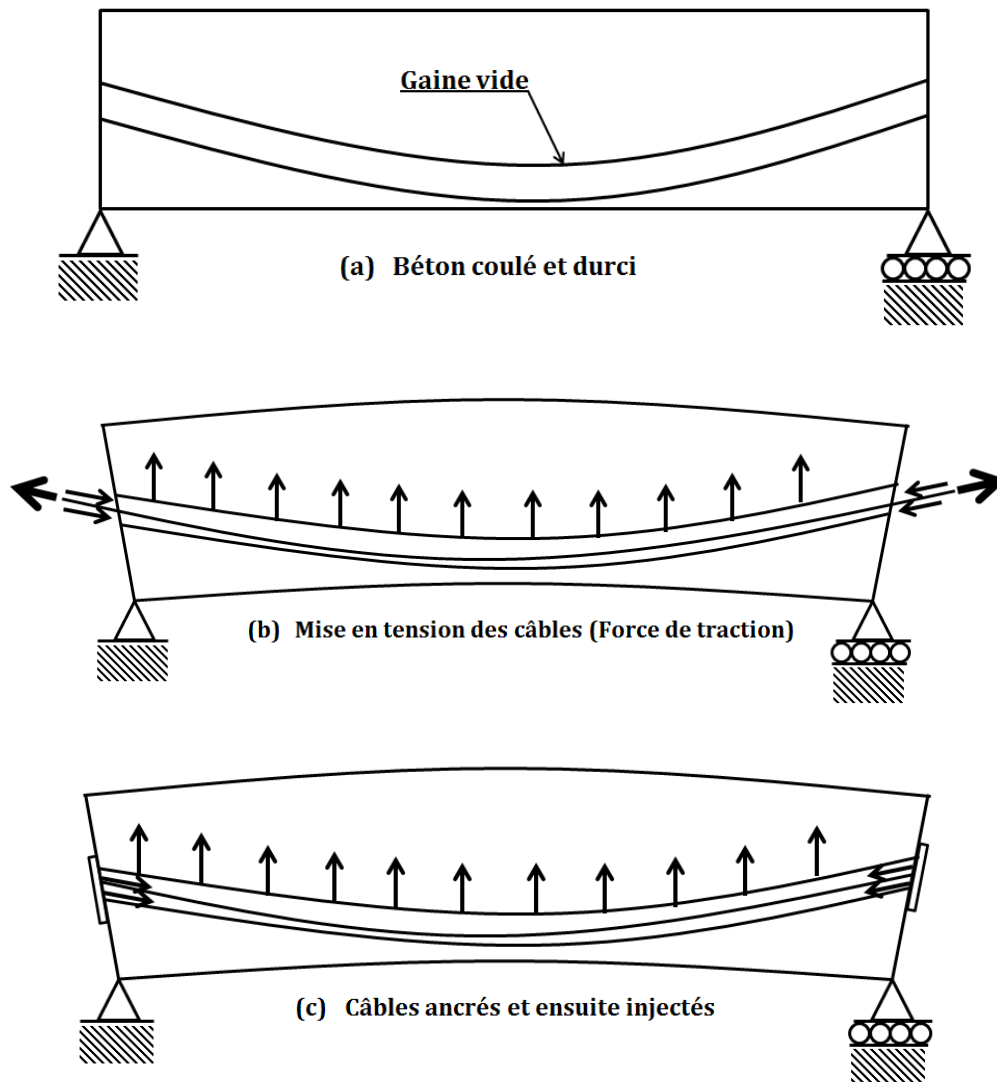


Figure 1.4. Procédure de post-tension.

Une fois les câbles ancrés et aucune contrainte supplémentaire n'est nécessaire, les gaines contenant les câbles sont souvent remplies de coulis de ciment ou mortier sous pression. De cette façon, les câbles sont liés au béton et sont plus efficaces pour contrôler les fissures et fournir une résistance ultime. Les câbles liés sont également moins susceptibles de se corroder ou d'entraîner des problèmes de sécurité si un câble est perdu ou endommagé ultérieurement. La majorité des éléments en béton précontraint fabriqués in situ sont post-tendus. Des vérins hydrauliques relativement légers et

portables font de la post-tension sur site une option attrayante. La post-tension est également utilisée pour la construction segmentaire de poutres de pont à grande portée. La précontrainte peut également être imposée sur des éléments nouveaux ou existants à l'aide de câbles externes ou de dispositifs tels que des vérins plats. Ces systèmes sont utiles pour les opérations de précontrainte temporaires, mais peuvent être sujets à des pertes élevées en fonction du temps.

- **Etapes de mise en œuvre de la précontrainte par post tension interne (Figure 1.5) :**

Dans les systèmes de précontrainte par post-tension, les gaines pour les câbles (ou torons) sont placées avec l'armature avant le coulage du béton. Par ailleurs, les câbles sont placés à l'intérieur des gaines sur toute la longueur de l'élément après le bétonnage. La gaine a pour rôle d'empêcher le contact entre le béton et les câbles pendant l'opération de la mise en tension.

Les différentes étapes de l'opération de post-tension se résument comme suit.

- A. Coulage du béton.**
- B. Mise en place des câbles.**
- C. Mise en place du massif d'ancrage et du vérin.**
- D. Mise en tension des câbles.**
- E. Découpe des câbles.**
- F. Injection de coulis dans les gaines**

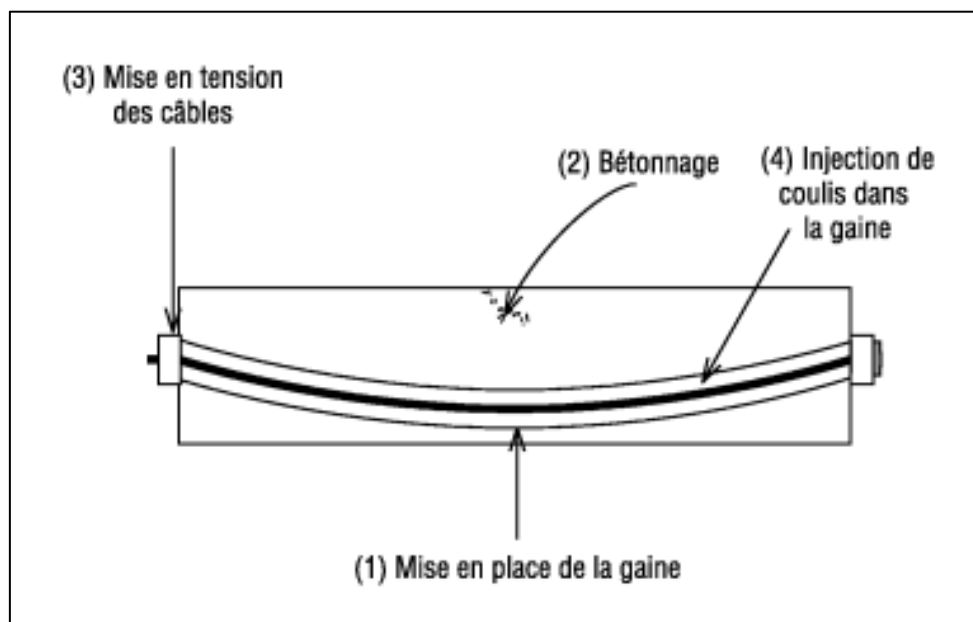


Figure 1.5. Procédure de mise en tension par post-tension

## 1.6. Procédés de précontrainte par post-tension

Les procédés de précontraintes les plus utilisés dans le monde sont : **Procédé Freyssinet** et **Procédé PAC**.

### 1.6.1. Procédé Freyssinet:

En 1908, l'Ingénieur **Eugène Freyssinet** avait fait édifier une arche expérimentale d'un pont de 50 mètres de portée et de 2 mètres de flèche dont les culées étaient reliées par un tirant en "béton précontraint" de 250 tonnes de force utile. Les câbles étaient constitués de 12 fils de 5mm de diamètre obtenus à partir de fils machine de 8mm de diamètre tréfilés et écrouis avec trempe au plomb (Figure 1.6). Actuellement, il existe d'autres dimensions des câbles tels que : de fils Ø5, Ø7 et Ø8 et de torons T13, T13S, T15 et T15S.

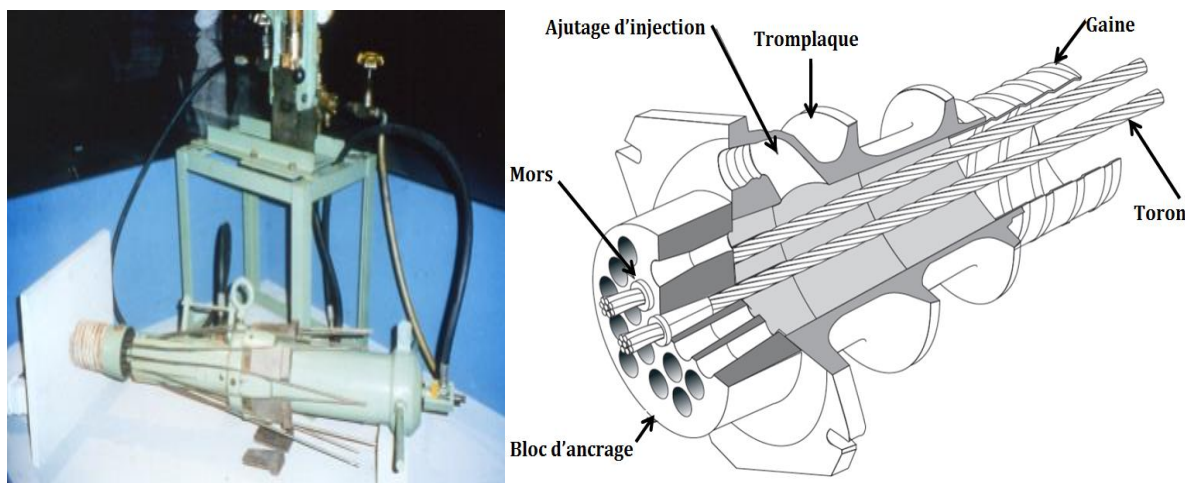


Figure 1.6. Système Freyssinet

### 1.6.2. Procédé PAC :

Le procédé de précontrainte PAC par post-tension permet la mise en compression du béton par câbles composés de torons parallèles logés dans des conduits étanches (gaines ondulées en feillard, tubes lisses en acier ou en matière plastique).

Tous les torons sont tendus simultanément et ancrés individuellement au moyen de clavettes à trois brins logées dans les trous coniques de la tête d'ancrage.

### 1.7. Comparaison entre les deux modes de précontrainte

Pré-tension	Post-tension
La précontrainte est réalisée en usine et convient donc aux travaux de construction préfabriqués.	La post-tension peut être réalisée en usine ainsi que sur le chantier.
Dans ce type de béton, les câbles de précontrainte appelés torons sont tendus avant de couler le béton, puis le béton est coulé en enfermant les câbles tendus.	Dans ce type de béton, les torons sont enfermés dans un conduit dans le moule, puis le béton est coulé. Le processus de mise en tension des torons est effectué une fois que le béton a atteint sa résistance suffisante.
De petites sections doivent être construites.	La taille d'un élément n'est pas limitée, les ponts à longue portée sont construits par post-tension.
Les éléments de pré-tension sont produits dans un moule.	Des câbles sont utilisés à la place des fils et des vérins sont utilisés pour l'étirement.
Le béton est précontraint avec des tendons avant d'être mis en place.	La précontrainte est effectuée une fois que le béton a atteint une résistance suffisante.
La pré-tension est préférée lorsque l'élément structurel est petit et facile à transporter.	La post-tension est préférée lorsque l'élément structurel est lourd.

### 1.8. Domaines d'application:

Voici les principales applications du béton précontraint.

#### 1.8.1. Construction de ponts :

Le béton précontraint a de nombreuses applications dans la construction des ponts. L'utilisation la plus courante est dans les ponts à poutres-caissons (Figure 1.7) en béton précontraint, où le béton est précontraint en usine avant d'être transporté sur le site du pont. Ce type de pont présente généralement une résistance élevée avec une durabilité



significative. Les poutres caissons se caractérisent par une portée importante par rapport aux autres types des ponts.



Figure 1.7. Pont à poutre caisson

Le béton précontraint est également utilisé dans la construction de ponts à haubans (Figure 1.8). Dans ce type de pont, la dalle de tablier en béton préfabriqué est soutenue par une série de câbles reliés à des pylônes. Les câbles sont précontraints en usine avant d'être installés sur le pont. Ce type de pont est très solide et peut couvrir de longues distances.

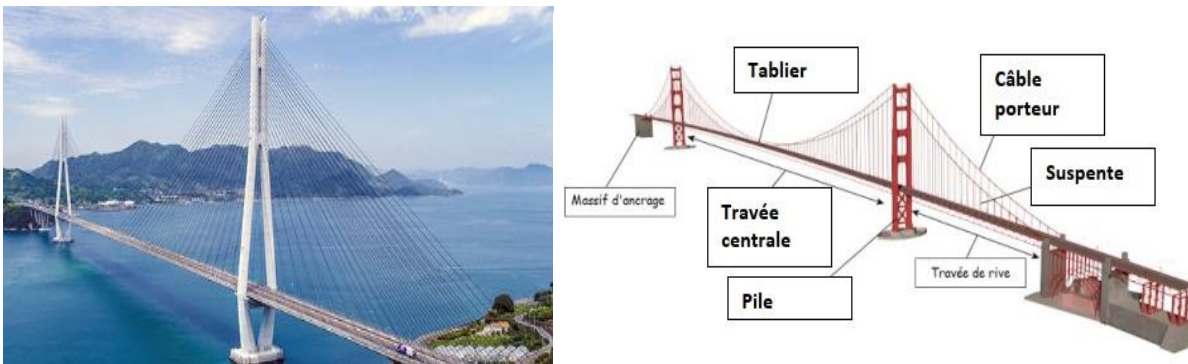


Figure 1.8. Ponts hauban

### 1.8.2. Construction de bâtiments :

Le béton précontraint est un matériau de construction couramment utilisé dans la construction de bâtiments (Figure 1.9). Ce type de béton est fabriqué en ajoutant de l'acier au mélange de béton, ce qui lui confère une résistance et une stabilité accrues. Le béton précontraint est souvent utilisé pour les poutres et les colonnes, ainsi que pour les dalles de plancher et de toit dans les bâtiments en béton précontraint. Il est également

couramment utilisé pour la fabrication de produits en béton préfabriqué tels que les panneaux muraux et les escaliers.



Figure 1.9. Structure en béton précontraint (Poteau-Poutre)

### 1.8.3. Construction de structures de stationnement :

Le béton précontraint est largement utilisé dans la construction de structures de stationnement en raison des avantages qu'il offre (Figure 1.10). Ces avantages comprennent la capacité de résister à la déflexion et au mouvement lors d'évènements sismiques, la capacité de résister à la corrosion et aux dégâts causés par le vent et l'eau. De plus, le béton précontraint peut fournir une fondation permanente à la structure, ce qui élimine le besoin d'entretien régulier.



Figure. 1.10. Plancher en béton précontraint de parking de stationnement

### 1.8.4. Construction de réservoirs de stockage :

Le béton précontraint est couramment utilisé dans la construction de réservoirs de stockage (Figure 1.11). L'avantage d'utiliser des réservoirs en béton précontraint est qu'ils peuvent être conçus pour résister à la pression interne du contenu du réservoir.

Cela permet d'obtenir une paroi plus légère et plus fine, ce qui réduit le poids total du réservoir. De plus, les réservoirs en béton précontraint peuvent être conçus pour résister aux forces externes, telles que le vent et les tremblements de terre, qui peuvent provoquer la défaillance d'un réservoir.



Figure 1.11. Réservoir en béton précontraint

#### **1.8.5. Voies ferrées :**

Des traverses en béton précontraint sont utilisées dans les voies ferrées (Figure 1.12). Le béton précontraint présente de nombreux avantages par rapport aux autres matériaux pour la construction de voies ferrées. Il est extrêmement solide et durable et est moins susceptible d'être endommagé par les intempéries ou d'autres facteurs environnementaux. Le béton précontraint est également moins susceptible d'être endommagé par le poids des trains qui passent dessus et peut être conçu pour minimiser les effets des vibrations.



Figure 1.12. Traverses en béton précontraint

#### 1.8.6. Égouts :

Le béton précontraint est un matériau idéal pour les égouts, car il est extrêmement solide et durable (Figure 1.13). Il peut résister aux pressions et aux charges élevées qui sont généralement exercées sur les réseaux d'égouts. De plus, le béton précontraint résiste à la corrosion et ne se dégrade pas avec le temps.



Figure 1.13. Egouts en béton précontraint

### 1.8.7. Stockage des céréales :

Le béton précontraint est un matériau utile pour la construction d'installations de silos de céréales (Figure 1.14). La résistance et la durabilité élevées du matériau le rendent idéal pour les structures qui doivent supporter le poids et les forces du stockage des céréales. Le béton précontraint peut être utilisé pour construire les murs, les sols et les plafonds des bâtiments en béton précontraint pour le stockage des céréales, ainsi que les structures de support des réservoirs de stockage des céréales.



Figure 1.14. Silos en béton précontraint

### 1.8.8. Lignes de transmission téléphonique et électrique :

Le béton précontraint est largement utilisé dans les lignes de transmission téléphonique et électrique en raison de sa résistance et de sa durabilité élevées (Figure 1.15). Le béton est capable de supporter les lourdes charges imposées par le poids des lignes de transmission et les forces générées par le mouvement des lignes.





Figure 1.15. Poteau de transmission électrique en béton précontraint

#### 1.8.9. Pieux en béton :

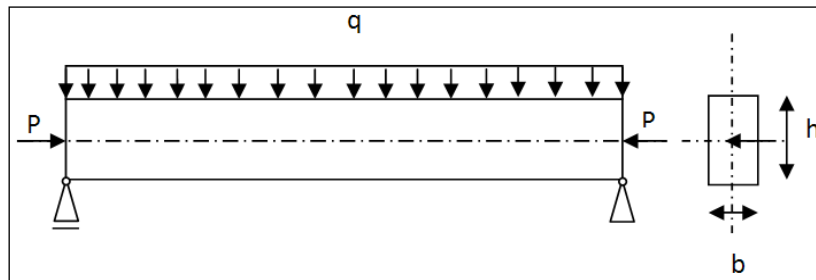
Le béton précontraint est souvent utilisé dans les pieux en béton, car il peut augmenter la capacité portante des pieux (Figure 1.16). La précontrainte du béton permet un transfert plus efficace des charges du béton vers les pieux, ce qui se traduit par une capacité portante plus élevée. De plus, le béton précontraint peut aider à prévenir les fissures et autres types de dommages qui peuvent survenir dans les pieux en béton. Les pieux centrifuges préfabriqués en béton précontraint (pieux PHC) sont fabriqués à partir de béton précontraint à hautes performances.



Figure 1.16. Pieux préfabriqués en béton précontraint

**1.9. Application :****1.9.1. Exercice 1 :**

Soit une poutre simplement appuyée de section rectangulaire (0.5, 1.00) m et une longueur de 8 m, soumise à une charge uniformément répartie  $q = 18 \text{ KN/m}$  et un effort de précontrainte  $P$  appliquée au centre du gravité de la poutre.

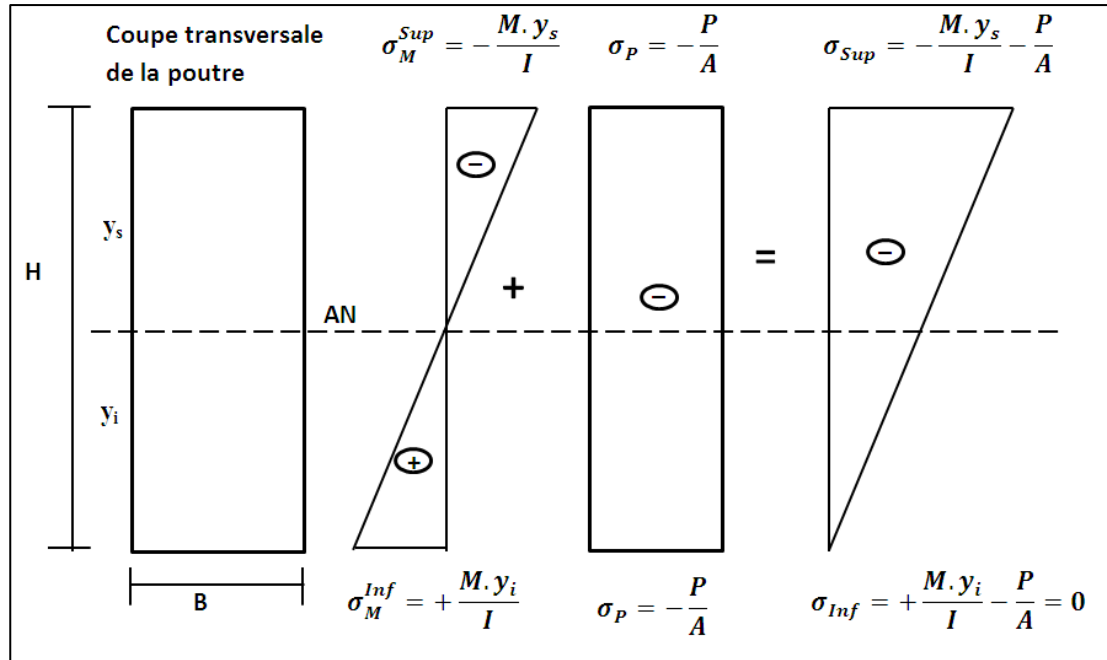


Pour une précontrainte totale, on demande de :

1. Calculer le moment maximum dû à la charge  $q$ .
2. Schématiser le diagramme des contraintes dues au chargement  $q$  et à la charge de la précontrainte  $P$ .
3. Déterminer la valeur de  $P$ .

**Solution :**

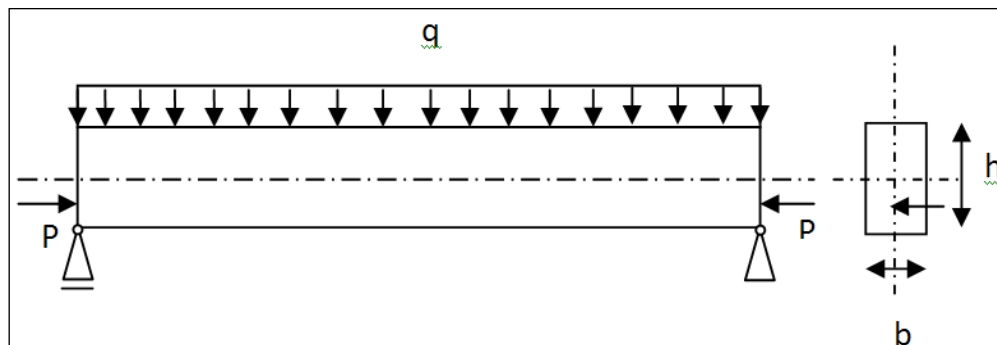
1.  $M_q = 144 \text{ KNm}$
2. Le signe - : Compression, le signe + : Traction



$$3. \quad P = \frac{M_q \cdot y_i}{I} \cdot A = 864 \text{ KN}$$

### 1.9.2. Exercice 2

Soit une poutre simplement appuyée de section rectangulaire (0.5, 1.00) m et une longueur de 8 m, soumise à une charge uniformément répartie  $q = 18 \text{ KN/m}$  et un effort de précontrainte excentrée  $P$  de «  $e = -0.25 \text{ m}$  ».



On demande de : (Précontrainte totale)

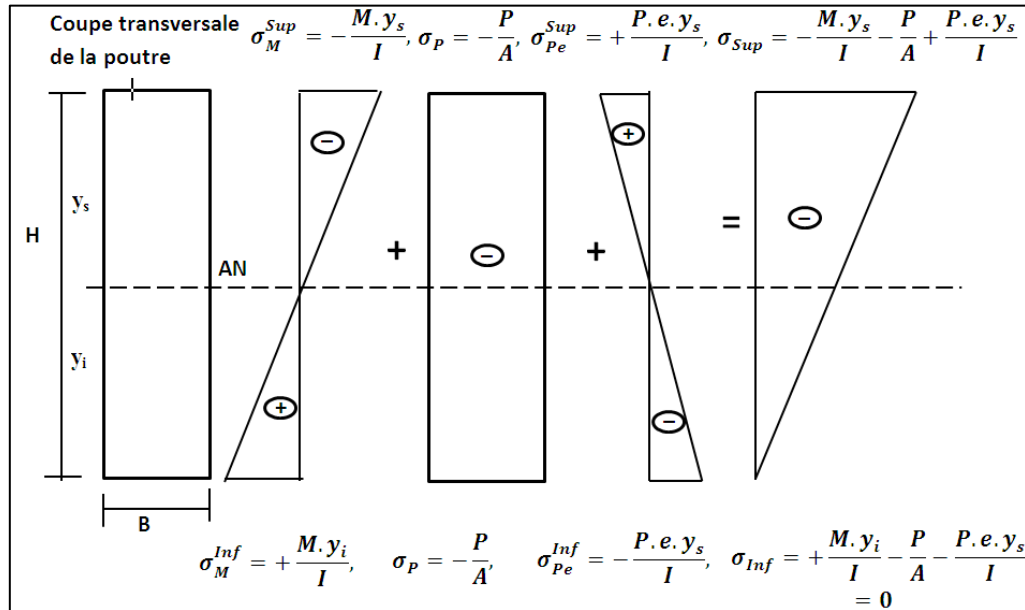
1. Calculer le moment maximum dû à la charge  $q$
2. Schématiser le diagramme des contraintes dues au chargement  $q$  et à la charge de la précontrainte  $P$
3. Déterminer la valeur de  $P$ .



4. Comparer entre la force P de l'exercice 1 et l'exercice 2

**Solution:**

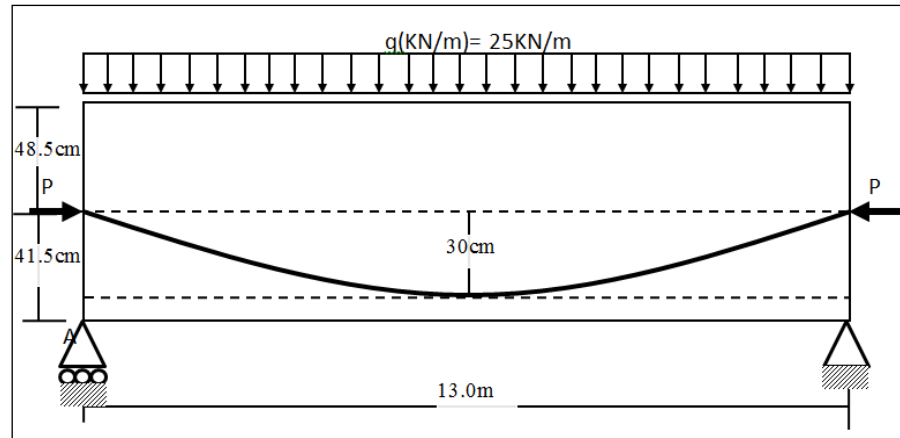
1.  $M_q = 144 \text{ kNm}$
2. Le signe - : Compression, le signe + : Traction



3.  $P = \frac{M_q \cdot y_i}{I \left( \frac{1}{A} + \frac{e \cdot y_i}{I} \right)} = 345.6 \text{ kN}$
4. Comparaison: La force P2 est inférieure à la force P1, cette différence est due à la présence de l'excentricité e, le pourcentage de diminution de la force de précontrainte est de 60%.

**1.9. 3.Exercice 3**

Soit une poutre simplement appuyée, de section en I ( $A = 0.22 \text{ m}^2$ ,  $I = 0.02 \text{ m}^4$ ), soumise au chargement uniformément réparti  $Q = 25 \text{ kN/m}$ . la poutre a subi une force de précontrainte  $P = 1287 \text{ kN}$  appliquée en deux extrémités (Figure ci-dessous) :



On demande de :

1. Calculer les contraintes de traction et de compression dues à la charge  $q$
2. Calculer la contrainte due à la charge de précontrainte  $P$
3. Calculer la contrainte due à l'excentricité de la charge de précontrainte  $P$
4. Présenter le diagramme des contraintes.

**Solution :**

1. Calcul des contraintes de traction et de compression dues à la charge  $Q$

$$M_Q = \frac{QL^2}{8} = 528,125 \text{ KNm}$$

- **Contrainte de compression**

$$\sigma_{M_Q}^{sup} = -\frac{My_{sup}}{I} = -\frac{528,125 \cdot 10^6 \cdot 485}{0,2 \cdot 10^{12}} = -12.807 \text{ MPa}$$

- **Contrainte de traction**

$$\sigma_{M_Q}^{inf} = +\frac{My_{inf}}{I} = +\frac{528,125 \cdot 10^6 \cdot 415}{0,2 \cdot 10^{12}} = +10.958 \text{ MPa}$$

2. Calcul des contraintes dues à la force de précontrainte  $P$

$$\sigma_P^{sup,inf} = -\frac{P}{A} = -\frac{1287 \cdot 10^3}{220 \cdot 10^3} = -5.85 \text{ MPa}$$

3. Calcul des contraintes dues à l'excentricité de la force de précontrainte  $P$

- **Contrainte de compression**

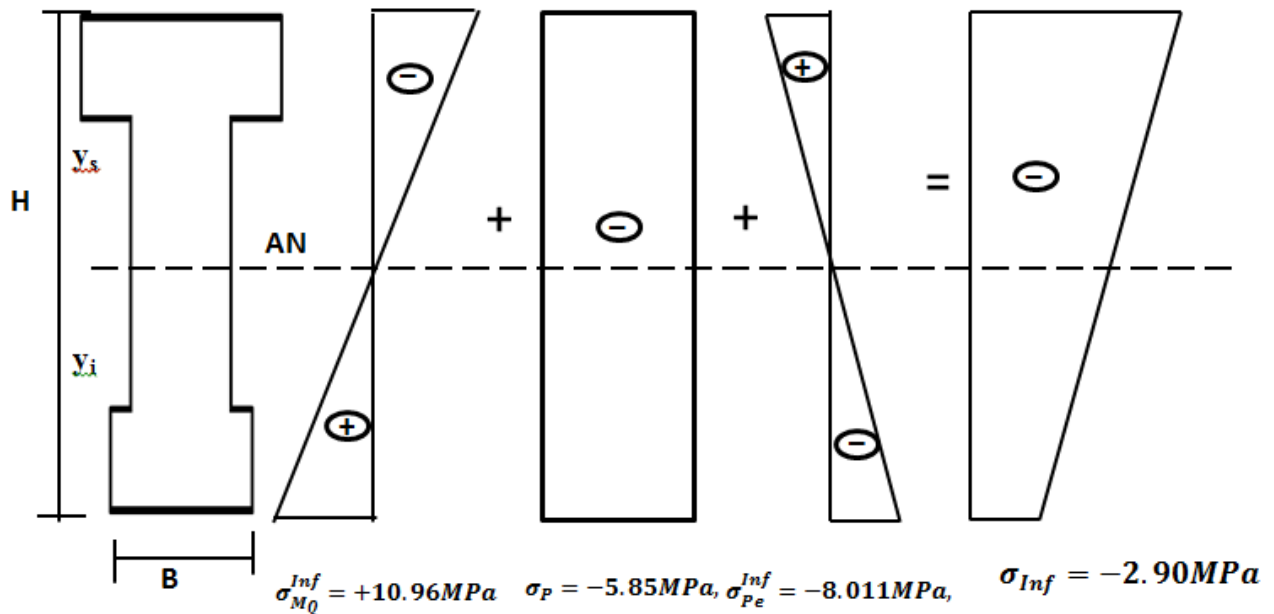
$$\sigma_{Pe}^{inf} = -\frac{P \cdot e \cdot y_{inf}}{I} = -\frac{1287 \cdot 10^3 \cdot 300 \cdot 415}{0,2 \cdot 10^{12}} = -8.0115 \text{ MPa}$$

- **Contrainte de traction**

$$\sigma_{M_Q}^{Inf} = + \frac{P \cdot e \cdot y_{Sup}}{I} = + \frac{1287 \cdot 10^3 \cdot 300 \cdot 485}{0,2 \cdot 10^{12}} = +9.3629 \text{ MPa}$$

#### 4. Présentation des diagrammes des contraintes :

Coupe transversale  $\sigma_{M_Q}^{Sup} = -12.81 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_P = -5.85 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{P_e}^{Sup} = +9.36 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{Sup} = -9.29 \text{ MPa}$



#### 1.9.4. Exercice 4

Soit une poutre simplement appuyée de section rectangulaire (40x120) cm<sup>2</sup> et une longueur de 10 m (Figure ci-dessous). La force de précontrainte P est appliquée :

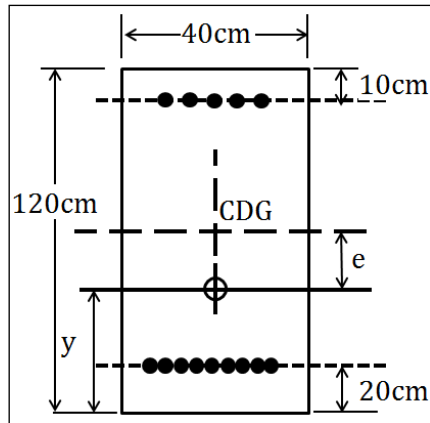
- Sur 20 câbles de diamètre 5mm situés 20 cm par rapport à la fibre extrême inférieure de la poutre
- Et 5 câbles de diamètre 5 mm situés à 10 cm par rapport à la fibre extrême supérieure.

