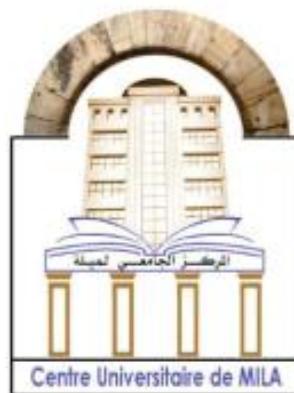


**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**
CENTRE UNIVERSITAIRE ABDELHAFID BOUSSOUF MILA
INSTITUT DE SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET HYDRAULIQUE
POLYCOPIE DE COURS



Notion du Béton Armé, Cours et exercices corrigés
(Support pédagogique pour étudiants)
(Licence Hydraulique)
Dr. Djamel DJEGHADER

2024-2025

Avant-propos

Ce polycopie de cours propose d'expliquer les principes fondamentaux de la conception des éléments et structures en béton armé soumises aux plusieurs types de chargement. Destiné principalement aux étudiants de Licence en Hydraulique, il aborde la double exigence de cette discipline : la maîtrise approfondie du comportement des éléments structuraux à chaque phase de chargement, et la connaissance rigoureuse des normes applicables – incluant leurs règles, exigences et justifications techniques.

Nous y développons une analyse détaillée du comportement des structures, depuis les charges de service (fonctionnement courant) jusqu'aux charges ultimes (rupture). L'approche s'appuie systématiquement sur les principes de la mécanique des structures, les propriétés des matériaux (béton/acier), et des exemples concrets illustrant la mise en œuvre théorique.

Conscients de la complexité inhérente au sujet, nous privilégions une présentation claire et accessible, évitant tout formalisme superflu. Les références aux normes (Eurocode, BAEL) sont contextualisées et accompagnées d'une notation unifiée, facilitant ainsi leur compréhension et leur application dans les projets réels."

Sommaire :

Introduction générale	01
Chapitre 1 : Formulation et propriétés mécaniques du béton armé	03
1.1. Définition du béton	03
1.2. Définition du béton armé.....	03
1.3. Historique.....	05
1.4. Evolution des règles de calcul.....	06
1.5. Composition du béton armé.....	07
1.5.1. Matrice béton.....	07
1.5.1.1. Ciment.....	07
1.5.1.2. Granulats :	08
1.5.1.3. Eau de gâchage :	08
1.5.1.4. Adjuvants ($\leq 0,4\%$ du poids du béton)	08
1.5.2. Armature en acier	08
1.6 Caractéristiques mécaniques des constituants du béton armé.....	09
1.6.1. Le béton.....	11
1.6.1.1 Résistances caractéristiques.....	11
1.6.1.2 Déformation instantanée.....	11
1.6.2. Acier.....	14
1.6.2.1. Caractères mécaniques.....	14
1.6.2. 1. Le diagramme conventionnel contrainte-déformation.....	14
1.6.2. 1. Nuance d'acier.....	15
1.7. Applications.....	16
1.7.1. Exercice 1.....	18
1.7.2. Exercice 2	18
	19
Chapitre 2 : Sécurité et prescriptions réglementaires	21
2.1. Généralité.....	21
2.2. Actions et sollicitations	21
2.2.1. Les actions.....	21
2.2.1.1. Actions permanentes (G)	21
2.2.1.2. Actions variables (Q)	22
2.2.1.3. Actions accidentielles (FA)	22
2.2.2. Les sollicitations :	22
2.2.3 Les combinaisons d'actions.....	22
2.2.3.1 Notations et définitions des actions	23
2.2.3.2. Combinaisons d'actions pour les sollicitations de calcul.....	24
2.2.3.2. Éléments courants des structures en béton armé soumis uniquement aux charges permanentes (G) et d'exploitation (Q)	25
2.3. Déformations et contraintes de calcul :	27
2.3.1 Etat limite ultime de résistance	27
2.3.1.1 Hypothèses de calcul.....	27
2.3.1.2. Diagrammes déformations-contraintes du béton selon le BAEL.....	28
2.3.1.3 Diagramme déformations-contraintes de l'acier.....	30
2.3.1.4. Règle des trois pivots (A, B, C)	31
2.3.2 Etat limite de service.....	32
2.3.2.1.. Hypothèses de calcul (BAEL A.4.5,1)	32
2.3.2.2. État Limite de Compression du Béton (BAEL A.4.5,2)	33

2.3.2.3 Etat limite d'ouverture des fissures.....	33
2.4 Condition de non - fragilité (A.4.2,1)	34
2.4.1. Cas de la Traction Simple.....	34
2.4.2. Cas de la Flexion Simple (Section Rectangulaire)	35
2.5. Application.....	35
2.5.1. Exercice 1.....	35
2.5.2. Exercice 2.....	37
Chapitre 3 : Traction simple.....	39
3.1. Définition.....	39
3.2. Hypothèses de calcul	40
3.3. Détermination des armatures :	40
3.3.1. Calcul à l'état limite ultime de résistance.....	40
3.3.2. Calcul à l'état limite de service.....	41
3.3.3. Condition de non-fragilité.....	43
3.3.4. Section théorique à retenir.....	44
3.4. Application:	44
3.4.1. Exercice 1.....	44
3.4.2. Exercice 2.....	46
Chapitre 4 : Compression simple.....	49
4.1. Définition:	49
4.2. Hypothèses de calcul.....	49
4.3. Combinaison d'action de base.....	50
4.4. Flambement et élancement d'un poteau.....	50
4.4.1. Concept fondamental du flambement.....	50
4.4.2. Longueur de flambement (lf)	50
4.4.2. 1. Cas du poteau isolé	51
4.4.2. 2. Cas des bâtiments.....	51
4.4. 3. L'élancement.....	52
4.5. Calcul à l'état limite ultime de résistance.....	53
4.5.1. Effort normal limite théorique.....	53
4.5.2. Calcul à l'état limite de stabilité de forme.....	53
4.5.3. Condition de résistance finale.....	54
4.5.4. Calcul de α en fonction de l'Élancement λ	55
4.5.5. Armatures longitudinales.....	55
4.5.6 Armatures transversales	56
4.5.7 Dispositions constructives et recommandations.....	57
4.5.7.1. L'enrobage.....	57
4.5.7.2. L'espacement entre les armatures longitudinales.....	60
4.5.7.3. La longueur de recouvrement.....	61
4.5.7.4. Pour le calcul de N_u , les aciers pris en compte sont.....	62
4.6. Applications.....	63
4.6. 1. Exercice 1.....	63
4.6.2. Exercice 2.....	65
Chapitre 5 : Calcul de sections en béton armé soumises à la flexion simple.....	67
5.1. Définition.....	67
5.2 Calcul des armatures longitudinales à l'E.L.U.	68
5.2.1 Hypothèses de calcul - Explications :	68

5.2.1.1. Hypothèse de Navier-Bernoulli :	68
5.2.1.2. Pas de glissement relatif entre l'acier et le béton	68
5.2.1.3. La résistance du béton en traction est négligée Signification.....	68
5.2.1.4. La section d'acier est concentrée en son centre de gravité.....	68
5.2.1.5. Lois de comportement des matériaux :	69
5.2.1.6. Déformations limites : Méthode des « trois pivots » (Flexion simple)	69
5.2.2. Relation fondamentale des déformations et positions particulières de l'axe neutre.....	70
5.2.3 Section rectangulaire	72
5.2.3.1 Section sans aciers comprimés.....	72
5.2.3.2 Section avec aciers comprimés.....	75
5.2.4 Section en Té.....	78
5.2.4.1 Section sans aciers comprimés.....	80
5.2.4.2 Section avec aciers comprimés.....	85
5.3 Les justifications vis-à-vis de l'E.L.S.....	87
5.3.1. Objectif des vérifications à l'E.L.S	87
5.3.2. Méthodes de justification.....	87
5.3.3. Règles de priorité selon le degré de fissuration.....	87
5.3.4. Hypothèses de calcul.....	88
5.3.4.1. Hypothèse de Navier-Bernoulli.....	88
5.3.4.2. Adhérence parfaite.....	88
5.3.4.3. Négligence du béton tendu.....	88
5.3.4.4. Comportement élastique linéaire.....	88
5.3.5 Combinaisons d'actions.....	89
5.3.6. Caractéristiques géométriques	89
5.3.6.1. Position de 'axe neutre pour une section rectangulaire homogénéisée.....	89
5.3.6.2. Position de 'axe neutre pour une section en Té homogénéisée.....	90
5.3.6.3 Moment d'inertie par rapport à l'axe neutre pour une section Té.....	91
5.3.7. Calcul des contraintes du béton et de l'acier.....	91
5.3.8 Vérification des contraintes	92
5.4 Condition de non-fragilité	92
5.5. Application:	92
5.5.1. Exercice 1.....	92
5.5.2. Exercice 2	94
 Chapitre 6 : Adhérence et ancrage.....	 97
6.1. Définition et Rôle crucial de l'adhérence.....	97
6.2. Origines physiques de l'Adhérence.....	97
6.2.1. Adhérence Chimique (Collage) :	97
6.2.2. Adhérence par Frottement :	97
6.2.3. Adhérence par engrènement mécanique (Emboutissement)	97
6.3 Modes de rupture liée à l'adhérence	98
6.3.1. Rupture par traction de l'acier :	98
6.3.2. Glissement de la barre (Arrachement) :	98
6.3.3. Arrachement d'un cône de béton (Fendage)	98
6.4. Facteurs influençant l'adhérence Acier-Béton.....	99
6.5. La Contrainte d'Adhérence (τ_s) : Mesure Locale de la Liaison Acier-Béton.....	99
6.5.1. Interprétation Physique Détailée.....	100
6.5.2. Importance Pratique dans le Calcul des Structures :	101
6.6. Contrainte limite d'adhérence	101
6.7. Ancrage des aciers	102

Sommaire

6.7.1 Ancrage droit.....	102
6.7.2 Longueur de scellement droit dans le cas d'un paquet de barres	103
6.7.2.1. Concentration des contraintes d'adhérence :	104
6.7.2.2. Risque de fissuration prématuée :	104
6.7.2.3. Glissement collectif :	104
6.7.3. Ancrage Courbe (ou par Crochet)	104
6.7.3.1. Rayons de courbure minimaux.....	105
6.7.3.2. Caractéristiques des crochets standards.....	106
6.7.4. Ancrage des cadres, étriers et épingle.....	107
6.8. Recouvrements des armatures.....	108
6.8.1 Barres rectilignes sans crochets.....	109
6.8.1.1 Barres tendues.....	109
6.8.1.2 Barres comprimées.....	110
6.8.1.3 Couture des jonctions (Armatures transversales de recouvrement)	110
6.9. Applications.....	113
6.9.1. Exercice 1.....	113
6.9.2. Exercice 2.....	115

Introduction générale

Le béton armé est un matériau composite utilisé dans les constructions depuis l'époque romaine. La combinaison du béton avec l'acier permet d'améliorer les caractéristiques mécaniques du béton, et d'augmenter la résistance des éléments fabriqués en béton armé. En effet, l'utilisation de ce matériau s'est intensifiée avec l'évolution des techniques, grâce à son principe fondamental : le béton résiste aux efforts de compression, tandis que les armatures d'acier absorbent les contraintes de traction, créant ainsi une synergie mécanique optimale. Cette complémentarité permet de concevoir des structures complexes (poutres, dalles, poteaux) capables de supporter des charges importantes et des déformations dynamiques. Aujourd'hui, il constitue 70% des infrastructures mondiales, des gratte-ciel aux ponts, en passant par les barrages, offrant une durabilité exceptionnelle (dépassant souvent 100 ans) et une résistance au feu supérieure à 2 heures. Les innovations récentes (bétons fibrés, aciers inoxydables, formulations bas carbone) renforcent encore son rôle central dans la construction durable du XXI^e siècle.

La conception, l'étude et la réalisation d'ouvrages en béton armé nécessitent de faire des études approfondies des différents éléments structuraux tout en reposant principalement sur les règlements et les normes en vigueur. En effet, ce cours a pour but de présenter les méthodes de calcul et de conception des éléments structuraux tels que les poutres, les poteaux et les dalles.

Le présent polycopié est structuré en six chapitres:

Le premier chapitre présente les méthodes de formulation et propriétés mécaniques du béton armé, ainsi que les caractéristiques physiques et mécaniques des différents constituants du béton et de l'acier.

Le deuxième chapitre porte sur les actions et les sollicitations agissantes sur les éléments fabriqués en béton armé, avec une explication bien détaillée des différentes combinaisons de charge selon le BAEL.

Le troisième chapitre consacré au calcul des éléments soumis aux sollicitations de traction tels que les tirants. Le calcul de ces éléments basé sur les hypothèses et les recommandations préconisées par les normes en vigueur.

Le quatrième chapitre réservé principalement à la présentation des méthodes de calcul des éléments comprimés, tels que les poteaux. La méthode de ferraillage et les principes de mise en place des armatures transversales et longitudinales a été présentés plus en détail à la fin de ce chapitre.

Le cinquième chapitre explique les méthodes de calcul et de vérification des contraintes et des déformations, ainsi que le ferraillage des pièces fléchées telles que les poutres en béton armé. Le ferraillage des éléments fléchés basé principalement sur des justifications à l'état limite ultime et à l'état limite de service.

Le dernier chapitre présente les modes de liaison acier-béton ainsi que les techniques d'amélioration de l'interface entre les barres d'acières et le béton qui englobe. La qualité de cette interface est en fonction directe de la nuance de l'acier et de caractéristiques mécaniques du béton.

Chaque chapitre contient des exemples et des exercices de calcul afin de mieux comprendre l'application des formules et des équations utilisées dans ce cours.

Chapitre 1 : Formulation et propriétés mécaniques du béton armé

1.1 Définition du béton

Le béton est un matériau de construction composite obtenu par le mélange de plusieurs éléments (Figure 1.1):

- **Liant** (ciment, souvent de type Portland),
- **Granulats** (sable, gravillons, graviers),
- **Eau** (pour activer la réaction chimique du liant),
- Parfois des **adjuvants** (additifs pour modifier ses propriétés) ou des **fibres** (pour renforcement).

Lors du mélange, le ciment et l'eau forment une pâte qui durcit par **hydratation**, enrobant les granulats pour créer un matériau solide, résistant et durable. Le béton est largement utilisé pour les structures (bâtiments, ponts, routes, barrages) grâce à sa capacité à être moulé, sa résistance à la compression et sa longévité. Sa formulation peut être ajustée en fonction des besoins (résistance, fluidité, temps de prise, etc.).