Les câbles de précontraintes ont subi une contrainte de traction de l'environ de 890 MPa.

On demande de calculer et schématiser les contraintes agissantes sur la poutre.

On donne : - La charge d'exploitation : Q = 65 kN/m.

- La densité du béton :  $\rho = 25 \text{ kN/m}^3$ .

**Solution :**

Calcul des contraintes agissantes sur la poutre

- Calcul de la position d'application de la force de précontrainte P par rapport à la fibre extrême inférieure y

$$y = \left( \frac{(20 * 20) + (5 * (120 - 10))}{(20 + 5)} \right) = 38 \text{ cm}$$

- Calcul de l'excentricité e

$$e = \frac{120}{2} - 38 = 22 \text{ cm}$$

- Calcul de la force de précontrainte P appliqué sur la poutre :

$$P = 890 * 25 * \frac{5^2 * \pi}{4} = 436,65 \text{ KN}$$

- Calcul de la section de la poutre :

$$A = 120 * 40 = 0,48 \text{ m}^2$$

- Calcul de moment d'inertie :

$$I = \frac{400 * 1200^3}{12} = 0,0576 \text{ m}^4$$

- Calcul du poids propre de la poutre G

$$G = \rho * A = 25 * 0,48 = 12 \text{ KN/m}$$

- Calcul du moment dû au poids propre  $M_G$

$$M_G = \frac{G * L^2}{8} = \frac{12 * 6^2}{8} = 150 \text{ KNm}$$

- Calcul de la contrainte due au poids propre :

-

- **Contrainte de compression**

$$\sigma_{M_G}^{Sup} = -\frac{M_G y_{Sup}}{I} = -\frac{150 * 10^6 * \left(\frac{1200}{2}\right)}{0,0576 * 10^{12}} = -1.5625 MPa$$

- **Contrainte de traction**

$$\sigma_{M_G}^{Inf} = +\frac{M_G y_{Inf}}{I} = +\frac{150 * 10^6 * \left(\frac{1200}{2}\right)}{0,0576 * 10^{12}} = +1.5625 MPa$$

- Calcul du moment dû à la charge Q :  $M_Q$

$$M_Q = \frac{Q * L^2}{8} = \frac{65 * 6^2}{8} = 813 KNm$$

- Calcul des contraintes de traction et de compression dues à la charge Q

- **Contrainte de compression**

$$\sigma_{M_Q}^{Sup} = -\frac{M_Q y_{Sup}}{I} = -\frac{813 * 10^6 * \left(\frac{1200}{2}\right)}{0,0576 * 10^{12}} = -8,4635 MPa$$

- **Contrainte de traction**

$$\sigma_{M_Q}^{Inf} = +\frac{M_Q y_{Inf}}{I} = +\frac{813 * 10^6 * \left(\frac{1200}{2}\right)}{0,0576 * 10^{12}} = +8,4635 MPa$$

- Calcul des contraintes dues à la force de précontrainte P

$$\sigma_P^{Sup,inf} = -\frac{P}{A} = -\frac{436,65 * 10^3}{0,48 * 10^6} = -0.9097 MPa$$

- Calcul des contraintes dues à l'excentricité de la force de précontrainte P

- **Contrainte de compression**

$$\sigma_{P_e}^{Inf} = -\frac{P \cdot e \cdot y_{Inf}}{I} = -\frac{436,65 * 10^3 \cdot 220 * \left(\frac{1200}{2}\right)}{0,0576 * 10^{12}} = -1.00 MPa$$

- **Contrainte de traction**

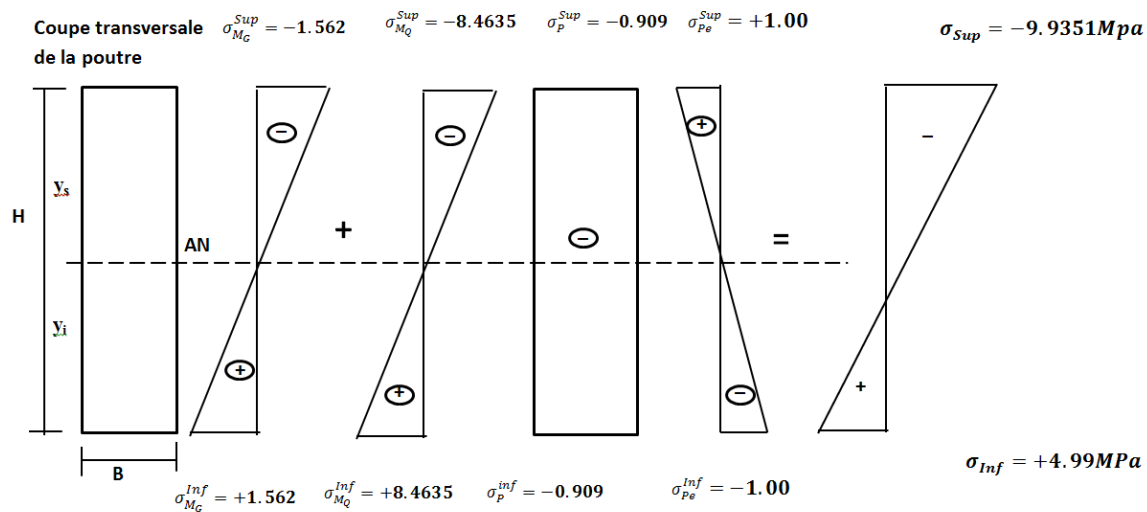
$$\sigma_{P_e}^{Sup} = +\frac{P \cdot e \cdot y_{Sup}}{I} = \frac{436,65 \cdot 10^3 \cdot 220 * \left(\frac{1200}{2}\right)}{0,0576 * 10^{12}} = +1.00 MPa$$

- Contraintes totales de compression et de traction :

$$\begin{aligned} \sigma_{Total}^{Inf} &= \sigma_P^{Inf} + \sigma_{P_e}^{Inf} + \sigma_{M_G}^{Inf} + \sigma_{M_Q}^{Inf} = -0.9097 - 1.00 + 1.5625 + 8.4635 \\ &= +4.99 MPa \end{aligned}$$

$$\sigma_{Total}^{Sup} = \sigma_P^{Sup} + \sigma_{Pe}^{Sup} + \sigma_{M_G}^{Sup} + \sigma_{M_Q}^{Sup} = -0.9097 + 1.00 - 1.5625 - 8.4635$$

$$= -9.9351 MPa$$



# Chapitre 2 : Matériaux utilisés en béton précontraint

## 2.1. Introduction :

Le comportement d'un élément en béton précontraint sur toute la plage de charges dépend des propriétés et du comportement des matériaux qui le composent. Afin de satisfaire à l'objectif de conception d'une résistance structurelle adéquate, les résistances ultimes du béton et de l'acier doivent être connues. De plus, les facteurs affectant la résistance du matériau et le comportement non linéaire de chaque matériau dans la plage de surcharge doivent être pris en compte. Afin de vérifier l'aptitude au service, les propriétés instantanées et dépendantes du temps du béton et de l'acier à des niveaux de contrainte en service typiques sont nécessaires.

L'objectif de ce chapitre est de présenter un aperçu général du comportement des matériaux et de fournir suffisamment d'informations quantitatives sur les propriétés des matériaux pour mener à bien la plupart des tâches de conception.

## 2.2. Le béton :

Le béton pour les éléments et les structures précontraintes ne diffère principalement pas de celui utilisé pour le béton armé, mais étant soumis d'habitude à des efforts élevés, certaines qualités lui sont demandées. Parmi celles-ci, nous citons :

Le béton utilisé dans les éléments précontraints est généralement plus résistant que celui utilisé pour le béton armé. Les différences de module d'élasticité, de capacité de déformation et de résistance doivent être prises en compte dans la conception, et les caractéristiques dépendantes du temps revêtent une importance cruciale.

- **Résistances mécaniques élevées**

Elles conditionnent la grandeur de la force de précontrainte et le comportement du béton à l'action des charges statiques et dynamiques.

- **Module d'élasticité élevé**

Le transfert des efforts des armatures tendues au béton provoque une déformation élastique de celui-ci et implicitement une réduction de la force de précontrainte par le

raccourcissement des armatures. Pour réduire cette perte de tension dans l'armature tendue, le béton doit avoir des déformations très petites.

- **Déformation due au retrait et aux fluages aussi petits que possible**

La force de précontrainte est réduite dans le temps grâce au béton. Une bonne composition s'impose, surtout le rapport  $E/C$ .

- **Béton compact et sans matières agressives**

Le béton constitue, surtout pour les éléments prétendus, le principal matériau de protection des armatures tendues contre la corrosion

- **Une bonne maniabilité**

Dans le but de permettre le remplissage correct de toutes les parties des modules et surtout les zones à ferrailage très dense.

### 2.2.1. Principales caractéristiques du béton

#### a. Résistance caractéristique en compression

Un béton est défini par la valeur de sa résistance à la compression à l'âge de 28 jours. Celle-ci notée  $f_{c28}$  est déterminée à partir d'essais normalisés sur cylindres 16x32 cm

Pour un nombre de jours  $j < 28$ , la résistance  $f_{cj}$  des bétons suit les lois données par les règles de BAEL et BPEL :

$$\text{Bétons de résistance courante : } f_{cj} = \frac{j}{4.76 + 0.83j} f_{c28} \text{ pour } f_{c28} \leq 40 \text{ MPa} \quad (\text{Eq.2.1})$$

$$\text{Bétons de haute résistance : } f_{cj} = \frac{j}{1.4 + 0.95j} f_{c28} \text{ pour } f_{c28} > 40 \text{ MPa} \quad (\text{Eq.2.2})$$

$$\text{Pour } j \geq 28 \rightarrow f_{cj} = 1.1 f_{c28} \quad (\text{Eq.2.3})$$

#### b. Résistances caractéristiques à la traction :

La résistance caractéristique à la traction  $f_{tj}$  du béton à  $j$  jours est définie par :

$$f_{cj} = 0.6 + 0.06 f_{cj} \quad (\text{Eq.2. 4})$$

Avec,  $f_{cj}$  est la résistance caractéristique à la compression à  $j$  jours exprimée en MPa.



**c. Déformation instantanée****• Déformation longitudinale**

A défaut de résultats expérimentaux probants, on adopte pour le module de déformation longitudinale instantanée du béton  $E_{ij}$  une valeur conventionnelle égale à :

$$E_{ij} = 11000 f_{cj}^{\frac{1}{3}} (MPa) \quad (\text{Eq.2.5})$$

Le module de déformation longitudinale différée  $E_{vj}$  est donné par :

$$E_{ij} = 3700 f_{cj}^{\frac{1}{3}} (MPa) \quad (\text{Eq.2.6})$$

**• Déformation transversale**

$\mu = 0.2$  en zones non fissurées

$\mu = 0$  en zones fissurées

**• Diagramme contrainte-déformation**

Dans les calculs aux ELU, lorsqu'on n'a pas besoin d'une évaluation précise des déformations, on peut adopter le diagramme parabole-rectangle (Fig. 2.1).

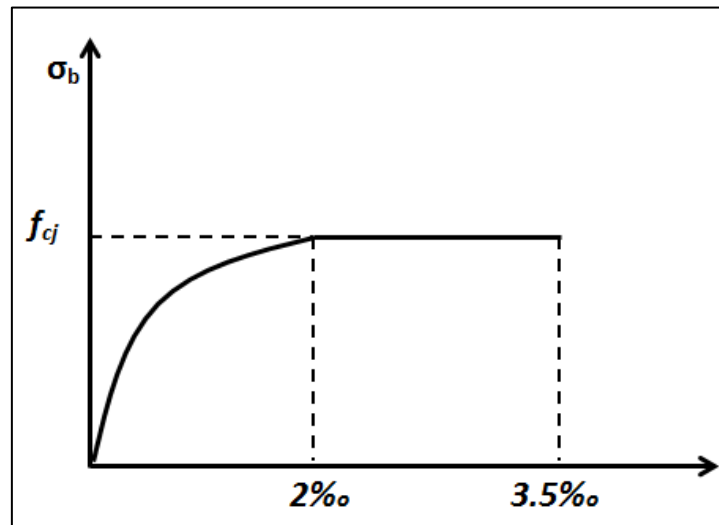


Figure. 2.1. Diagramme caractéristique contrainte déformation du béton.

La résistance de calcul du béton est déterminée par la relation suivante :

$$f_{bc} = 0.85 \cdot \frac{f_{cj}}{\theta \cdot \gamma_b} \quad (\text{Eq.2.7})$$

$\gamma_b$  : le coefficient de sécurité égale à 1,5 (cas courant) et 1,15 (cas accidentel).

$\theta$ : Coefficient dépendant de la durée d'application de la charge avec :

$\theta = 1$  si la durée > 2h.

$\theta = 0.9$  si : 24 h la durée 1h.

$\theta = 0.85$  si : la durée 1h.

#### d. Déformation différée (retrait, fluage)

- **Le retrait :**

Le retrait est un phénomène de raccourcissement différé du principalement au départ de l'eau libre interne. Le retrait final dépend de plusieurs facteurs :

- De la composition du béton (fonction croissante du rapport E/C).
- De l'hygrométrie  $\phi$  du milieu ambiant.
- Des dimensions transversales de la pièce.

Dans les conditions climatiques de l'Algérie, on admet souvent, pour  $\varepsilon_r(t)$ , les valeurs forfaitaires suivantes : (Carte de zonage climatique de l'Algérie, CBA 93)

- $2 \times 10^{-4}$  en climat humide (Zone A)
- $3 \times 10^{-4}$  en climat tempéré sec (Zone B)
- $4 \times 10^{-4}$  en climat chaud et sec (Zones B, C et D1)
- $5 \times 10^{-4}$  en climat très sec ou désertique (Zones D2 et D3)

La valeur du retrait en fonction du temps peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\varepsilon_r(t) = \varepsilon_r \cdot r(t) \quad (\text{Eq.2.8})$$

Ou  $\varepsilon_r$  et le retrait final du béton

Et  $r(t)$  est une fonction du temps variant de 0 à 1 quand le temps  $t$  varie de 0 l'infinie à partir de la date de bétonnage.

$$r(t) = \frac{t}{t + 9r_m} \quad (\text{Eq.2.9})$$

$t$ : l'âge du béton, en jour

$r_m$  : le rayon moyen de la pièce (cm) (Figure. 2.2)

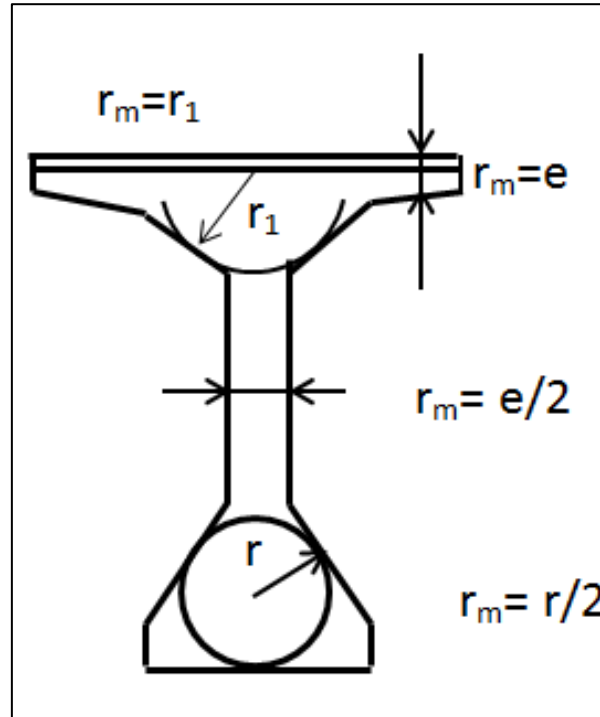


Figure. 2.2. Pièce pour mesure de retrait

- **Fluage**

Le fluage du béton est une déformation à long terme sous une contrainte ou une charge constante. Le taux d'augmentation de la déformation est rapide au début, mais diminue avec le temps jusqu'à ce qu'une valeur constante soit approchée asymptotiquement.

La déformation de fluage du béton a été constatée expérimentalement comme dépendant non seulement de la température, mais aussi des proportions du mélange, de l'humidité, des conditions de durcissement et de l'âge du béton lorsqu'il est chargé pour la première fois.

La déformation différée est environ 2 fois la déformation instantanée (Figure 2.3).

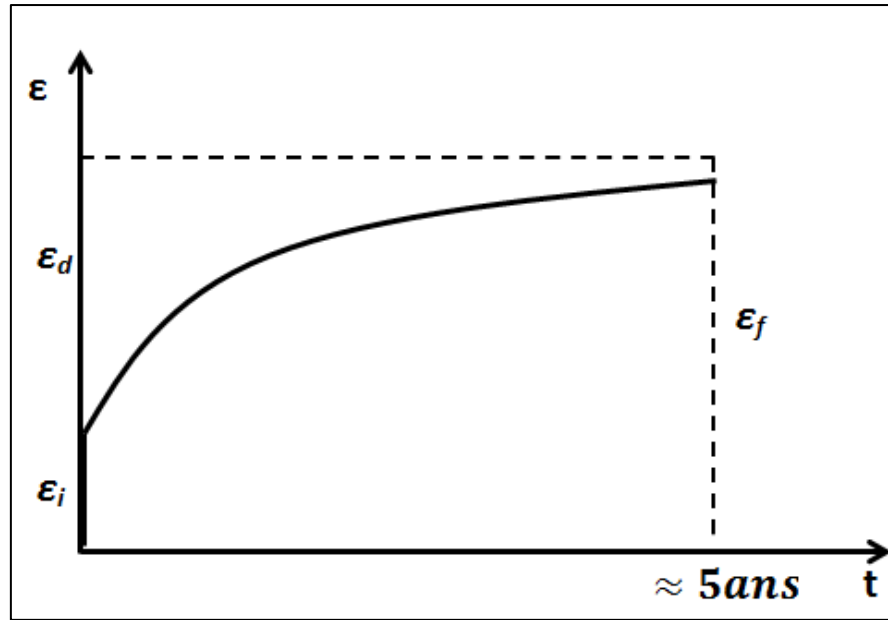


Figure. 2.3. Courbe de déformation de fluage en fonction du temps

Il est important de noter que les déformations du fluage croissent proportionnellement aux efforts si ceux-ci ne dépassent pas le domaine élastique, domaine dans lequel on considère que les déformations du fluage sont linéaires. Après l'apparition des microfissures et l'entrée dans le domaine plastique, le fluage croît plus intensément que dans le domaine élastique, il devient non linéaire.

La déformation de fluage à l'instant  $t$  d'un béton soumis à l'âge  $j = t_1 - t_0$  à une contrainte constante  $\sigma_1$ , est exprimée par la formule:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{ic} k_f (t_1 - t_0) f(t - t_1) \quad (\text{Eq. 2.10})$$

Avec :  $t_0$  : date du bétonnage,  $t_1$  : date de mise en charge.

$\varepsilon_{ic} = \frac{\sigma_1}{E_{t28}}$  est la déformation conventionnelle instantanée sous l'effet de la contrainte  $\sigma_1$ .

$k_f$  : Est le coefficient de fluage, qui dépend notamment de l'âge ( $t_1 - t_0$ ) du béton au moment

où il subit la contrainte  $\sigma_1$ , et  $f(t - t_1)$  une fonction de la durée du chargement ( $t - t_1$ ), exprimée en jours, qui varie de 0 à 1 quand cette durée varie de 0 à l'infini.

On peut également mettre  $\varepsilon_f$  sous la forme :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_i \phi(t_1 - t_0) f(t - t_1) \quad (\text{E. 2.11})$$

Où  $\varepsilon_i$  : Est la déformation réelle instantanée :  $\varepsilon_i = \frac{\sigma_1}{E_{t28}}$

$\Phi = k_f E_{ij} / E_{t28}$  : est le rapport entre la déformation finale de fluage et la déformation réelle instantanée. Dans les cas courants, on peut prendre :

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_1}{E_{t28}} \phi f(t - t_1) \quad (\text{Eq. 2.12})$$

La loi d'évolution de fluage  $f(t - t_1)$  est donnée par la formule :

$$f(t - t_1) = \frac{\sqrt{(t - t_1)}}{\sqrt{(t - t_1)} + 5\sqrt{r_{mf}}} \quad (\text{Eq. 2.13})$$

Avec :  $t(j)$  est l'âge du béton,  $t_1(j)$  : date de mise en charge.  $r_m$  (cm) : rayon moyen.

### 2.3. Les armatures de précontraintes

Dans les éléments en béton précontraint, l'acier à haute résistance utilisé se présente sous forme de fils, de barres ou de torons. Cette résistance accrue à la traction est principalement obtenue par une teneur en carbone légèrement supérieure à celle de l'acier doux. La composition typique de cet acier comprend :

- **0,6 à 0,85 % de carbone** (pour renforcer la dureté),
- **0,7 à 1 % de manganèse** (améliorant la trempabilité),
- **0,05 % maximum de soufre et de phosphore** (limitant les impuretés),
- des traces de silicium (favorisant la résistance).

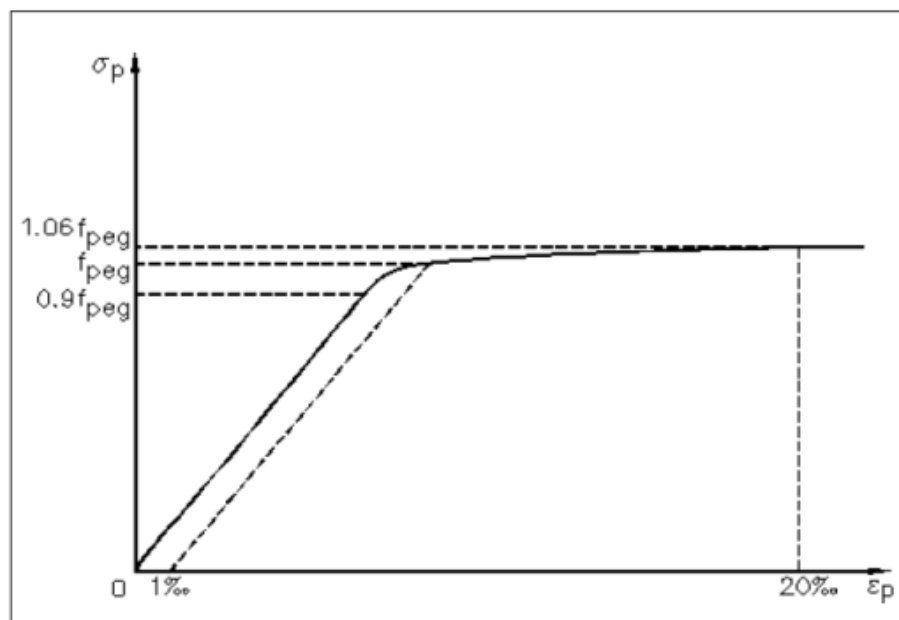
La fabrication débute par le laminage à froid de lingots d'acier haute teneur en carbone, transformés en barres. Ces dernières sont ensuite étirées à travers une série de matrices, un procédé qui réduit leur diamètre tout en augmentant significativement leur résistance à la traction.

#### 2.3.1. Diagramme contraintes-déformations :

Le BPEL propose pour les fils tréfilés et les torons le diagramme contraintes-déformations présenté sur la Figure 2.4. Dans ce diagramme, et en l'absence d'un véritable palier plastique, il est très difficile de déterminer une limite d'élasticité pour ces aciers durs de précontrainte. Pour cela, cette limite a été définie conventionnellement comme étant le point d'intersection de la courbe contraintes-déformations et d'une droite parallèle à la droite d'élasticité décalée de 1‰. A partir de ce diagramme, on admet que :

$$\text{Pour } \sigma_p > 0.9f_{peg} : \varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 100 \left( \frac{\sigma_p \gamma_p}{f_{peg}} - 0.9 \right)^5 \quad (\text{Eq. 2.14})$$

$$\text{Pour } 0 < \sigma_p < 0.9f_{peg} : \varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} \quad (\text{Eq. 2.15})$$



**Figure 2.4:** Diagramme contraintes-déformations pour les fils tréfilés et les torons.

Pour les fils trempés et les barres (Figure. 2. 5), on admet que :

$$\varepsilon_p < \frac{f_{peg}}{E_p} \text{ donc : } \sigma_p = E_p \cdot \varepsilon_p \quad (\text{Eq. 2. 15})$$

$$\varepsilon_p \geq \frac{f_{peg}}{E_p} \text{ donc : } \sigma_p = f_{peg} \quad (\text{Eq. 2. 16})$$

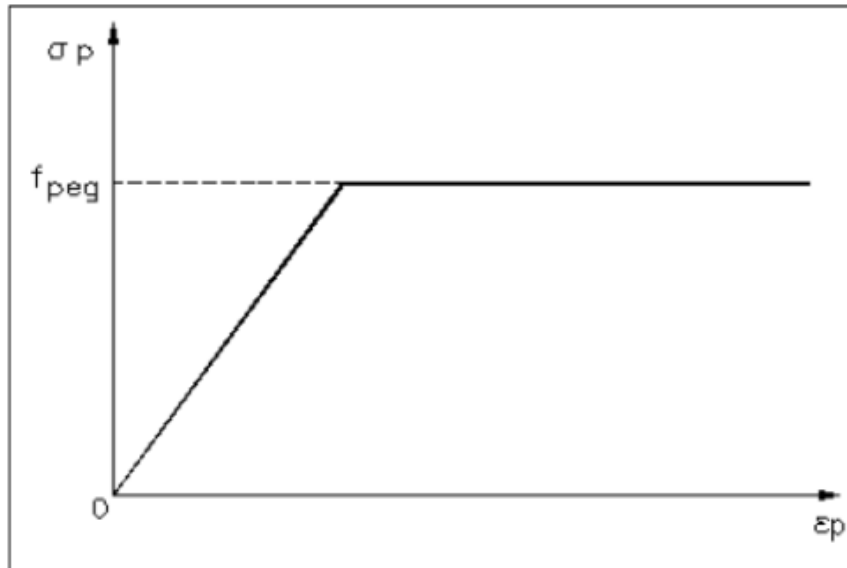


Figure 2.5: Diagramme contraintes-déformations pour les fils trempés et les barres.

### 2.3.2. Types des armatures utilisés dans la précontrainte

#### 2.3.2. 1. Les fils :

Les fils étirés à froid subissent un **traitement thermique de relaxation des contraintes** (appelé *trempe*), réalisé à des températures comprises entre **150 et 420°C**, pour renforcer leurs propriétés mécaniques. Ce procédé augmente notablement leur **résistance à la traction**, tout en réduisant les tensions internes.

Ces fils sont disponibles en **diamètres nominaux standardisés** :

- **4, 5, 6, 7, 8, 10 et 12,2 mm,**
- avec une **résistance à la rupture** atteignant **1 700 à 1 800 MPa** (Figure 2.6).



Figure. 2.6. Fils pour béton précontraint

### 2.3.2. 2. Les barres:

Les barres en acier à haute résistance couramment utilisées en précontrainte sont fabriquées dans des dimensions nominales de 12.5, 16, 20, 22, 26, 32 et 36 mm de diamètre avec une longueur variée de 16m à 18m (Figure. 2.7). La résistance à la traction des barres varie sensiblement en fonction du diamètre.



Figure. 2. 7. Barres utilisées dans la précontrainte

### 2.3.2. 3. Les torons :

Le toron est un assemblage de fils enroulés en spirale autour d'un fil central ou sur eux-mêmes, stabilisé par un procédé industriel appelé toronnage (Figure 2.8). Le nombre de fils constituant un toron est déterminé par la formule :

$$N = 1 + 3n(n + 1) \quad (\text{Eq. 2. 17})$$



où  $n$  désigne le nombre de couches supplémentaires autour du noyau central.

Exemples de structures de torons :

- Toron à 3 fils : 1 fil central
- Toron à 7 fils : 1 fil central + 6 fils en couche intermédiaire
- Toron à 19 fils : 1 fil central + 6 fils intermédiaires + 12 fils périphériques

Les fils et torons sont généralement assemblés pour former des câbles.

Qualités requises pour les aciers de précontrainte :

- Allongement significatif : L'armature doit pouvoir s'allonger bien plus que les déformations du béton (retrait, fluage) pour maintenir durablement la force de précontrainte. Sans cela, les pertes de tension pourraient réduire, voire annuler, la compression du béton.
- Rugosité adéquate : Une bonne adhérence entre l'acier et le béton est essentielle pour transmettre efficacement les efforts, notamment dans le cas de la pré-tension.



Figure. 2. 8. Torons pour le béton précontraint

## 2.4. Applications

### 2.4.1. Exercice 1 :

Une poutre en béton soumise à une force de précontrainte  $P = 100 \text{ kN}$  appliquée lorsque la résistance à la compression atteint une valeur  $25 \text{ MPa}$ .