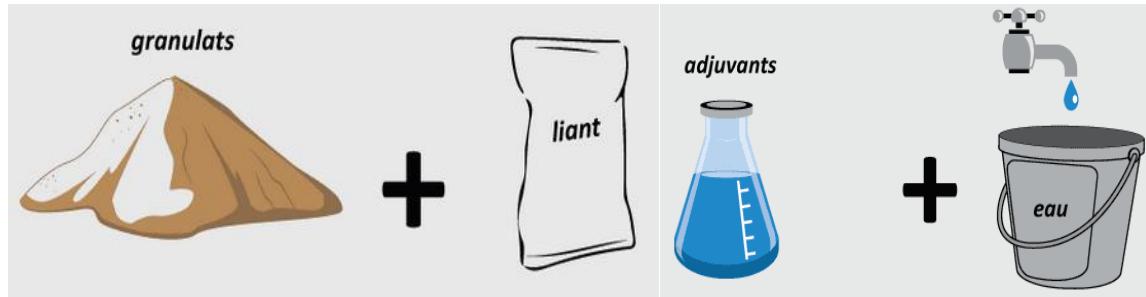


Figure 1.1. Compositions du béton

1.2. Définition du béton armé

Le béton armé est un matériau composite associant du béton et des armatures en acier. Ces armatures, généralement sous forme de barres (ferraillage) ou de treillis (Figure 1.2), sont intégrées dans le béton avant sa prise pour compenser la faible résistance du béton aux efforts de traction et de flexion.

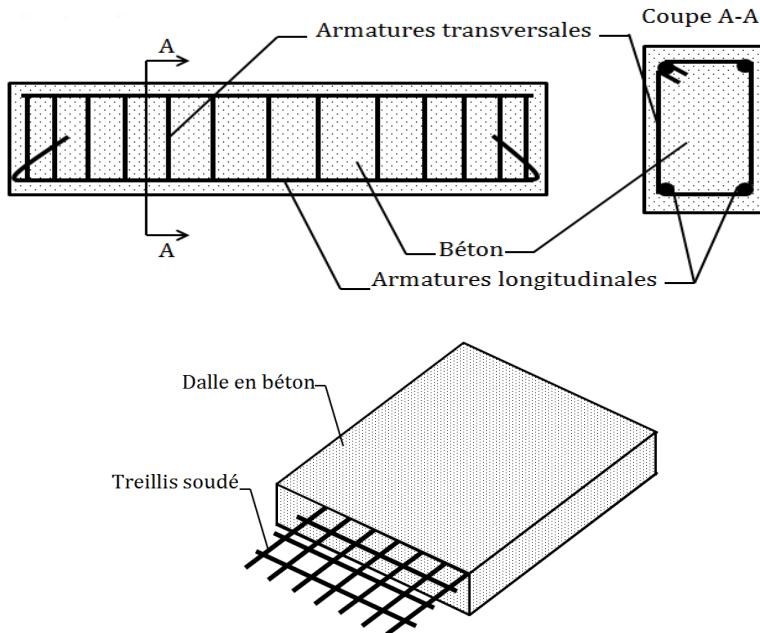


Figure 1.2. Eléments structuraux en béton armé.

Le béton se caractérise par une bonne résistance à la compression, par contre, la résistance à la traction ne représente qu'environ $1/10^{\text{e}}$ de sa résistance en compression. Par ailleurs, l'acier, offre une excellente résistance à la traction et à la compression, tout en présentant un comportement ductile (déformations importantes avant rupture).

La Figure 1.3 présente une poutre simplement appuyée soumise à un moment de flexion du principalement à son poids propre et au chargement externe (F). La flexion de la poutre entraîne des déformations de compression dans la partie supérieure de la poutre et des déformations de traction dans la partie inférieure (fissures dues aux contraintes de traction), et comme le béton présente une mauvaise résistance vis-à-vis les contraintes de traction, la mise en place des armatures en acier (armatures longitudinales principales) est nécessaire afin d'éviter /réduire ou limiter la propagation des fissures et la rupture de la poutre. Les armatures sont parfois disposées dans les zones comprimées si la résistance du béton est insuffisante pour équilibrer les contraintes de compression.

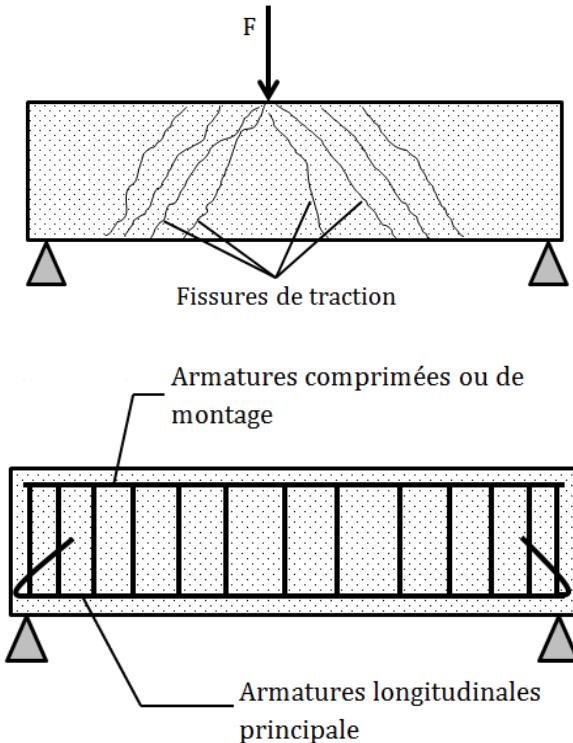


Figure. 1.3. Zones de fissuration et ferraillage dans une poutre

1.3. Historique :

Avant l'**émergence** du béton moderne, Louis Vicat, jeune ingénieur de l'École nationale des ponts et chaussées, réalise une avancée majeure en 1818 : il produit pour la première fois des chaux hydrauliques artificielles en contrôlant leurs composants et leurs proportions.

En 1848, Joseph-Louis Lambot innove en associant béton et armatures métalliques pour construire une barque, présentée à l'Exposition universelle de Paris en 1855. Peu après, Joseph Monier, jardinier à Versailles, utilise une méthode similaire pour fabriquer des bacs à fleurs, ce qui lui vaut d'être reconnu comme l'inventeur du béton armé (BA). Son procédé est commercialisé en Allemagne par l'entreprise *Monier Béton Brau*, qui dépose un brevet en 1868.

Les années suivantes marquent des étapes clés :

- 1891 : François Coignet emploie des poutres préfabriquées en béton armé pour un immeuble.
- 1886 : Mathias Koenen publie le premier traité théorique sur le dimensionnement des structures en BA.

- 1897 : Charles Rabut intègre le béton armé à l'enseignement de l'École des ponts et chaussées, créant le premier cours académique sur le sujet.
- Fin du XIX^e siècle : François Hennebique établit les bases de calcul pour une utilisation rationnelle du matériau.

Les progrès techniques conduisent, dès 1910, à la création d'institutions dédiées (*comité allemand du béton armé, American Concrete Institute, etc.*). Au XX^e siècle, le béton armé se généralise dans les bâtiments, ouvrages d'art, réservoirs, et autres infrastructures.

Une révolution survient avec Eugène Freyssinet, qui invente le béton précontraint : en 1928, il brevète un procédé où des câbles d'acier tendus compriment le béton, lui permettant de résister aux tractions futures. Baptisé « précontrainte » en 1933, ce système permet des ouvrages aux formes audacieuses, comme le pont de Luzancy (1940), symbole de portées longues et élancées.

1.4. Evolution des règles de calcul

En France

- **1906** : *Circulaire du Ministère des Travaux Publics* – Première réglementation officielle sur le béton armé.
- **1934** : *Circulaire Ministérielle* (30 pages) – Élargit les prescriptions techniques.
- **Règles BA 45** (90 pages) – Normalisation des méthodes de conception.
- **Règles BA 60** – Introduction de nouvelles exigences de durabilité.
- **1964** : *Circulaire Ministérielle* – Actualisation des critères de sécurité.
- **Règles CC BA 68** – Intègre les avancées sur les états limites.
- **BAEL 80** (modifiées en 1983) : « *Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages en béton armé suivant la méthode des états limites* » – Référence majeure jusqu'à l'Eurocode.
- **Eurocode 2** (applicable dès les années 2000) : « *Règles unifiées communes pour les structures en béton* » – Harmonisation européenne des normes.

En Algérie

- **CBA 93** : *Document Technique Réglementaire D.T.R. B.C. 2.41* – « *Règles de conception et de calcul des structures en béton armé* », approuvé par le ministère

de l'Habitat en **1993**. Ce texte s'inspire des normes françaises tout en adaptant les spécificités locales (climat, matériaux, pratiques).

1.5. Composition du béton armé

Le béton est un matériau composite qui associe d'une matrice en béton (*granulats* liés par un ciment hydraulique) et des armatures en acier intégrées, assurant la résistance aux efforts de traction.

1.5.1. Matrice béton

Le béton est un matériau composite formé de granulats (graviers, pierres concassées, sable) liés par un ciment hydraulique.

1.5.1.1. Ciment :

Le ciment est produit en chauffant un mélange finement broyé de calcaire, d'argile et de sable à 1450 °C dans un four rotatif. Ce processus génère du *clinker*, un produit intermédiaire.

Le clinker est refroidi, puis broyé en une poudre fine. Au contact de l'eau, il s'hydrate pour former une pâte durcissante, essentielle pour solidifier le béton.

Types de ciment courants (Tablrau 1.1):

- **Ciment Portland (CP)** : Standard.
- **CPHR** (Haute Résistance) : utilisé en préfabrication.
- **CPHS** (Résistance aux sulfates) : Pour fondations exposées aux eaux sulfatées.

Tableau 1.1 rassemble les types de ciment avec les classes de résistance

Types de ciments	Désignation
Ciment portland	CPA-CEM I
Ciment portland composé	CPJ-CEM II/A ; CPJ-CEM II/B
Ciment de haut fourneau	CHF-CEM III/A ; CHF-CEM III/B; CHF-CEM III/C
Ciment pouzzolanique	CPZ-CEM IV/A ; CPZ-CEM V/B
Ciment au laitier et aux cendres	CLC-CEM V/A ; CLC-CEM V/B

1.5.1.2. Granulats :

Ils forment le squelette du béton. Selon leur origine, on distingue les granulats roulés, extraits de roches exploités en carrière ou dragués en rivière ou en mer, puis concassés. Le sable permet de remplir les trous qui subsistent entre les gros granulats. Les agrégats qui confèrent au béton sa résistance doivent être insensibles au gel et ne pas contenir d'éléments argileux ou d'impureté organique. Le diamètre maximal des grains sera choisi en fonction de l'élément structural, de ses dimensions minimales ainsi que de l'écartement le plus faible de ses barres d'armatures. En général, le diamètre maximal des granulats est admis égal à 32 mm.

1.5.1.3. Eau de gâchage :

Doit être potable, sans sel (excluant l'eau de mer).

1.5.1.4. Adjuvants ($\leq 0,4\%$ du poids du béton) :

- **Plastifiants** : Améliorent la maniabilité et réduisent l'eau nécessaire, augmentant la résistance.
- **Retardateurs** : Prolongent la durée de travail du béton frais (transport longue distance, pompage).
- **Entraîneurs d'air** : Améliorent la résistance au gel-dégel.

1.5.1.5. Additions minérales ($\approx 10\%$ du poids du ciment) :

Cendres volantes, laitier, fillers : Renforcent la durabilité et les performances via leurs propriétés physico-chimiques.

Composition du béton : Définie par le dosage en ciment ($\geq 300 \text{ kg/m}^3$ recommandé pour protéger les armatures). Le Rapport eau/ciment (E/C) : Entre 0,4 et 0,6. Une réduction de l'E/C augmente la résistance. Ces paramètres influent directement sur la résistance mécanique et la durabilité (voir Tableau 1.2 pour les proportions typiques). Le Tableau 1.1 donne un aperçu sur l'ordre de grandeur des proportions de chaque composant du béton.

Tableau 1.2. Ordre de grandeur des proportions des solides et de l'air en masse et en volume

Matériaux	Ciment	Granulat	Eau	Air
Volume	7% - 14%	60% - 78%	14% - 22%	1% - 6%
Poids	9% - 18%	63% - 85%	5% - 9%	

1.5.2. Armature en acier

L'acier est un alliage de fer et de carbone (en faible proportion). Dans le béton armé, on utilise principalement des aciers doux, mi-durs **et** durs.

On utilise pour le béton armé, les ronds lisses (symbole ϕ ou RL), les armatures à haute adhérence (symbole HA) et les treillis soudés (symbole TS) (Figure. 1.4).



(a) Acier rond lisse

(b) Acier à haute adhérence

(c) Treillis soudés

Figure. 1.4: Armature en acier utilisé en béton armé :

Les formes des barres disponibles sont : les barres droites de longueurs standard de 12 m, fils : utilisés pour les éléments préfabriqués, treillis soudés (TS) qui assemblés par de fils croisés soudés prêts à l'emploi (Figure 1.5).



(a) Barres

(b) Fils en bobines

(c) treillis soudés

Fig. 1.5. Formes des aciers pour le béton armé disponibles

Diamètres des barres normalisés :

6, 8, 10, 12, 14, 16, 20, 25, 32 et 40 mm.

Pour chaque diamètre nominal, sont définis :

- Section nominale** : Équivalente à celle d'un rond lisse de même diamètre.
- Périmètre nominal** : Correspondant au périmètre théorique du rond lisse.
- Masse linéique** : Donnée en fonction du diamètre (voir références techniques).

Le tableau 1.3 donne la section nominale et la masse linéique correspondant aux différents diamètres nominaux.

Tableau 1.3 : Tableau des sections d'acier.

Diamètre de la barre D (mm)	Masse Kg/m	Section totale d'acier en cm² = $n \cdot \frac{\pi D^2}{4}$									
		Nombre des barres (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	0.222	0.28	0.57	0.85	1.13	1.41	1.7	1.98	2.26	2.54	2.83
8	0.395	0.50	1.01	1.51	2.01	2.51	3.02	3.52	4.02	4.52	5.03
10	0.617	0.79	1.57	2.36	3.14	3.93	4.71	5.50	6.28	7.07	7.85
12	0.888	1.13	2.26	3.39	4.52	5.56	6.79	7.92	9.05	10.18	11.31
14	1.210	1.54	3.08	4.62	6.16	7.70	9.24	10.78	12.31	13.85	15.39
16	1.580	2.01	4.02	6.03	8.04	10.05	12.06	14.07	16.08	18.10	20.11
20	2.466	3.14	6.28	9.42	12.57	15.71	18.85	21.99	25.13	28.27	31.42
25	3.850	4.91	9.82	14.73	19.63	24.54	29.45	34.36	39.27	44.18	49.09
32	6.313	8.04	16.08	24.13	32.17	40.21	48.25	56.30	64.34	72.38	80.42
40	9.864	12.57	25.13	37.70	50.26	62.83	75.40	87.96	100.53	113.09	125.66

1.6 Caractéristiques mécaniques des constituants du béton armé

1.6.1. Le béton

1.6.1.1 Résistances caractéristiques

a. Résistance caractéristique à la compression (f_{cj})

La résistance caractéristique à la compression du béton, notée f_{cj} , correspond à sa capacité à supporter une charge de compression après « j » jours de durcissement. La résistance de référence est prise à 28j dite valeur caractéristique requise (ou spécifiée). Cette résistance dépend de conditions de fabrication du béton, de la classe du ciment utilisé et de dosage en ciment par m^3 .

La résistance caractéristique à la compression est obtenue expérimentalement par l'application de l'essai de compression directe (Figure 1.6) sur un cylindre normalisé ($\varnothing 16 \text{ cm} \times 32 \text{ cm}$). L'essai de compression est effectué par l'utilisation d'une machine de compression qui permet de mesurer la force de compression, la valeur est la vitesse de déformation ainsi que la contrainte de rupture (Figure 1.6).