Pour une résistance du béton  $f_{c28} = 35 \text{ MPa}$ , on demande de :

1. Déterminer le nombre des heures nécessaire afin d'appliquer la force  $P$
2. Déterminer la résistance à la compression pour  $j = 3, 7$  et  $90$  jours
3. Déterminer la résistance à la traction pour  $j = 3, 7$  et  $90$  jours

4. Déterminer le module de déformation longitudinal instantané pour  $j = 3, 7$  et 90 jours

**Solution :**

1. Détermination de nombre des heures :

On utilise l'équation (Eq.2.1) du chapitre 2

$$f_{cj} = \frac{j}{4.76 + 0.83j} f_{c28} \text{ pour } f_{c28} \leq 40 \text{ MPa}$$

Donc :  $j=8.35$  jours  $\approx 9$  jours = 200.42 heures

2. Détermination de la résistance à la compression

- Pour  $j=3$  jours :

$$f_{c3} = \frac{j}{4.76 + 0.83 \cdot 3} f_{c28} = 14.48 \text{ MPa}$$

- Pour  $j=7$  jours :

$$f_{c7} = \frac{j}{4.76 + 0.83 \cdot 7} f_{c28} = 23.18 \text{ MPa}$$

- Pour  $j=90$  jours :

$$f_{c90} = f_{c28} = 35 \text{ MPa}$$

3. Détermination de la résistance à la traction pour

- Pour  $j=3$  jours :
- on utilise l'équation 2.4 du chapitre 2

$$f_{t3} = 0.6 + 0.06 f_{c3} = 1.47 \text{ MPa}$$

- Pour  $j=7$  jours :

$$f_{t7} = 0.6 + 0.06 f_{c7} = 1.99 \text{ MPa}$$

- Pour  $j=90$  jours :

$$f_{t90} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 2.7 \text{ MPa}$$

4. Détermination module de déformation longitudinal instantané pour

- Pour  $j=3$  jours :

On utilise l'équation 2.5 du chapitre 2  $E_{ij} = 11000 f_{cj}^{\frac{1}{3}} (MPa)$

$$E_{i3} = 26812.9 MPa$$

- Pour j=7 jours :

$$E_{i3} = 31363.4 MPa$$

- Pour j=90 jours :

$$E_{i3} = 35981.73 MPa$$

#### 2.4. 2. Exercice 2 :

Une poutre en béton de section rectangulaire ( $250 \times 500 \text{ mm}^2$ ) est soumise à une précontrainte centrée (le centre de gravité des armatures coïncide avec celui de la section du béton). Deux cas sont étudiés :

##### 1. Cas 1 : Acier doux

Contrainte de traction dans l'acier lors de la mise en tension :  $\sigma_{s_0} = 300 \text{ MPa}$

##### 2. Cas 2 : Acier à haute résistance

Contrainte de traction dans l'acier lors de la mise en tension :  $\sigma_{p_0} = 1500 \text{ MPa}$

Dans les deux cas, la force de précontrainte initiale ( $P_0$ ) est de 400 kN.

##### Données :

- Module d'élasticité de l'acier (acier doux et acier haute résistance) :  $E_p = E_s = 200\,000 \text{ MPa}$
- Module d'élasticité du béton :  $E_b = 27\,500 \text{ MPa}$
- La déformation due au retrait et au fluage est de :  $\varepsilon_d = 5 \cdot 10^{-4}$ .

##### Questions :

1. Calculer la déformation unitaire résiduelle (allongement relatif) dans l'acier après raccourcissement du béton.
2. Déterminer la force de précontrainte résiduelle ( $P$ ) après prise en compte du raccourcissement du béton pour chaque type d'acier.

**Solution :**

## 1. Données et hypothèses :

- **Section béton** :  $A_b = 250 \times 400 = 125000 \text{ mm}^2$
- **Force de précontrainte initiale** :  $P_0 = 400 \text{ kN} = 400000 \text{ N}$
- **Module d'élasticité** :
  - Acier (doux et haute résistance) :  $E_p = E_s = 200\,000 \text{ MPa}$
  - Béton :  $E_b = 27500 \text{ MPa}$

2. Calcul de la section d'acier  $A_s$  :

- **Acier doux** ( $\sigma_{s0} = 300 \text{ MPa}$ ) :

$$A_s = \frac{P_0}{\sigma_{s0}} = \frac{400000}{300} = 700 \text{ mm}^2$$

- **Acier haute résistance** ( $\sigma_{p0} = 1500 \text{ MPa}$ ) :

$$A_p = \frac{P_0}{\sigma_{p0}} = \frac{400000}{1500} = 1333.333 \text{ mm}^2$$

3. Déformation élastique du béton  $\varepsilon_c$  :

La déformation du béton due au précontraint est :

$$\varepsilon_c = \frac{P_0}{A_c * E_b} = \frac{400000}{125000 * 27500} = 0.00011636 \text{ mm/m} = 116.36 \mu\text{m/m}$$

4. Cas 1 : Acier doux ( $\sigma_{s0} = 300 \text{ MPa}$ ) :

- **Déformation initiale de l'acier** :

$$\varepsilon_{s,initial} = \frac{\sigma_{s0}}{E_s} = \frac{300}{200000} = 0.0015 \text{ mm/m} = 1500 \mu\text{m/m}$$

- **Déformation résiduelle (après raccourcissement du béton)** :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s,res} &= \varepsilon_{s,initial} - \varepsilon_c - \varepsilon_d = 0.0015 - 0.00011636 - 0.0005 \\ &= 0.00088364 \text{ mm/m} = 883.64 \mu\text{m/m} \end{aligned}$$

- **Contrainte résiduelle dans l'acier**:

$$\sigma_{s,resi} = E_s * \varepsilon_{s,res} = 200000 * 0.00088364 = 176.7272 MPa$$

- Force de précontrainte résiduelle :

$$P_{s,resi} = \sigma_{s,resi} * A_s = 176.7272 * 1333.333 = 235636.3 N = 235.6363 KN$$

5. Cas 2 : Acier haute résistance ( $\sigma_{p0}=1500 MPa$ ) :

- **Déformation initiale de l'acier :**

$$\varepsilon_{p,initial} = \frac{\sigma_{p0}}{E_p} = \frac{1500}{200000} = 0.0075 mm/m = 7500 \mu m/m$$

- **Déformation résiduelle** (après raccourcissement du béton) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p,res} &= \varepsilon_{p,initial} - \varepsilon_c - \varepsilon_d = 0.0075 - 0.000212 - 0.0005 = 0.0068836 mm/m \\ &= 6883.6 \mu m/m \end{aligned}$$

- **Contrainte résiduelle dans l'acier :**

$$\sigma_{p,resi} = E_p * \varepsilon_{p,res} = 200000 * 0.0068836 = 1376.7272 MPa$$

- Force de précontrainte résiduelle :

$$P_{p,resi} = \sigma_{p,resi} * A_p = 1376.7272 * 266.666 = 367127.27 N = 367.127 KN$$

**Conclusion :**

- **Acier doux :** La force résiduelle chute de 400 kN à 235.6363 kN (**perte de 41.09%**).
- **Acier haute résistance :** La force résiduelle chute de 400 kN à 367.127 kN (**perte de 8.218%**).

## Chapitre 3 : Sollicitations et sections de calcul

### 3.1. Introduction :

Une structure et ses composants doivent satisfaire simultanément un certain nombre d'états limites ou d'exigences de conception. Elle doit posséder une résistance adéquate, être stable et fonctionner de manière satisfaisante sous les charges de service. De plus, elle doit être durable, bénéficier d'une protection contre le feu suffisante, résister aux charges de fatigue et répondre à toute exigence spéciale liée à son utilisation prévue. Les codes de pratique spécifient des critères de conception qui offrent une marge de sécurité appropriée contre le risque qu'une structure devienne inapte au service de l'une de ces manières. Si une structure devient inapte au service de quelque manière que ce soit, on dit qu'elle a atteint un état limite. Les états limites sont les conséquences indésirables associées à chaque mode de défaillance possible. Afin de satisfaire aux critères de conception établis dans les codes de pratique, des méthodes de conception et d'analyse appropriées à l'état limite considéré doivent être utilisées. Par exemple, si la résistance d'une section transversale doit être calculée, des procédures d'analyse et de conception basées sur la résistance ultime sont généralement adoptées. Les méthodes d'analyse et de conception basées sur la charge de rupture (méthodes plastiques) peuvent être adaptées pour calculer la résistance des structures ductiles et hyperstatiques. Si les états limites de service, tels que les déformations excessives (ou contre-flèches) ou la fissuration excessive, sont pris en compte, une analyse tenant compte de la nature non linéaire et inélastique du béton est généralement nécessaire. Les sources de cette non-linéarité du matériau béton incluent la fissuration, le raidissement en traction, le fluage et le retrait. De plus, le fluage de l'acier de précontrainte à haute résistance (plus couramment appelé relaxation) peut affecter le comportement en service. Chaque état limite doit être considéré et conçu séparément. La satisfaction d'un état limite ne garantit pas la satisfaction des autres. Toutes les conséquences indésirables doivent être évitées. Pour chaque état limite, le concepteur doit comparer la capacité de la structure avec les charges externes appropriées. Dans les sections suivantes, les exigences de conception pour le béton précontraint sont discutées, y compris les charges spécifiées et les combinaisons de charges, ainsi que les traitements de la sécurité structurale contenus dans plusieurs codes de pratique majeurs.

### 3.2. Les états limites:

#### 3.2.1. Etat limite ultime (ELU):

L'**état limite ultime (ELU)** correspond à la situation dans laquelle une structure ou un élément structurel atteint sa capacité maximale de résistance ou de stabilité, au-delà de laquelle il risque de subir une rupture, un effondrement ou une défaillance catastrophique. Cet état marque la limite de la sécurité structurale, où les matériaux (comme le béton ou l'acier) atteignent leur résistance ultime ou où la structure perd son équilibre statique. Le dépassement de l'état limite ultime compromet gravement la sécurité des personnes et des biens, car il peut entraîner la ruine partielle ou totale de la structure.

Les principaux types d'états limites ultimes incluent :

- A. **État limite de résistance** : atteinte de la capacité portante maximale des matériaux ou des sections de la structure.
- B. **État limite de stabilité** : perte d'équilibre statique, comme le basculement ou le glissement.
- C. **État limite de flambement** : instabilité due à la déformation excessive sous charge critique.

La conception des structures vise à éviter l'atteinte de l'état limite ultime en appliquant des coefficients de sécurité et en respectant les normes de construction en vigueur.

#### 3. 2.2. Etat limite de service :

L'**état limite de service (ELS)** correspond à des conditions dans lesquelles une structure ou un élément structurel reste fonctionnel et sûr en usage normal, mais où certaines limitations sont atteintes en termes de performance, de confort ou de durabilité. Contrairement à l'état limite ultime (ELU), qui concerne la rupture ou l'effondrement, l'état limite de service se concentre sur les aspects liés à l'utilisation quotidienne de la structure, sans compromettre sa sécurité globale.

Les principaux critères de l'état limite de service incluent :

- A. **Limitation des déformations** : contrôle des flèches (déformations) pour éviter des dommages aux éléments non structuraux (cloisons, revêtements) ou des problèmes esthétiques.

- B. **Limitation des fissures** : maîtrise de l'ouverture des fissures dans les matériaux comme le béton armé pour préserver la durabilité et l'étanchéité de la structure.
- C. **Vibrations excessives** : prévention des vibrations qui pourraient affecter le confort des occupants ou le fonctionnement d'équipements sensibles.
- D. **Durabilité** : garantie que la structure résiste aux agressions environnementales (corrosion, gel, etc.) sur une longue période.

L'objectif de l'état limite de service est de s'assurer que la structure reste fonctionnelle, confortable et durable tout au long de sa vie utile, sans atteindre des niveaux de déformation ou de détérioration qui pourraient nuire à son usage ou à son apparence.

### 3.3. Actions :

Les **actions** (ou sollicitations) désignent toutes les forces, charges ou influences extérieures qui agissent sur une structure ou un élément structural, provoquant des contraintes, des déformations ou des déplacements. Ces actions peuvent être permanentes, variables ou accidentelles, et elles sont prises en compte lors de la conception et de l'analyse des structures pour garantir leur sécurité, leur stabilité et leur durabilité.

On distingue généralement trois catégories principales d'actions :

#### A. Actions permanentes (G) :

Ce sont des charges qui s'exercent de manière constante tout au long de la vie de la structure. Elles incluent :

- Le poids propre des matériaux (béton, acier, etc.).
- Les charges fixes (cloisons, équipements permanents, etc.).

#### B. Actions variables (Q) :

Ces charges varient en intensité ou en position au cours du temps. Elles comprennent :

- Les charges d'exploitation (personnes, mobilier, véhicules).
- Les charges climatiques (neige, vent, température).
- Les charges dynamiques (trafic, vibrations).



### C. Actions accidentelles (A) :

Ces actions sont rares, mais extrêmement intenses. Elles incluent :

- Les séismes.
- Les explosions.
- Les chocs (impact de véhicules, chute d'objets).

Les actions sont classées en fonction de leur nature et de leur durée d'application, et elles sont combinées selon des règles spécifiques (combinaisons d'actions) définies par les normes et codes de construction (par exemple, l'Eurocode). Ces combinaisons permettent de vérifier que la structure reste sûre et fonctionnelle dans toutes les situations possibles, y compris les plus défavorables.

### 3.4. Sollicitations

Les **sollicitations** désignent les effets internes induits dans une structure ou un élément structurel par les **actions** (charges ou forces) extérieures qui lui sont appliquées. Ces effets se manifestent sous forme de contraintes, de déformations, de moments, d'efforts tranchants, de torsions ou d'efforts normaux (traction ou compression). Les sollicitations sont essentielles pour analyser et dimensionner une structure, car elles permettent de vérifier sa résistance, sa stabilité et sa capacité à supporter les charges sans défaillance.

#### 3.4.1. Types de sollicitations :

##### A. Effort normal (N) :

- **Traction** : force qui tend à allonger l'élément.
- **Compression** : force qui tend à écraser ou à raccourcir l'élément.

##### B. Effort tranchant (V) :

Force qui tend à provoquer un glissement ou une coupure dans une section transversale de l'élément.

##### C. Moment fléchissant (M) :

Force qui provoque une flexion ou une courbure de l'élément, créant des zones de compression et de traction.

**D. Moment de torsion (T) :**

Force qui tend à faire tourner ou tordre l'élément autour de son axe longitudinal.

**E. Contraintes et déformations :**

- Les **contraintes** ( $\sigma$  pour les contraintes normales,  $\tau$  pour les contraintes de cisaillement) représentent la distribution interne des forces par unité de surface.
- Les **déformations** ( $\varepsilon$  pour les déformations normales,  $\gamma$  pour les déformations de cisaillement) mesurent l'allongement, le raccourcissement ou la distorsion de l'élément sous l'effet des sollicitations.

**3.4.2. Importance des sollicitations :**

Les sollicitations sont calculées pour chaque élément structurel (poutre, poteau, dalle, etc.) afin de s'assurer que les matériaux utilisés (béton, acier, bois, etc.) peuvent résister aux forces appliquées sans dépasser leurs limites de résistance. Elles sont également utilisées pour vérifier les **états limites** (état limite ultime et état limite de service) et garantir la sécurité et la durabilité de la structure.

En résumé, les sollicitations sont les réponses internes d'une structure aux actions extérieures, et leur analyse est fondamentale pour une conception structurelle sûre et efficace.

**3.4.3. Sollicitations de calcul à l'ELU :****A. Combinaisons fondamentales :**

En règle générale, les sollicitations de calcul à considérer sont les suivantes :

$$\gamma_p + P_m + 1,35.G_{\max} + G_{\min} + \gamma_{Q1}Q_{1k} + \Sigma 1,3\psi_{0i}Q_{ik}. \quad (\text{Eq.3.1})$$

Avec :

$\gamma_p = 1$  dans la plupart des cas.

$P_m$  : valeur probable de l'action de précontrainte.

$G_{\max}$  : ensemble des actions permanentes défavorables.

$G_{\min}$  : ensemble des actions permanentes favorables.

$\gamma_{Q1}=1,5$  dans le cas général.

$Q_{1k}$  : la valeur caractéristique de l'action de base.

$\psi_{0i}Q_{ik}$  : la valeur de combinaison d'une action d'accompagnement.

### **B. Combinaisons accidentelles :**

$$P_m + F_A + G_{\max} + G_{\min} + \psi_{11}Q_{1k} + \Sigma\psi_{2i}Q_{ik}. \quad (\text{Eq.3.2})$$

Avec :

$F_A$  : la valeur nominale de l'action accidentelle.

$\psi_{11}Q_{1k}$  : la valeur fréquente d'une action variable.

$\psi_{2i}Q_{ik}$  : la valeur quasi-permanente d'une autre action variable.

### **3.4.4. Sollicitations de calcul à l'E.L.S**

#### **A. Combinaisons rares :**

$$P_d + G_{\max} + G_{\min} + Q_{1k} + \Sigma\psi_{0i}Q_{ik}. \quad (\text{Eq.3.3})$$

Avec,  $P_d$  : la valeur la plus défavorable de l'action de précontrainte entre  $P_1$  et  $P_2$ .

#### **B. Combinaisons fréquentes :**

$$P_d + G_{\max} + G_{\min} + \psi_{11}Q_{1k} + \Sigma\psi_{2i}Q_{ik}. \quad (\text{Eq.3.4})$$

#### **C. Combinaisons quasi-permanentes :**

$$P_d + G_{\max} + G_{\min} + \Sigma\psi_{2i}Q_{ik}. \quad (\text{Eq.3.5})$$

NB : Les valeurs des coefficients  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  varient selon la nature de la structure et sont données par les règles BAEL 91.

### **3. 5. Section de calcul:**

Les sections de calcul permettent de s'assurer que chaque élément structural est correctement dimensionné pour résister aux sollicitations auxquelles il est soumis, tout en respectant les normes de sécurité et de performance. Elles constituent une étape clé dans la conception des structures.

Les caractéristiques géométriques des sections sont des paramètres qui décrivent la forme et les dimensions d'une section transversale d'un élément structural (poutre, poteau, dalle, etc.). Ces caractéristiques sont essentielles pour calculer les propriétés mécaniques de la section, telles que sa résistance, sa rigidité et sa capacité à résister aux sollicitations (flexion, cisaillement, torsion, etc.). Voici les principales caractéristiques géométriques :

### 3.5. 1. Aire de la section (A)

- **Définition** : Surface totale de la section transversale.
- **Unité** :  $m^2$ ,  $cm^2$ ,  $mm^2$ .
- **Utilité** : Utilisée pour calculer les contraintes normales (compression/traction) et la capacité portante.

#### Exemple :

- Pour une section rectangulaire :

$$A = b \cdot h \quad (\text{Eq.3.6})$$

où  $b$  = largeur et  $h$  = hauteur.

### 3.5. 2. Moment statique (S)

- **Définition** : Mesure de la répartition de l'aire par rapport à un axe de référence.
- **Unité** :  $m^3$ ,  $cm^3$ ,  $mm^3$ .
- **Utilité** : Utilisé pour déterminer le centre de gravité (ou centre géométrique) de la section.
- **Exemple** : Pour une section rectangulaire :

$$S_x = A \cdot y \quad (\text{Eq.3.7})$$

où  $y$  = distance du centre de gravité à l'axe de référence.

### 3.5.3. Centre de gravité (G)

- **Définition** : Point où la section est en équilibre parfait sous l'effet de son propre poids.
- **Utilité** : Essentiel pour déterminer les axes neutres et calculer les moments d'inertie.

- **Calcul** : Pour une section composée, le centre de gravité est calculé en fonction des aires et des positions des sous-sections.

### 3.5.4. Moment d'inertie (I)

- **Définition** : Mesure de la résistance de la section à la flexion par rapport à un axe donné.
- **Unité** :  $m^4$ ,  $cm^4$ ,  $mm^4$ .
- **Utilité** : Utilisé pour calculer les déformations et les contraintes dues à la flexion.
- **Formules courantes** :

- Section rectangulaire:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad (\text{Eq.3.8})$$

- Section circulaire:

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} \quad (\text{Eq.3.9})$$

ou d= diamètre

#### Remarque:

- $I_x$ : Moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal (x).
- $I_y$ : Moment d'inertie par rapport à l'axe vertical (y).

### 3.5.5. Modules de résistance $W_x$ et $W_y$ ( $cm^3$ ) :

Le module de résistance est égal au quotient du moment d'inertie axial par la distance de l'axe à la fibre la plus éloignée.

$$W_x = \frac{I_x}{y}, \quad W_y = \frac{I_y}{x} \quad (\text{Eq.3.10})$$

### 3.5.6. Module de flexion (W)

- **Définition** : Rapport entre le moment d'inertie et la distance maximale à l'axe neutre.
- **Unité** :  $m^3$ ,  $cm^3$ ,  $mm^3$ .

- **Utilité** : Utilisé pour calculer les contraintes maximales dues à la flexion.
- **Formule** :

$$W = \frac{I}{v} \quad (\text{Eq.3.11})$$

Ou  $v$  = la distance entre l'axe neutre et la fibre la plus éloignée.

Exemple : pour une section rectangulaire :  $W_x = \frac{bh^2}{6}$

### 3.5.7. Rayon de giration (i)

- **Définition** : Mesure de la répartition de l'aire autour d'un axe.
- **Unité** : m, cm, mm.
- **Utilité** : Utilisé pour évaluer la résistance au flambement.
- **Formule** :

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (\text{Eq.3.12})$$

### 3.5.8. Moment d'inertie polaire (J)

- **Définition** : Mesure de la résistance à la torsion.
- **Unité** :  $\text{m}^4$ ,  $\text{cm}^4$ ,  $\text{mm}^4$ .
- **Utilité** : Utilisé pour calculer les contraintes de torsion.
- **Formule** : Pour une section circulaire

$$J = \frac{\pi d^4}{32} \quad (\text{Eq.3.13})$$

### 3.5.9. Rendement d'une section :

Le rendement d'une section est donné par:

$$\rho = \frac{I}{BV_i V_s} \quad (\text{Eq.3.14})$$

Il caractérise l'aspect économique d'une section vis-à-vis du comportement à la flexion.

### 3.5.10. Types de section :

Les notions de **section brute** et de **section nette** sont essentielles en génie civil pour le dimensionnement et l'analyse des éléments structuraux. Elles permettent de décrire la surface effective d'une section transversale en tenant compte ou non des réductions de matière (trous, perforations, etc.).

#### A. Section brute

La **section brute** représente la surface totale de la section transversale d'un élément structurel **sans tenir compte des éventuelles ouvertures, perforations ou réductions de matière**. Elle inclut l'intégralité de la surface de la section, qu'elle soit en béton, en acier, en bois ou en tout autre matériau.

Pour une section rectangulaire :  $A_{brute} = b \cdot h$ , où  $b$  = largeur et  $h$  = hauteur.

#### B. Section nette

La **section nette** représente la surface effective de la section transversale **après déduction des ouvertures, perforations ou réductions de matière**. Elle tient compte des vides qui réduisent la capacité portante de l'élément.

$$A_{nette} = A_{brute} - \text{surface des trous.}$$

#### C. Section homogène :

C'est la section obtenue en ajoutant à section nette la section des armatures longitudinales adhérente multipliée par un coefficient d'équivalence convenable «  $n$  », sous réserve de l'adhérence entre ces armatures avec le béton (ce qui est le cas en pré-tension, et en post tension après injection de coulis adéquat). La section homogène sert à calculer les contraintes dues aux charges appliquées après l'injection des conduits, ce qui correspond en général aux charges variables.

$$A_h = A_n + (\text{section d'armatures longitudinales adhérentes}) \times (\text{Coefficient d'équivalence } n).$$

$n = 5$  : cas des actions de courte durée.

$n = 15$  : cas des actions de longue durée.

#### D. Section homogène réduite (section fissurée):

Elle est obtenue en négligeant la partie de béton tendu. La section homogène réduite se calcule à partir de la seule section de béton comprimé, des aciers passifs avec un

coefficient d'équivalence égal à 15 et des aciers actifs de précontrainte avec un coefficient d'équivalence égal à :

- 15 dans le cas de pré-tension.
- 0 pour les armatures non adhérentes en post tension.
- 15/2 pour les armatures adhérentes en post tension.

$A_{hr} = (\text{Section du béton comprimé seul}) + (\text{section d'armatures passives}) \times (n) + (\text{section d'armatures de précontrainte}) \times (n')$ .

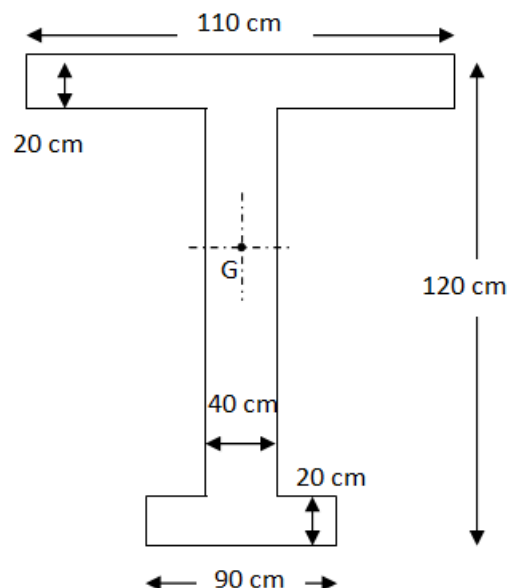
La section homogène réduite est utilisée pour le calcul des contraintes en classe III.

### 3.6. Applications :

#### 3.6.1. Exercice 1 :

Une poutre simplement appuyée de forme T représentée su la figure ci-dessous, on demande de déterminer les caractéristiques géométriques suivantes :

1. L'aire de la section (B)
2. Le moment statique (S)
3. La distance de la fibre supérieure ( $y_s$ ) et la distance de la fibre inférieure ( $y_i$ )
4. Le moment d'inertie (I)
5. Le module de résistance (Z)
6. Le rayon de giration (i)
7. Le rendement de la section ( $\rho$ )





**Solution:**

1. Aire de la section

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = 0.18 + 0.32 + 0.22 = 0.72 \text{ m}^2$$

2. Moment statique :

$$S = B_1 y_1 + B_2 y_2 + B_3 y_3 = (0.18 * 0.1) + (0.32 * 0.6) + (0.22 * 1.1) = 0.452 \text{ m}^3$$

3. La distance ( $y_s$ ) et la distance ( $y_i$ )

$$y_i = \frac{S}{B} = 0.6278 \text{ m}$$

$$y_s = 1.2 - 0.6278 = 0.5722 \text{ m}$$

4. Moment d'inertie I

$$\begin{aligned} I_G &= I_1 + B_1 * (y_1)^2 + I_2 + B_2 * (y_2)^2 + I_3 + B_3 * (y_3)^2 \\ &= 0.0006 + (0.18 * (0.18)^2) + 0.017 + (0.32 * (0.6)^2) + 0.000733 + (0.22 * (1.1)^2) \\ &= 0.1178 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

5. Le module de résistance Z

$$Z_{sup} = \frac{I}{y_{sup}} = 0.206 \text{ m}^3$$

$$Z_{inf} = \frac{I}{y_{inf}} = 0.188 \text{ m}^3$$

6. Le rayon de giration (i)

$$i = \sqrt{\frac{I}{B}} = 0.404 \text{ m}$$

7. Le rendement de la section ( $\rho$ )

$$\rho = \frac{I}{B y_i y_s} = 0.456$$

**3.6.1. Exercice 2 :**

A. Soit une section avec les caractéristiques suivantes :

Hauteur  $h = 130 \text{ cm}$  ; surface  $A = 0.5 \text{ m}^2$  ; moment statique  $S_{\Delta} = 0.22 \text{ m}^3$  ; moment d'inertie

$I_{\Delta} = 0.19 \text{ m}^4$ .

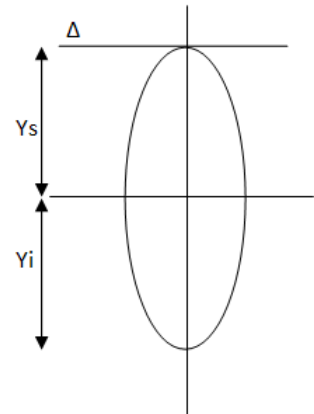
**Déterminer les caractéristiques de la section brute :**

1. Distance de la fibre supérieure  $y_s$  [m]
2. Distance de la fibre inférieure  $y_i$  [m]
3. Moment d'inertie par rapport au centre de gravité  $I_G$  [m<sup>4</sup>]
4. Rendement de la section  $\rho$

B. Cette section comporte 6 gaines de 65 mm de diamètre situées respectivement à 110 mm et 320 mm de la fibre inférieure. Le centre de gravité des gaines est à 0.995 m de la fibre supérieure.

**Déterminer les caractéristiques de la section nette:**

1. Aire de la section  $B_n$  [m<sup>2</sup>]
2. Moment statique  $S_{n\Delta}$  [m<sup>3</sup>]
3. Distance de la fibre supérieure  $y_s$  [m]
4. Distance de la fibre inférieure  $y_i$  [m]
5. Moment d'inertie par rapport à l'axe «  $\Delta$  »  $I_{n\Delta}$  [m<sup>4</sup>]
6. Moment d'inertie par rapport au centre de gravité  $I_n$  [m<sup>4</sup>]
7. Rendement de la section  $\rho_n$

**Solution :****A. . section brute**

1. Distance de la fibre supérieure  $y_s$

$$y_s = \frac{S_{\Delta}}{B} = 0.44 \text{ m}$$

2. Distance de la fibre inférieure  $y_i$  [m]

$$y_i = h - y_s = 0.86 \text{ m}$$

3. Moment d'inertie par rapport au centre de gravité  $I_G$  [m<sup>4</sup>]

$$I_G = I_{\Delta} - B y_s^2 = 0.19 - (0.5 * (0.44)^2) = 0.0932 \text{ m}^4$$

4. Rendement de la section  $\rho$ 

$$\rho = \frac{I}{By_i y_s} = \frac{0.0932}{0.5 * 0.44 * 0.86} = 0.4926$$

**B. Section nette :**1. Aire de la section  $B_n$  [m<sup>2</sup>]

$$B_n = B - (\text{section des gaines}) = 0.5 - (4 \frac{\pi(0.065)^2}{4}) = 0.48 m^2$$

2. Moment statique  $S_n$  [m<sup>3</sup>]

$$S_{n\Delta} = S_{\Delta} - S_{gaine} = 0.22 - (0.199 * 0.995) = 0.2002 m^3$$

3. Distance de la fibre supérieure  $y_s$  [m]

$$y_s = \frac{S_{n\Delta}}{B_n} = \frac{0.2002}{0.48} = 0.417 m$$

4. Distance de la fibre inférieure  $y_i$  [m]

$$y_i = h - y_s = 1.3 - 0.417 = 0.883 m$$

5. Moment d'inertie par rapport à l'axe «  $\Delta$  »  $I_{n\Delta}$  [m<sup>4</sup>]

$$I_{n\Delta} = I_{\Delta} - (B_{gaine} * (y_{gaine})^2) = 0.19 - (0.0199 * 0.995^2) = 0.1703 m^4$$

6. Moment d'inertie par rapport au centre de gravité  $I_n$  [m<sup>4</sup>]

$$I_n = I_{n\Delta} - (B_{nette} * (y_s)^2) = 0.1703 - (0.4801 * 0.417^2) = 0.08682 m^4$$

7. Rendement de la section  $\rho_n$ 

$$\rho_n = \frac{I_n}{B_n y_i y_s} = \frac{0.08682}{0.4801 * 0.417 * 0.883} = 0.4911$$

## Chapitres 4 : Perte de la précontrainte

### 4.1. Introduction

La perte de précontrainte est un phénomène inévitable dans les structures en béton précontraint. Elle se produit lorsque la force de précontrainte appliquée aux câbles ou armatures diminue au fil du temps en raison de divers facteurs physiques et mécaniques. Cette perte doit être soigneusement calculée et prise en compte lors de la conception pour garantir la performance et la sécurité de la structure.

### 4.2. Contrainte à l'origine :

La contrainte à l'origine ou contrainte initiale ( $\sigma_{p0}$ ) dans le contexte du béton précontraint fait référence à la tension appliquée dans les câbles ou armatures de précontrainte immédiatement après leur mise en tension, mais avant que les pertes de précontrainte ne se produisent. Cette contrainte est une étape cruciale dans la conception et la réalisation des structures en béton précontraint, car elle détermine la force de compression initiale introduite dans le béton.