Figure. 1.6. Essai de compression sur éprouvette cylindrique

La contrainte de compression est donnée par la relation suivante :

$$f_{cj} = \frac{F_r}{S} \text{ (en MPa)} \quad (\text{Eq.1.1})$$

où F_r = charge de rupture (en kN), et la surface du cylindre est donnée par :

$$s = \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} = \frac{3.14 \cdot 16^2}{4} = 200 \text{ cm}^2 \quad (\text{Eq.1.2})$$

pour $\text{Fr}=500 \text{ kN}$, $f_{cj} = 25 \text{ MPa}$

L'essai de compression simple sur éprouvette 16x32 provoque des déformations (Voir Figure 1.7):

- Déformation relative longitudinale (Equation Eq.1.3) :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l' - l}{l} \quad (\text{Eq.1.3})$$

ε' déformation relative transversale (Equation Eq.1.4) :

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d} = \frac{d' - d}{d} \quad (\text{Eq.1.4})$$

v: coefficient de poisson (Equation Eq.1.5):

$$v = \frac{\text{déformation relative transversale}}{\text{déformation relative tlongitudinale}} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \quad (\text{Eq.1.5})$$

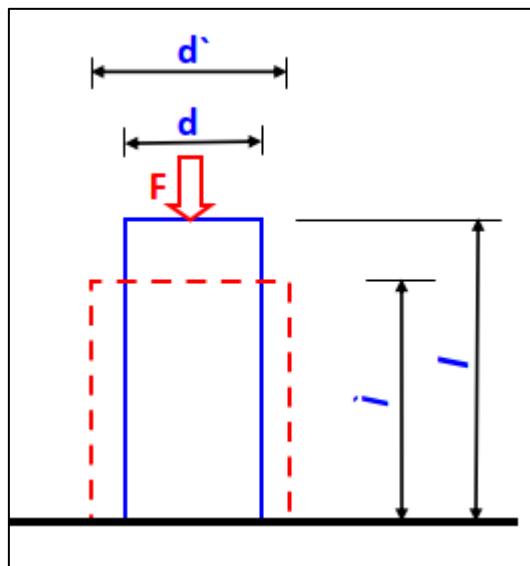


Fig. 1.7 : Détermination des déformations relatives longitudinale et transversale

L'essai de compression du béton permet d'obtenir le diagramme expérimental "contrainte - déformation" du béton ci-dessous (voir Fig. 1.7).

- **Diagramme contrainte-déformation**

Dans les calculs aux ELU, lorsqu'on n'a pas besoin d'une évaluation précise des déformations, on peut adopter le diagramme parabole-rectangle (Fig. 1.8).

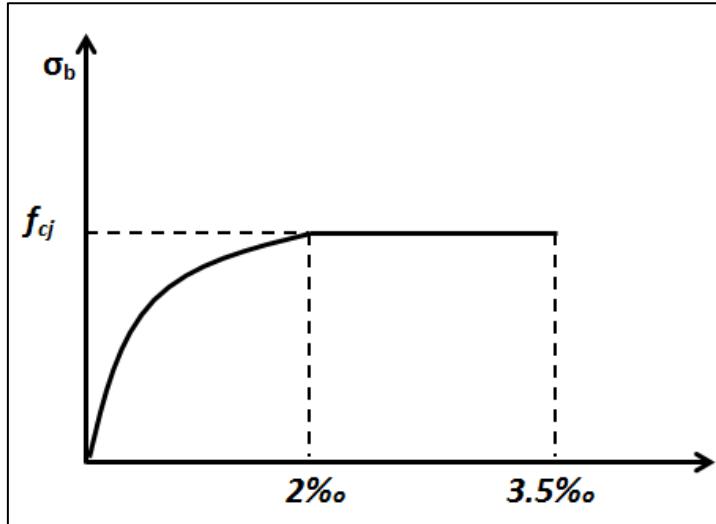


Figure. 1.8. Diagramme caractéristique contrainte déformation du béton.

La résistance de calcul du béton est déterminée par la relation suivante :

$$f_{bc} = 0.85 \cdot \frac{f_{cj}}{\theta \cdot \gamma_b} \quad (\text{Eq.1.6})$$

γ_b : le coefficient de sécurité égale à 1,5 (cas courant) et 1,15 (cas accidentel).

θ : Coefficient dépendant de la durée d'application de la charge avec :

$\theta = 1$ si la durée > 2h.

$\theta = 0.9$ si : 24 h la durée 1h.

$\theta = 0.85$ si : la durée 1h.

Pour un nombre de jours $j < 28$, la résistance f_{cj} des bétons suit les lois données par les règles de BAEL et BPEL :

$$\text{Bétons de résistance courante : } f_{cj} = \frac{j}{4.76 + 0.83j} f_{c28} \text{ pour } f_{c28} \leq 40 \text{ MPa} \quad (\text{Eq.1.7})$$

$$\text{Bétons de haute résistance : } f_{cj} = \frac{j}{1.4 + 0.95j} f_{c28} \text{ pour } f_{c28} > 40 \text{ MPa} \quad (\text{Eq.1.8})$$

Pour $j \geq 28 \rightarrow f_{cj} = 1.1f_{c28}$ (Eq.1.9)

b. Résistances caractéristiques à la traction :

La résistance caractéristique à la traction f_{tj} du béton à j jours est définie par :

$$f_{cj} = 0.6 + 0.06f_{tj} \quad (\text{Eq.1.10})$$

Avec, f_{cj} est la résistance caractéristique à la compression à j jours exprimée en MPa.

1.6.1.2 Déformation instantanée

- **Déformation longitudinale**

A défaut de résultats expérimentaux probants, on adopte pour le module de déformation longitudinale instantanée du béton E_{ij} une valeur conventionnelle égale à :

$$E_{ij} = 11000f_{cj}^{\frac{1}{3}}(\text{MPa}) \quad (\text{Eq.1.11})$$

Le module de déformation longitudinale différée E_{vj} est donné par :

$$E_{ij} = 3700f_{cj}^{\frac{1}{3}}(\text{MPa})$$

(Eq.1.12)

- **Déformation transversale**

$\mu = 0.2$ en zones non fissurées

$\mu = 0$ en zones fissurées

1.6.2. Acier

L'acier, alliage principalement composé de fer et d'une faible proportion de carbone, combine résistance mécanique en traction/compression et capacité de déformation. Le fer confère une base solide et une flexibilité, permettant au matériau de se déformer sans rupture, facilitant ainsi sa mise en forme. Le carbone renforce notamment la résistance, mais augmente la rigidité, réduisant la souplesse. La composition de l'acier résulte donc d'un équilibre entre ces deux caractéristiques.

1.6.2.1. Caractères mécaniques :

Les justifications mécaniques reposent principalement sur deux caractéristiques :

- La limite d'élasticité garantie (f_e), spécifique à chaque type d'acier.
- Le module d'élasticité longitudinale (E_s), pratiquement identique pour tous les aciers et pris égal à 200 000 MPa.

Le comportement de l'acier sous sollicitation est représenté par son diagramme contraintes-déformations en traction sur la Figure 1.9 (le diagramme est symétrique en compression).

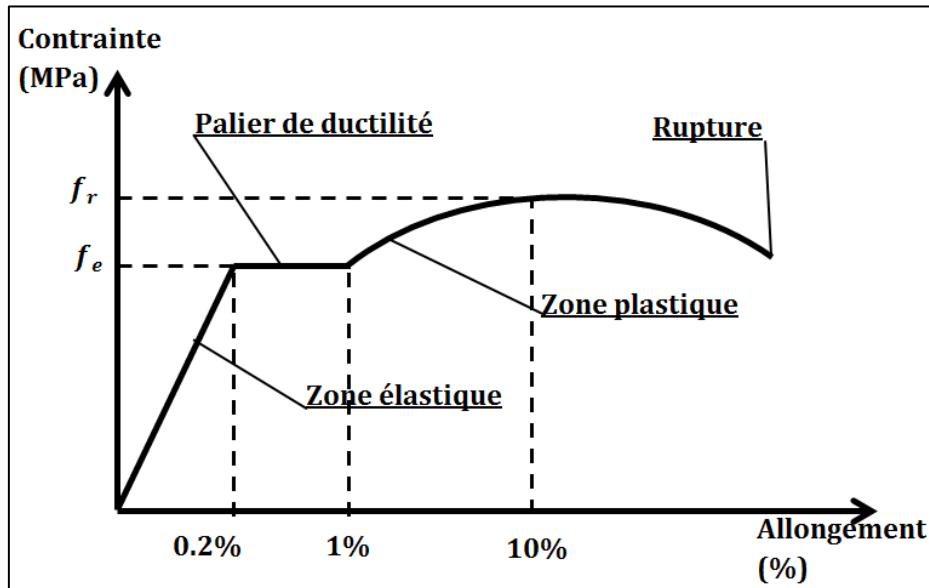


Figure. 1.9. Diagramme Contrainte-allongement de l'essai de traction sur acier.

1.6.2. 1. Le diagramme conventionnel contrainte-déformation

Le diagramme contrainte-déformation conventionnel de l'acier, utilisé pour les calculs structurels, il s'appuie sur la limite d'élasticité garantie (f_e) et nécessite de vérifier la contrainte correspondant à un allongement de 10 %. Ce diagramme est conçu pour faciliter les calculs, qui permettant une évaluation pratique des contraintes et des déformations dans les structures en acier, tout en assurant une cohérence avec les propriétés mécaniques réelles du matériau (Figure. 1.10). Il se décompose en phases clés:

- **Domaine élastique linéaire (OA)** : ce domaine présente une relation proportionnelle entre les contraintes et les déformations qui correspondent selon l'équation suivante :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

(Eq.1.13)

La Limite d'élasticité (f_e) présente la contrainte maximale avant apparition de déformations permanentes.

- **Plateau d'écoulement (AB) :**

Phase plastique où la déformation augmente à contrainte constante (f_e) avec déformations permanentes irréversibles.

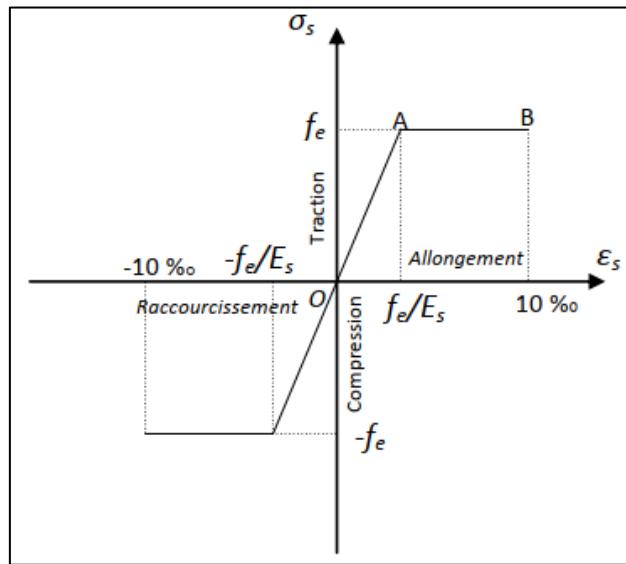


Figure. 1.10: Diagramme conventionnel déformations-contraintes de l'acier

1.6.2. 1. Nuance d'acier

Les nuances d'acier suivantes sont couramment utilisées dans la construction, caractérisées par leur limite d'élasticité et leurs propriétés mécaniques :

- **FeE215**

- Acier doux à faible résistance.
- Limite d'élasticité garantie : $f_e = 215 \text{ MPa}$.
- Résistance à la rupture: $\sigma_r \geq 330 \text{ MPa}$ avec allongement de 22%
- Utilisé pour des applications peu sollicitées ou nécessitant une mise en forme aisée (ex : structures légères).

- **Fe E 235**

- Acier doux, capacité à se déformer sans rompre, idéale pour les structures soumises à des charges dynamiques ou des chocs.
- Limite d'élasticité : **fe = 235 MPa**.
- Résistance à la rupture: $\sigma_r \geq 410$ MPa avec allongement de 22%
- Utilisé pour : construction métallique (poutres, profilés), éléments de fixation (boulons, vis), structures nécessitant une bonne soudabilité).

- Fe E 400

- Acier de moyenne à haute résistance.
- Limite d'élasticité : **400 MPa**.
- Résistance à la rupture: $\sigma_r \geq 480$ MPa avec allongement de 14%
- Offre un bon compromis entre résistance et ductilité.
- Utilisé dans les structures soumises à des charges modérées à élevées.

- Fe E 500

- Acier à **très haute résistance**.
- Limite d'élasticité : **500 MPa**.
- Résistance à la rupture: $\sigma_r \geq 550$ MPa avec allongement de 12%
- Idéal pour les ouvrages exigeants (ponts, bâtiments de grande hauteur) ou les zones fortement sollicitées.
- Réponds aux normes modernes d'optimisation des sections d'acier (réduction des coûts et du poids).

1.7. Applications :

1.7.1. Exercice 1 :

Soit un acier de nuance **FeE500** avec les données suivantes :

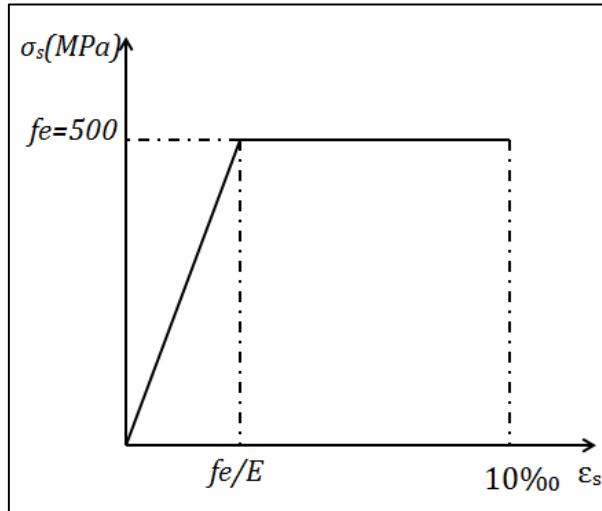
- Limite d'élasticité garantie : $f_e=500$ MPa.
- Module d'élasticité de l'acier : $E_s=200$ GPa.
- La résistance ultime ($f_u \approx 1.08 \times f_e$).

On demande de :

- Tracé du diagramme conventionnel contrainte-déformation
- Calculez la déformation élastique ε_s .
- Déterminez la contrainte dans l'acier pour une déformation de 5 %.
- Quelle est la contrainte ultime théorique (f_e) ?

Solution :

- Tracé du diagramme



- $\varepsilon_s = f_e/E_s = 500 / 200\ 000 = 2.5\%$
- À 5 % (dans le plateau plastique) : $\sigma_s = f_e = 500$ MPa.
- $f_u = 1.08 \times 500 = 540$ MPa.

Le diagramme simplifié ignore la pente de la zone d'écrouissage et l'arrondi à la limite élastique.

Cette modélisation surestime légèrement la rigidité post-élastique, ce qui est sécuritaire pour le dimensionnement

1.7.2. Exercice 2 :

Un laboratoire réalise un essai de compression sur une éprouvette cylindrique de béton (16 cm × 32 cm). Les données enregistrées sont les suivantes :

- Charge de rupture $F_r=650\text{kN}$
- Diamètre initial $d=16\text{cm}$
- Diamètre après rupture $d'=15.7\text{cm}$
- Longueur initiale $l=32\text{cm}$
- Longueur après rupture $l'=30.9\text{cm}$

On demande de :

1. Calculer la contrainte de compression maximale (f_{cj})
2. Déterminer les déformations relatives : Longitudinale (ε), Transversale (ε')
3. Calculer le coefficient de Poisson (v).
4. Identifier le module d'élasticité E_c (pente de la zone élastique).

Données supplémentaires :

- **Diagramme contrainte-déformation** (Fig. 1.7) :
 - Comportement élastique linéaire jusqu'à $\sigma=0.4f_{cj}$.
 - Pic de contrainte à $\varepsilon_{peak} \approx 0.002$.
 - Rupture à $\varepsilon_{rupture} \approx 0.0035$.

Solution

1. Contrainte de compression maximale (f_{cj})

Surface de l'éprouvette (Éq. 1.2) :

$$S = \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} = \frac{3.14 \cdot 16^2}{4} = 200\text{cm}^2$$

Contrainte (Éq. 1.1) :

$$f_{cj} = \frac{F_r}{S} = \frac{560 * 1000}{0.02} = 32.34\text{MPa}$$

2. Déformations relatives

a. Longitudinale (Éq. 1.3) :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l' - l}{l} = \frac{30.9 - 32}{32} = -0.0344 \text{ (réduction de 3.44%)}$$

b. Transversale (Éq. 1.4) :

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d} = \frac{d' - d}{d} = \frac{15.7 - 16}{16} = -0.0188 \text{ (réduction de 1.88%)}$$

3. Coefficient de Poisson (ν) (Éq. 1.5)

$$\nu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{0.0188}{0.0344} = 0.546 :$$

Interprétation : Valeur typique pour le béton ($\nu \approx 0.2$ en phase élastique, mais augmente en phase plastique).

4. Module d'élasticité E_c :

$$E_c = \frac{f_{cj}}{\varepsilon'_{élastique}} = \frac{32.34}{0.002} = 16170 MPa \text{ valeur cohérente avec } E_c = 11000\sqrt{f_{cj}}$$

Chapitre 2 : Sécurité et prescriptions règlementaires

2.1. Généralité :

La sécurité, définie comme l'absence de risque acceptable, repose dans le domaine de la construction sur trois exigences fondamentales : la stabilité de la structure, la durabilité des matériaux, et l'aptitude à l'usage prévu de l'ouvrage. Toutefois, une sécurité absolue est impossible à atteindre ; il convient d'intégrer un risque résiduel, lié à une probabilité non nulle de défaillance ou d'accident. Ainsi, le dimensionnement des ouvrages et la vérification de leur sécurité ne peuvent s'appuyer sur une approche empirique. Ces démarches s'articulent autour de règles de calcul rigoureuses et de normes codifiées, garantissant une analyse scientifique des contraintes mécaniques, environnementales et d'usage.

2.2. Actions et sollicitations

2.2.1. Les actions

En génie civil, les actions désignent les sollicitations (forces et moments) générées par les charges externes (charges permanentes, climatiques, d'utilisation, etc.) et par les contraintes dues à des déformations forcées (changements thermiques, tassements de supports, etc.).

Le règlement BAEL 91 classe ces actions en trois catégories :

- Actions permanentes (charges fixes),
- Actions variables (charges temporaires),
- Actions accidentielles (événements exceptionnels).

2.2.1.1. Actions permanentes (G)

Ces sollicitations, d'intensité constante ou quasi stable dans le temps, incluent :

- Le poids propre de la structure (masse volumique du béton armé : (25 KN/m³),
- Les charges des équipements fixes (cloisons, installations permanentes),
- Les poussées/pressions de terres ou liquides à niveau stable (ex. : réservoirs, murs de soutènement),

- Les efforts liés aux déformations imposées en continu (précontrainte, retrait différé).

2.2.1.2. Actions variables (Q)

Caractérisées par des variations fréquentes et significatives, elles regroupent :

(a) **Charges d'exploitation :**

- Charges liées à l'usage (fréquentation humaine, véhicules, stockage), classées par durée (provisoire/longue),
- Charges *mobiles* (matériel industriel, mobilier non fixe).

(b) **Charges climatiques :**

- Neige (en fonction de la région),
- Vent (pression dynamique selon l'exposition).

(c) **Effets thermiques** : dilatations/contractions dues aux écarts de température.

2.2.1.3. Actions accidentelles (FA)

Évènements exceptionnels et imprévisibles, tels que :

- Séismes (sollicitations sismiques définies par zonage),
- Chocs (impact de véhicules, explosions),
- Autres phénomènes rares (incendies majeurs, inondations extrêmes).

2.2.2. Les sollicitations :

Les sollicitations correspondent aux forces internes (telles que l'effort normal N et l'effort tranchant T) et aux moments (comme le moment de flexion M_f et le moment de torsion M_t) générés dans une structure. Ces grandeurs sont calculées à partir des **actions** (charges, forces appliquées) en utilisant des méthodes d'analyse adaptées (statique, résistance des matériaux, etc.). Les sollicitations sont déterminées après avoir combiné les actions selon les règles normatives, en sélectionnant systématiquement le cas le plus défavorable afin d'assurer la sécurité et la fiabilité de la conception structurelle.

2.2.3 Les combinaisons d'actions

Les combinaisons d'actions permettent de définir les cas de charge critiques auxquels une structure peut être soumise, en superposant les effets des différentes actions (permanentes, variables, accidentnelles) selon des règles normatives.

2.2.3.1 Notations et définitions des actions

a) Actions permanentes (G)

- **Gmax** : Ensemble des actions permanentes défavorables, contribuant à l'aggravation des sollicitations (ex : poids propre de la structure, charges fixes non compensées).
- **Gmin** : Ensemble des actions permanentes favorables, réduisant les effets défavorables (ex : poids stabilisant d'un remblai).
- **G** : Actions permanentes neutres, sans distinction de leur effet favorable ou défavorable.

b) Actions variables principales (Q_1)

Action variable dominante, dite « **de base** », choisie en fonction du contexte :

- **Q_B** : Charge d'exploitation des bâtiments (ex : mobilier, occupants).
- **W** : Action du vent (pression ou dépression).
- **S** : Charge de neige (dépendante de la localisation géographique).

c) Actions variables d'accompagnement ($Q_i, i \geq 2$)

Actions variables secondaires, combinées avec réduction par un coefficient ψ (ψ_0, ψ_1, ψ_2) pour refléter leur probabilité d'occurrence simultanée :

- **Q_r** : Charges d'exploitation des ponts-routes standards (systèmes A et B, charges sur trottoirs).
- **Q_{rp}** : Charges d'exploitation des ponts-routes spécifiques (convois militaires, transports exceptionnels).

d) Actions thermiques

- **T** : Variation uniforme de température (dilatation/contraction globale de la structure).
- **$\Delta\Theta$** : Gradient thermique (différence de température entre faces d'un élément, induisant des courbures).

e) Actions accidentielles (F_A)

Évènements rares mais extrêmes (ex : séisme, explosion, choc), caractérisés par une valeur représentative (F_A) définie par les normes.

2.2.3.2. Combinaisons d'actions pour les sollicitations de calcul

Les combinaisons d'actions déterminent les **cas de charge** à analyser pour vérifier la résistance et la stabilité d'une structure. Elles se divisent en deux catégories principales.

a) Combinaisons des États Limites Ultimes (ELU)

Cette combinaison est utilisée pour vérifier que la structure résiste aux charges extrêmes sans rupture ni instabilité (sécurité des personnes et intégrité structurale).

- **Combinaison fondamentale** (cas général) :

$$\text{ELU} = \gamma_G \cdot G_{\max} + \gamma_Q \cdot Q_1 + i \geq 2 \sum \gamma_{Q_i} \cdot \psi_{0i} \cdot Q_i$$

γ_G, γ_Q : Coefficients partiels de sécurité (1.35 pour G_{\max} , 1.5 pour Q_1).

ψ_1, ψ_2 : Coefficient de combinaison pour les actions variables d'accompagnement (ex : 0.7 pour les charges d'exploitation).

- **Combinaison accidentelle** (séisme, explosion, etc.) :

$$\text{ELU Accidentel} = G + F_A + \psi_1 \cdot Q_1 + i \geq 2 \sum \psi_{2i} \cdot Q_i$$

F_A : Action accidentelle (valeur représentative).

ψ_1, ψ_2 : Coefficients de réduction pour actions variables (ex : 0.5 pour charges fréquentes).

- **Exemple**

Pour un bâtiment soumis à son poids propre (G_{\max}), à une charge d'exploitation (Q_B), et au vent (W) :

$$\text{ELU} = 1.35 \cdot G_{\max} + 1.5 \cdot Q_B + 1.5 \cdot 0.6 \cdot W$$

$$\text{ELU} = 1.35 \cdot G_{\max} + 1.5 \cdot Q_B + 1.5 \cdot 0.6 \cdot W \quad (\text{avec } \psi_0=0.6).$$

b) Combinaisons des États Limites de Service (ELS)

Cette combinaison a pour but de garantir le confort d'usage et la durabilité de la structure sous charges courantes (limitation des déformations, fissurations, vibrations).

- **Combinaison caractéristique** (contraintes maximales en service) :

$$\text{ELS Caractéristique} = G + Q_1 + \sum i \geq 2 \psi_{0i} \cdot Q_i$$

- **Combinaison fréquente** (effets récurrents) :

$$\text{ELS Fréquent} = G + \psi_1 \cdot Q_1 + \sum_{i \geq 2} \psi_{2i} \cdot Q_i$$

- **Combinaison quasi permanente** (effets à long terme) :

$$\text{ELS Quasi Permanent} = G + \sum_{i \geq 1} \psi_{2i} \cdot Q_i$$

- **Exemple**

Pour un pont-route soumis à des charges de trafic (Q_r) et à un gradient thermique ($\Delta\theta$) :

$$\text{ELS Fréquent} = G + 0.7 \cdot Q_r + 0.6 \cdot \Delta\theta$$

(avec $\psi_1=0.7$ pour Q_r , $\psi_2=0.6$ pour $\Delta\theta$).

- **Remarque**

Dans le cas le plus courant, l'unique combinaison d'actions à considérer pour les fondations et les poteaux est: 1,35. G + 1,5. Q.

2.2.3.2. Éléments courants des structures en béton armé soumis uniquement aux charges permanentes (G) et d'exploitation (Q) (Exclusion des actions climatiques – vent, neige, etc.) :

a) Poutres sur deux appuis prolongée par un porte-à-faux :

- **Etats limites ultimes (ELU) :** (Voir Figure 2.1)

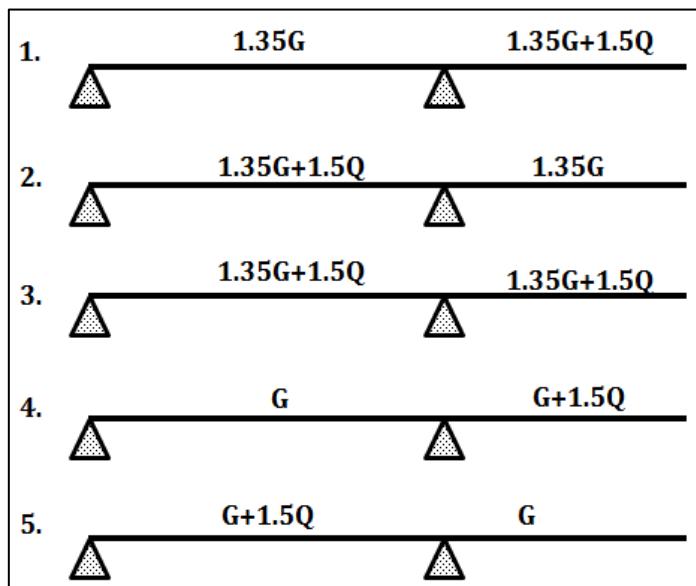


Figure 2.1. Combinaison de charge pour une poutre sur deux appuis avec porte-à-faux à l'ELU

La combinaison 4 est prise en compte pour la justification de l'équilibre statique mais avec 0,9G au lieu de G dans la travée adjacente au porte-à-faux.

- **Etats limites de service (ELS) :** (Voir Figure 2.2)

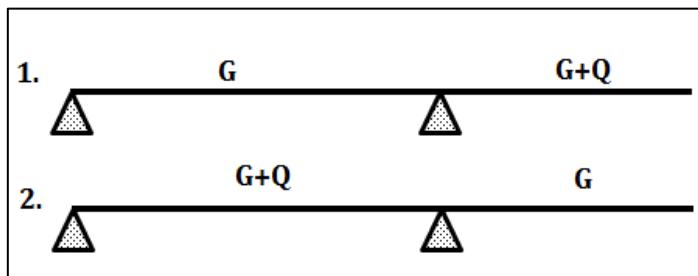


Figure 2.2. Combinaison de charge pour une poutre sur deux appuis avec porte-à-faux à l'ELS

b) - Cas des planchers : dalles ou poutres à plusieurs travées :

L'objectif est de trouver les sollicitations maximales (moment fléchissant, effort tranchant) dans chaque section de la structure, en considérant les chargements les plus défavorables possible.

- **Etats limites ultimes (ELU) :**

Cette combinaison est utilisée pour la vérification de la rupture ou de l'instabilité (Voir Tableau 2.1).

Tableau 2.1. Combinaison de charge pour dalles ou poutres continues à l'ELU

Combinaison	Travées chargées	Travées déchargées
1	1.35 G + 1.5 Q	1.35 G
2	G + 1.5 Q	G

- **Etats limites de service (ELS) :**

Cette combinaison est utilisée pour Vérification des déformations et de la fissuration (Voir Tableau 2.2).

Tableau 2.2. Combinaison de charge pour dalles ou poutres continues à l'ELS

Combinaison	Travées chargées	Travées déchargées
	G + Q	G

c) Cas des poteaux :

Dans les cas les plus courants, l'unique combinaison à considérer est :

$$1,35G + 1,5Q$$

d) Cas des fondations :

Combinaison d'action si le point d'appui n'intervient pas dans la stabilité sous l'action du vent :

$$1,35G + 1,5Q$$

2.3 Déformations et contraintes de calcul :

Les déformations et contraintes de calcul représentent respectivement, les modifications géométriques de la structure sous charges (flèches, rotations, allongements) et les efforts internes par unité de surface (en MPa) induits dans les matériaux (béton et aciers) par les sollicitations.

Ces grandeurs sont calculées pour vérifier les États Limites de Service (ELS) (fonctionnalité et durabilité) et les États Limites Ultimes (ELU) (résistance).

2.3.1 Etat limite ultime de résistance

2.3.1.1 Hypothèses de calcul

Ces hypothèses définissent les bases théoriques utilisées pour modéliser le comportement du béton et de l'acier sous chargement extrême. Elles sont essentielles pour simplifier les calculs tout en garantissant la sécurité.

- Compatibilité des déformations

- **Sections planes** : Les sections droites restent planes après déformation (hypothèse de Bernoulli).
- **Adhérence parfaite** : Aucun glissement entre l'acier et le béton → les déformations sont identiques pour les deux matériaux.