Au point le plus sollicité de l'armature, généralement situé au niveau de l'ancrage, il est essentiel d'éviter d'atteindre une valeur trop proche de la limite de rupture de l'acier ( $f_{prg}$ ). Pour cette raison, une valeur maximale de traction a été fixée réglementairement pour la tension initiale, notée  $\sigma_{p0}$ , définie comme suit :

#### Pour les fils et les torons :

- $\sigma_{p0} = \text{Min} (0,80 f_{prg} , 0,90 f_{peg})$  en post-tension. (Eq. 4.1)
- $\sigma_{p0} = \text{Min} (0,85 f_{prg} , 0,95 f_{peg})$  en pré-tension. (Eq. 4.2)

ou  $f_{prg}$  : la contrainte à la rupture garantie

$f_{peg}$  : la contrainte de déformation élastique

#### Pour les barres :

- $\sigma_{p0} = 0,7 f_{prg}$ . (Eq. 4.3)

On dispose ainsi d'une marge de sécurité (de 15 à 20 %) sur la rupture d'un câble, d'un toron ou d'un fil pour couvrir les incertitudes de mesure de pression du vérin, de

correspondance entre pression et effort de traction, de frottement parasite, ce qui peut entraîner des variations de contrainte dans les différents torons d'un même câble.

Il est fortement recommandé de disposer une marge de sécurité sur la rupture des câbles de précontrainte lors de la mise en tension (généralement entre 15% et 20%). Ainsi que la contrainte à l'origine dépend de la force de précontrainte initiale ( $P_0$ ) et de la section des câbles ( $A_p$ ) (Figure 4.1). Elle est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_{p_0} = \frac{P_0}{A_p} \quad (\text{Eq. 4.4})$$

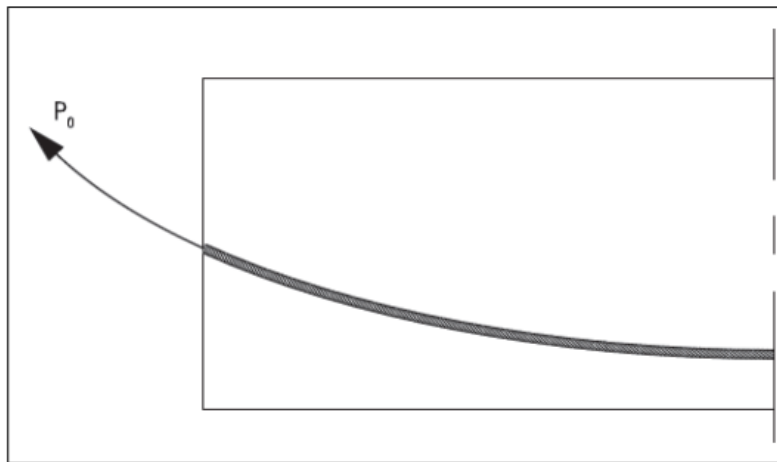


Figure 4.1. Force de précontrainte l'origine.

### 4.3. Pertes de tension en précontrainte par post-tension

La précontrainte par post-tension est une technique couramment utilisée dans la construction pour améliorer la résistance et la durabilité des structures en béton. Cependant, des pertes de tension peuvent survenir tout au long du processus, affectant l'efficacité de la précontrainte.

Les pertes de tension sont classées en deux catégories principales : les pertes instantanées et les pertes différées.

- **Pertes instantanées** : Ces pertes se produisent pendant ou immédiatement après la mise en tension des câbles.
- **Pertes différées** : Ces pertes se produisent sur une longue période (mois ou années) et sont dues à des phénomènes physiques et chimiques.

### 4.3.1. Pertes instantanées

Les pertes de tension instantanées désignent la diminution de la force de précontrainte dans les câbles d'une structure en béton post-tendue, qui survient immédiatement lors de la mise en tension ou peu après. Ces pertes sont principalement causées par :

- **Le frottement** entre les câbles et les gaines,
- **Le recul de l'ancrage** lors du blocage des câbles,
- **Les déformations élastiques instantanées du béton** lors de la transmission des efforts.

Elles sont quantifiées par la valeur  $\Delta\sigma_{pi}(x)$  à une abscisse « X » du câble. La tension effective après soustraction de ces pertes est appelée **tension initiale**  $\sigma_{pi}(x)$ , définie par:

$$\sigma_{pi}(x) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_{pi}(x) \quad (\text{Eq. 4.5})$$

où  $\sigma_{p0}$  est la tension appliquée initialement.

#### a) Perte de la tension due au frottement :

Les **pertes de tension par frottement** surviennent lors de la mise en tension des câbles de précontrainte dans une structure en béton post-tendue. Elles résultent de la résistance créée par le contact entre les câbles et les gaines (conduits de protection) ou les déviateurs, ainsi que des micro-déviations accidentelles du tracé des câbles (Figure 4. 2). Les principales causes sont :

- **Frottement courbe** : Dû à la courbure des câbles (angle total parcouru), qui génère une résistance localisée.
- **Frottement parasite (ou « effet de battement »)** : Lié aux irrégularités du tracé des gaines, même en l'absence de courbure intentionnelle.

La perte de tension par frottement à une abscisse « X » du câble est modélisée par :

$$\Delta\sigma_{frott}(x) = \sigma_{p0}(1 - e^{-(f\alpha + \varphi x)}) \quad (\text{Eq. 4.6})$$

Avec

$$\sigma_{frott}(x) = \sigma_{p0}(e^{-(f\alpha + \varphi x)}) \quad (\text{Eq. 4.7})$$

où :

- $\sigma_{p0}$ : Tension initiale appliquée à l'ancrage,
- $f$ : Coefficient de frottement en courbe ( $\text{rd}^{-1}$ ),
- $\alpha$ : somme des déviations angulaires arithmétiques du câble sur la longueur  $x$  ( $\text{rd}$ ),
- $\varphi$ : coefficient de frottement en ligne ( $\text{m}^{-1}$ ) ;
- $x$ : la distance de la section considérée (m).

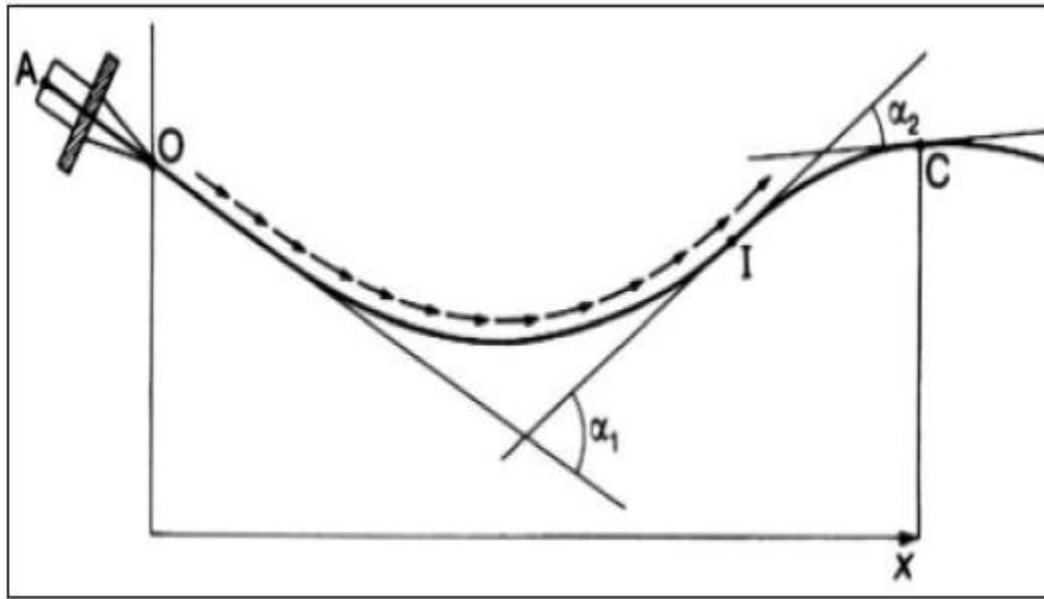


Figure 4.2. Frottements le long du câble lors de sa mise en tension.

#### b) Perte de la tension due au recul d'ancrage

Les pertes de tension par recul d'ancrage se produisent lors de la phase d'ancrage des câbles de précontrainte dans les structures post-tendues. Elles résultent du léger glissement ou déplacement des clavettes (ou cales) dans l'ancrage lors du relâchement du vérin de mise en tension, ce qui entraîne une rétraction élastique du câble et une diminution localisée de la tension appliquée. Ce type des pertes dues essentiellement aux phénomènes suivants :

- **Élasticité du câble** : Lorsque la tension est relâchée, le câble (en acier) se raccourcit légèrement sous l'effet de son élasticité.
- **Déformation de l'ancrage** : Les composants de l'ancrage (clavettes, plaque d'ancrage) subissent des micro-déplacements lors du blocage du câble.

- **Jeu mécanique** : Un mouvement résiduel inévitable existe entre le câble et l'ancrage après la mise en tension.

Ces trois phénomènes provoquent un raccourcissement du câble, désigné par **g**, induisant une perte de tension. Les notices techniques des systèmes de précontrainte précisent, selon le type d'ancrage, une valeur estimée de **g** :

- **Une valeur faible** (environ 5 mm) pour les ancrages par calage ou vissage, résultant principalement de la déformation du corps d'ancrage et du tassement des cales ou filets.
- **Une valeur plus élevée** (environ 12 mm) pour les ancrages par coincement. Dans ce cas, les torons et clavettes subissent un déplacement vers l'intérieur de la structure, amplifié si le vérin ne dispose pas d'un dispositif de clavetage hydraulique. Ce système permet d'enfoncer les mors dans leur logement conique avant de relâcher la pression dans la chambre du vérin.

Le déplacement des éléments vers le béton est limité par les frottements du câble contre sa gaine, un phénomène inverse à celui observé lors de la mise en tension. Cette résistance diminue progressivement depuis l'ancrage jusqu'à disparaître à une distance **d** de celui-ci (Figure. 4.3), au-delà de laquelle la tension reste constante.

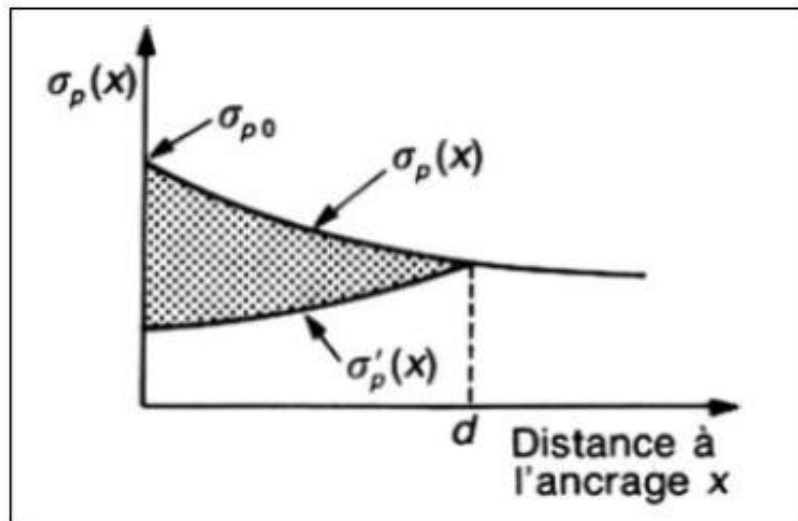


Figure 4.3: Perte de tension due au recul d'ancrage.

Avant rentrée d'ancrage, l'allongement relatif de l'armature de précontrainte à l'abscisse **x** est:

$$\varepsilon_p(x) = \frac{\sigma_p(x)}{E_p} \quad (\text{Eq. 4.8})$$



Après le rentrée d'ancrage, la tension à l'abscisse  $x$  ( $x < d$ ) n'est plus que  $\sigma'_p(x)$ , et l'allongement relatif de l'armature de précontrainte est :

$$\varepsilon'_p(x) = \frac{\sigma'_p(x)}{E_p} \quad (\text{Eq. 4.9})$$

La longueur d'influence de la perte par recul d'ancrage «point d », est donnée par la formule :

$$d = \sqrt{\frac{gE_px}{\Delta\sigma_{frott}(x)}} \quad (\text{Eq. 4.10})$$

Pour  $x \geq d$  :  $\Delta\sigma_{recul}(x) = 0$

$$\text{Pour } x < d : \Delta\sigma_{recul}(x) = \frac{2gA_pE_p}{d} \quad (\text{Eq. 4.11})$$

### c) Perte de tension par déformations instantanées du béton

Les pertes de tension par déformations instantanées du béton surviennent lors de la mise en tension des câbles de précontrainte dans les structures en béton post-tendu. Ces pertes résultent de la déformation élastique du béton sous l'effet de la force de précontrainte appliquée, ce qui entraîne un raccourcissement du béton et, par conséquent, une diminution de la tension dans les câbles. Ces pertes sont instantanées et font partie des pertes à court terme ( $\Delta\sigma_{pi}(x)$ ).

Cette perte est due essentiellement à la :

- **Déformation élastique du béton** : Lorsque la précontrainte est appliquée, le béton se comprime instantanément sous l'effet de la force de précontrainte.
- **Interaction acier-béton** : Les câbles, solidarisés au béton, subissent un raccourcissement proportionnel à la déformation du béton, réduisant leur allongement initial et donc leur tension.
- **Séquence de mise en tension** : Dans le cas de câbles tendus successivement, chaque nouveau câble mis en tension provoque une déformation supplémentaire du béton, affectant les câbles déjà ancrés.

La perte de tension dans un câble due à la déformation instantanée du béton est donnée par :

$$\Delta\sigma_{racc}(x) = \frac{n-1}{2n} * \frac{E_p}{E_{ij}} \sigma_b(x) \quad (\text{Eq. 4.12})$$

avec :

$n$  : nombre de gaines

$E_p$  : module d'élasticité des armatures;

$E_{ij}$  : module instantané du béton au jour «  $j$  » ;

$\sigma_b(x)$  : contrainte normale du béton :

$$\sigma_b(x) = \frac{P}{B_n} + \frac{Pe^2(x)}{I_n} + \frac{M(x)e(x)}{I_n} \quad (\text{Eq. 4.13})$$

$$P = (\sigma_{p0} - \Delta\sigma_{frott} - \Delta\sigma_{recu})A_p \quad (\text{Eq. 4.14})$$

$e(x)$  : excentricité du câble de précontrainte.

**Remarque :**

**Cas d'une pièce avec un seul câble ou des câbles tendus simultanément :**

Les pertes élastiques sont nulles ( $\Delta\sigma_{racc}(x)=0$ ). En effet, le raccourcissement élastique se produit durant la mise en tension elle-même, car le vérin repose directement sur la structure. Ainsi, la déformation de la pièce est compensée par l'action simultanée du vérin, dans ce cas :

- Pour le calcul de cette perte, l'équation suivante est utilisée :

$$\Delta\sigma_{racc}(x) = E_p \sum K \frac{\Delta\sigma_{bj}}{E_{ij}} \quad (\text{Eq. 4.15})$$

Le BPEL spécifie deux valeurs pour le coefficient **K** :

- **K = 2** : Pour les variations de contraintes liées à la phase de mise en tension et aux charges permanentes appliquées *simultanément* à cette phase.
- **K = 1** : Pour les variations de contraintes dues aux charges permanentes *postérieures* à la précontrainte, y compris celles générées par les câbles mis en tension ultérieurement.

#### 4. 3.2. Pertes de tension différées :

Les pertes de tension différées désignent la diminution progressive de la force de précontrainte dans les câbles d'une structure en béton précontraint, survenant sur une longue période (mois à années) après la mise en tension. Elles résultent de phénomènes

liés au comportement à long terme du béton et de l'acier. Ces pertes sont critiques pour la durabilité et la performance des structures. Les pertes de la tension différées sont :

- Perte de tension due au retrait du béton.
- Perte de tension due au fluage du béton.
- Perte de tension due à la relaxation de l'acier de précontrainte.

A l'instant « t » et dans une section d'abscisse « X » de l'armature, la valeur totale de ces pertes de tension différées, est notée  $\Delta\sigma_{pd}(t, x)$ .

#### a) Perte de tension due au retrait du béton

Les pertes de tension dues au retrait du béton correspondent à la diminution progressive de la force de précontrainte dans les câbles d'une structure en béton, causée par le raccourcissement du béton lors de son séchage et de son durcissement. Ce phénomène, différé dans le temps, est l'une des principales pertes à long terme dans les structures précontraintes.

Le retrait est une déformation volumétrique irréversible du béton, principalement due à :

- **Retrait de dessiccation** : Évaporation de l'eau libre du béton après la prise.
- **Retrait endogène (autogène)** : Consommation d'eau par les réactions d'hydratation du ciment (surtout dans les bétons à haute performance).
- **Retrait thermique** : Refroidissement du béton après l'échauffement initial lors de l'hydratation.

Le raccourcissement du béton entraîne un raccourcissement des câbles de précontrainte, réduisant leur allongement initial et donc leur tension.

La perte de tension due au retrait est calculée par :

$$\Delta\sigma_{ret} = E_p \varepsilon_r(t) \quad (\text{Eq. 4.16})$$

$E_p$  : Module d'élasticité de l'acier de précontrainte ( $\approx 195\,000 \text{ MPa} \approx 195\,000 \text{ MPa}$ ),

$\varepsilon_r(t)$  : Déformation totale de retrait du béton à l'âge t (en ‰ ou mm/m).

#### b) Perte de tension due au fluage du béton :

Les pertes de tension dues au fluage du béton correspondent à la diminution progressive de la force de précontrainte dans les câbles, causée par la déformation lente et

irréversible du béton sous charge constante. Ce phénomène, différé dans le temps, est l'une des pertes les plus significatives dans les structures en béton précontraint, affectant leur durabilité et leur comportement à long terme. Le BPEL donne la perte finale de tension due au fluage du béton dans le temps,  $\Delta\sigma_{flu}(t)$ , par la formule :

$$\Delta\sigma_{flu}(t) = (\sigma_b^F + \sigma_b^M) \frac{E_p}{E_{ij}} \quad (\text{Eq. 4.17})$$

Avec:

$\sigma_b^F$  étant la contrainte finale et  $\sigma_b^M$  la contrainte maximale, supportées par le béton dans la section considérée, au niveau du centre de gravité des armatures de précontrainte sous les actions permanentes, y compris celles dues à la précontrainte.

j : l'âge du béton lors de sa mise en tension.

Si  $\sigma_b^M \leq \sigma_b^F$  il est loisible, à titre de simplification, d'évaluer la perte finale de tension due au fluage du béton à :

$$\Delta\sigma_{flu}(t) = 2.5\sigma_b^F \frac{E_p}{E_{ij}} \quad (\text{Eq. 4.18})$$

### c) Perte de tension due à la relaxation de l'acier :

Les pertes de tension dues à la relaxation de l'acier désignent la diminution progressive de la contrainte dans les câbles de précontrainte lorsque ceux-ci sont maintenus à allongement constant sur une longue période. Ce phénomène, lié à la viscosité de l'acier, est une perte différée qui s'ajoute au fluage du béton et au retrait pour réduire la force de précontrainte effective.

La relaxation résulte de réarrangements microstructuraux dans l'acier à haute résistance (tréfilé ou en barres) sous contrainte constante. Ces réarrangements entraînent une réduction de la tension interne sans modification de la longueur du câble. Elle est plus marquée dans les premières années et se stabilise asymptotiquement.

La perte de tension finale d'une armature du fait de sa relaxation, est donnée par la formule:

$$\Delta\sigma_{rel}(x) = 6 \frac{\rho_{1000}}{100} \left( \frac{\sigma_{pi}(x)}{f_{prg}} - \mu_0 \right) \sigma_{pi}(x) \quad (\text{Eq. 4.19})$$

$\sigma_{pi}(x)$ : contrainte dans les armatures de précontrainte ; après les pertes instantanées.

$\rho_{1000}$ : coefficient de relaxation à 1000 h

$f_{prg}$  : contrainte limite garantie à la rupture

$\mu_0$  étant un coefficient pris égal à :

- 0,43 pour les armatures à très basse relaxation (TBR).
- 0,30 pour les armatures à relaxation normale (RN).
- 0,35 pour les autres armatures.

#### d) Perte de tension différée totale :

La formule permettant d'évaluer la perte de tension par relaxation des aciers de précontrainte repose sur l'hypothèse d'une longueur constante des armatures. Toutefois, cette perte est atténuée par le raccourcissement induit par le retrait et le fluage du béton, qui réduisent la déformation des aciers.

Pour intégrer cette interaction, le **BP** recommande d'appliquer un coefficient réducteur fixe de **5/6** à la valeur calculée par la relation (Eq. 4.20) lors de la détermination de la perte différée totale. Ainsi, la perte différée finale est définie comme suit :

$$\Delta\sigma_{pd}(x) = \Delta\sigma_{ret} + \Delta\sigma_{flu} + \frac{5}{6}\Delta\sigma_{rel} \quad (\text{Eq. 4.20})$$

#### 4.4. Contrainte finale probable :

$$\sigma_{pmax}(x) = (1.02 * \sigma_{p0}) - (0.8 * (\Delta\sigma_{inst} + \Delta\sigma_{pd})) \quad (\text{Eq.4.21})$$

$$\sigma_{pmin}(x) = (1 * \sigma_{p0}) - (1.2 * (\Delta\sigma_{inst} + \Delta\sigma_{pd})) \quad (\text{Eq.4.22})$$

## 4.5. Applications

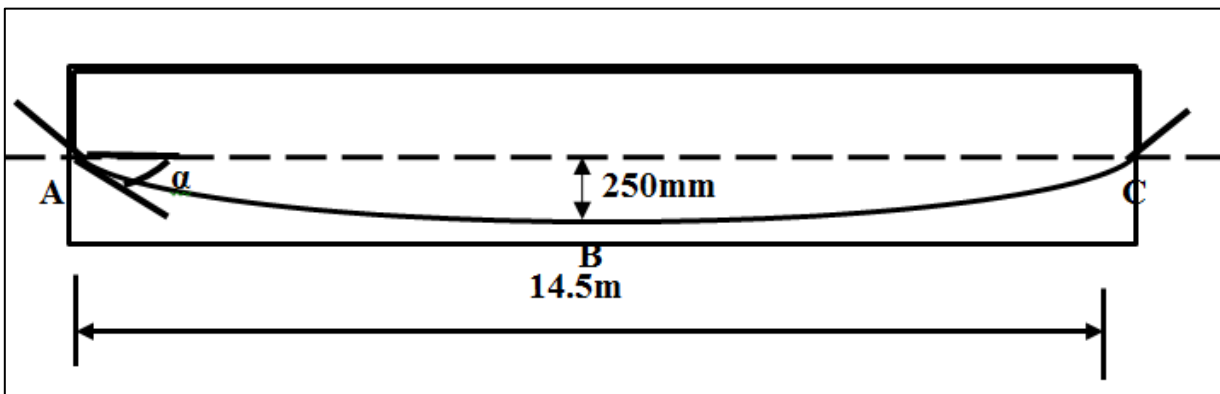
### 4.5.1. Exercice 1

La figure ci-dessous présente une poutre en béton précontraint soumise à une force de précontrainte  $P$  appliquée au point A. La contrainte finale mesurée à l'extrémité fixe au point C présente une valeur de 910 MPa. On demande de :

1. Calculer la contrainte appliquée au point A ( $\sigma_{p0(A)}$ ).
2. Calculer la perte de contrainte due au frottement au point C (%)
3. Calculer la contrainte au milieu de la poutre (point B)
4. Calculer la perte de contrainte due au frottement au point B (%)

On donne : section de la poutre  $400 \times 900 \text{ mm}^2$ , diamètre du câble : 30 mm,  $f = 0,6 \text{ rd}^{-1}$ ,

$\varphi = 0,003 \text{ m}^{-1}$



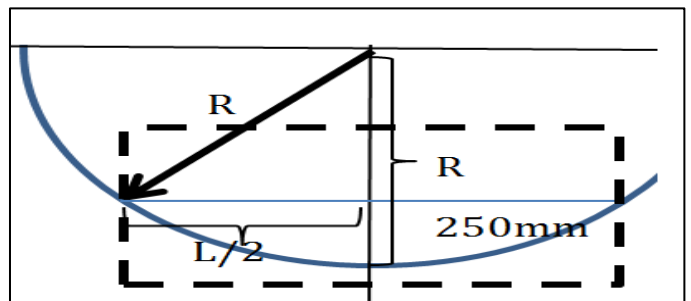
**Solution:**

1. Calcul de la contrainte à l'origine  $\sigma_{p0(A)}$ .

$$R^2 = (R * 0.250)^2 + \left(\frac{14.5}{2}\right)^2$$

$$R = 105.25 \text{ m}$$

$$\sin \alpha = \frac{(14.5/2)}{105.25} = 0.0688 \rightarrow 2\alpha = 0.1377 \text{ rad}$$



$$\sigma_{frott}(A) = \sigma_{p0} (e^{-(f\alpha + \varphi x)}) \rightarrow 910 = \sigma_{p0} (e^{-(0.6 * 0.1377 + 0.003 * 14.5)})$$

$$\sigma_{p0} = 1032.362 MPa$$

2. Calcul de la perte de contrainte due au frottement au point C (%)

$$\Delta\sigma_{frott}(C) = 1032.362 - 910 = 122.36 MPa$$

$$\% \Delta\sigma_{frott}(C) = \frac{1032.362 - 910}{1032.362} = 11.853\%$$

3. Calcul de la contrainte au milieu de la poutre (point B)

$$\sigma_{frott}(B) = \sigma_{p0} \left( e^{-\left(0.6 \cdot \left(\frac{0.1377}{2}\right) + 0.003 \cdot \left(\frac{14.5}{2}\right)\right)} \right) = 969.25 MPa$$

4. Calculer la perte de contrainte due au frottement au point B (%)

$$\% \Delta\sigma_{frott}(CB) = \frac{1032.362 - 969.25}{1032.362} = 6.113\%$$

#### 4.5.2.Exercice 2

Soit une poutre simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie 35 KN/m. La précontrainte se fait au moyen de 3 câbles à relaxation normale de section 75 mm<sup>2</sup>. Les câbles de précontraintes subissent 85% de la contrainte à la traction qui est appliquée après 5 jours.

On demande de calculer

1. La force de tension  $P_0$  à l'origine
2. La force de tension en B (après frottement)
3. La force de tension en C (après frottement)
4. La force de tension en C (après frottement+ glissement)
5. La perte de tension due à la déformation instantanée du béton en point C
6. La perte de tension instantanée (C)
7. La perte de tension due au retrait du béton (C)
8. La perte de tension due au fluage (C)
9. La perte de tension due à la relaxation des aciers (C)
10. La perte de la tension différée
11. La contrainte finale probable (C)

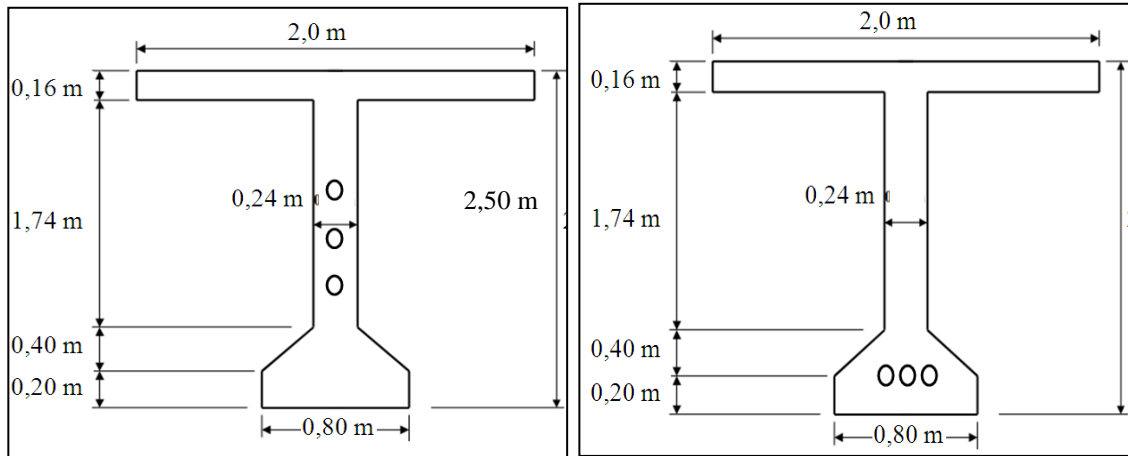
On donne :

Contrainte a la traction des câbles :  $\sigma_t = 2500 \text{ MPa}$  ,  $f = 0.2 \text{ rd}^{-1}$  ,  $\varphi = 0.002 \text{ m}^{-1}$ ,  $f_{prg}=2500 \text{ MPa}$ ,

$\alpha = 0.4 \text{ rd}$     $g = 6 \text{ mm}$     $E_p=190000 \text{ MPa}$     $\sigma_b^F = 34 \text{ MPa}$     $\sigma_b^M = 36 \text{ MPa}$     $f_{c28}=45 \text{ MPa}$

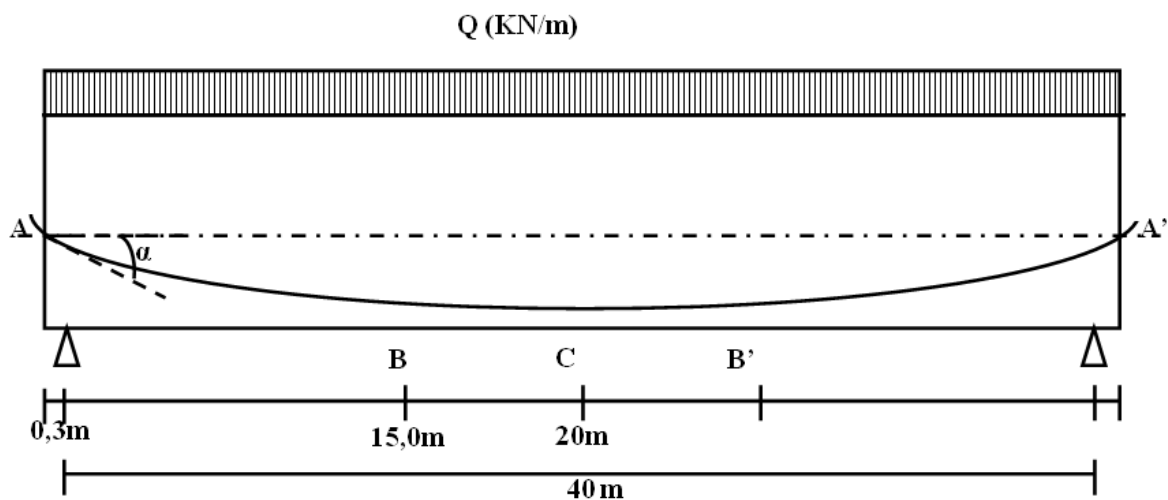
$\varepsilon_r = 3.10^{-4}$     $\rho_{1000}=2.5 \%$ , densité du béton :  $25 \text{ KN/m}^3$

$A = 1.205 \text{ m}^2$ ,  $Y_{sup} = 1.151 \text{ m}$ ,  $Y_{inf} = 1.349 \text{ m}$ ,  $I = 0.934 \text{ m}^4$



Coupe A-A en point A

Coupe C-C en point C



**Solution :**

1. La force de tension  $P_0$  a l'origine

$$P_0 = \sigma_0 * 0.85 = 2500 * 0.85 = 478.1 \text{ KN}$$

2. La force de tension en B (après frottement)



$$P_{frott}(B) = P_0(e^{-(f\alpha + \varphi x)}) = 478 * (e^{-(0.2*0.4 + 0.002*(15.3))}) = 428.06KN$$

3. La force de tension en C (après frottement)

$$P_{frott}(C) = P_0(e^{-(f\alpha + \varphi x)}) = 478 * (e^{-(0.2*0.4 + 0.002*(20.3))}) = 423.805KN$$

4. La force de tension en C (après frottement+ glissement)

$$d = \sqrt{\frac{gE_p(L_{AC})}{\Delta\sigma_{frott}(C)}} = \sqrt{\frac{6 * 190000 * 20300}{(2125 - 1883.6)}} = 9.791 m$$

$$\text{Donc } \Delta\sigma_{recul}(C)=0$$

5. La perte de tension due à la déformation instantanée du béton en point C

$$\Delta\sigma_{racc}(x) = \frac{n-1}{2n} * \frac{E_p}{E_{ij}} \sigma_b(x)$$

$$\sigma_b(C) = \frac{P}{B_n} + \frac{Pe^2(C)}{I_n} + \frac{M(C)e(C)}{I_n} = -\frac{423,8*10^3}{1,205*10^6} - \frac{423,8*10^3(1.149*10^3)^2}{0,924*10^{12}} + \frac{6207,1056*1.149*10^3}{0,924*10^{12}}$$

$$\sigma_b(C) = 6685.19MPa$$

$$\Delta\sigma_{racc}(x) = \frac{3-1}{2*3} * \frac{190000}{36517.06} * 6685.18 = 11.59MPa$$

6. La perte de tension instantanée (C)

$$\Delta\sigma_{instantan}(C) = \Delta\sigma_{frott}(C) + \Delta\sigma_{recul}(C) + \Delta\sigma_{racc}(C)$$

$$\Delta\sigma_{frott}(C) = \frac{(478.1 - 423.8045) * 10^3}{3 * 75} = 241.4MPa$$

$$\Delta\sigma_{instantan}(C) = 241.4 + 0 + 11.59 = 253MPa$$

7. La perte de tension due au retrait du béton (C)

$$\Delta\sigma_{ret}(C) = E_p \varepsilon_r(t) = 190000 * 0.0003 = 57MPa$$

8. La perte de tension due au fluage (C)

$$\Delta\sigma_{flua}(C) = 15 * \sigma_b^F = 15 * 34 = 510MPa$$

9. La perte de tension due a la relaxation des aciers(C)

$$\Delta\sigma_{rel}(C) = 6 \frac{\rho 1000}{100} \left( \frac{\sigma_{pi}(x)}{f_{prg}} - \mu_0 \right) \sigma_{pi}(x) = 6 \frac{\rho 1000}{100} \left( \frac{\sigma_{pi}(x)}{f_{prg}} - \mu_0 \right) \sigma_{pi}(x)$$

$$= 6 * 0.025 * \left( \frac{2125 - 253}{2500} - 0.3 \right) * (2125 - 253)$$

$$\Delta\sigma_{rel}(C) = 126.02 MPa$$

10. La perte de la tension déferée

$$\Delta\sigma_{pd}(C) = \Delta\sigma_{ret} + \Delta\sigma_{flu} + \frac{5}{6} \Delta\sigma_{rel} = 57 + 510 + \left( \frac{5}{6} * 126.02 \right)$$

$$\Delta\sigma_{pd}(C) = 672.015 MPa$$

11. La contrainte finale probable(C)

$$\sigma_{pmax}(C) = (1.02 * \sigma_{p0}) - (0.8 * (\Delta\sigma_{instantan} + \Delta\sigma_{pd})) = 1427.5 MPa$$

$$\sigma_{pmin}(C) = (1 * \sigma_{p0}) - (1.2 * (\Delta\sigma_{instantan} + \Delta\sigma_{pd})) = 1014.9 MPa$$

## Chapitre 05 : Vérification des contraintes

### 5.1. Introduction :

La vérification des contraintes dans la précontrainte est une étape essentielle pour garantir la sécurité, la durabilité et le bon comportement des structures en béton précontraint. Elle consiste à vérifier que les contraintes dans le béton et les armatures de précontrainte restent inférieures aux limites admissibles définies par les normes.