- Négliger la traction du béton

- Le béton fissuré en traction ne contribue pas à la résistance mécanique → seule l'armature en acier résiste à la traction.

- Limites de déformations

- **Acier** : Allongement maximal limité à **10 %o** (pour éviter une déformation plastique excessive).

- **Béton :**

Raccourcissement maximal de 3,5 % pour le cas de flexion (limite avant écrasement).

Raccourcissement maximal de 2 % pour le cas de compression (cas de poteaux ou éléments comprimés).

2.3.1.2. Diagrammes déformations-contraintes du béton selon le BAEL

Le BAEL (Règlement français pour le béton armé) définit deux modèles pour représenter le comportement du béton en compression : (Figures 2.3 et 2.4)

a) Diagramme « Parabole-Rectangle »

- **Phase parabolique** : La contrainte augmente suivant une parabole du 2^e degré jusqu'à la déformation correspondant à la résistance maximale du béton (ε_b).
- **Phase rectangulaire** : Au-delà de ε_{c2} , la contrainte reste constante jusqu'à la déformation ultime (ε_{bu}).
- **Contrainte maximale** : f_{bu} (résistance de calcul en compression).
- **Déformations limites** : $\varepsilon_b \approx 2\%$ et $\varepsilon_{bu} \approx 3,5\%$ (valeurs typiques).

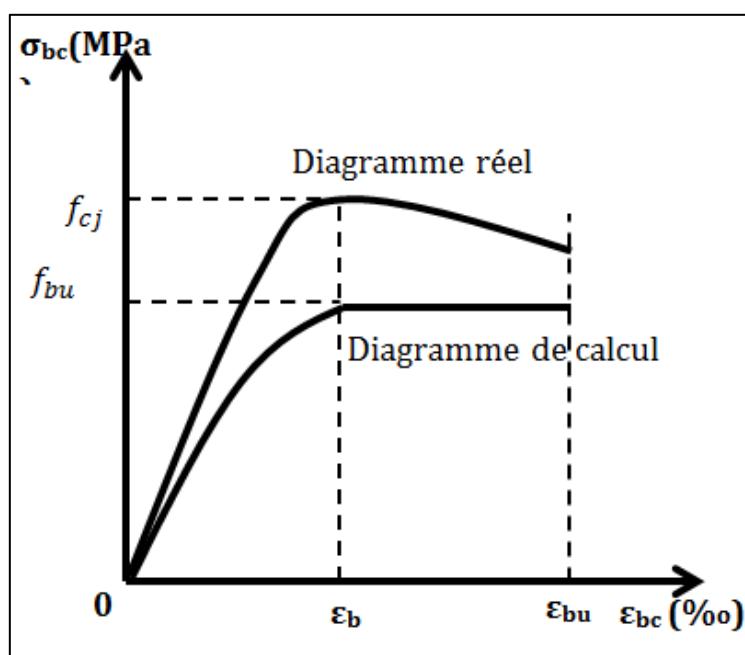


Figure 2.3. Diagramme parabole rectangle

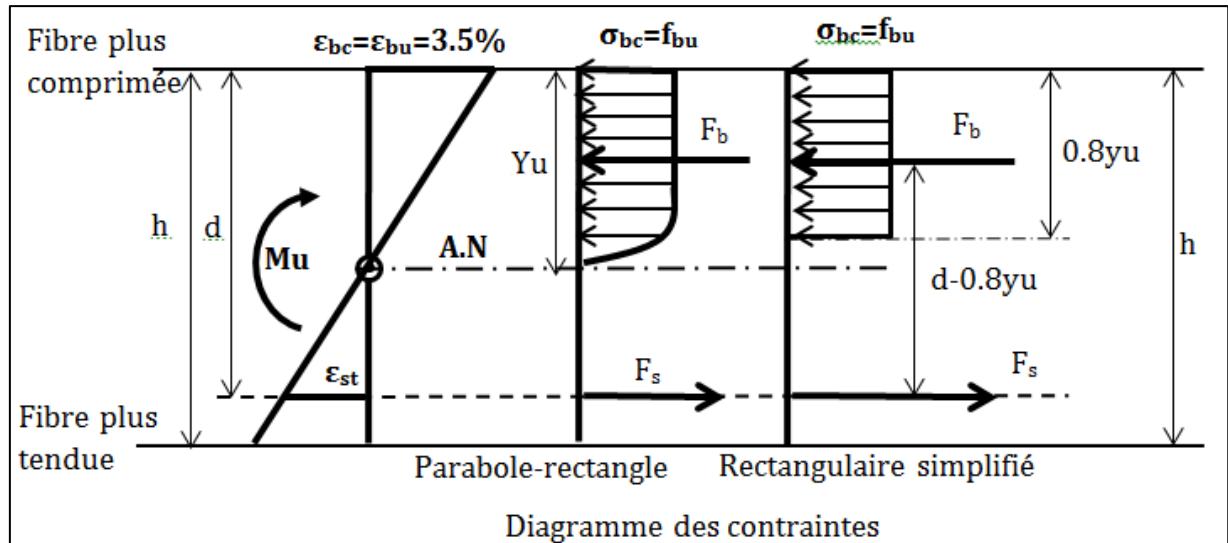


Figure 2.4 Diagramme déformation contrainte d'un élément fléché

Notations:

h : la hauteur totale de la section ;

d : hauteur utile en flexion simple ;

y_u : position de la fibre neutre ;

σ_{bc} : contrainte de compression du béton ;

f_{bu} : résistance conventionnelle ultime à la compression ;

ϵ_{bc} : déformation du béton en compression.

La valeur f_{bu} de la contrainte de calcul pour une déformation comprise entre 2 % et 3,5% est montrée sur l'équation 2.1:

$$f_{bu} = \frac{0.85 \cdot f_{cj}}{\theta \cdot \gamma_b} \quad \text{Eq.2.1}$$

f_{cj} : résistance caractéristique du béton en compression à j jour

γ_b : coefficient de sécurité

- $\gamma_b = 1,5$ dans le cas général

- $\gamma_b = 1,15$ pour les combinaisons accidentelles

θ : dépend de la durée d'application des charges.

- $\theta = 1$: lorsque la durée probable d'application des charges considérées est supérieure à 24 heures ;

- $\theta = 0,9$: lorsque cette durée est comprise entre 1 heure et 24 heures ;
- $\theta = 0,85$: lorsqu'elle est inférieure à 1 heure.

b) Diagramme Rectangulaire Simplifié :

Un bloc rectangulaire de contrainte constante f_{bu} , s'étendant sur une hauteur $0.8y$ (où y est la profondeur de l'axe neutre).

Hauteur réduite : $0.8y$ (pour approximer la zone comprimée réelle).

Contrainte uniforme : f_{bu} .

c) Comparaison et Justifications : Le tableau 2.3 présente une comparaison entre les diagrammes Parabole-Rectangle et Rectangulaire Simplifié pour le calcul du béton armé.

Tableau 2.3. Comparaison entre les diagrammes parabole-Rectangle et Rectangulaire Simplifié.

Aspect	Parabole-Rectangle	Rectangulaire Simplifié
Précision	Plus précis (modèle réaliste).	Simplifié, mais suffisant en flexion.
Utilisation	Sections entièrement/compliquées.	Flexion simple (section partiellement comprimée).
Calculs	Intégration nécessaire.	Force = $0.8y \cdot b \cdot f_{bu}$.
Exemple	Poteaux en compression axiale.	Poutres en flexion.

2 .3.1.3 Diagramme déformations-contraintes de l'acier (B.A.E.L. 4.3,2)

Se caractérise par une **modélisation élasto-plastique parfaite**, ajustée par des coefficients de sécurité. Voici les éléments clés :

a) Paramètres fondamentaux

- **Limite d'élasticité garantie (f_e)** : Contrainte de rupture conventionnelle de l'acier (ex. : Fe 500 → $f_e = 500$ MPa).
- **Coefficient de sécurité (γ_s)** :
 - **Cas courants** : $\gamma_s = 1,15$ → réduit la contrainte de calcul pour les états limites ultimes (ELU).
 - **Combinaisons accidentelles** (séisme, incendie) : $\gamma_s = 1$ → aucune réduction.
- **Module d'élasticité longitudinale (E_s)** : 200 000 MPa (pente de la zone élastique).

b) Diagramme de calcul : (Figure 2.5).

Phase élastique (déformation linéaire) :

- **Contrainte :** $\sigma = E_s \cdot \varepsilon_s$.

- **Jusqu'à :** $\varepsilon_s = \frac{f_e/\gamma_s}{E_s}$

Phase plastique (déformation à contrainte constante) :

- **Contrainte de calcul :** $\sigma_y = \frac{f_e}{\gamma_s}$

- **Déformation non limitée :** La contrainte reste constante jusqu'à la rupture, sans prendre en compte l'écrouissage.

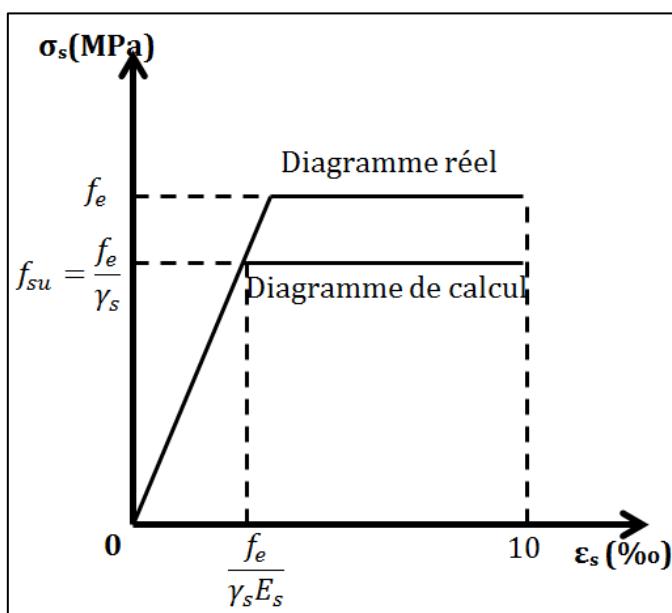


Figure 2.5. Diagramme contrainte déformation de l'acier

2.3.1.4. Règle des trois pivots (A, B, C) :

La règle des trois pivots (A, B, C) est un principe fondamental en béton armé pour déterminer le mode de rupture d'une section soumise à des efforts (flexion, compression, etc.). Elle repose sur l'analyse des déformations limites du béton et de l'acier, permettant de classer les scénarios de rupture selon la position de l'axe neutre (Figure. 2. 6).

- **Pivot A :** L'axe neutre est proche de la face comprimée → l'acier tendu atteint sa déformation maximale (10 %).
- **Pivot B :** L'axe neutre est à une position intermédiaire → béton et acier atteignent simultanément leurs limites.

- Pivot C :** L'axe neutre est proche de la face tendue → le béton comprimé s'écrase avant que l'acier ne se déforme plastiquement.

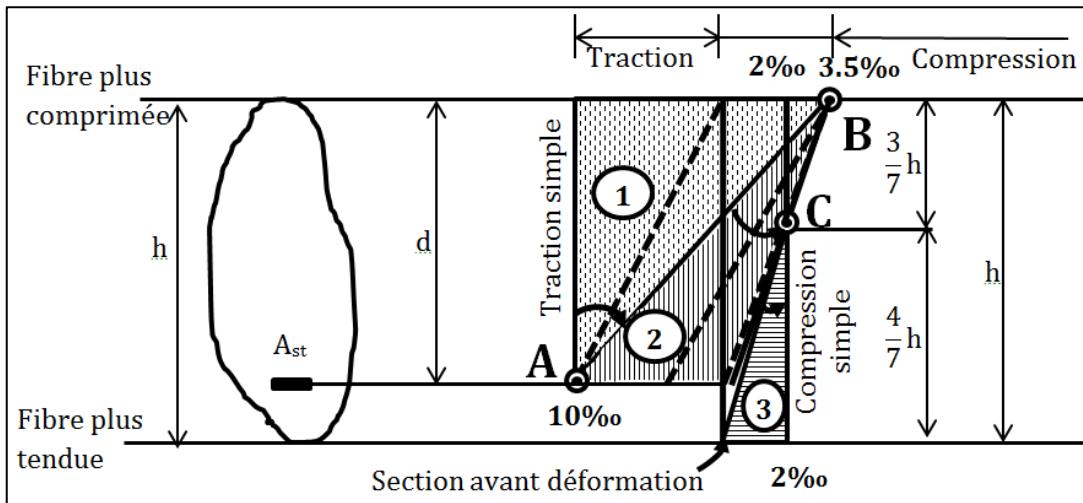


Figure. 2.6. Diagramme des déformations limites d'une section en béton armé

2.3.2 Etat limite de service

Les vérifications à l'ELS garantissent que la structure reste fonctionnelle et durable sous les charges d'exploitation, en contrôlant la compression du béton et l'ouverture des fissures.

2.3.2.1.. Hypothèses de calcul (BAEL A.4.5.1)

- Sections planes :** Les sections droites restent planes après déformation (hypothèse de Navier-Bernoulli).
- Adhérence parfaite :** Pas de glissement entre l'acier et le béton $\varepsilon_b = \varepsilon_s$.
- Béton tendu négligé :** La résistance du béton en traction est ignorée (seul le béton comprimé est pris en compte).
- Comportement élastique linéaire :**
 - Béton : Contrainte proportionnelle à la déformation ($\sigma_b = E_b \cdot \varepsilon_b$).
 - Acier : Contrainte proportionnelle à la déformation ($\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$).
- Coefficient d'équivalence n=15 :**

$$n = E_s / E_b = 15 \text{ (avec } E_s = 200\ 000 \text{ MPa et } E_b \approx 13\ 333 \text{ MPa)}.$$

Ce coefficient permet de transformer la section d'acier en une section équivalente de béton.

2.3.2.2. État Limite de Compression du Béton (BAEL A.4.5,2)

La contrainte de compression maximale dans le béton est limitée pour éviter :

- L'écrasement prématûr,
- La micro-fissuration ou le fluage excessif.

Contrainte admissible : (Equation 2.2)

$$\sigma_{bc} \leq 0,6 \cdot f_{cj} \quad (\text{Eq.2.2})$$

2.3.2.3 Etat limite d'ouverture des fissures

Les caractéristiques dimensionnelles et structurales des éléments, ainsi que la disposition des armatures, sont définies afin de réduire le risque de formation de fissures dont la largeur excéderait les seuils admissibles, compte tenu de la fonction et de l'environnement de l'ouvrage. Une ouverture excessive des fissures peut en effet altérer l'esthétique des surfaces apparentes, compromettre l'étanchéité des parois ou accélérer la corrosion des armatures. Pour maîtriser ce phénomène, la contrainte de traction dans les aciers est régulée et ne doit pas dépasser une valeur limite spécifiée, notée $\bar{\sigma}_{st}$, soit (Equation 2.3) :

$$\sigma_{st} \leq \bar{\sigma}_{st} \quad (\text{Eq.2.3})$$

Cette limitation des contraintes de traction ($\bar{\sigma}_{st}$) garantit ainsi une durabilité et une performance structurelle conformes aux exigences du projet.

- **Cas de fissuration peu préjudiciable**

(Locaux couverts et clos non soumis aux condensations) (Equation 2.4)

$$\bar{\sigma}_{st} = f_e \quad (\text{Eq.2.4})$$

- f_e : limite élastique de l'acier.
- Aucune restriction supplémentaire, car l'environnement n'est pas agressif.

- **Cas de fissuration préjudiciable**

(Éléments exposés aux intempéries ou en contact avec l'eau) (Equation 2.5)

$$\bar{\sigma}_{st} = \min \left\{ \frac{2}{3} f_e, 110 \sqrt{\eta f_{tj}} \right\} \quad (\text{Eq.2.5})$$

- f_e : limite élastique de l'acier.
- η : coefficient de fissuration :

- $\eta=1$ pour les ronds lisses,
 - $\eta=1,6$ pour les aciers HA (diamètre ≥ 6 mm),
 - $\eta=1,3$ pour les aciers HA (diamètre < 6 mm).
- f_{tj} : résistance caractéristique du béton à la traction à j jours (généralement j=28 jours).
 - **Cas de fissuration très préjudiciable**

(*Éléments en milieu agressif: eau de mer, produits chimiques, etc.*) (Equation 2.6)

$$\overline{\sigma_{st}} = \min \left\{ \frac{1}{2} f_e, 90\sqrt{\eta f_{tj}} \right\} \quad (\text{Eq.2.6})$$

- $0,5f_e$: moitié de la limite élastique de l'acier.
- $90\sqrt{f_{tj}}$: terme lié à la résistance du béton.

2.4 Condition de non - fragilité (A.4.2.1)

La non-fragilité est une exigence réglementaire visant à garantir qu'une structure ne subisse pas de rupture brutale lors de la fissuration du béton. Elle impose un minimum d'armatures longitudinales pour assurer une transition ductile entre l'état non fissuré et fissuré.

Une section est non fragile si la sollicitation provoquant la fissuration du béton entraîne dans les aciers une contrainte inférieure ou égale à leur limite d'élasticité f_e .

- **But :**

- Éviter une rupture brutale après fissuration du béton.
- Assurer que les armatures reprennent l'effort de traction libéré par le béton fissuré.

2.4.1. Cas de la Traction Simple

Pour une pièce soumise à traction simple : (Equation 2.7)

$$A_{smin} \geq \frac{B \cdot f_{t28}}{f_e} \quad (\text{Eq.2.7})$$

A_{smin} : Section minimale d'acier.

B : Section totale du béton tendu.

f_{t28} : Résistance caractéristique du béton à la traction à 28 jours.

f_e : Limite élastique de l'acier.

- Le béton non armé fissure sous la contrainte f_{t28} .
- Les armatures doivent reprendre intégralement cet effort sans dépasser f_e .

2.4.2. Cas de la Flexion Simple (Section Rectangulaire)

Pour une poutre rectangulaire soumise à flexion : (Equation 2.8)

$$A_{smin} \geq \frac{0.23 \cdot b \cdot d \cdot f_{t28}}{f_e} \quad (\text{Eq.2.8})$$

b : Largeur de la section.

d : Hauteur utile (distance entre la fibre comprimée et le centre de gravité des armatures).

- **Origine du Coefficient 0.23**

Le coefficient **0.23** provient de l'équilibre des forces lors de la fissuration :

- **Moment de fissuration M_{fs}** : (Equation 2.8)

$$M_{fs} = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot f_{t28} \quad (\text{Eq.2.9})$$

(où h est la hauteur totale de la section).

Bras de levier $z \approx 0.9d$:

$$A_s = f_e \cdot z = M_{fs} \Rightarrow A_s = \frac{M_{fs}}{f_e \cdot z}$$

En supposant $z \approx 0.9d$ et $h \approx 1.1d$ (pour une section rectangulaire), on obtient ci-dessus (Eq. 2.8).

2.5. Application :

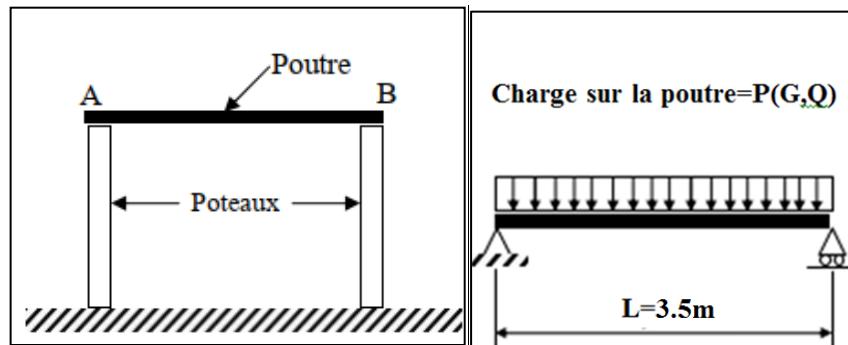
2.5.1. Exercice 1 :

Un portique (poteaux/poutres) de la figure ci-dessous soumis à une charge uniformément répartie $Q = 5 \text{ KN/ml}$.

On demande de :

1. Déterminer les réactions d'appuis R_A, R_B .
2. Evaluer le moment maximal sur la poutre (section critique en travée).
3. Déterminer M_{ult} et M_{ser} de la poutre et l'effort N_{cult} et N_{csr} des poteaux, en utilisant les combinaisons de charges à l'E.L.U et à l'E.L.S.

On donne : la section de la poutre (45,60) cm, la densité du béton $\rho=25\text{KN/m}^3$



Solution :

G = surface x densité du béton

$$G = 0.45 \times 0.6 \times 25 = 6.75 \text{ KN/m}^3$$

$$P_u = 1.35G + 1.5Q$$

$$P_s = G + Q$$

1- Réaction d'appui :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow Hx = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = P_u \cdot L$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow R_B \cdot L - P_u L \cdot \frac{L}{2}$$

$$R_B = P_u \cdot \frac{L}{2} = R_A$$

2- Moment max

$$M = \frac{P_u L}{2} x - \frac{P_u x^2}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow M = 0$$

$$x = \frac{L}{2} \Rightarrow M = \frac{P_u L^2}{4} - \frac{P_u L^2}{8} \Rightarrow M = \frac{P_u L^2}{8}$$

$$x = L \Rightarrow M = 0$$

$$M_{max} = \frac{P_u L^2}{8}$$

3. M_{ult} et M_{ser} de la poutre et l'effort N_{cult} et N_{csen} des poteaux, en utilisant les combinaisons de charges à l'E.L.U et à l'E.L.S.

$$P_u = 1.35G + 1.5Q = 1.35 * 6.75 + 1.5 * 5 = 16.613 \text{ KN}/m$$

$$P_s = G + Q = 6.75 + 5 = \frac{11.75 \text{ KN}}{m}$$

$$M_{ult} = \frac{P_u L^2}{8} = \frac{16.613 * 3.5^2}{8} = 25.437 \text{ KNm}$$

$$M_{ser} = \frac{P_{ser} L^2}{8} = \frac{11.75 * 3.5^2}{8} = 17.992 \text{ KNm}$$

$$N_{ult} = R_A = R_B = P_u \cdot \frac{L}{2} = 16.613 * \frac{3.5}{2} = 29.072 \text{ KN}$$

$$N_{ser} = R_A = R_B = P_u \cdot \frac{L}{2} = 11.75 * \frac{3.5}{2} = 20.563 \text{ KN}$$

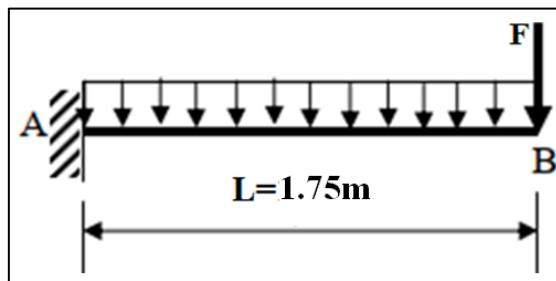
2.5.2. Exercice 2 :

Le calcul du ferraillage d'une console se fait d'abord par la détermination de la section critique, pour cela on veut étudier le chargement et les sollicitations les plus défavorables. En considérant que le poids propre G est une charge uniformément répartie sur toute la longueur de la console, ainsi que la charge d'exploitation Q .

Une autre charge permanente ponctuelle F située à l'extrémité B. (Figure 2).

1. Evaluer les sollicitations M_A et T_A dangereuses.
2. Déduire la section critique à l'E.L.U et à l'E.L.S.

On donne : $G=2000 \text{ daN}/\text{m}$, $Q=3500 \text{ daN}/\text{m}$, et $F=10 \text{ kN}$.



Solution :

1. Evaluation les sollicitations M_A et T_A dangereuses.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow Hx = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A = P_u \cdot L + F$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow M_A - P_u L \cdot \frac{L}{2} - F_{ult} \cdot L = 0$$

$$M_A = \frac{P_u L^2}{2} + F_{ult} \cdot L$$

ELU :

$$P_u = 1.35G + 1.5Q$$

$$P_u = 1.35 * 20 + 1.5 * 35 = 79.5KN/m$$

$$F_{ult} = 1.35F = 1.35 * 10KN/m$$

$$F_{ult} = 1.35F = 13.5KN/m$$

ELS :

$$P_u = G + Q$$

$$P_u = 20 + 35 = 55KN/m$$

$$F_{ult} = F = 10KN/m$$

Sollicitations :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T(x) + P * x - R_A = 0$$

$$T(x) = P * x - R_A$$

$$x = 0 \Rightarrow T(0) = P_u \cdot L + F$$

$$x = 0 \Rightarrow T(L) = F$$

$$\sum M_{/x} = M_x + M_A + \frac{Px^2}{2} - R_A \cdot x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow M_{(0)} = -M_A = -\frac{P_u L^2}{2} - F_{ult} \cdot L$$

$$x = L \Rightarrow M_{(L)} = 0$$

2. ELU

$$M_{ult} = -\frac{P_u L^2}{2} - F_{ult} \cdot L = -145.359KNm$$

$$T_{ult} = P_{ult}L + F = 152.625KN$$

ELS

$$M_{ser} = -\frac{P_{ser} L^2}{2} - F_{ser} \cdot L = -101.719KNm$$

$$T_{ser} = P_{ser}L + F = 106.25KN$$

La section critique se situe au niveau d'encastrement.

Chapitre 3 : Traction simple

3.1. Définition :

Une pièce est soumise à de la traction simple si l'ensemble des efforts extérieurs agissant sur l'une des extrémités ou les deux extrémités équivaut à une force unique, dirigée selon l'axe et passant par le centre de gravité de la section étudiée (Figure 3.1).

- La section de la pièce est entièrement et uniformément tendue.
- Le centre de gravité est confondu avec celui des armatures.
- Les pièces soumises à la traction seront appelées des tirants

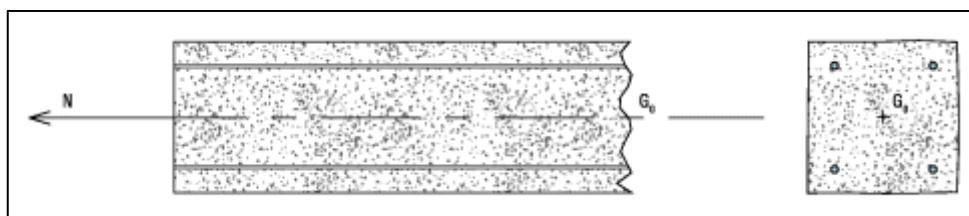


Figure. 3.1. Pièce soumise à la traction simple

Il existe des tirants rectilignes en béton armé (Figure 3.2.) qui sont utilisées principalement pour les couvertures voûtées de bâtiments industriels ou d'édifices tels que les mosquées, ces éléments résistent intégralement à la traction par leurs armatures longitudinales. Les armatures transversales n'assurent quant à elles qu'une fonction de montage (maintenir les barres lors du bétonnage). La conception optimisée exige une section de béton minimale (pour réduire le poids mort), et une répartition uniforme et symétrique des barres longitudinales dans la section, garantissant l'équilibre mécanique (privilégier une disposition symétrique, sans nécessairement imposer un nombre pair de barres).

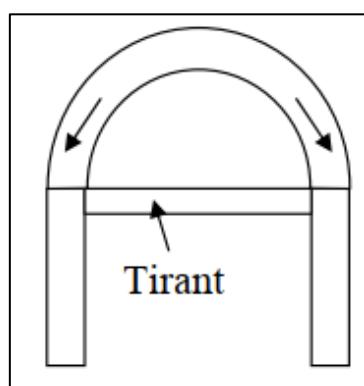


Figure.3.2. Tirant rectiligne en béton armé

Il existe également des tirants circulaires (Figure. 3.3) qui sont utilisés principalement pour contenir les poussées radiales dans les parois de réservoirs circulaires (eau, hydrocarbures) et silos (stockage de granulés ou poudres), ces éléments agissent comme des *anneaux de confinement*.

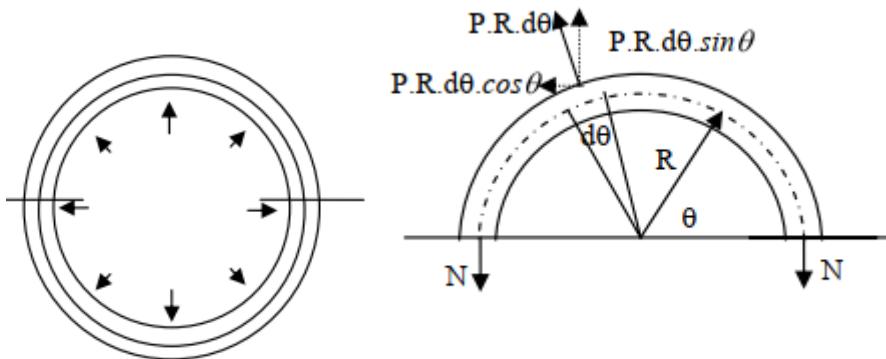


Figure 3.3. Tirant circulaire

3.2. Hypothèses de calcul

En traction pure, le calcul considère que :

- Le béton tendu est négligé (sa résistance n'est pas mobilisée) ;
- L'intégralité de l'effort de traction est repris par les armatures ;
- L'homocentré des sections est assuré (centres de gravité du béton et des aciers confondus) ;
- La contrainte de l'acier est déterminée selon :
 - À l'ELU : Déformation maximale des aciers fixée à $\varepsilon_{st} = 10\%$ (domaine du pivot A) ;
 - À l'ELS : Contrainte limitée en fonction du degré de fissuration (peu nuisible, préjudiciable ou très préjudiciable).

3.3. Détermination des armatures :

3.3.1. Calcul à l'état limite ultime de résistance :

La vérification de sécurité exige que l'effort de traction sollicitant N_u (induits par les charges appliquées) ne dépasse jamais l'effort résistant limite $N_{u,lim}$ que l'élément peut supporter (Equation 3.1):

$$N_u \leq N_{u,lim} \quad (\text{Eq.3.1})$$

Avec:

N_u : Effort normal ultime de traction : N_u=1.35G+1.5Q.