Les vérifications des contraintes dans le béton précontraint sont classées selon des critères définis par les normes (Eurocode 2, BAEL, etc.) pour garantir la durabilité, la sécurité et la performance de la structure.

### 5.2. Diagramme de vérification

Soit une poutre de section en T soumise à une force de précontrainte, dont les caractéristiques sont données à la figure ci-dessous.

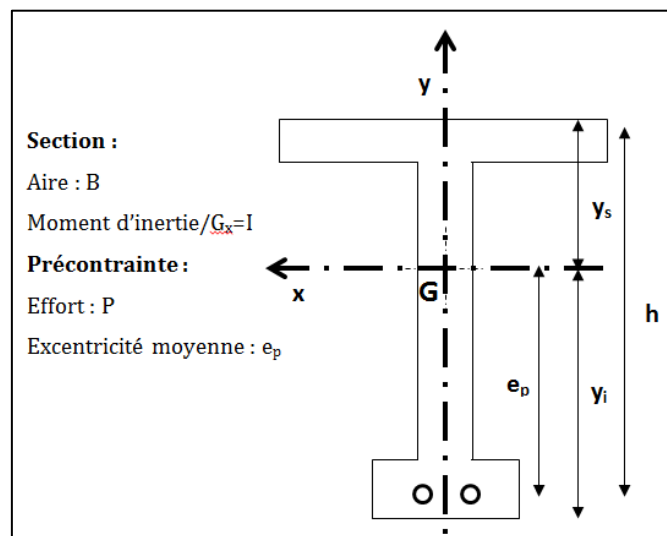


Figure 5.1. Poutre de section en T

Les règles de dimensionnement de la poutre utilisent essentiellement les notions liées à la présence des sollicitations de la flexion composée.

### 5.2.1. Noyau limite d'une section droite :

#### A. Centre de pression

La mise en place des câbles de précontrainte permettant de réduire largement les déformations flexionnelles dues aux sollicitations de traction. En effet, l'excentricité «  $e_0$  » de la force de précontrainte (au-dessous de centre de gravité de la poutre) peut créer par la suite une excentricité finale «  $e$  » avec l'ajout de moment «  $M_f$  » (Figure 5.2). La résultante de la force de précontrainte ainsi que le moment de flexion est appliquée en point appelé « centre de pression » d'ordonnée:

$$Pe = Pe_0 + M_f \quad (\text{Eq. 5.1})$$

L'excentricité finale peut être déduite par l'utilisation de l'équation suivante :

$$e = e_0 + \frac{M_f}{P} \quad (\text{Eq. 5.2})$$

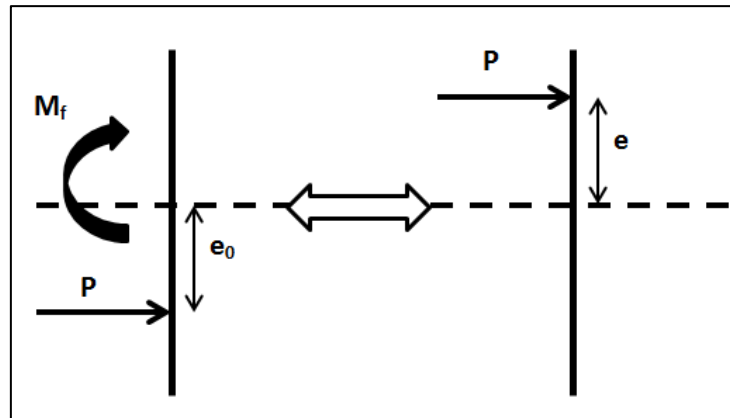


Figure. 5.2. Centre de pression d'un élément soumis à la précontrainte

### 5.3. Noyau limite

La contrainte dans une fibre d'ordonnée «  $y$  » s'écrit en valeur algébrique, sous la forme suivante :

$$\sigma_{(y)} = \frac{P}{B} + \frac{Pe_0 y}{I} + \frac{M_f y}{I} \quad (\text{Eq.5.3})$$

Puisque le rendement :

$$\rho = \frac{I}{By_s y_i} \quad (\text{Eq.5.4})$$

L'équation suivante (Eq.5.5) est obtenue par le remplacement de l'équation (Eq.5.4) dans l'équation (Eq.5.3) :

$$\sigma_{(y)} = \frac{P}{B} + (Pe_0 + M_f) \frac{y}{I} \quad (\text{Eq.5.5})$$

La contrainte finale due à la force de précontrainte et au chargement externe est donnée par l'équation suivante :

$$\bar{\sigma}_t \leq \sigma_y \leq \bar{\sigma}_c \quad (\text{Eq.5.6})$$

Avec

$\bar{\sigma}_t$  : La contrainte limite de traction

$\bar{\sigma}_c$  : La contrainte limite de compression.

Pour  $y = +y_s$ , le remplacement de ce paramètre dans les équations (Eq.5.5 et Eq.5.6.), l'équation suivante est obtenu :

$$\sigma_{s1} \leq \frac{P}{B} \left( 1 + \frac{e}{\rho y_i} \right) \leq \sigma_{s2} \quad (\text{Eq.5.7})$$

Ou :  $\sigma_{s1}$  : la contrainte limite à la fibre supérieure sous une charge P et un moment fléchissant minimum ( $M_m$ ),  $\sigma_{s2}$  : la contrainte limite à la fibre supérieure sous une charge P et Moment fléchissant Maximum ( $M_M$ )

Pour  $y = -y_i$ , le remplacement de ce paramètre dans les équations (Eq.5.5 et Eq.5.6.), l'équation suivante est obtenu :

$$\sigma_{i2} \leq \frac{P}{B} \left( 1 - \frac{e}{\rho y_s} \right) \leq \sigma_{i1} \quad (\text{Eq.5.8})$$

Ou :  $\sigma_{i1}$  : la contrainte limite à la fibre inférieure sous une charge P et un Moment fléchissant minimum ( $M_m$ ),  $\sigma_{i2}$  : la contrainte limite à la fibre supérieure sous une charge P et Moment fléchissant Maximum ( $M_M$ ) (Figure 5.3).

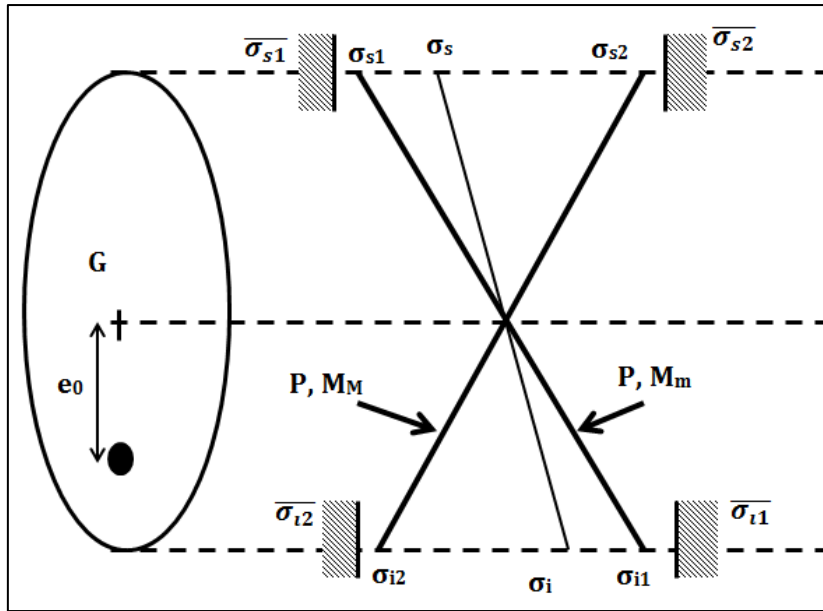


Figure. 5.3. Contraintes et contraintes limites dans une section

L'égalité des équations (Eq.5.7) et (Eq.5.8) donne l'équation (Eq.5.9) et (Eq.5.10)

$$-\rho y_i \left(1 - \frac{\sigma_{s1} B}{P}\right) \leq e \leq \rho y_i \left(\frac{\sigma_{s2} B}{P} - 1\right) \quad (\text{Eq.5.9})$$

$$-\rho y_s \left(\frac{\sigma_{i1} B}{P} - 1\right) \leq e \leq \rho y_s \left(1 - \frac{\sigma_{i2} B}{P}\right) \quad (\text{Eq.5.10})$$

Si on pose que :

$$\bullet \quad C_i = \rho y_s \left(\frac{\sigma_{i1} B}{P} - 1\right) \quad (\text{Eq.5.11})$$

$$\bullet \quad C_s = \rho y_i \left(\frac{\sigma_{s2} B}{P} - 1\right) \quad (\text{Eq.5.12})$$

$$\bullet \quad -T_i = -\rho y_i \left(1 - \frac{\sigma_{s1} B}{P}\right) \quad (\text{Eq.5.13})$$

$$\bullet \quad T_s = \rho y_s \left(1 - \frac{\sigma_{i2} B}{P}\right) \quad (\text{Eq.5.14})$$

Ou :

- Le segment  $[-C_i, C_s]$  : présente le noyau limite (fuseau de passage) de Compression
- Le segment  $[-T_i, T_s]$  : présente le noyau limite (fuseau de passage) de Traction
- Le segment  $[-S_i, S_s] = [-C_i, C_s] \cap -[T_i, T_s]$  : présente le noyau limite au sens Strict.

Le remplacement de l'équation (Eq.5.2) dans les équations (Eq.5.10 et Eq. 5.13), on obtient les équations suivantes :

$$e_0 \geq -T_i - \frac{M_m}{P} \quad (\text{Eq. 5.15})$$

$$e_0 \leq T_s - \frac{M_M}{P} \quad (\text{Eq. 5.16})$$

Alors, l'excentricité de câble moyen fictif et la ligne de pression doivent être comprises entre les deux bornes selon l'équation suivante :

$$-T_i - \frac{M_m}{P} \leq e_0 \leq T_s - \frac{M_M}{P} \quad (\text{Eq. 5.17})$$

### 5.5. Notion des sections critique

Pour qu'une précontrainte soit applicable à un élément structural, deux conditions fondamentales doivent être satisfaites :

- **La présence d'un segment de passage** : zone où doit s'exercer la force de précontrainte pour garantir l'équilibre des contraintes.
- **Un enrobage adéquat** : protection minimale requise pour les câbles de précontrainte, assurant durabilité et résistance aux agressions extérieures.

#### 5.5.1. Section sous critique :

Une section est qualifiée de **sous-critique** si l'ensemble des segments de passage (zones où s'applique la précontrainte) se situe entièrement à l'intérieur de la zone autorisée, garantissant ainsi un **enrobage suffisant** des câbles (Figure 5.4).

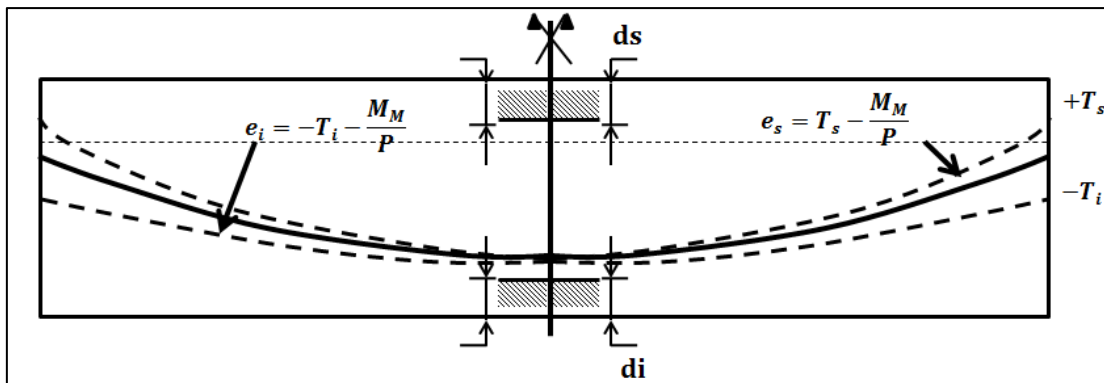


Figure. 5.4. Fuseau de passage pour une section critique et une sous-critique

### 5.5.2. Section critique

La section est dite **critique** lorsque le segment de passage se réduit théoriquement à un seul point. Cette situation limite marque la frontière entre une configuration acceptable et inacceptable en termes de stabilité et de respect des normes d'enrobage (Figure 5.4).

### 5.5.3. Section sur-critique

Une section est **sur-critique** si l'une des extrémités du segment de passage dépasse la zone d'enrobage autorisée, créant ainsi un segment ouvert. Cette configuration compromet la protection des câbles et la durabilité de la structure (Figure.5.5).

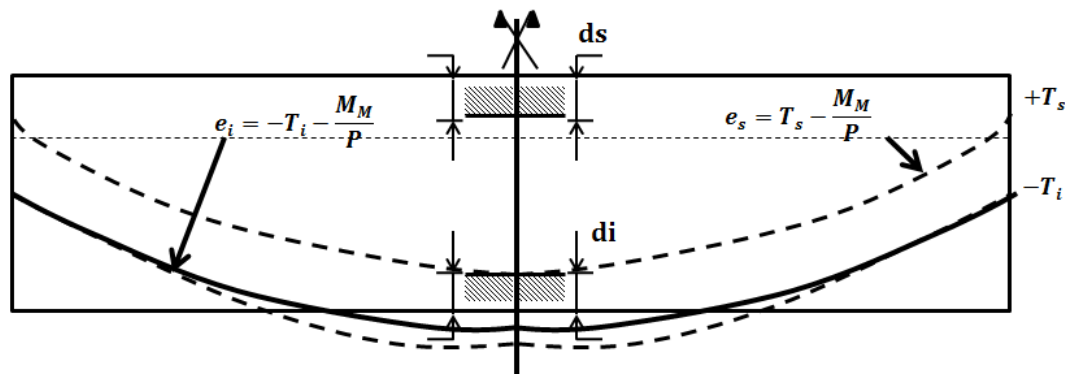


Figure. 5.5. Fuseau de passage pour une section sur-critique.

## 5. 6.Evaluation de la précontrainte

### 5.6.1. Cas d'une section critique et sous critique :

Pour la section critique et sous critique, le segment de passage est limité à un point selon l'équation suivante : (voir Figure 5.4)

$$-T_i - \frac{M_m}{P_I} = e_0 = T_s - \frac{M_M}{P_I} \quad (\text{Eq.5.18})$$

La force de précontrainte  $P_I$  peut être déduite :

$$P_I = \frac{M_M - M_m}{T_s + T_i} = \frac{\Delta M}{T_s + T_i} \quad (\text{Eq.5.19})$$

On remplace les équations (Eq.5.13 et Eq5.14) dans l'équation (Eq.5.19) pour trouver l'équation (Eq.5.20)



$$P_I = \frac{\Delta M + \rho B (y_s \sigma_{i2} + y_i \sigma_{s1})}{\rho h} \quad (\text{Eq.5.20})$$

En plus, puisque:  $B = \frac{I}{\rho y_s y_i}$ , on obtient l'équation suivante:

$$P_I = \frac{\Delta M + \frac{I}{y_i} \sigma_{i2} + \frac{I}{y_i} \sigma_{s1}}{\rho h} \quad (\text{Eq.5.21})$$

### 5.6.2. Cas d'une section sur critique :

A. Moment positif  $M_M$ : Voir Figure 5.5

$$e_0 = T_s - \frac{M_M}{P_{II}} = -(y_i - d_i) \quad (\text{Eq.5.22})$$

D'où on tire la valeur de  $P_{II}$  par l'équation suivante :

$$P_{II} = \frac{M_M}{T_s + y_i - d_i} \quad (\text{Eq.5.23})$$

De même:

$$P_{II} = \frac{M_M + \frac{I}{y_i} \sigma_{i2}}{y_i + \rho y_s - d_i} \quad (\text{Eq.5.24})$$

A. Moment négatif  $M_m$ : Voir Figure 5.5

$$e_0 = -T_i - \frac{M_m}{P_{II}} = (y_s - d_s) \quad (\text{Eq.5.25})$$

D'où on tire la valeur de  $P_{II}$  par l'équation suivante :

$$P_{II} = \frac{-M_m}{T_i + y_s - d_s} \quad (\text{Eq.5.26})$$

De même:

$$P_{II} = \frac{-M_m + \frac{I}{y_s} \sigma_{s1}}{y_s + \rho y_i - d_s} \quad (\text{Eq.5.27})$$

### Remarque :

- La section est considérée sous critique pour  $P_I > P_{II}$ , et sur critique pour  $P_I < P_{II}$
- Si  $\sigma_{s1} = \sigma_{i2} = 0$  d'où :

- $T_s = \rho y_s$  et  $T_i = \rho y_i$
- $P_I = \frac{\Delta M}{\rho h}$  pour une section sous critique
- $P_{II} = \frac{M_M}{y_i + \rho y_s - d_i}$  pour une section sur critique avec un moment positif
- $P_{II} = \frac{-M_m}{y_s + \rho y_i - d_s}$  pour une section sur critique avec un moment négatif

### 5.7. Section minimale du béton :

La section minimale de béton est atteinte lorsque les contraintes de compression induites) dans le matériau égalent les contraintes limites admissibles. Cette approche garantit une utilisation optimale du béton, sans dépasser sa capacité portante.

#### 5.7.1. Cas d'une section sous critique :

On prend alors  $P = P_I$  et l'on atteint les deux contraintes limites de traction  $\overline{\sigma}_{s1}$  et  $\overline{\sigma}_{i2}$ . Pour obtenir les deux contraintes limites de compression, il faut et il suffit que les variations de contrainte sur la fibre supérieure ( $\Delta\sigma = \Delta M \frac{y}{I}$ ) et sur la fibre inférieure ( $\Delta\sigma = \Delta M \frac{y}{I}$ ), d'où :

$$\frac{I}{y_s} \geq \frac{M_M - M_m}{\sigma_{s2} - \sigma_{s1}} = \frac{\Delta M}{\Delta\sigma_s} \quad (\text{Eq.5.28})$$

$$\frac{I}{y_i} \geq \frac{M_M - M_m}{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}} = \frac{\Delta M}{\Delta\sigma_i} \quad (\text{Eq.5.29})$$

#### 5.7.2. Cas d'une section sous critique :

A. Moment positif :

$$\frac{I}{y_s} \geq \frac{\rho Ph}{\sigma_{s2} - \frac{y_s}{y_i} \sigma_{i2}} = \frac{\Delta M}{\Delta\sigma_i} \quad (\text{Eq.5.30})$$

$$\frac{I}{y_i} \geq \frac{M_M - M_m}{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}} = \frac{\Delta M}{\Delta\sigma_i} \quad (\text{Eq.5.31})$$

B. Moment négatif :

$$\frac{I}{y_s} \geq \frac{M_M - M_m}{\sigma_{s2} - \sigma_{s1}} = \frac{\Delta M}{\Delta\sigma_s} \quad (\text{Eq.5.32})$$

$$\frac{I}{y_i} \geq \frac{\rho Ph}{\sigma_{i1} - \frac{y_i}{y_s} \sigma_{s1}} \quad (\text{Eq.5.33})$$

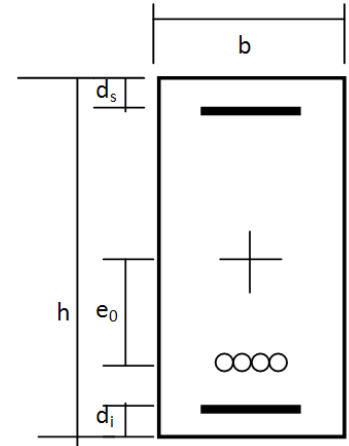
## 5.8. Application:

### 5.8.1. Exercice 1 :

Soit une poutre de section rectangulaire soumise aux moments  $M_m=1.4$  MNm et  $M_M=3.8$  MNm avec une valeur de l'enrobage  $d_i=0.15$ m.

1. Déterminer la valeur de la précontrainte ( $P_I$  et  $P_{II}$ ).
2. Donner une constatation sur la nature de la section.
3. Déterminer la valeur de l'excentricité  $e_0$ .

On donne :  $b = 40$  cm,  $h = 130$ cm,  $d_s = d_i = 15$  cm



### Solution :

1. Détermination de la valeur de la précontrainte ( $P_I$  et  $P_{II}$ ).

$$P_I = \frac{\Delta M}{\rho h} ; \rho = \frac{I}{By_s y_i} ; I = 0.073 \text{ m}^4$$

$$\rho = 0.333$$

$$P_I = \frac{\Delta M}{\rho h} = \frac{3.8 - 1.4}{0.333 * 1.3} = 5.538 \text{ MN}$$

$$P_{II} = \frac{M_M}{y_i + \rho y_s - d_i} = \frac{3.8}{0.65 + 0.333 * 0.65 - 0.15} = 5.302 \text{ MN}$$

2. Constatation sur la nature de la section

$$P_I > P_{II} \Rightarrow \text{la section est sous critique}$$

3. calcul la valeur de l'excentricité  $e_0$ .

$$-T_i - \frac{M_m}{P} \leq e_0 \leq T_s - \frac{M_M}{P} \Rightarrow$$

$$e_0 = T_s - \frac{M_M}{P} = \rho y_s - \frac{M_M}{P} = 0.333 * 0.65 - \frac{3.8}{5.538} = -0.469 \text{ m}$$

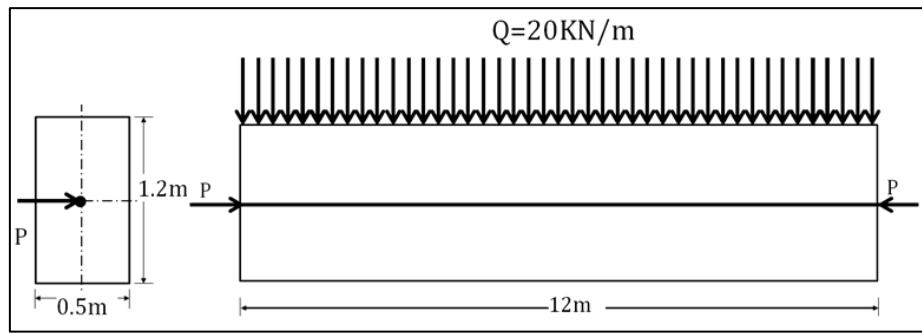
**5.8.2. Exercice 2 :**

Une poutre de section rectangulaire 0.5 x 1.2m soumise à une force de précontrainte  $P = 1500$  KN. La poutre ayant une longueur  $L = 12$  m supporte une charge uniformément répartie  $q = 20$  KN/m (Figure ci-dessous).

On demande de déterminer la position de la ligne de pression qui correspond au cas suivant :

- 1- Charge G+ P
- 2- Charge Q+P
- 3- Charge G+Q+P

On donne : La densité du béton  $D=25$ KN/m<sup>3</sup>



Solution:

1. Calcul de la position de la ligne de pression pour G+P

$$G = 25 \cdot B = 15 \text{ KN/m}$$

$$M_{(G)} = \frac{(G)L^2}{8} = 270 \text{ KNm}$$

- **Contrainte de compression**

$$\sigma_{M_G}^{Sup} = -\frac{My_{sup}}{I} = -2.25 \text{ MPa}$$

- **Contrainte de traction**

$$\sigma_{M_G}^{Inf} = +\frac{My_{inf}}{I} = +2.25 \text{ MPa}$$

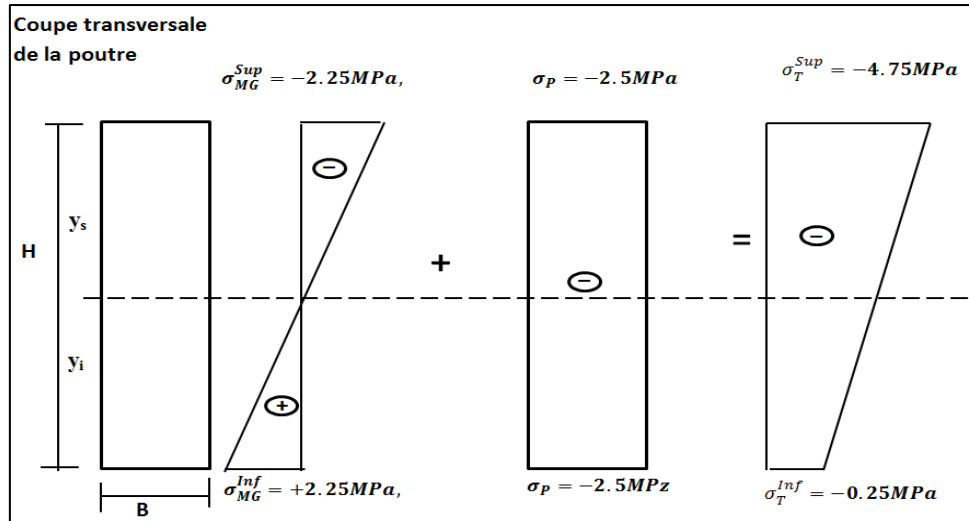
**Calcul des contraintes dues à la force de précontrainte P**

$$\sigma_P^{Sup,inf} = -\frac{P}{B} = -2.5 \text{ MPa}$$

**Contrainte totale pour G+P**

$$\sigma_T^{Sup} = \sigma_{M_G}^{Sup} + \sigma_P^{Sup} = -4.75 \text{ MPa}$$

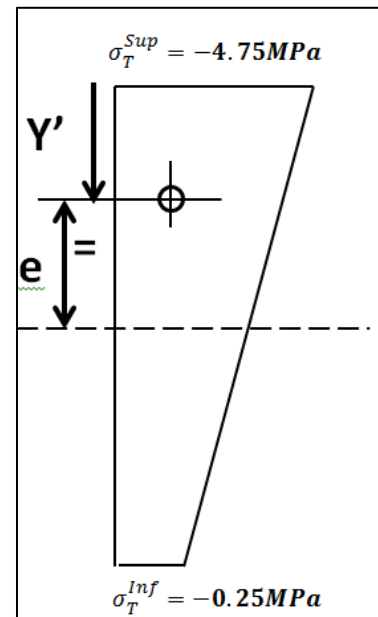
$$\sigma_T^{Inf} = \sigma_{M_G}^{Inf} + \sigma_P^{Inf} = -0.25 \text{ MPa}$$



### Position de la ligne de pression :

On doit calculer le centre de gravité du trapèze qui présente des contraintes totales

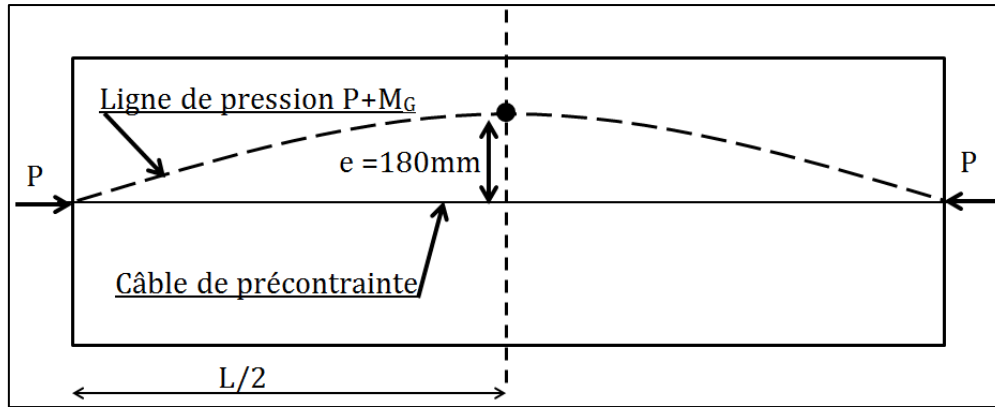
$$\sigma_T^{Sup} = -4.75 MPa \text{ et } \sigma_T^{Inf} = -0.25 MPa$$



$$Y' = \frac{\left( -0.25 * 1200 * \left( \frac{1200}{2} \right) \right) + \left( 0.5 * (-4.75 - (-0.25)) * 1200 * \left( \frac{1200}{3} \right) \right)}{(-0.25 * 1200) + (0.5 * (-4.75 - (-0.25)))} = 420 mm$$

Donc l'excentricité initiale  $e_0 = 0$  cm et l'excentricité finale (P+M<sub>G</sub>)

$$E = 600 - 420 = 180 mm$$



## 2. Calcul de la position de la ligne de pression pour Q+P

$Q = 20 \text{ kN/m}$

$$M_{(G)} = \frac{(Q)L^2}{8} = 360 \text{ kNm}$$

### - Contrainte de compression

$$\sigma_{M_Q}^{sup} = -\frac{My_{sup}}{I} = -3 \text{ MPa}$$

### - Contrainte de traction

$$\sigma_{M_Q}^{inf} = +\frac{My_{inf}}{I} = +3 \text{ MPa}$$

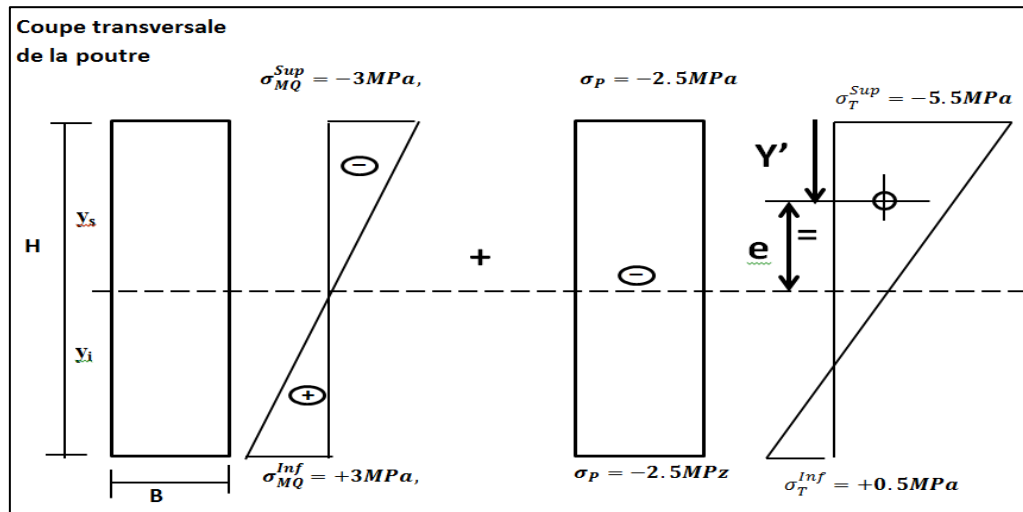
### Calcul des contraintes dues à la force de précontrainte P

$$\sigma_P^{sup,inf} = -\frac{P}{B} = -2.5 \text{ MPa}$$

### Contrainte totale pour G+P

$$\sigma_T^{sup} = \sigma_{M_G}^{sup} + \sigma_P^{sup} = -5.5 \text{ MPa}$$

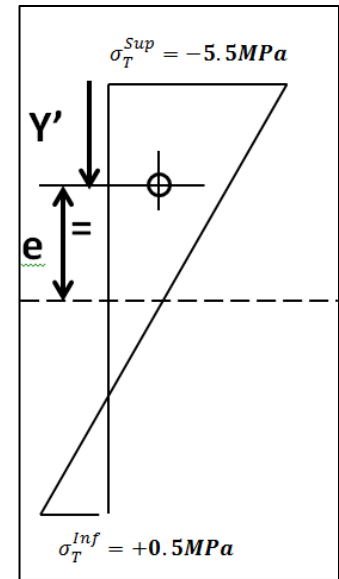
$$\sigma_T^{inf} = \sigma_{M_G}^{inf} + \sigma_P^{inf} = +0.5 \text{ MPa}$$



**Position de la ligne de pression :**

On doit calculer le centre de gravité des deux triangles qui présente des contraintes totales

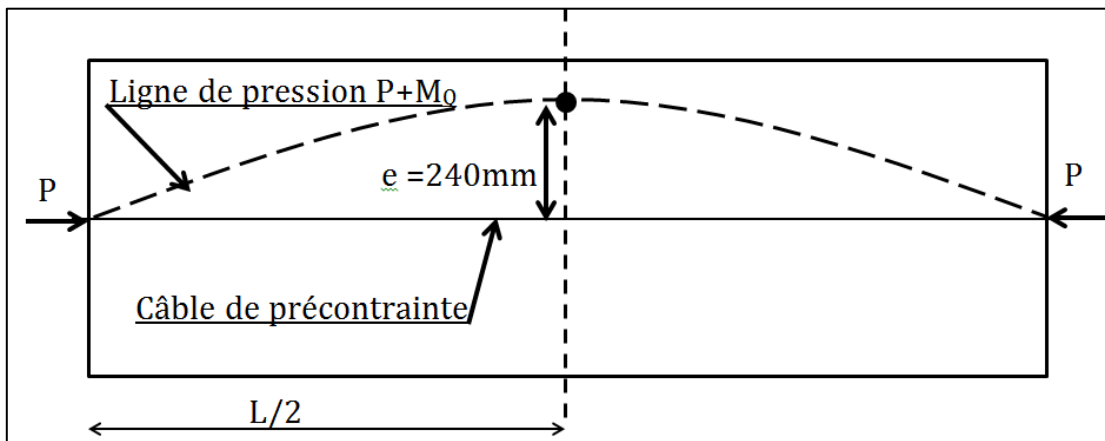
$$\sigma_T^{Sup} = -5.5MPa \text{ et } \sigma_T^{Inf} = -0.5MPa$$



$$Y' = \frac{\left(-0.5 * 5.5 * 1100 * \left(\frac{1100}{3}\right)\right) + \left(0.5 * (0.5 * 100) * \left(\frac{2 * 100}{3} + 1100\right)\right)}{(-0.5 * 5.5 * 1100) + (0.5 * 0.5 * 100)} = 360mm$$

Donc l'excentricité initiale  $e_0 = 0$  cm et l'excentricité finale (P+M<sub>Q</sub>)

$$e = 600 - 360 = 240mm$$

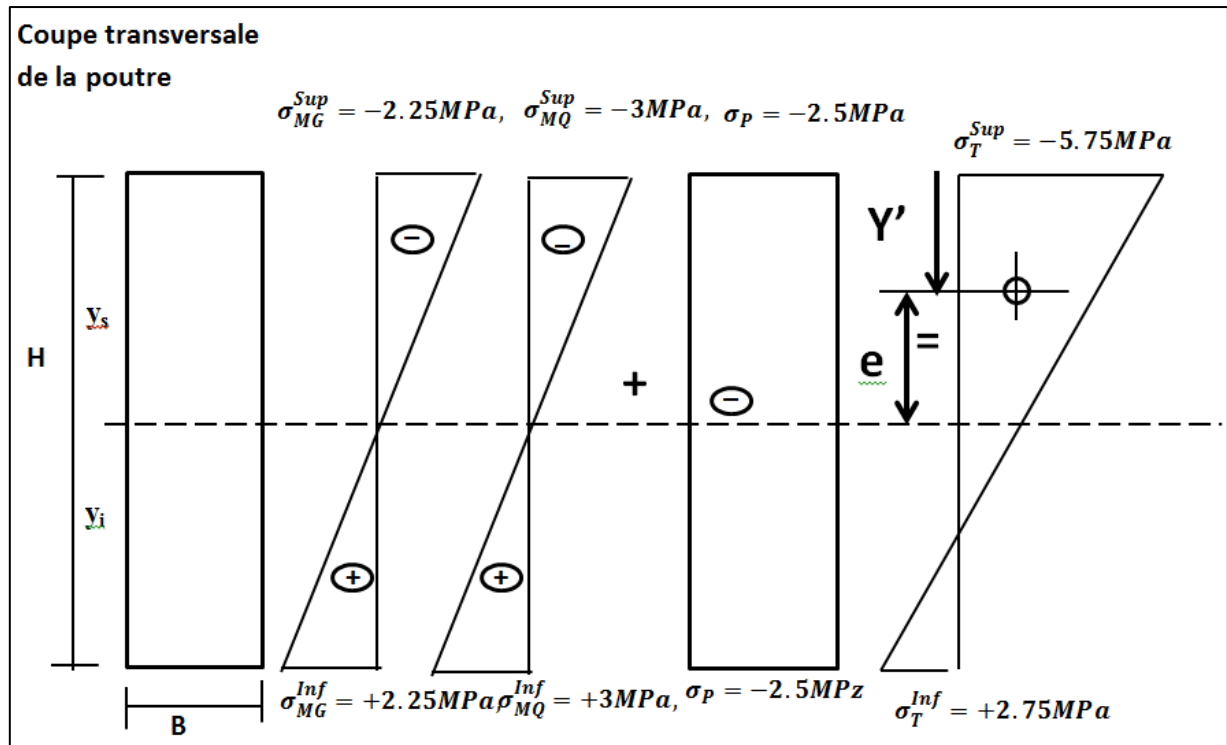


### 3. Calcul de la position de la ligne de pression pour G+Q+P

**Contrainte totale pour G+Q+P**

$$\sigma_T^{Sup} = \sigma_{M_G}^{Sup} + \sigma_{M_Q}^{Sup} + \sigma_P^{Sup} = -7.75MPa$$

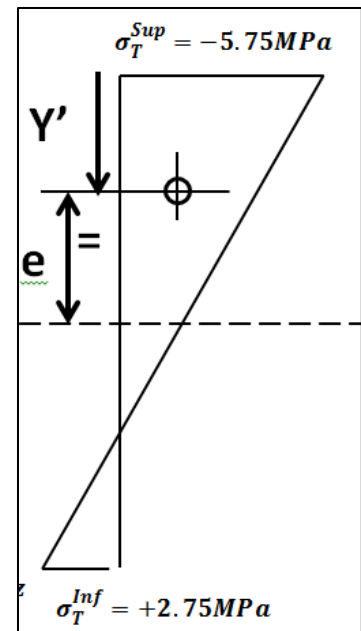
$$\sigma_T^{Inf} = \sigma_{M_G}^{Inf} + \sigma_{M_Q}^{Inf} + \sigma_P^{Inf} = +2.75MPa$$



### Position de la ligne de pression :

On doit calculer le centre de gravité des deux triangles qui présente des contraintes totales

$$\sigma_T^{Sup} = -5.75MPa \text{ et } \sigma_T^{Inf} = +2.75MPa$$



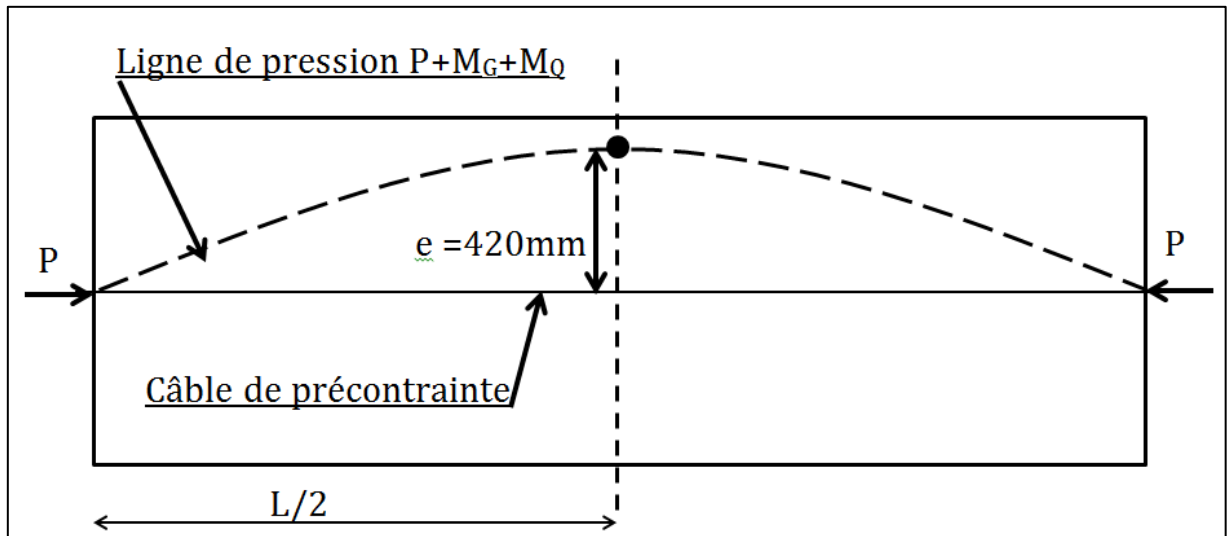


$$Y' = \frac{\left(0.5 * 885.71 * (-7.75) * \left(\frac{1100}{3}\right)\right) + \left(0.5 * (314.285 * 2.75) * \left(\frac{2 * 314.285}{3} + 885.71\right)\right)}{(0.5 * 885.285 * (-7.75)) + (0.5 * 3331114.285 * 2.75)}$$

$= 180\text{mm}$

Donc l'excentricité initiale  $e_0 = 0 \text{ cm}$  et l'excentricité finale  $(P+M_G+M_Q)$

$$e = 600 - 180 = 420\text{mm}$$



# Chapitre 6 : Justification des sections courantes

## 6.1. Introduction :

La vérification des contraintes dans le béton précontraint est une étape essentielle pour garantir la sécurité et la durabilité des structures. Elle s'effectue généralement aux États Limites de Service (ELS) et repose sur des critères définis par les normes (Eurocodes, BAEL, BPEL, etc.).

## 6.2. Justification vis-à-vis le moment fléchissant

### 6.2.1. Vérification à l'état limite de service

La vérification à l'état limite de service (ELS) du béton précontraint vise à garantir que la structure reste fonctionnelle, durable et esthétique sous les charges d'exploitation, sans dépasser les contraintes ou déformations admissibles.

Les contraintes dans le béton sont calculées en considérant :

- L'effet de la précontrainte  $P$  (avec son excentricité  $e$ ).
- Les charges extérieures (poids propre, charges d'exploitation, etc.).

La contrainte en fibre supérieure ( $\sigma_{sup}$ ) et inférieure ( $\sigma_{inf}$ ) d'une section est donnée par l'équation suivante :

$$\sigma(y) = \frac{P}{B} + (Pe + M) \frac{y}{I} \quad (\text{Eq.6.1})$$

Dans le cas général, on doit avoir :  $\bar{\sigma}_{min} < \sigma(y) < \bar{\sigma}_{max}$

Les contraintes maximales autorisées diffèrent en fonction des combinaisons de charges et des phases (construction vs service).

Les calculs en section courante sont conduits moyennant les deux hypothèses fondamentales suivantes :

Les calculs en section courante reposent sur les deux hypothèses fondamentales suivantes :

- **La conservation des sections planes** (les sections droites restent planes après déformation) ;
- **Un comportement élastique des matériaux** (contraintes proportionnelles aux déformations).

Selon le type de vérification, des hypothèses complémentaires s'appliquent :

#### **a) Calcul en section non fissurée**

- Le béton tendu participe à la résistance en traction ;
- Aucun glissement relatif n'est admis entre les matériaux.

Les contraintes normales induites par les actions variables (autres que les charges permanentes) peuvent être calculées sur la section homogénéisée.

#### **b) Calcul en section fissurée**

- La résistance du béton tendu est négligée ;
- Aucun glissement relatif n'est considéré entre les matériaux ;
- Condition sur les armatures : Lorsque la déformation du béton est nulle au niveau d'une armature, la contrainte dans celle-ci est prise égale à :
  - 0 pour les armatures passives.
  - $\sigma_{pd} + n_i$  (avec  $n_i = 5$ ) s'il s'agit d'une armature de précontrainte ;

Après la décompression du béton, les aciers passifs ont subi des contraintes, ainsi que l'évolution de la surtension dans les armatures de précontrainte, sont calculées en utilisant un coefficient d'équivalence  $n = 15$ .

#### **C) Classe de vérification**

La justification des éléments précontraints repose sur une classification des vérifications selon les exigences de limitation des contraintes et de maîtrise de la fissuration. On distingue généralement : (voire Figure. 6.1)

- **Classe I - Pas de traction admissible**
  - **Principe** : Aucune traction n'est autorisée dans le béton sous combinaisons caractéristiques.

- **Domaine d'application** : Ouvrages sensibles à la corrosion ou nécessitant une étanchéité stricte.
- **Hypothèses** :
  - Section non fissurée (béton tendu résistant).
  - Contraintes calculées avec un coefficient d'équivalence adapté ( $n = 15$ ).
- **Classe II - Fissuration temporaire maîtrisée**
  - **Principe** : Fissuration admissible sous charges rares, mais refermeture sous charges permanentes.
  - **Domaine d'application** : Ouvrages courants où une microfissuration transitoire est tolérée.
  - **Hypothèses** :
    - Section partiellement fissurée (béton tendu négligé en phase fissurée).
    - Vérification des contraintes en phase de service et sous combinaisons fréquentes.
- **Classe III - Fissuration acceptée sous contrôle**
  - **Principe** : Fissuration permanente autorisée, avec limitation des ouvertures de fissures.
  - **Domaine d'application** : Ouvrages où la durabilité est assurée par des dispositions constructives (enrobage, armatures passives).
  - **Hypothèses** :
    - Calcul en section fissurée.
    - Vérification des contraintes dans les aciers (passifs et de précontrainte) et de l'ouverture des fissures

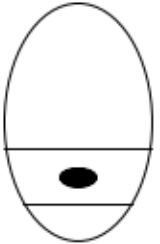
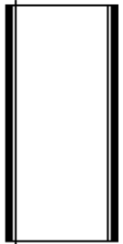
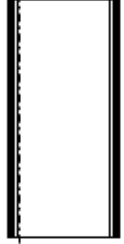
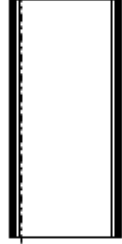
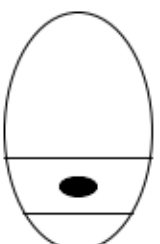
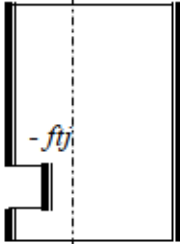
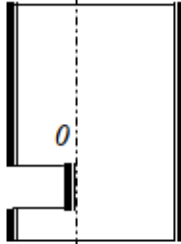
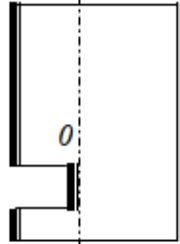
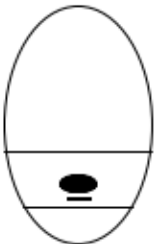
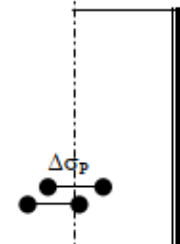
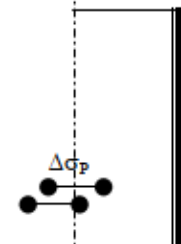
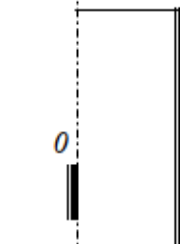
<i>Exécution</i>		<i>Service</i>		
		<i>c. Rares</i>	<i>c. Fréquente</i>	<i>c. Quasi perm.</i>
<b><u>Classe I</u></b>	$-0.7 f_{tj}$ $0.6 f_{cj}$ 	$0.6 f_{cj}$ 	$0.6 f_{cj}$ 	$0.5 f_{cj}$ 
<b><u>Classe II</u></b>	$-1.5 f_{tj}$ $0.6 f_{cj}$ 	$-1.5 f_{tj}$ $0.6 f_{cj}$ $-1.5 f_{tj}$ $0.6 f_{cj}$ $-1.5 f_{tj}$ $0.5 f_{cj}$ $-f_{tj}$ 	$0$ 	$0$ 
<b><u>Classe III</u></b>	$0.6 f_{cj}$ 	$0.6 f_{cj}$ 	$0.6 f_{cj}$ 	$0$ 

Figure 6.1. Classe de vérification des contraintes dans le béton

**D) Armatures des zones tendues**

Dans les parties de la section où le béton est tendu, il est nécessaire de disposer une section d'armatures minimale  $A_s$  par l'utilisation de l'équation suivante :

$$A_s = \frac{B_t}{1000} + \frac{N_{Bt} f_{tj}}{f_e \sigma_{Bt}} \quad (\text{Eq.6.2})$$

Avec :

- $B_t$  : l'aire de la partie du béton tendu
- $N_{Bt}$  : la résultante des contraintes de traction correspondantes
- $\sigma_{Bt}$  : la valeur absolue de la contrainte maximale de traction.

Cette règle vise à garantir que les zones de béton tendu (souvent en partie inférieure des poutres) soient suffisamment armées pour :

1. Limiter la fissuration non contrôlée.
2. Reprendre les efforts de traction résiduels non compensés par la précontrainte.
3. Assurer la durabilité de la structure (en Classe II ou III, où la traction est admise sous conditions).

La formule proposée ( $A_s$ ) définit la section minimale d'armatures passives à disposer en fonction de l'aire du béton tendu ( $B_t$ ) et des contraintes de traction ( $\sigma_{Bt}$ ).

### 6.2.2. Vérification à l'état limite ultime

La vérification de la précontrainte à l'État Limite Ultime (ELU) consiste à s'assurer que la structure résiste aux sollicitations maximales (rupture du béton ou des aciers) en tenant compte des coefficients de sécurité.

Aux États Limites Ultimes (ELU), les hypothèses suivantes sont retenues :

- **La conservation des sections planes** : Les sections droites restent planes jusqu'à la rupture. Cette hypothèse est validée expérimentalement, notamment pour les éléments sollicités en flexion simple ou composée, lorsque l'effort tranchant reste secondaire.
- **La non-prise en compte du béton tendu** : La résistance du béton en traction est négligée. Cette simplification est largement justifiée dans les cas pratiques, en particulier pour les structures courantes.
- **Les lois de comportement des matériaux** : Les relations contrainte-déformation (de type  $\sigma = f(\epsilon)$ ) sont définies pour l'acier et le béton.
- **Pondération des caractéristiques des matériaux** : Les propriétés mécaniques des matériaux sont affectées par des coefficients de sécurité partiels, conformément aux normes de dimensionnement.

### 6.2.2. Principe de vérification d'une section

Sous l'effet des combinaisons d'actions aux ELU, les charges extérieures appliquent à la section un moment fléchissant  $M_u$  et un effort normal  $N_u$ .  $N_u$  est compté positivement s'il s'agit d'une compression.

La méthode fondamentale de vérification repose sur la détermination d'un état de déformations dans la section (défini par un couple de paramètres  $\varepsilon_{inf}$   $\varepsilon_{sup}$ ) générant des efforts internes  $N_{int}$  et  $M_{int}$  en équilibre avec les sollicitations externes  $N_u$  et  $M_u$ . La section est validée à l'ELU si les déformations des matériaux ne dépassent pas leurs limites réglementaires. Cependant, cette approche nécessite des calculs itératifs complexes.

Une méthode alternative consiste à vérifier la position du point  $(N_u, M_u)$  dans le plan  $(N, M)$  par rapport au diagramme d'interaction de la section. Ce diagramme représente l'enveloppe de tous les couples  $(N_{int}, M_{int})$  correspondant aux états de déformation admissibles de la section. Un point situé sur la frontière du diagramme indique qu'au moins un matériau (acier ou béton) atteint sa limite de déformation ultime.

La Figure 6.3 illustre le diagramme d'interaction d'une section rectangulaire précontrainte par un câble positionné près de la fibre inférieure. Ce graphique permet une vérification rapide de la résistance de la section sous différentes combinaisons de charges.

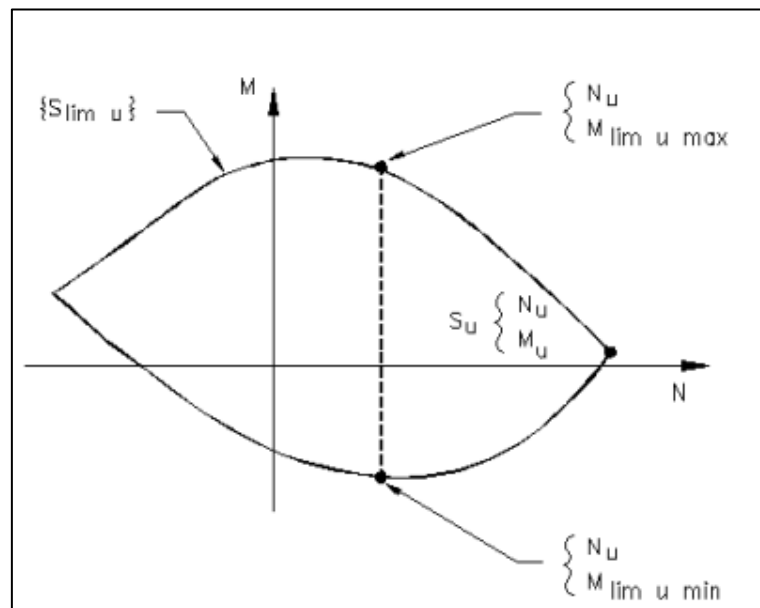


Figure 6.3. Diagramme d'interaction

En pratique, le tracé complet du diagramme d'interaction n'est pas nécessaire. Il suffit de déterminer, pour l'effort normal  $Nu$  appliqué, le point correspondant sur le diagramme. L'ordonnée de ce point, notée  $Mr$ , représente le moment résistant de la section sous cet effort normal  $Nu$ . La vérification se réduit alors à confirmer que le moment sollicitant  $Mu$  reste inférieur à  $Mr$ .

Sur le plan théorique, pour une valeur fixée de  $Nu$ , le diagramme d'interaction associe deux valeurs de moment fléchissant (positive et négative). Le signe de  $Mu$  permet de sélectionner la valeur de  $Mr$  à considérer pour la vérification.

Par convention, on supposera  $Mu > 0$ . Si cette condition n'est pas respectée (i.e.,  $Mu < 0$ ), il est possible de modifier l'orientation de la section (par symétrie ou rotation) pour se ramener à un cas où  $Mu$  devient positif, simplifiant ainsi l'analyse.

### 6.3. Justification vis-à-vis les efforts tranchants

Une poutre sollicitée par un effort tranchant doit être vérifiée selon les critères suivants :

- **Dans toutes les sections de la poutre :**

Respect des états-limites de service (ELS) et états-limites ultimes (ELU).

- **Au niveau des zones d'appui simple et des extrémités :**

Vérifications supplémentaires portant sur l'équilibre de la bielle de compression induite par l'effort tranchant, ainsi que sur la stabilité du coin inférieur (si applicable).

#### 6.3.1. Influence de la précontrainte

La précontrainte introduit une composante supplémentaire dans les calculs. L'effort tranchant total  $V$  intègre ainsi :

- Les charges permanentes ( $V_g$ ),
- Les charges d'exploitation ( $V_q$ ),
- La contribution de la précontrainte ( $V_p$ ), selon la relation suivante :

$$V = V_g + V_q + V_p \quad (\text{Eq.6.3})$$

- **Décomposition de l'effort de précontrainte**

Pour un câble de précontrainte appliquant une force  $P$  avec un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe de la poutre :



- La composante axiale (normale à la section) est :

$$N = P \cos \alpha \quad (N > 0),$$

- La composante transversale (perpendiculaire à l'axe) est :

$$V_p = -P \sin \alpha \quad (V_p < 0)$$

### 6.3.2. Effort tranchant réduit

L'effort tranchant à considérer devient alors un **effort tranchant réduit**  $V_{red}$ , défini par:

$$V_{red} = (V_g + V_q) - P \sin \alpha \quad (\text{Eq.6.4})$$

Le signe de  $\sin \alpha$  détermine si la précontrainte est favorable (réduction de  $V$ ) ou défavorable (augmentation de  $V$ ).

### 6.3.3. Vérification à l'état limite de service

Lorsque la poutre comporte des armatures transversales de précontrainte (câbles inclinés sur la Figure 6.4).

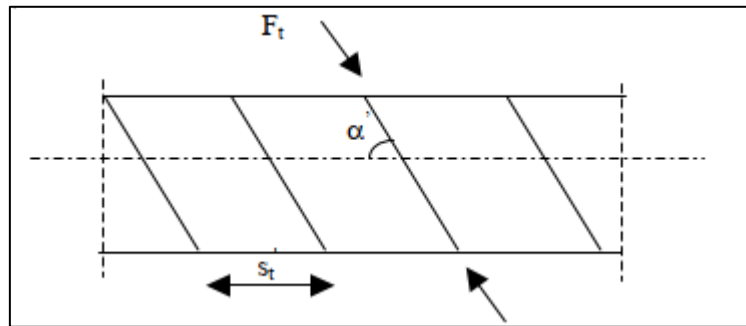


Figure 6.4. Poutre avec armatures transversales de précontrainte

Les justifications mécaniques d'une section de poutre reposent sur l'analyse des contraintes générées par les charges appliquées. Dans ce cas, les contraintes étudiées sont :

- $\sigma_x$  : Contrainte normale longitudinale (selon l'axe de la poutre) qui est donnée par l'équation suivante :

$$\sigma_x = \sigma + \left( \frac{F_t}{b_n s_{t'}} \right) \cdot \left( \frac{\cos \alpha'}{\tan \alpha'} \right) \quad (\text{Eq.6.5})$$

- $\sigma_t$  : Contrainte normale transversale (perpendiculaire à l'axe) :

$$\sigma_t = \frac{F_t}{b_n s_{t'}} \sin \alpha' \quad (\text{Eq.6.6})$$

- $\tau$  : Contrainte de cisaillement tangentielle :

$$\tau = \tau_{\text{réd}} - \frac{F_t}{b_n s_{t'}} \cos \alpha' \quad (\text{Eq.6.7})$$

Ces contraintes sont calculées sous deux hypothèses fondamentales :

- **Comportement élastique linéaire** : Les matériaux (béton et acier) suivent la loi de Hooke (déformations proportionnelles aux contraintes).
- **Béton non fissuré** : La section est considérée comme homogène, sans fissures (hypothèse valide pour les états-limites de service).

Ou :

$\sigma$  : Contrainte normale due aux charges externes (flexion, compression).

$\frac{F_t}{b_n s_{t'}}$  : Force de précontrainte unitaire par unité de largeur nette  $b_n$  et d'espacement  $s_{t'}$ .

$\frac{\cos \alpha'}{\sin \alpha'}$  : Projection de la force inclinée (angle  $\alpha'$ ) sur l'axe longitudinal.

$\tau_{\text{réd}}$  : Contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant réduit l'élément.

$\cos \alpha'$  : Composante horizontale de la force de précontrainte, réduisant le cisaillement à reprendre par le béton

$F_t$  : Force de traction unitaire dans les armatures transversales.

$b_n$  : Largeur nette de la section (largeur totale moins les gaines de précontrainte).

$s_{t'}$  : Espacement entre les armatures transversales.

$\alpha'$  : Angle d'inclinaison des armatures par rapport à l'axe de la poutre.

La présence des armatures inclinées permettant de **générer des** contraintes de compression et améliorer significativement la résistance à la flexion et au cisaillement.

La contrainte de cisaillement réduite  $\tau_{\text{réd}}$ , calculée par l'équation suivante :

$$\tau_{\text{réd}} = \frac{V_{\text{réd}} S}{b_n I_n} \quad (\text{Eq.6.8})$$

$V_{red}$  : Effort tranchant réduit (intégrant la précontrainte)

$S$  : Moment statique de la section

$I_n$  : Moment d'inertie net de la section.