N_{u,lim} : Capacité portante ultime de la section, déterminée par la résistance des armatures, calculer par l'équation suivante :

$$N_{u,lim} = A_{st}^u \times f_{su} \quad (\text{Eq.3.2})$$

A_s : Section totale d'acier longitudinal.

f_{su} : Contrainte de calcul de l'acier à l'ELU, est donnée par l'équation ci-dessous :

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} \quad (\text{Eq.3.3})$$

Avec $\gamma_s = 1.15$

L'égalité des équations (Eq.3.1, 3.2 et 3.3) permet de déduire l'équation 3.4 :

$$N_u \leq N_{u,lim} = A_{st}^u \times f_{su} == A_{st}^u \times \frac{f_e}{\gamma_s} \quad (\text{Eq.3.4})$$

D'où :

$$A_{st}^u \geq \frac{N_u}{f_{su}} = \frac{N_u}{\left(\frac{f_e}{\gamma_s}\right)} \quad (\text{Eq.3.5})$$

3.3.2. Calcul à l'état limite de service:

En traction simple, le béton est toujours fissuré sous charge de service (hypothèse de calcul). Cette fissuration inévitable impose une vérification systématique à l'ELS afin de maîtrise de la fissuration (ouverture et espacement des fissures) et d'assurer la durabilité (protection des armatures contre la corrosion).

Selon la condition d'équilibre statique :

$$N_{ser} = A_{st}^{ser} \times \bar{\sigma}_{st} \quad (\text{Eq.3.6})$$

Avec

Avec : N_{ser}: l'effort normal de traction à l'ELS : N_{ser} = G + Q.

$\bar{\sigma}_{st}$: Contrainte limite dépendant du degré de fissuration (Voir le tableau 3.1 et le paragraphe du chapitre 2 : 2.3.2.3 Etat limite d'ouverture des fissures).

Tableau 3.1. Contrainte admissible du béton

Type de fissuration	Contrainte admissible $\bar{\sigma}_{st}$
Peu nuisible	$\bar{\sigma}_{st} = f_e$
Préjudiciable	$\bar{\sigma}_{st} = \min\left\{\frac{2}{3}f_e, 110\sqrt{\eta f_{tj}}\right\}$
Très préjudiciable	$\bar{\sigma}_{st} = \min\left\{\frac{1}{2}f_e, 90\sqrt{\eta f_{tj}}\right\}$

Pour les fissurations préjudiciable/très préjudiciables, l'ouverture de fissure est donnée par l'équation suivante:

$$w_k = e_{r,max} \times \varepsilon_{sm} \leq w_{max} \quad (\text{Eq.3.7})$$

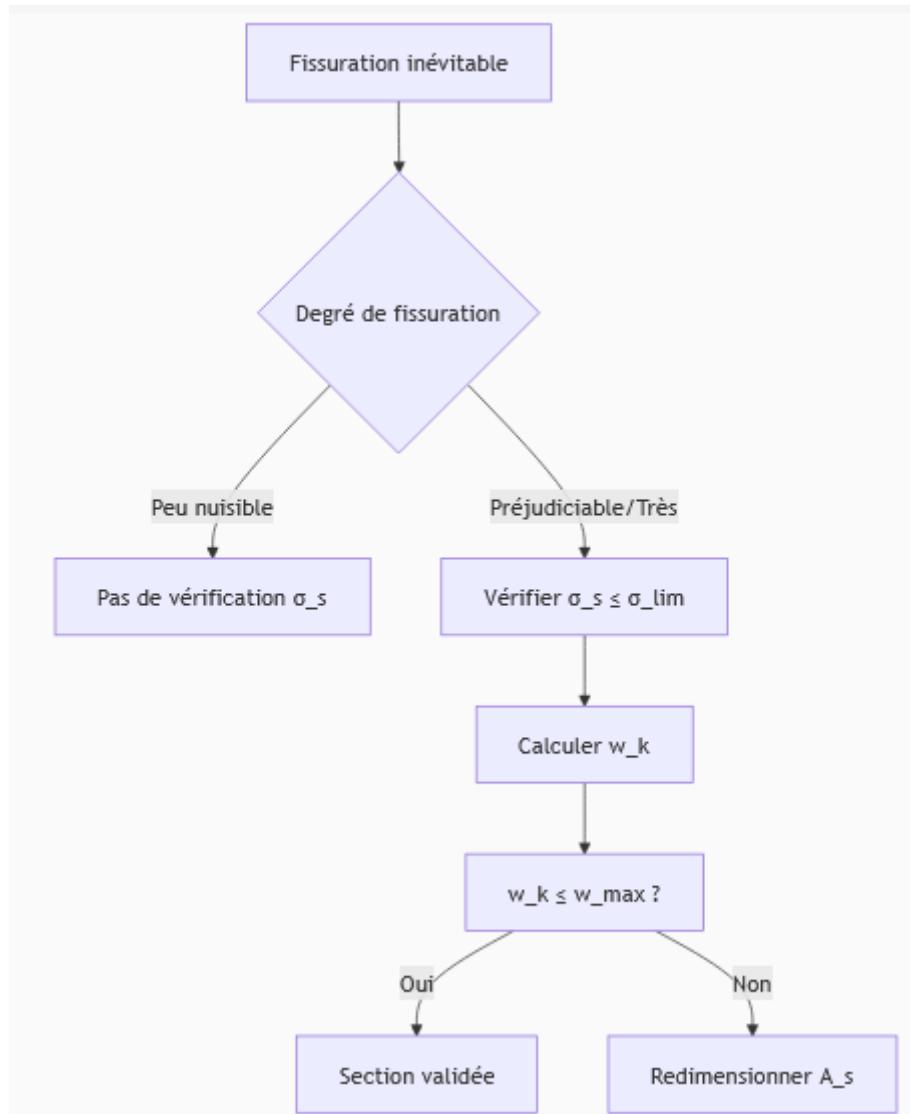
Avec :

- $e_{r,max}$: Espacement maximal des fissures
- $\varepsilon_{sm} \leq$: Allongement relatif moyen de l'acier
- w_{max} : Valeur limite (ex: 0.2 mm pour étanchéité)

La section d'armatures tendues est donnée par l'équation 3.8 :

$$A_{st}^{ser} = \frac{N_{ser}}{\bar{\sigma}_{st}} \quad (\text{Eq.3.8})$$

L'organigramme suivant résume la vérification de la section d'armature tendue à l'ELS:



3.3.3. Condition de non-fragilité :

La condition de non-fragilité garantit qu'une section de béton armé ne rompe pas brutalement lors de la fissuration du béton. Elle impose que les armatures soient suffisantes pour reprendre l'effort initialement supporté par le béton tendu au moment où celui-ci se fissure. En effet, la vérification de cette condition permet d'éviter une rupture fragile (sans avertissement) et assurer une ductilité minimale (Si le béton se fissure, les aciers doivent immédiatement prendre le relais sans provoquer l'effondrement de l'élément).

Pour une pièce soumise à traction simple : la section minimale est donnée par l'équation suivante (Equation 3.9)

$$A_{smin} \geq \frac{B f_{t28}}{f_e} \quad (\text{Eq.3.9})$$

A_{smin} : Section minimale d'acier.

B : Section totale du béton tendu.

f_{t28} : Résistance caractéristique du béton à la traction à 28 jours.

f_e : Limite élastique de l'acier.

- Le béton non armé fissure sous la contrainte f_{t28} .
- Les armatures doivent reprendre intégralement cet effort sans dépasser f_e .

Du point de vue résistance : la section du béton B peut être quelconque, mais pour que la pièce ne soit pas fragile, il faut que cette section vérifie la condition de non fragilité (Equation 3.10) :

$$B \geq \frac{A_{st} \cdot f_e}{f_{t28}} \quad (\text{Eq.3.10})$$

3.3.4. Section théorique à retenir :

La section retenue A_{st} doit satisfaire simultanément (Equation 3.11):

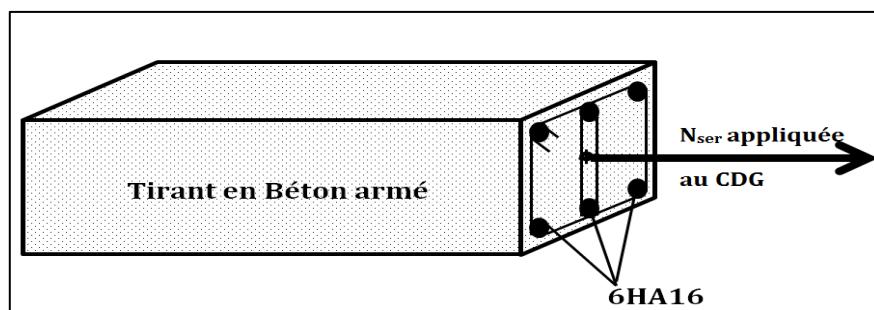
- La résistance mécanique (ELU)
- Les exigences de service (ELS)
- Le seuil minimal réglementaire

$$A_{st} = \max\{A_{st}^u, A_{st}^{ser}, A_{min}\} \quad (\text{Eq.3.11})$$

3.4. Application:

3.4.1. Exercice 1

Soit un tirant de section rectangulaire soumise à un effort $N_{ser} = 350\text{KN}$ (Figure ci-dessous), la section des armatures est 6HA16, avec une limite élastique $f_e = 500\text{MPa}$, la fissuration du béton est considérée comme très préjudiciable avec $f_{c28} = 25\text{MPa}$.



On demande de vérifier la section d'armature utilisée à l'ELS.

Solution :

La contrainte dans les aciers 6HA16 due u chargement Nser est donnée par l'équation suivante :

$$\sigma_{st} = \frac{N_{ser}}{A_{st}^{ser}}$$

Par ailleurs, on doit vérifier la condition suivante :

$$\sigma_{st} \leq \overline{\sigma}_{st}$$

$$A_{st}^{ser} = 6HA16 = 1205.76 \text{ mm}^2.$$

$$\sigma_{st} = \frac{N_{ser}}{A_{st}^{ser}} = \frac{340000}{1205.76} = 281.97 \text{ MPa}$$

Pour une fissuration de béton très préjudiciable :

$$\overline{\sigma}_{st} = \min \left\{ \frac{1}{2} f_e, 90 \sqrt{\eta f_{tj}} \right\}$$

$\eta = 1.6$ pour des armature haute adhérence et un diamètre supérieur à 6 mm.

$$f_{tj} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 0.6 + (0.06 \times 25) = 2.1 \text{ MPa}$$

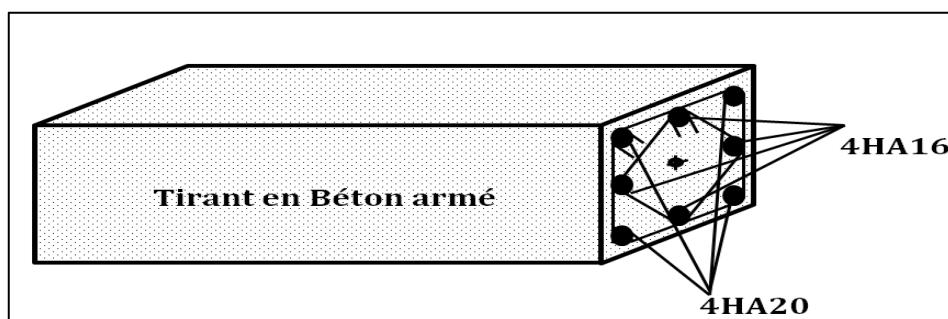
$$\overline{\sigma}_{st} = \min \left\{ \frac{1}{2} f_e, 90 \sqrt{\eta f_{tj}} \right\} = \min \left\{ \frac{1}{2} 500, 90 \sqrt{1.6 \times 2.1} \right\} = \min \{250, 164.97\}$$

$$\overline{\sigma}_{st} = 164.97 \text{ MPa}.$$

Donc :

$\sigma_{st} = 281.97 \text{ MPa} > \overline{\sigma}_{st} = 164.97 \text{ MPa} \rightarrow$ La condition n'est pas vérifiée, on doit augmenter la section des armatures tels que :

$$A_{st}^{ser} = \frac{N_{ser}}{\overline{\sigma}_{st}} = \frac{340000}{164.97} = 2060.98 \text{ mm}^2 = 20.61 \text{ cm}^2 = 4HA16 + 4HA20 \text{ (Voir la figure ci-dessous)}$$



3.4.2. Exercice 2 :

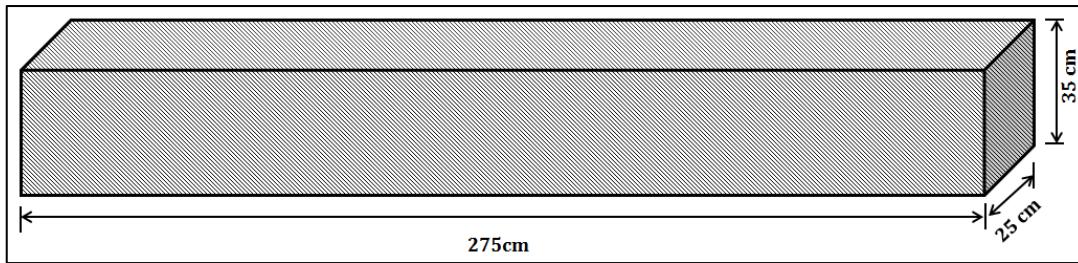
Soit une poutre en béton armé sous au chargement de traction (voire la figure ci-dessous).

La poutre repose sur le sol et son poids propre est négligé.

On demande de calculer la section des armatures à l'état limite ultime (ELU) et l'état limite de service (ELS).

On donne :

- Les armatures sont en acier HA FeE400.
- Le béton, $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$.
- Cas de fissuration : très préjudiciable
- Effort normal de traction simple : $N_{ult}=672 \text{ KN}$; $N_{ser}=488 \text{ KN}$.



Solution :

- Calcul de la section d'acier à l'ELU :

Par l'utilisation de l'équation (Eq.3.5):

$$A_{st}^u \geq \frac{N_u}{f_{su}} = \frac{N_u}{\left(\frac{f_e}{\gamma_s}\right)} = \frac{672.1000}{\left(\frac{400}{1.15}\right)} = 1932 \text{ mm}^2 = 19.32 \text{ cm}^2$$

- Calcul de la section d'acier à l'ELS :

Par l'utilisation de l'équation (Eq.3.8):

$$A_{st}^{ser} = \frac{N_{ser}}{\overline{\sigma}_{st}}$$

Cas de fissuration : très préjudiciable :

$$\overline{\sigma}_{st} = \min \left\{ \frac{1}{2} f_e, 90 \sqrt{\eta f_{tj}} \right\}$$

$$f_{t28} = 0.6 + 0.06 \times f_{c28} = 0.6 + 0.06 \times 30 = 2.4 \text{ MPa}$$

$$\eta = 1.6$$

$$\overline{\sigma_{st}} = \min \left\{ \frac{1}{2} 400_e, 90\sqrt{1.6 \times 2.4} \right\} = \overline{\sigma_{st}} = \min\{200, 176.363\} = 176.363 MPa$$

$$A_{st}^{ser} = \frac{N_{ser}}{\overline{\sigma_{st}}} = \frac{488000}{176.363} = 2767.02 mm^2 = 27.67 cm^2$$

- Condition de non fragilité :

Par l'utilisation de l'équation (Eq.3.9):

$$A_{smin} \geq \frac{B \cdot f_{t28}}{f_e} = \frac{350 \times 250 \times 2.1}{400} = 525 mm^2 = 5.25 cm^2$$

La section théorique requise pour cette poutre doit satisfaire à la condition de l'équation (Eq.3.11)

$$A_{st} = \max\{A_{st}^u, A_{st}^{ser}, A_{min}\} = \max\{19.32, 27.67, 5.25\} cm^2$$

Donc:

$$A_{st} = 27.67 cm^2 = 6 HA25$$

3.4.3. Exercice 3 :

Un tirant en BA de section 20 x 25 a une longueur de 25 m. l'effort de traction dû aux charges permanentes est $N_G = 0,26 MN$. L'effort de traction dû aux charges d'exploitation est $N_Q = 0,19 MN$.