$b_n$  : Largeur nette (largeur totale moins les gaines de précontrainte)

- **Conditions de vérification :**

Afin d'éviter la fissuration due à l'interaction entre cisaillement et contraintes normales sous charges défavorables (cas de service), les contraintes doivent satisfaire aux deux conditions suivantes:

$$\tau^2 = \sigma_x \cdot \sigma_t < 0,4 \cdot f_{tj} \cdot \left[ f_{tj} + \frac{2}{3} (\sigma_x + \sigma_t) \right] \quad (\text{Eq.6.9})$$

$$\tau^2 = \sigma_x \cdot \sigma_t < 2 \cdot \frac{f_{tj}}{f_{cj}} \cdot [0,6 \cdot f_{tj} - \sigma_x + \sigma_t] \left[ f_{tj} + \frac{2}{3} (\sigma_x + \sigma_t) \right] \quad (\text{Eq.6.10})$$

Cette dernière condition intègre la résistance en compression du béton pour garantir la stabilité globale.

$f_{ij}$  : Résistance en traction du béton.

#### 6.3.4. Vérification à l'état limite ultime

La vérification des éléments d'une poutre au regard de l'état-limite ultime comprend deux aspects essentiels : d'une part, la résistance des armatures transversales, et d'autre part, celle des bielles de béton comprimées.

La première étape consiste à définir l'angle  $\beta_u$  formé entre les bielles de compression du béton et l'axe neutre de la poutre (Figure 6.5). Cet angle est déterminé à l'aide de la relation suivante :

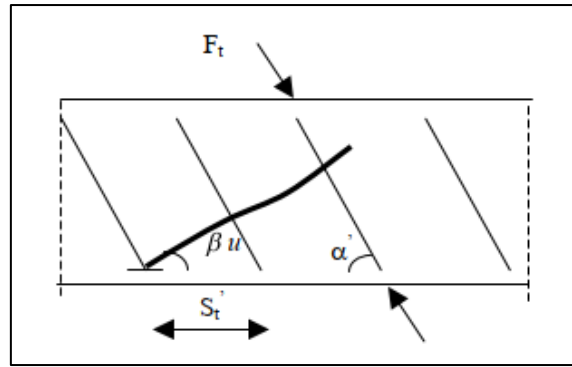


Figure. 6.5. Angle des bielles d'une poutre en béton précontraint

L'angle  $\beta_u$ , formé entre les bielles de béton comprimées et l'axe de la poutre, est calculé par l'équation suivante :

$$\tan 2\beta_u = \frac{2\tau_u}{\sigma_{xu} - \sigma_{tu}} \quad (\text{Eq. 6.11})$$

$\tau_u$  : La contrainte de cisaillement ultime.

$\sigma_{xu}$  : Contrainte normale longitudinale ultime

$\sigma_{tu}$  : Contrainte normale transversale ultime

Borne de  $\beta_u$  : L'angle est limité à  $\beta_u \geq 30^\circ$  pour garantir une répartition réaliste des contraintes

La contrainte de cisaillement maximale  $\tau_{u,lim}$  que peuvent reprendre les armatures transversales (actives et passives) est donnée par :

$$\tau_{u,lim} = \frac{A_t \cdot f_e \cdot \sin(\alpha + \beta_u)}{b_n \cdot s_t \cdot \sin \beta_u} + \frac{F_{tu} \cdot \sin(\alpha' + \beta_u)}{b_n \cdot s_t' \cdot \sin \beta_u} \quad (\text{Eq. 6.12})$$

$A_t$  : aire totale des sections d'un cours d'armatures passives transversales;

$s_t$  : espacement de deux cours de ces armatures, mesuré suivant la fibre moyenne de la poutre ;

$f_e$  : limite d'élasticité de l'acier ;

$\alpha$  : angle de ces armatures avec la fibre moyenne de la poutre (angle compris entre  $45^\circ$  et  $90^\circ$ ) ;

$F_{tu}$  : effort résistant des aciers d'un cours d'armatures transversales de précontrainte ;

$s_t$  : espacement de deux cours de ces armatures, mesuré suivant la fibre moyenne de la poutre ;

$\alpha'$  : angle de ces armatures avec la fibre moyenne de la poutre (angle compris entre 45° et 90°).

Avec :

$\gamma_p, \gamma_s$  : Coefficient de sécurité ( $\gamma_p = \gamma_s = 1,15$  pour combinaisons fondamentales, 1.0 pour les combinaisons accidentelles).

On doit vérifier que  $\tau_u \leq \tau_{u,lim}$  (éventuellement majoré de  $\frac{f_{tj}}{3}$  si la section est partiellement comprimée).

$\frac{f_{tj}}{3}$  : Contribution complémentaire de la zone comprimée du béton (résistance en traction  $f_{tj}$ )

- **Cas particulier :**

Si les armatures transversales sont perpendiculaires à l'axe ( $\alpha=90^\circ$ ) :

$$\frac{A_t \cdot f_e}{b_n \cdot s_t \cdot \gamma_s} \geq \left( \tau_u - \frac{f_{tj}}{3} \right) \cdot \tan \beta_u \quad (\text{Eq.6. 13})$$

Cette inégalité garantit que les armatures passives reprennent l'excès de cisaillement non équilibré par le béton.

- **Dispositions constructives (Règle BPEL) :**

- Minimum d'armatures transversales : pour éviter la fragilité de l'âme et contrôler la fissuration, on respecte la condition suivante :

$$\left( \frac{A_t \cdot f_e}{b_n \cdot s_t \cdot \gamma_s} \sin \alpha \right) + \left( \frac{F_{tu} \cdot \sin \alpha'}{b_n \cdot s_{t'}} \right) \geq 0,4 \text{ MPa} \quad (\text{Eq.6. 14})$$

- Espacement des armatures de précontrainte:  $S_t \leq 0,8h$  (ou  $h$ = la hauteur totale de la poutre)
- Espacement des armatures passives :  $S_t \leq \min(0,8h, 3b_0, 1m)$ , avec  $b_0$  l'épaisseur minimale de l'âme

- **Remarque :**

Un angle des bielles plus faible augmente la contribution des armatures

Les coefficients de sécurité tiennent compte des incertitudes sur les matériaux et les charges.

Le terme  $\frac{f_{tj}}{3}$  exploite la résistance résiduelle en traction du béton dans les zones comprimées.

#### 6.4. Justification du béton

À l'état-limite ultime (ELU), il est essentiel de vérifier que les bielles de béton (zones comprimées formées sous l'effet du cisaillement) ne sont pas écrasées par les contraintes de compression. Cette vérification complète celles des armatures transversales et garantit la sécurité de la structure.

La contrainte de compression  $\sigma_b$  dans les bielles de béton doit rester inférieure à la contrainte ultime admissible du béton. Concrètement, cela se traduit par une limite imposée sur la contrainte de cisaillement réduite  $\tau_{\text{réd},u}$ , selon la formule :

$$\tau_{\text{réd},u} = \frac{0,85 \cdot f_{cj} \cdot \sin \beta_u}{3 \cdot \gamma_b} \quad (\text{Eq.6.15})$$

$\tau_{\text{réd},u}$  : Contrainte de cisaillement réduite ultime, tenant compte de la précontrainte et des charges appliquées, calculée à partir de l'effort tranchant réduit  $V_{\text{réd}}$ , du moment statique  $S$ , et de la largeur nette  $b_n$ .

0.85 : Coefficient de réduction de la résistance du béton, tenant compte de la différence entre la résistance en laboratoire et in situ, ainsi que des effets de fissuration.

$f_{cj}$  : Résistance caractéristique en compression du béton à  $j$  jours.

$\sin 2\beta_u$  : Terme lié à l'angle  $\beta_u$  des bielles de béton avec l'axe de la poutre.

$\gamma_b$  : Coefficient de sécurité partiel pour le béton (généralement  $\gamma_b=1.5$  selon l'Eurocode, ou spécifié par les normes locales comme les BPEL).

#### 6.5. Disposition constructive :

##### 6.5.1. Précontrainte par post tension

###### a) Groupement des armatures de précontrainte

La norme impose une restriction sur le nombre de conduits regroupés horizontalement pour plusieurs raisons :

- **Évitement de la congestion des armatures :** Un excès de conduits côte à côte réduit l'espace disponible pour les armatures passives (aciers de béton armé) et

complicque la mise en place du béton. Cela peut entraîner des défauts de compactage (nids de gravier) et affaiblir la structure.

- **Répartition homogène des efforts de précontrainte :** Un groupement excessif en largeur concentre les contraintes de compression dans une zone localisée, ce qui peut provoquer des fissurations ou un écrasement du béton. Une répartition horizontale équilibrée assure une transmission uniforme des efforts.
- **Respect des exigences de couverture minimale :** Les conduits doivent être placés à une distance suffisante des parois (couverture minimale) pour protéger les armatures contre la corrosion et les agressions environnementales (ex. : humidité, gel). Un groupement horizontal excessif réduit cette couverture.
- **Compatibilité avec les ancrages:** Les systèmes d'ancrage des câbles de précontrainte nécessitent un espacement minimal entre les conduits pour permettre leur installation et leur serrage corrects.
- **On donne :**

#### b) Espacement des armatures de précontrainte

En section courante l'espacement horizontal  $e_h$  et l'espacement vertical  $e_v$  des conduits isolés ou des paquets de conduits doit satisfaire aux conditions suivantes (Figure 6. 6):

- **Espacement horizontal ( $e_h$ ):** Il s'agit de la distance minimale entre deux conduits sur une même ligne horizontale :

Si  $p \leq 2$  (1 ou 2 lignes) :  $e_h \geq \phi$ .

Si  $p = 3$  (3 lignes) :  $e_h \geq 1.5\phi$ .

Si  $q = 2$  (2 colonnes) :  $e_h \geq 1.5\phi$  (applicable même si  $p \leq 2$ ).

Avec : **p** : Nombre de lignes horizontales de conduits ( $p \leq 3$ ).

**q** : Nombre de colonnes verticales de conduits ( $q \leq 2$ ).

**$\phi$**  : Diamètre d'un conduit ou d'un paquet de conduits.

- **Espacement vertical ( $e_v$ ):** Il s'agit de la distance minimale entre deux conduits sur une même colonne verticale :

Si  $q=1$  (1 colonne) :  $e_v \geq \phi$ .

Si  $q=2$  (2 colonnes) :  $e_v \geq 1.2\phi$ .

Valeur minimale absolue :  $e_v \geq 4 \text{ cm}$ , quelle que soit la configuration.

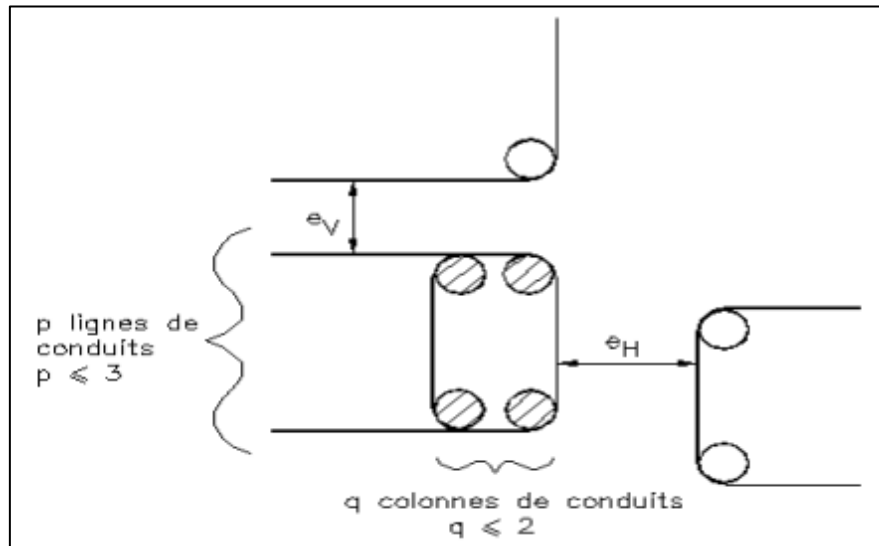


Figure 6. 6 Espacement des armatures de précontrainte

### c) Distance des armatures de précontrainte aux parements

La distance minimale  $c$  entre un conduit (ou un groupe de conduits) et la surface du béton doit respecter les critères suivants :

$$c \geq 3/4 a$$

Diamètre maximal des conduits limité à 80 mm

Enrobage minimal ( $d$ ) selon l'exposition :

- **3 cm** : pour les ouvrages protégés des intempéries
- **4 cm** : pour les ouvrages courants
- **5 cm** : pour les ouvrages exposés à un environnement agressif

### b)- Précontrainte par Pré tension

- **Groupement des armatures de précontrainte**



En pré-tension, les tendons (fils ou torons) sont tendus avant le coulage du béton. Leur répartition homogène est cruciale pour éviter les concentrations de contraintes et assurer une transmission optimale des efforts au béton, pour éviter la perturbation de l'adhérence entre le béton et les tendons. Alors, les armatures de précontrainte par pré-tension ne doivent pas être groupées en paquets.

- **Espacement des armatures de précontrainte**

Espacement minimal =  $3 \times$  diamètre du tendon.

**Objectif** : Garantir un enrobage suffisant autour de chaque tendon pour :

- Protéger contre la corrosion (éviter les chemins d'humidité entre les tendons).
- Permettre une bonne transmission des efforts par adhérence.
- Faciliter la mise en place du béton (éviter les vides).

- **Distance des armatures de précontrainte aux parements**

Distance minimale de l'axe au parement =  $2,5 \times$  diamètre du tendon.

**Objectif** : Protéger les tendons des agressions externes (humidité, gel, etc.) et éviter leur exposition en cas de fissuration superficielle.

**Conséquence d'un non-respect** : Risque accru de corrosion et de détérioration prématurée de la structure.

- **Exigences d'enrobage minimal**

L'enrobage présente l'épaisseur de béton entre la surface du tendon et la paroi extérieure de l'élément structurel. Les conditions d'enrobage sont résumées dans le tableau 6.1).

Tableau 6.1. Conditions d'enrobage des armatures de précontrainte en poste tension

Condition	Enrobage minimal	Justification
Parois coffrées en intérieur (locaux clos, pas de condensation)	1 cm	Environnement protégé $\Rightarrow$ Risque de corrosion faible.
Parois coffrées exposées (intempéries, condensation, liquides)	3 cm	Protection accrue contre l'eau, l'humidité ou les agents chimiques.
Parois non coffrées	3 cm ou 4 cm	Selon l'exposition (identique aux cas précédents). Les parois non coffrées (ex. béton projeté) ont une surface moins lisse $\Rightarrow$ besoin d'un enrobage légèrement supérieur pour compenser la rugosité.
Ouvrages en milieu agressif (ex. bord de mer, zones industrielles)	5 cm	Neutraliser les effets corrosifs des chlorures, sulfates, ou autres agents chimiques.

- **Enrobage des armatures passives**

Les armatures passives (non précontraintes) suivent des règles similaires, mais adaptées à leur rôle structural (Tableau 6.2).

Tableau 6.1. Conditions d'enrobage des armatures passives en poste tension

Condition d'exposition	Enrobage minimal	Justification
Parois en intérieur protégé (pas d'humidité)	1 cm	Risque minimal de corrosion.
Parois exposées (intempéries, condensation, liquides)	3 cm	Protection standard contre les agressions environnementales.
Ouvrages en milieu marin (embruns, brouillards salins) ou atmosphère très agressive	5 cm	Les chlorures et le sel accélèrent la corrosion $\Rightarrow$ enrobage renforcé pour garantir la durabilité.

## 6.6. Applications

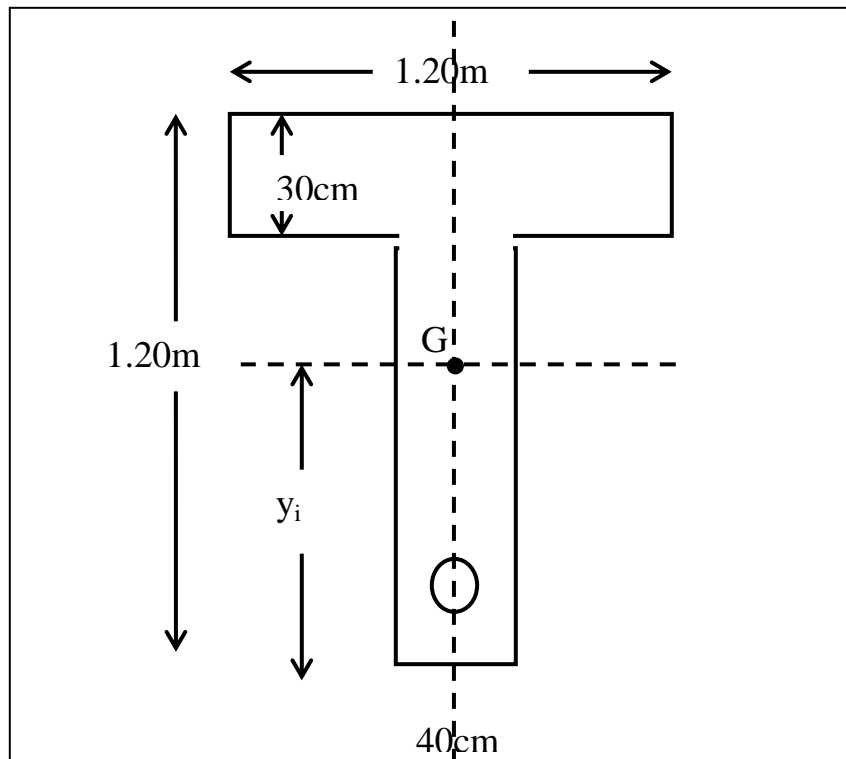
### 6.6.1. Exercice 1 :

Soit une poutre de section en T soumise à une force de précontrainte  $P$  (Classe II).

On demande de vérifier en phase d'exécution et en phase de service (Combinaison rare):

1. Les contraintes normales (ELS) pour une précontrainte de 7 et 21 jours
2. Les contraintes tangentielles (ELS) pour une précontrainte de 7 et 21 jours

On donne :  $P_{(\text{court terme})} = 4800 \text{ KN}$ ,  $P_{(\text{long terme})} = 4300 \text{ KN}$ ,  $Q = 18 \text{ KN/m}$ ,  $L = 26 \text{ m}$ ,  $S = 0,043 \text{ m}^3$ ,  $D_{\text{cable}} = 50 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 7^\circ$ ,  $e = 0,550 \text{ m}$ ,  $f_{c28} = 38 \text{ MPa}$ , Densité du béton :  $25 \text{ KN/m}^3$



**Solution :**

1. Les contraintes normales (ELS) pour une précontrainte de 7 et 21 jours :

**Exercice 2 :**

1. Exécution	
7 jours : $P_7 = 3825 \text{ KN}$	14 jours : $P_{14} = 3825 \text{ KN}$

Contrainte normale	
$f_{c7} = \frac{j}{4.76 + 0.83j} f_{c28} = 28.07 \text{ MPa},$ $f_{t7} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 2.28 \text{ MPa},$	$f_{c21} = 38.23 \text{ MPa},$ $f_{t21} = 2.89 \text{ MPa},$
$\sigma_{M7} = 0.6 f_{cj} = 16.84 \text{ MPa},$ $\overline{\sigma}_{m7} = -0.7 f_{tj} = -1.6 \text{ MPa},$ $\sigma_m = -1.5 f_{tj} = -3.43 \text{ MPa}$	$\sigma_{M21} = 22.94 \text{ MPa},$ $\overline{\sigma}_{m21} = -2.03 \text{ MPa},$ $\sigma_{m21} = -4.34 \text{ MPa}$
<p>Moment min <math>M_m = Gl^2/8 ;</math>  <math>B = 0.72 \text{ m}^2</math>  <math>G = B \cdot \rho = 0.72 \cdot 25 = 18 \text{ KN/m}</math>  <math>M_m = 1521 \text{ KNm}</math></p>	
$\sigma_{\text{Sup}7,21} = -\frac{P}{B} + \frac{Pey}{I} - \frac{My}{I}$ $\sigma_{\text{Sup}7,21} = -\frac{4800}{0.72} + \frac{4800 \cdot 0.535 \cdot (1.2 - 0.75)}{0.092} - \frac{1764 \cdot (1.2 - 0.75)}{0.092} = -1.53 \text{ MPa} \leq \sigma_{m7} = 16.84 \text{ MPa CV}$ $\sigma_{\text{Inf}7,21} = -\frac{P}{B} - \frac{Pey}{I} + \frac{My}{I}$ $\sigma_{\text{Sup}7,21} = -\frac{3825}{0.72} + \frac{3825 \cdot 0.535 \cdot 0.75}{0.092} - \frac{1764 \cdot 0.75}{0.092} = -15.221 \text{ MPa} \leq \sigma_{M7} = 16.84 \text{ MPa CV}$	
Contrainte tangentielle	
$b_n = b - (0.5 \cdot \phi_{\text{cable}}) = 0.4 - (0.5 \cdot 50 \cdot 10^{-3}) = 0.375 \text{ m},$ $\sigma_x = \frac{P_{\text{courterme}}}{B} = \frac{4800 \cdot 10^{-3}}{0.72} = 6.667 \text{ MPa},$ $\sigma_t = 0 \text{ MPa}$	
$V_{7,14} = \frac{G \cdot L}{2} = \frac{18 \cdot 28}{2} = 252 \text{ KN}$ $V_{\text{Red}7,14} = V_{\text{red}} = (V_g + V_q) - P \sin \alpha$ $V_{\text{Red}7,14} = 252 - (4800 \cdot \sin 7^\circ) = -350.677 \text{ KN},$ $\tau_{\text{red}} = \frac{V_{\text{red}} S}{b_n I_n} = \frac{-350.677 \cdot 0.043 \cdot 10^{-3}}{(0.375 \cdot 0.092)} = -0.438 \text{ MPa}$	
$(\tau_{\text{Red}7})^2 - \sigma_x \sigma_t = (-0.438)^2 - (6.667 \cdot 0) \text{ MPa}$ $\leq 0.4 \cdot f_{t7} [f_{t7} + (\sigma_x + \sigma_t)] = 0.4 \cdot 2.89 \cdot [2.89 + (6.667 + 0)] \text{ MPa}$	

$$0.19\text{MPa} \leq 11.066\text{MPa CV}$$

Avis : La précontrainte peut être effectuée dans 7 jours, car les contraintes de compression et de traction du béton sont bien vérifiées

**2. Service : 28 jours : P= 4300KN**

### Contrainte normale

$$f_{c28.....} = 40\text{MPa}, f_{t28....} = 3.\text{MPa}, \sigma_{M28.....} = 24.\text{MPa}, \overline{\sigma}_{m28} = -4.5\text{MPa}, \sigma_{m28} = -3\text{MPa}$$

$$\text{Moment min } M_M = (G+Q)l^2/8 ;$$

$$B=0.72\text{m}^2$$

$$M_M=3042 \text{ KNm}$$

$$\sigma_{\text{Sup}28} = -\frac{P}{B} + \frac{Pey}{I} - \frac{My}{I}$$

$$\sigma_{\text{Sup}28} = -\frac{4300}{0.72} + \frac{4300 \cdot 0.535 \cdot (1.2 - 0.75)}{0.092} - \frac{3042 \cdot (1.2 - 0.75)}{0.092} = -9.61 \leq \sigma_{M28} = 24\text{MPa CV}$$

$$\sigma_{\text{Inf}28} = -\frac{P}{B} - \frac{Pey}{I} + \frac{My}{I}$$

$$\sigma_{\text{Sup}28} = -\frac{4300}{0.72} - \frac{4300 \cdot 0.535 \cdot 0.75}{0.092} + \frac{3042 \cdot 0.75}{0.092} = 0.085\text{MPa} \leq \sigma_{m28} = 4.5.\text{MPa CV}$$

### Contrainte tangentielle

$$b_n = b - (0.5 \cdot \phi_{\text{cable}}) = 0.4 - (0.5 \cdot 50 \cdot 10^{-3}) = 0.375.\text{m},$$

$$\sigma_x = \frac{P_{\text{longterme}}}{B} = \frac{4300 \cdot 10^{-3}}{0.72} = 5.9727\text{MPa},$$

$$\sigma_t = 0\text{MPa}$$

$$V_{28} = \frac{G \cdot L}{2} = \frac{18 \cdot 26}{2} = 468\text{KN}$$

$$V_{\text{Red}28} = V_{\text{red}} = (V_g + V_q) - P \sin \alpha$$

$$V_{\text{Red}28} = 468 - (4300 \cdot \sin 7^\circ) = -55.77\text{KN},$$

$$\tau_{\text{red}} = \frac{V_{\text{red}} S}{b_n I_n} = \frac{-55.77 \cdot 0.043 \cdot 10^{-3}}{(0.375 \cdot 0.092)} = -0.069\text{MPa}$$

$$(\tau_{\text{Red}28})^2 - \sigma_x \sigma_t = (-0.0696)^2 - (5.972 \cdot 0) \text{ MPa}$$

$$\leq 0.4 \cdot f_{t28} [f_{t28} + (\sigma_x + \sigma_t)] = 0.4 \cdot 3 \cdot [3 + (5.972 + 0)] \text{ MPa}$$

$$0.005\text{MPa} \leq 10.77\text{MPa CV}$$

Avis : la poutre en béton précontraint avec ces caractéristiques est bien vérifiée sous contrainte de normal et contrainte de cisaillement.

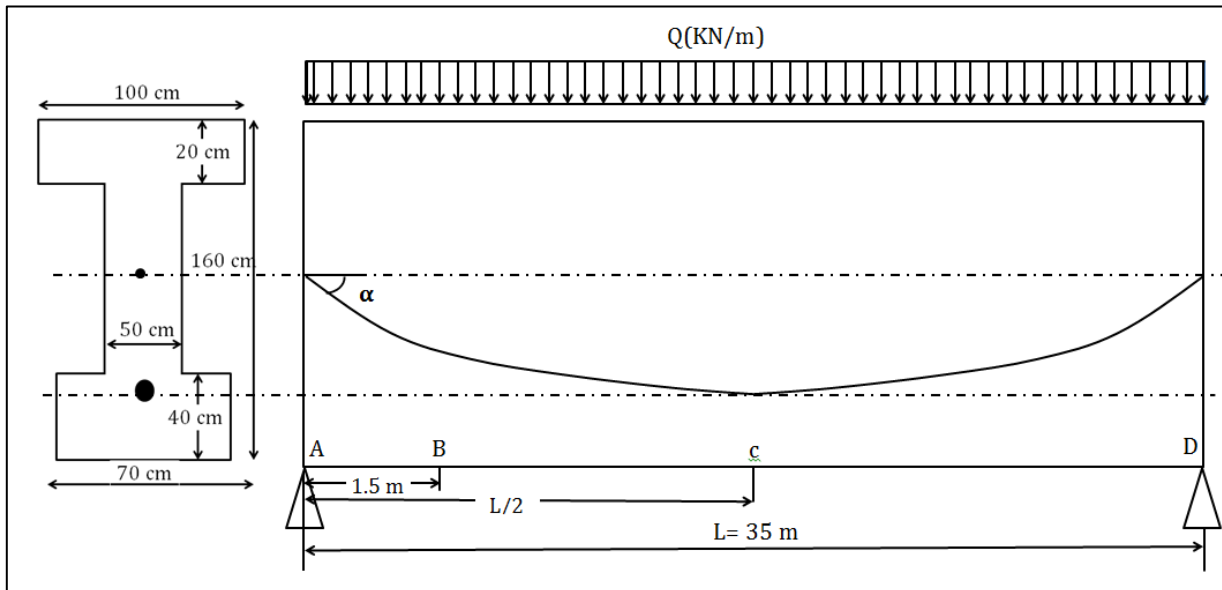
### 6.6.2. Exercice 2

Considérant une poutre simplement appuyée supporte une charge  $Q$  (Figure ci-dessous). La poutre a été fabriquée sur chantier par l'utilisation de mode de précontrainte **poste-tension**. La force de précontrainte  $P$  est appliquée sur deux câbles de précontrainte de diamètre  $D=70\text{mm}$ .

On demande de déterminer au point **B**.

1. L'effort tranchant en ELS
2. Contrainte du cisaillement ELS
3. Vérifier les contraintes de cisaillement admissibles ELS
4. L'effort tranchant en ELU
5. Contrainte de cisaillement ELU
6. Les armatures transversales

On donne :  $Q=100\text{ KN/m}$ ,  $f_{c28}=30\text{ MPa}$ ,  $P=8325\text{KN}$ ,  $S=0,16\text{ m}^3$ ,  $\alpha=8^\circ$ , Densité  $25\text{KN/m}^3$



**Solution :**

$$G=B.\rho=0.98*25=24.5\text{KN/m}$$

#### 1. L'effort tranchant en ELS

$$R_{AG} = \frac{G * L}{2} = \frac{25.4 * 35}{2} = 428.75\text{KN}$$

$$V_G = T = R_{AG} - G * x = 428.75 - (24.5 * 1.5) = 392\text{KN}.$$

$$R_{AQ} = \frac{Q * L}{2} = \frac{100 * 35}{2} = 1750\text{KN}$$

$$V_Q = T = R_{AQ} - G * x = 1750 - (100 * 1.5) = 1600\text{KN}.$$

#### 2. Contrainte du cisaillement ELS

$$V_{red} = (V_g + V_q) - P \sin \alpha = 392 + 1600 - (5825 * \sin 8^\circ) = 833.385\text{KN}$$

$$b_n = b_0 - m k \phi = 0.5 - (2 * 0.5 * 0.07) = 0.43\text{m}$$

$$\tau_{red} = \frac{V_{red} S}{b_n I_n} = \frac{833.385 * 0.16}{(0.43 * 0.2494)} = 1.243\text{MPa}$$

#### 3. Vérifier les contraintes de cisaillement admissibles ELS

$$\sigma_x = \frac{P}{B} = \frac{8324}{0.98} = 8.495\text{MPa}$$

$$f_{tj} = 0.6 + 0.06 f_{cj} = 0.6 + 0.06 * 30 = 2.4\text{MPa}$$

$$(\tau_{red})^2 - \sigma_x \sigma_t = (1.243)^2 - (8.495 * 0) \text{MPa} \leq 0.4 \cdot f_{t28} [f_{t28} + (\sigma_x + \sigma_t)] = 0.4 * 2.4 * [2.4 + (8.495 + 0)] \text{MPa}$$

$$1.546\text{MPa} \leq 10.46\text{MPa} \quad \mathbf{CV}$$

#### 4. L'effort tranchant en ELU

$$R_{AG} = \frac{1.35 G * L}{2} = \frac{1.35 * 25.4 * 35}{2} = 578.813\text{KN}$$

$$V_G = T = R_{AG} - (1.35 * G * x) = 578.813 - (1.35 * 24.5 * 1.5) = 529.267\text{KN}.$$

$$R_{AQ} = \frac{1.5 Q * L}{2} = \frac{1.5 * 100 * 35}{2} = 2625\text{KN}$$

$$V_Q = T = R_{AQ} - (1.5 \cdot Q \cdot x) = 2625 - (1.5 \cdot 100 \cdot 1.5) = 2400 \text{ KN.}$$

#### 5. Contrainte de cisaillement ELU

$$V_{red} = (V_g + V_q) - P \sin \alpha = 529.267 + 2400 - (5825 \cdot \sin 8^\circ) = 1.771 \text{ MN}$$

$$b_n = b_0 - m_k \phi = 0.5 - (2 \cdot 0.5 \cdot 0.07) = 0.43 \text{ m}$$

$$\tau_{red} = \frac{V_{red} S}{b_n I_n} = \frac{1.771 \cdot 0.16}{(0.43 \cdot 0.2494)} = 2.64192 \text{ MPa}$$

#### 6. Les armatures transversales

$$\tan 2\beta_u = \frac{2\tau_u}{\sigma_{xu} - \sigma_{tu}} = \frac{2 \cdot 2.64192}{8.495 - 0} = 0.622$$

$$\beta_u = 15.94^\circ < 30^\circ \text{ CV}$$

$$\tan \beta_u = \tan 30^\circ = 0.577$$

$$\frac{A_t \cdot f_e}{b_n \cdot s_t \cdot \gamma_s} \geq \left( \tau_u - \frac{f_{tj}}{3} \right) \cdot \tan \beta_u \Leftrightarrow \frac{A_t}{s_t} \geq \left( \tau_u - \frac{f_{tj}}{3} \right) \cdot \tan \beta_u \cdot \frac{b_n \cdot \gamma_s}{f_e}$$

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \left( 2.64 - \frac{2.4}{3} \right) \cdot 0.577 \cdot \frac{0.43 \cdot 1.15}{400} \Rightarrow \frac{A_t}{s_t} \geq 13.139 \text{ cm}^2/\text{m} \Rightarrow 2HA14/st = 20 \text{ cm}$$



# Chapitre 7 : Poutres continues sur appuis simples

## 7.1. Introduction :

Le calcul des sollicitations hyperstatiques de précontrainte par la méthode interne et la méthode directe permet de déterminer les effets complémentaires (moments, efforts tranchants, réactions d'appui) induits par la précontrainte dans les structures hyperstatiques (indéterminées statiquement). Ces effets, dits hyperstatiques, résultent des restrictions imposées par les appuis redondants aux déformations libres de la structure sous l'action de la précontrainte.

## 7.2. Effets hyperstatiques de la précontrainte

### 7.2.1. Equilibre d'une structure précontrainte

Considérons une structure précontrainte par des câbles, en analysant uniquement les effets induits par la précontrainte, sans tenir compte d'autres sollicitations externes. Dans ce cas, l'équilibre global de la structure et des câbles est assuré exclusivement par les réactions d'appui  $R_i$  (pouvant être des forces ou des moments). Cela signifie que le système des réactions  $R_i$  est globalement équivalent à zéro (Eq.7.1) :

$$\text{Sys } (R_i) = 0 \quad (\text{Eq.7.1})$$

- Si la structure est isostatique, chacune des réactions doit alors être nulle :  $R_i = 0$ .

- Si la structure est hyperstatique, ce n'est en général pas le cas. En l'absence de liaisons surabondantes, le béton de la structure se déformerait librement sous l'effet de la précontrainte. Les réactions d'appui qui apparaissent permettent d'assurer la compatibilité géométrique avec ces liaisons surabondantes. Ces réactions hyperstatiques développent alors dans la structure des sollicitations qui sont les sollicitations hyperstatiques de précontrainte.

### 7.2.2. Equilibre d'un câble de précontrainte

Un câble de précontrainte est principalement soumis aux forces  $\Phi_i$  exercées par le béton de la structure via (Figure 7.1):

- Les ancrages aux extrémités (forces concentrées),
- Les gaines le long de son tracé (forces réparties).

- Son poids propre est généralement négligé dans l'analyse d'équilibre. Pour les armatures de pré-tension, ces efforts sont transmis directement par le béton.

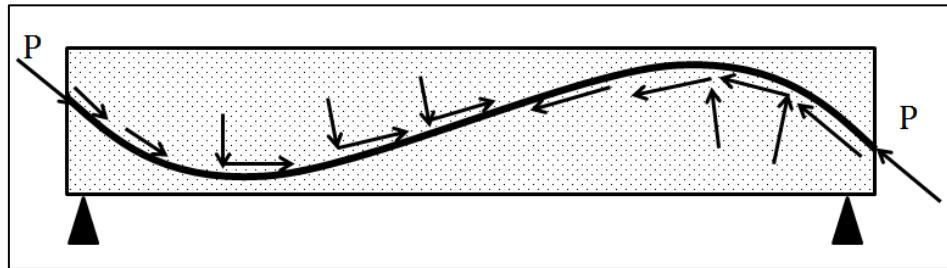


Figure 7.1. Forces exercées sur un câble de précontrainte

En raison de sa faible rigidité en flexion, le câble est assimilé à un fil parfait, ne transmettant que des efforts de traction axiale, tangents à son tracé, les forces en jeu sont :

- **Forces concentrées aux ancrages :**
  - $\mathbf{P}_A$  et  $\mathbf{P}_B$ , orientées selon la tangente au tracé du câble.
- **Forces réparties :**
  - **Radiales** (densité  $P/R$ ) : Dirigées vers l'extérieur de la courbure, proportionnelles à l'effort normal  $P$  et inversement au rayon de courbure  $R$ .
  - **Tangentiels** (densité  $dP/ds$ ) : Liées aux frottements ou à l'adhérence acier-béton.

Le système des forces  $\Phi_i$  agissant sur le câble est nécessairement équivalent à zéro (équilibre mécanique).

Les forces  $\mathbf{F}_i$  exercées par le câble sur le béton sont l'opposé des forces  $\Phi_i$  :

$$\mathbf{F}_i = -\Phi_i \quad (\text{Eq.7.2})$$

Par conséquent, le système des forces  $\mathbf{F}_i$  est également équivalent à zéro, assurant la cohérence mécanique globale.

### 7.2.3. Equilibre du béton

Le béton se trouve en équilibre sous l'action des systèmes de forces  $F_i$  et  $R_i$ , tous deux rigoureusement nuls. La figure 7.2 illustre une travée indépendante, c'est-à-dire isostatique, où les réactions :  $R_0 = R_1 = 0$ .

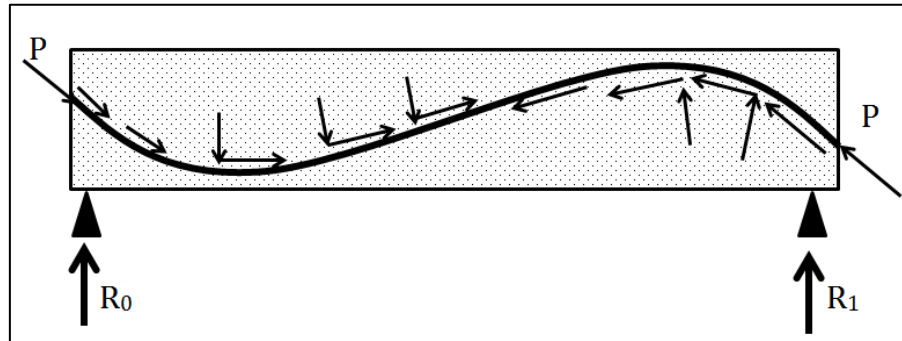


Figure 7.2. Poutre isostatique en béton précontrainte

Pour évaluer l'influence de la précontrainte sur le béton de la structure, deux approches sont envisageables :

- **La méthode directe**, universellement applicable ;
- **La méthode interne**, dont l'usage se limite aux poutres.

#### 7.2.3.1. Méthode directe

Cette méthode simplifiée est utilisée pour les structures isostatiques ou hyperstatiques en assimilant les effets de la précontrainte à des **charges équivalentes** (charges de compression, charges réparties dues à la courbure des câbles).

- **Étapes d'analyse :**
  - Modéliser les charges équivalentes :**

La précontrainte est remplacée par des charges externes équivalentes : **Force axiale** :  $P$  (compressions), **Charges réparties transversales**, et **Le Moments concentrés** aux ancrages ou changements de direction:

$$q(x) = -P \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \quad (\text{Eq.7.3})$$

où  $y(x)$  est le profil du câble.

- Calcul des efforts :**

Résoudre la structure sous ces charges équivalentes en utilisant les lois de la statique :

- Pour une structure isostatique : calcul direct par équilibre.
- Pour une structure hyperstatique : combiner avec la méthode des forces (résolution des équations de compatibilité).

Cette méthode d'analyse présente plusieurs avantages tel que : l'intuitive car elle traite la précontrainte comme une charge externe, et elle permet d'utiliser des logiciels de calcul standard (en entrant les charges équivalentes).

### 7.2.3.2 Méthode interne

Cette méthode est utilisée pour les structures hyperstatiques (statiquement indéterminées) où la précontrainte génère des **efforts secondaires** (moments, efforts tranchants, réactions d'appui) en plus des efforts primaires. Elle repose sur la résolution des équations de compatibilité des déformations et d'équilibre.

- **Cas des structures isostatiques**

Pour une poutre isostatique précontrainte, les réactions d'appui sont nulles. Les seules forces agissant sur le béton sont celles générées par les câbles de précontrainte ( $F_i$ ). Considérons une section droite  $\Sigma$  divisant la poutre en deux parties : une partie gauche (g) et une partie droite (d). Le câble, ancré en un point A, traverse  $\Sigma$  en un point M (Figures 7.3).

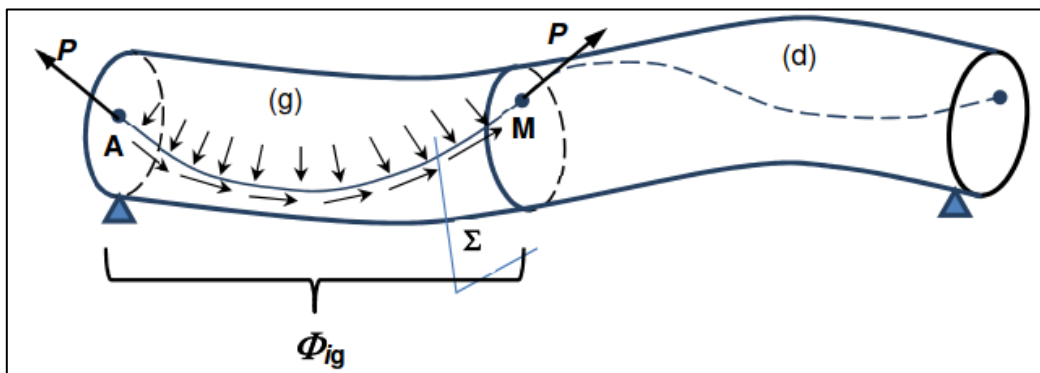


Figure 7.3. Sollicitations développées par le câble dans la section droite  $\Sigma$

Le *torseur des sollicitations* dans  $\Sigma$  correspond au torseur résultant des forces appliquées sur la partie gauche de la poutre. Pour déterminer ces sollicitations :

- Le segment AM du câble est en équilibre sous l'action des forces  $\Phi_{ig}$  (opposées aux  $F_{ig}$ ) et de la traction  $P(M)t$  orientée selon la tangente au câble en M.
- L'équilibre s'écrit :  $Sys(-F_{ig}) + P(M)t = 0$ , ce qui conduit à  $S = P(M)t$ .

Ainsi, dans une structure isostatique, les sollicitations en  $\Sigma$  se réduisent à la traction du câble en M.

Le système des sollicitations dans la section droite se réduit à la force de tension du câble au point M (Figure 7.4)

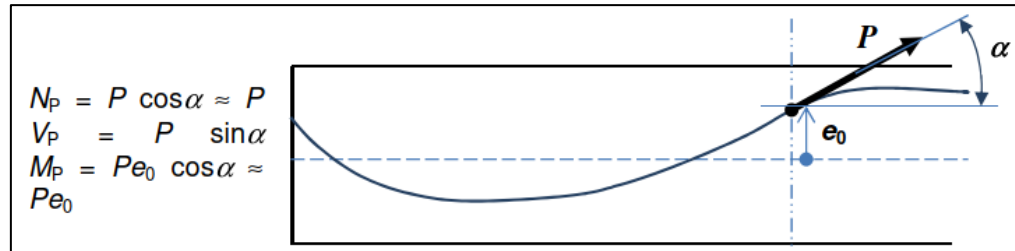


Figure 7.4 – Effets de la précontrainte (méthode interne)

- **Cas des structures hyperstatiques**

Si la poutre est hyperstatique (avec  $n$  degrés d'hyperstaticité), les réactions d'appui  $Rig$  génèrent des sollicitations supplémentaires. Le torseur des sollicitations devient alors :

$$S = P(M)t + S_h \quad (\text{Eq.7.4})$$

où  $S_h$  représente les sollicitations hyperstatiques induites par les réactions  $Rig$ .

- **Méthode d'analyse**

1. **Structure isostatique associée** : On simplifie la structure hyperstatique en supprimant  $n$  liaisons surabondantes.
2. **Sollicitations isostatiques** : En tout point, ces sollicitations équivalent à la traction du câble ( $S_i \sim Pt$ ).
3. **Compatibilité des déplacements** : Les déformations dues à  $S_i$  sont calculées, puis les inconnues hyperstatiques (réactions ou efforts internes) sont déterminées pour garantir la compatibilité avec les liaisons supprimées.

Cette approche permet de dissocier l'effet direct de la précontrainte ( $P(M)t$ ) des effets induits par l'hyperstaticité ( $S_h$ ), facilitant l'analyse des structures complexes.

### 7.3. Poutres continues

#### 7.3.1. Sollicitations hyperstatiques de précontrainte

Poutre continue sur  $n+1$  appuis simples. Un des appuis est fixe, tous les autres sont libres de se déplacer horizontalement (Figure 7.5). Dans une section Les réactions hyperstatiques de précontrainte  $R_i$  sont verticales. Les sollicitations hyperstatiques :

Sh qu'elles engendrent valent :

$$N(x) = 0 \quad (\text{Eq.7.5})$$

$$V(x) = \sum_{i; x_i \leq x} R_i \quad (\text{Eq.7.6})$$

$$(x) = \sum_{i; x_i \leq x} R_i (x - x_i) \quad (\text{Eq.7.7})$$

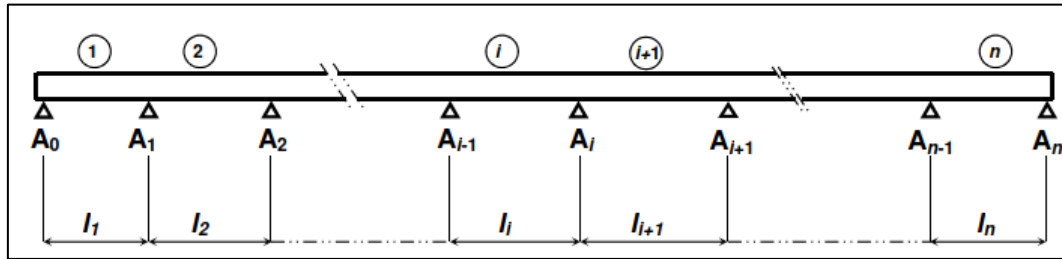


Figure 7.5. Poutre continue en béton précontraint

L'effort tranchant hyperstatique reste constant sur chaque travée. Quant au moment hyperstatique, il varie linéairement par travée, formant une ligne polygonale dont les points angulaires coïncident avec les appuis. Ce diagramme de moment s'annule au niveau des appuis extrêmes, traduisant l'absence de moments hyperstatiques aux extrémités de la poutre.

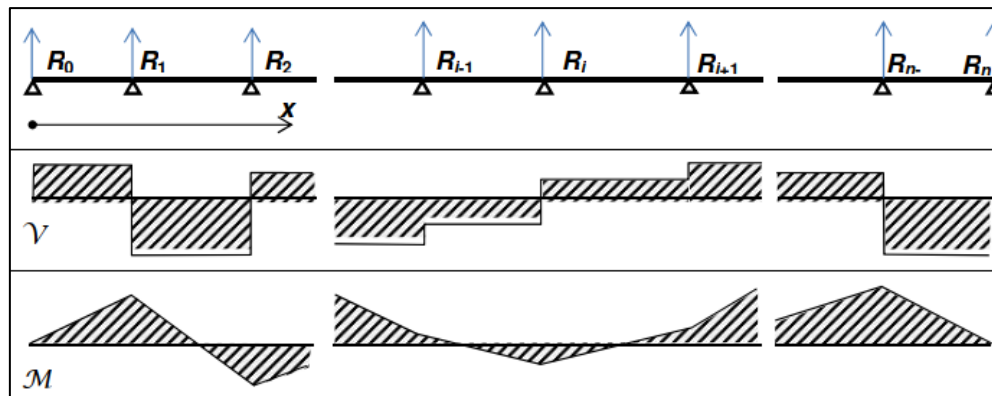


Figure 7.6. Sollicitations agissantes sur une poutre continue

Dans la travée  $i$  ( $A_{i-1}$  ;  $A_i$ ), on repère l'abscisse de la section courante à partir de l'appui  $A_{i-1}$ . On désigne par  $M_i$  le moment hyperstatique sur l'appui  $A_i$ . On peut écrire :

$$M(x) = M_{i-1} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + M_i \left(\frac{x}{l_i}\right) \quad (\text{Eq.7.8})$$

$$V(x) = (M_i - M_{i-1})/l_i \quad (\text{Eq.7.9})$$

Les effets hyperstatiques de la précontrainte sont entièrement déterminés dès que l'on connaît les  $(n - 1)$  valeurs de  $M_i$  au droit des appuis intermédiaires

### 7.3.2 Calcul des moments hyperstatiques de précontrainte

On utilise la méthode interne en adoptant, pour structure isostatique associée, la structure obtenue en rendant toutes les travées indépendantes, par libération de la rotation au droit des  $(n - 1)$  appuis intermédiaires. Les inconnues hyperstatiques sont les  $(n - 1)$  moments de continuité  $M_i$  au droit de ces appuis. Le moment isostatique de précontrainte est noté  $m(x)$ . Les moments de continuité à appliquer au droit des appuis intermédiaires pour rétablir la compatibilité des rotations sont les moments hyperstatiques de précontrainte  $M_i$ .

On peut donc appliquer la relation des trois moments au droit de chaque appui intermédiaire :

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) \cdot M_i + b_{i+1} \cdot M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i \quad (\text{Eq.7.10})$$

$\omega'_{i+1}$  et  $\omega''_i$  sont les rotations isostatiques sous le chargement réel :

$$\omega''_i = \int_0^{l_i} m(x) \cdot \frac{x}{l_i} \cdot \frac{dx}{EI} \quad (\text{Eq.7.11})$$

$$\omega'_i = - \int_0^{l_i} m(x) \cdot \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \cdot \frac{dx}{EI} \quad (\text{Eq.7.12})$$

ou  $m(x)$  est le moment isostatique, qui vaut ici  $P(x)e_0(x)$ .

$$a_i = \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right)^2 \cdot \frac{dx}{EI} \quad (\text{Eq.7.13})$$

$$b_i = \int_0^{l_i} \frac{x}{l_i} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \cdot \frac{dx}{EI} \quad (\text{Eq.7.14})$$

$$c_i = \int_0^{l_i} \left(\frac{x}{l_i}\right)^2 \cdot \frac{dx}{EI} \quad (\text{Eq.7.15})$$

Pour une travée d'inertie constante :

$$a_i = c_i = \frac{l_i}{3EI} \quad (\text{Eq.7.16})$$

$$b_i = \frac{l_i}{6EI} \quad (\text{Eq.7.17})$$

$a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  sont les coefficients de souplesse de la travée  $i$  (ou les rotations unitaires) :

Le système de  $(n - 1)$  équations peut être résolu par la méthode des foyers, résumée ci-après.

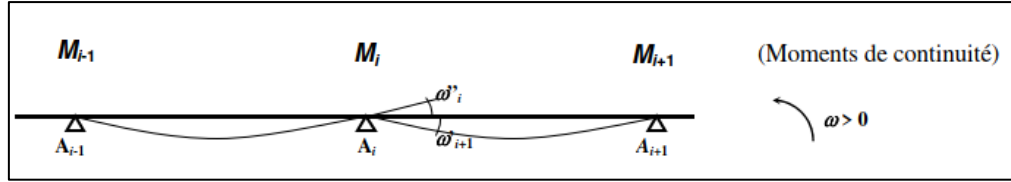


Figure 7.7. Rotation isostatiques

Si seule la travée  $i$  est chargée, la résolution du système donne :

$$M_{i-1} = \frac{1}{b_i} \frac{\varphi_i (\omega'_i + \varphi'_i \omega''_i)}{(1 - \varphi_i \varphi'_i)} \quad (\text{Eq.7.18})$$

$$M_i = \frac{1}{b_i} \frac{\varphi'_i (\omega'_i + \varphi_i \omega''_i)}{(1 - \varphi_i \varphi'_i)} \quad (\text{Eq.7.19})$$

$$M_{i-2} = \varphi_{i-1} \cdot M_{i-1} \quad (\text{Eq.7.20})$$

$$M_{i+1} = \varphi'_{i+1} \cdot M_i \quad (\text{Eq.7.21})$$

où  $\varphi_i$  (resp.  $\varphi'_i$ ) est le rapport focal de gauche (resp. de droite) de la travée  $i$ .

Les rapports focaux vérifient les relations de récurrence :

$$\varphi_{i+1} = \frac{b_{i+1}}{c_i + a_{i+1} - b_i \varphi_1}, \text{ avec } \varphi_1 = 0 \quad (\text{Eq.7.22})$$

$$\varphi'_{i-1} = \frac{b_{i-1}}{c_{i-1} + a_i - b_i \varphi'_1}, \text{ avec } \varphi'_n = 0 \quad (\text{Eq.7.23})$$

Dans le cas d'une poutre de section constante et dont les portées sont toutes égales à  $l$  :

$$\varphi_{i+1} = \frac{1}{4 - \varphi_1} \quad (\text{Eq.7.24})$$

$$\varphi'_{i-1} = \frac{1}{4 - \varphi'_1} \quad (\text{Eq.7.25})$$

Pour les travées courantes (loin des extrémités) :

$$\varphi_i = \varphi'_i = 2 - \sqrt{3} = 0.268 \quad (\text{Eq.7.26})$$

Pour un chargement appliqué sur plusieurs travées, ce qui est en général le cas pour la précontrainte, il suffit de décomposer le chargement travée par travée et des superposer les résultats. Bien entendu, en fonction des conditions de régularité et de symétrie de la poutre, le système d'équations peut parfois se simplifier.



**Remarque :**

Dans la poutre continue soumise au moment total de précontrainte,  $M_p = Pe$ , on peut écrire, dans chaque travée :

$$\delta'_i = - \int_0^{l_i} P(x)e(x) \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \frac{dx}{EI}, \text{ rotation à gauches} \quad (\text{Eq.7.27})$$

$$\delta''_i = - \int_0^{l_i} P(x)e(x) \left(\frac{x}{l_i}\right) \frac{dx}{EI}, \text{ rotation à droite} \quad (\text{Eq.7.28})$$

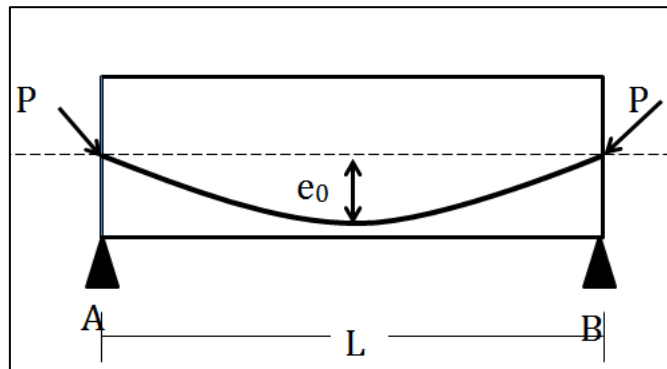
Comme la poutre est continue, on a  $\delta''_i = \delta'_{i+1}$  au droit de chaque appui intermédiaire, ce qui s'écrit encore :

$$J_i(M_p) = \int_0^{l_i} P(x)e(x) \left(\frac{x}{l_i}\right) \frac{dx}{EI} + \int_0^{l_{i+1}} P(x)e(x) \left(1 - \frac{x}{l_{i+1}}\right) \frac{dx}{EI} = 0 \quad (\text{Eq.7.29})$$

C'est la relation de concordance au droit de l'appui i. On vérifie facilement, en développant  $e: e = e_0 + \frac{M}{P}$  et en utilisant  $M(x) = M_{i-1} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + M_i \left(\frac{x}{l_i}\right)$  que cette équation est équivalente à la relation des trois moments présentée plus haut.

**7.4. Applications :****7.4.1. Exercice 1**

Une poutre en béton précontraint, simplement appuyée de longueur  $L=20$ , est équipée d'un câble à profil parabolique (Figure ci-dessous)). La force de précontrainte est  $P=1200 \text{ kN}$ , et l'excentricité maximale du câble au milieu de la travée est  $e=0.5\text{m}$ .



Le profil du câble est donné par :  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8e}{L^2}$

Par l'utilisation de la méthode directe, on demande de

1. Calculer la charge équivalente.
2. Montrer que les réactions verticales sont nulles

3. Calculer le moment fléchissant a la mi travée

**Solution :**

Profile de cable est constant et décrit par :

$$y(x) = \frac{4e}{L^2} \cdot x(L - x) = \frac{x(L - x)}{200} (m)$$

1. Calcul des charges équivalentes  $q(x)$

La courbure du câble est constante, donc la charge est uniforme

$$q(x) = -P \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -1200 * \left( -\frac{8*0.5}{20^2} \right) = 10KN/m(\text{dirigée vers le haut}).$$

2. Calcul des réactions d'appuis

$$Q=q.L=10*20=200KN$$

Par symétrie les réactions théoriques  $R_0=R_1=Q/2 = 100KN$

En raison que la précontrainte est un chargement interne  $\Rightarrow$  les réactions externes s'annulent ( $R_0=R_1=0$ )

Calcul de moment à la mi-travée

$$\text{Pour une charge uniforme : } M_{max} = \frac{q.L^2}{8} = 500KNm$$

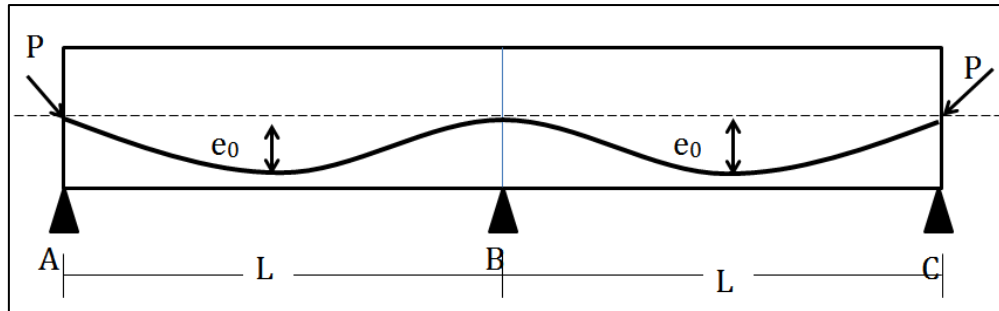
$$\text{Moment de précontrainte théorique : } M_p = P \cdot e = 1200 * 0.6 = 500KNm$$

Interprétation des résultats : La méthode directe remplace les effets complexes de la précontrainte par des charges externes équivalentes, facilitant l'utilisation de logiciels de calcul standard. Cependant, elle ne tient pas compte des déformations différées (fluage, retrait) ni des interactions locales entre le béton et les câble.

La charge équivalent  $q(x)$  reproduit exactement l'effet de la précontrainte sur le béton. Le moment calculé correspond au moment induit par l'excentricité du câble.

## 7.4. Exercice 2

Une poutre continue en béton précontraint à **2 travées égales** ( $L=12$  m chacune) repose sur 3 appuis simples (A, B, C). Un câble de précontrainte à profil parabolique traverse les deux travées avec une excentricité maximale  $e=0.5$  m en milieu de travée voir figure ci-dessous.. La force de précontrainte est  $P=2000$  kN.



Calculer le moment hyperstatique  $M_B$  sur l'appui central B.

- Profil du câble :  $e(x) = \frac{4e}{L^2} \cdot x(L - x)$ .
- Module d'élasticité du béton :  $E=30 \text{ GPa}$ .
- Inertie de la section :  $I=0.1 \text{ m}^4$ .
- Degré d'hyperstaticité :  $n=1$  (1 appui redondant).

**Solution :**

### Structure isostatique associée

Pour simplifier la structure hyperstatique (indéterminée), on supprime la liaison surabondante (ici, la **rotule en B**). La poutre devient alors 2 travées isostatiques indépendantes (AB et BC).

### Sollicitations isostatiques primaires (Si)

- **Moment primaire** (dû à la précontrainte) en tout point :

$$M_p = P \cdot e(x) = 2000 \cdot \left( \frac{4 \cdot 0.5}{12^2} \cdot x(12 - x) \right)$$

$$\text{A mi travée : } x = 6\text{ m} \rightarrow M_p = 2000 \cdot 0.5 = 1000 \text{ KNm}$$

### Calcul des rotations induites par MpMp

- **Rotation à gauche de B** ( $\omega'_B$ ) pour la travée AB :

$$\omega'_B = \int_0^{12} \frac{M_p(x) \cdot (12 - x)}{EI \cdot 12} dx = \frac{1}{EI} \frac{P \cdot e \cdot L^2}{24} = \frac{2000 \cdot 0.5 \cdot 12^2}{24 \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot 0.1} = 0,002 \text{ rad.}$$

Rotation à droite de B ( $\omega''_B$ ) pour la travée BC : Identique par symétrie ( $\omega'_B = 0,002 \text{ rad}$ )

### Équation de compatibilité en B

La rotation totale en B doit être nulle (continuité de la poutre) :

$$\omega'_B + \omega''_B + \omega_{MB} = 0$$

où  $\omega_{MB}$  est la rotation induite par le moment hyperstatique  $M_B$ .

- **Rotation due à  $M_B$**  (pour une travée) :

$$\omega_{MB} = \frac{M_B \cdot L}{3EI} = \frac{M_B * 12}{3 * 30 * 10^6 * 0.1} = \frac{M_B}{750000}$$

- **Équation résolue :**

$$0,002 + 0,002 + \frac{M_B}{750000} = 0 \rightarrow M_B = 3000 \text{KNm}$$

### Sollicitations totales en B

- **Moment total :**

$$M_{total} = M_p + M_B = 1000 - 3000 = -2000 \text{KNm}$$

Le moment traduit la restriction imposée par l'appui redondant B, générant un effort secondaire de compression en fibre supérieure.

La méthode des trois moments donne un résultat cohérent avec la théorie des poutres continues

## Références bibliographique :

A.E. Naaman « Prestressed concrete, Analysis and design » second edition, Techno Press 3000, Michigan, USA (2004)

A. Picard «Le béton précontraint: Tome I, Principes fondamentaux et dimensionnement». Edition Chicoutimi, Québec (1983). ISBN 2-89105-102-5

A. Yazid «Béton précontraint: Cours et exercices». Université de Bechar. (2006).

H. Thonier. «Le béton précontraint aux états limites». Presses de l'école nationale des ponts et chaussées (1992).

G. Dreux, « Cours pratique de béton précontraint, Regle BPEL », Paris, France 1984.

M. Siline. « Béton Précontraint, Cours et applications ». Université de M'sila (2017)

N. Krishna Raju. « Prestressed Concrete, Fourth Edition » Tat McGraw-Hill Publishing Company Limited, Ne Delhi. (2007)

P. Jartoux, B. Fargeot, C. Tourneur «Béton précontraint: Techniques de mise en œuvre».Technique de l'ingénieur, C2 372 (2000).

P. Le Delliou, « Béton précontraint aux Eurocodes », Presses universitaires de Lyon (PUL), ENTPE, (2004).

P. W. Abeles, B. K. Bardhan-Roy, « Prestressed Concrete Designer's » Handbook 3Rd Ed, Taylor & Francis Routledge (1981).

Règles BPEL 91. «Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton précontraint, suivant la méthode des états-limites». Eyrolles (1993). ISBN 2-212-10013-2.

R. Chaussin «Béton précontraint ». Technique de l'ingénieur, C2-360, (1992).

R. I. Gilbert, N.C. « Mickleborough, Design of prestressed concrete », School of Civil Engineering The University of New South Wales, Sydney, Australia, (1990)

Y. Cherait «Le béton précontraint aux états limites». Direction de la production universitaire de Guelma, DPUG (2004).