Caractéristiques des matériaux :

- Béton $f_{c28} = 25 MPa$.
- Aciers HA $f_e = 400 MPa$, Module d'Young de l'acier $E_s = 2.10^5 MPa$,
- $\eta = 1,6$. La fissuration est préjudiciable.

1. Déterminer la section des armatures à disposer dans le tirant.
2. Quel est l'allongement du tirant à l'ELS.

Solution :

1-

- Calcul de la section d'acier à l'ELU :

$$N_u = 1.35 N_G + 1.5 N_Q = 1.35 \times 0.26 + 1.5 \times 0.19 = 0.636 MN$$

Par l'utilisation de l'équation (Eq.3.5):

$$A_{st}^u \geq \frac{N_u}{f_{su}} = \frac{N_u}{\left(\frac{f_e}{\gamma_s}\right)} = \frac{0.636x10^6}{\left(\frac{400}{1.15}\right)} = 1828.5 \text{ mm}^2 = 18.285 \text{ cm}^2$$

- Calcul de la section d'acier à l'ELS :

$$N_{ser} = N_G + N_Q = 0.26 + 0.19 = 0.45 \text{ MN}$$

Par l'utilisation de l'équation (Eq.3.8):

$$A_{st}^{ser} = \frac{N_{ser}}{\overline{\sigma}_{st}}$$

Cas de fissuration : préjudiciable :

$$\overline{\sigma}_{st} = \min \left\{ \frac{2}{3} f_e, 110 \sqrt{\eta f_{tj}} \right\}$$

$$f_{t28} = 0.6 + 0.06x f_{c28} = 0.6 + 0.06x 25 = 2.1 \text{ MPa}$$

$$\eta = 1.6$$

$$\overline{\sigma}_{st} = \min \left\{ \frac{2}{3} f_e, 110 \sqrt{1.6x2.1} \right\} = \overline{\sigma}_{st} = \min \{266.667, 201.633\} = 201.633 \text{ MPa}$$

$$A_{st}^{ser} = \frac{N_{ser}}{\overline{\sigma}_{st}} = \frac{0.45x10^6}{201.633} = 2231.77 \text{ mm}^2 = 22.317 \text{ cm}^2$$

- Condition de non fragilité :

Par l'utilisation de l'équation (Eq.3.9):

$$A_{smin} \geq \frac{B \cdot f_{t28}}{f_e} = \frac{200x250x2.1}{400} = 262.5 \text{ mm}^2 = 2.625 \text{ cm}^2$$

La section théorique requise pour cette poutre doit satisfaire à la condition de l'équation (Eq.3.11)

$$A_{st} = \max \{A_{st}^u, A_{st}^{ser}, A_{min}\} = \max \{18.28, 22.317, 2.625\} \text{ cm}^2$$

Donc:

$$A_{st} = 22.317 \text{ cm}^2 = 4 \text{ HA20} + 2 \text{ HA25}$$

2- Allongement du tirant à l'ELS.

$$\varepsilon_s = \frac{\overline{\sigma}_{st}}{E_s} = \frac{201.633}{200000} = 1.008\%$$

$$\Delta L = L \cdot \varepsilon_s = 25x0.001008 = 0.0252 \text{ m} = 2.52 \text{ cm}$$

Chapitre 4 : Compression simple

4.1. Définition:

Une pièce est sollicitée en compression simple lorsque l'ensemble des forces extérieures appliquées d'un même côté d'une section droite se réduit à une force unique normale de compression, perpendiculaire à la section et passant par son centre de gravité (CdG) (Figure 4.1). En effet, la résultante des efforts est exclusivement une force de compression axiale (aucun moment de flexion ni effort tranchant), et la force est appliquée au CdG de la section homogène (béton + aciers), garantissant une répartition uniforme des contraintes.

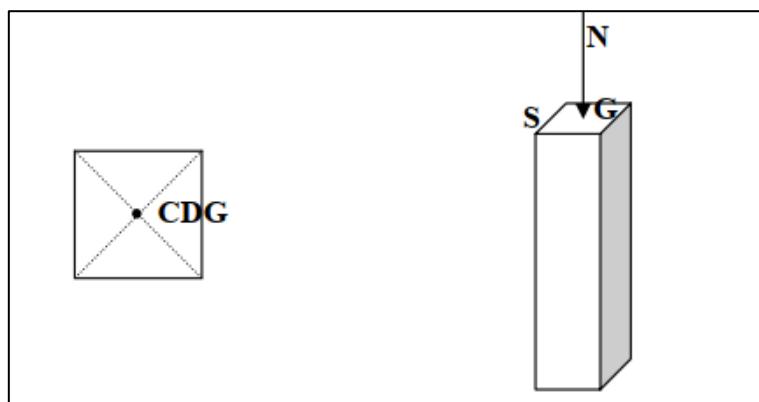


Figure 4.1. Pièce soumise à la compression simple

4.2. Hypothèses de calcul

Les règles BAEL définissent les hypothèses suivantes pour le calcul des poteaux en compression centrée :

- **Excentricité réduite :**

L'excentricité de l'effort normal N_u doit être faible, garantissant que la résultante agit quasi axialement.

- **Rectitude géométrique :**

Les imperfections de rectitude (défaux d'alignement) sont limitées à $\max(1\text{cm} ; l_0/500)$, où l_0 est la longueur libre du poteau.

- **Élancement maximal :**

L'élancement mécanique $\lambda = l_0/i$ (avec $i = \sqrt{I/B}$, rayon de giration) doit être inférieur à 70 pour éviter le risque de flambement.

- **Alignement des centres de gravité :**

Le centre de gravité (CdG) des armatures longitudinales doit être confondu avec le CdG de la section de béton, assurant une répartition uniforme des contraintes.

- **Calcul exclusif à l'ELU :**

Aucune vérification à l'État Limite de Service (ELS) n'est requise. Le dimensionnement et la détermination des armatures se font uniquement à l'ELU.

- **Comportement mécanique :**

La section est entièrement comprimée, conduisant à un diagramme de déformations passant par le **Pivot C** :

Déformation maximale du béton : $\varepsilon_{bc}=2\%$.

- **Compatibilité acier-béton :**

Aucun glissement relatif : $\varepsilon_{sc} = \varepsilon_{bc}=2\%$. (les aciers atteignent la même déformation que le béton).

4.3. Combinaison d'action de base

Dans les cas les plus courants, l'unique combinaison d'actions à considérer est :

$$\mathbf{N_u} = 1.35 \mathbf{N_G} + 1.5 \mathbf{N_Q}$$

avec :

N_G : charges verticales permanentes

N_Q : charges verticales d'exploitation

4.4. Flambement et élancement d'un poteau

4.4.1. Concept fondamental du flambement

Lorsqu'un poteau est soumis à une compression axiale, il peut subir un phénomène d'instabilité appelé flambement : déformation latérale soudaine entraînant une ruine brutale, même si les contraintes restent inférieures à la résistance des matériaux. Ce risque est particulièrement critique pour les poteaux élancés.

4.4.2. Longueur de flambement (l_f)

La longueur de flambement l_f est une longueur fictive qui remplace la longueur libre réelle l_0 dans les calculs de stabilité. Elle modélise la distance entre points de moment nul (points d'inflexion) dans la déformée du poteau.

l_f dépend des conditions d'appui aux extrémités (Figure. 4.2) :

4. 4.2. 1. Cas du poteau isolé

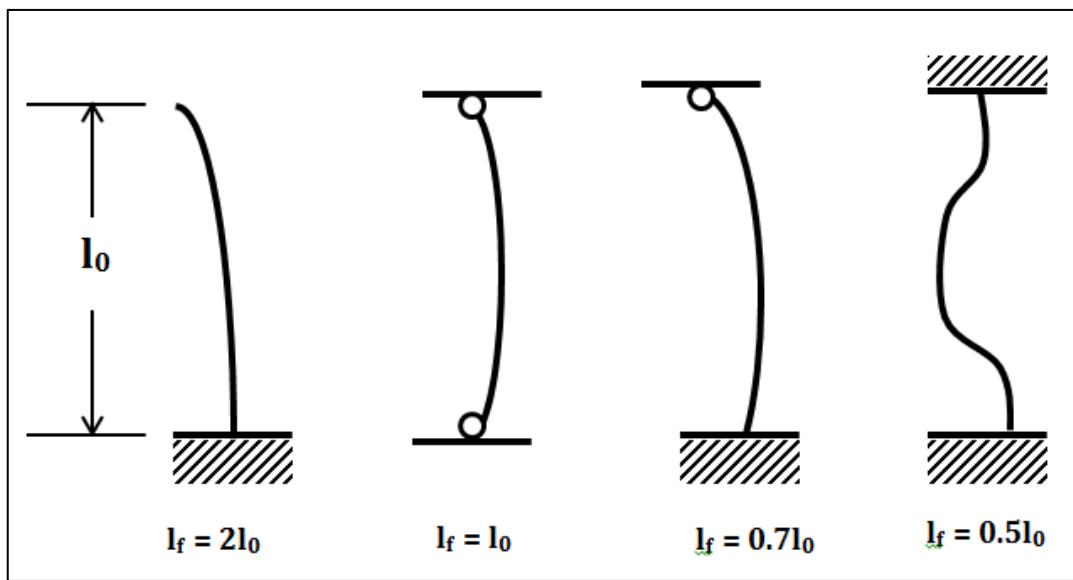


Figure 4.2 : Relation entre la longueur libre l_0 et la longueur de flambement l_f

4. 4.2. 2. Cas des bâtiments :

Pour les poteaux de bâtiments, la longueur de flambement l_f est déterminée selon des règles spécifiques liées aux conditions de rigidité des liaisons avec les planchers et fondations (Figure 4.3).

La longueur libre l_0 est mesurée :

- **Entre planchers** : Distance entre faces supérieures de deux planchers consécutifs.
- **Sur fondation** : Distance entre la face supérieure de la fondation et la face supérieure du premier plancher.
- **Cas d'un étage courant** (Figure 4.3)

Les poutres connectées au poteau ont une inertie supérieure à celle du poteau :

$$I_{poutre1} \geq I_{poteau} \text{ et } I_{poutre2} \geq I_{poteau} \Rightarrow \text{Longueur de flambement : } l_f = 0.707l_0$$

Cette valeur correspond à un encastrement partiel (équivalent à $l_f = l_0 2 l_f$), assurant une stabilité optimisée grâce à la rigidité des planchers.

- **Cas d'un poteau sur fondation** (Figure 4.3)

La poutre connectée au poteau a une inertie supérieure :

$$I_{poutre} \geq I_{poteau} \Rightarrow \text{Longueur de flambement : } l_f = 0.707l_0$$

La fondation est considérée comme un appui encastré, et la rigidité de la poutre limite la rotation en tête → même principe que l'étage courant.

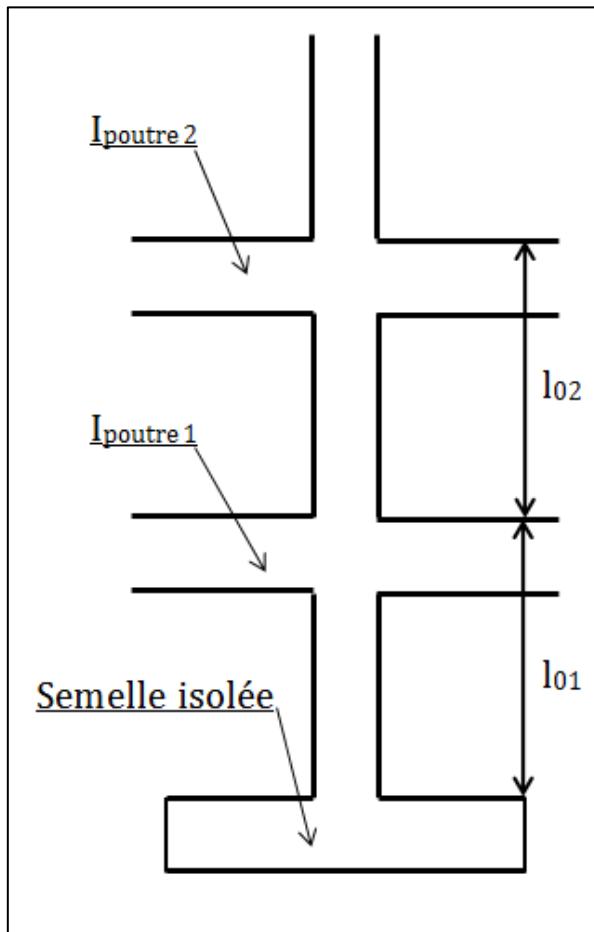


Figure.4.3 : Longueur de flambement pour un bâtiment

4.4. 3. L'élancement :

L'élancement λ est un paramètre fondamental caractérisant la sensibilité au flambement d'un poteau. Il est défini par l'équation suivante:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} \quad (\text{Eq.4.1})$$

l_f : Longueur de flambement (déterminée par les conditions aux limites).

i_{min} : Rayon de giration minimal de la section transversale, il est donné par l'équation suivante :

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{B}} \quad (\text{Eq.4.2})$$

I_{min} : Moment d'inertie minimal de la section (autour de l'axe le moins rigide).

B : Aire de la section brute de béton.

Le tableau 4.1. présente les valeurs de moment d'inertie et le rayon de giration d'une section rectangulaire et une section circulaire

Section	I_{min}	i_{min}	λ
Rectangulaire a < b	$I_{min} = \frac{b \cdot a^3}{12}$	$i_{min} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$	$\lambda = \frac{l_f \cdot 2\sqrt{3}}{a}$
Circulaire	$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$i = \frac{d}{4}$	$\lambda = \frac{4l_f}{d}$

4.5. Calcul à l'état limite ultime de résistance

Selon la condition de résistance, la sollicitation agissante N_u doit être au plus égale à la sollicitation résistante $N_{u,lim}$ (Eq.4.3) :

$$N_u \leq N_{u,lim} \quad (\text{Eq.4.3})$$

4.5.1. Effort normal limite théorique

L'effort normal limite théorique pour une section en béton armé, soumise à une compression centrée (sans flambement), est donné par l'équation suivante:

$$N_{ultimr} = B \cdot f_{bu} + A_{sc} \cdot \sigma_{sc(2\%o)} \quad (\text{Eq.4.4})$$

f_{bu} : Résistance de calcul du béton en compression, donnée par l'équation 4.5

$$f_{bu} = \theta_{bc} \cdot f_{cj} = \theta_{bc} \cdot \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \quad (\text{Eq.4.5})$$

f_{cj} : Résistance caractéristique du béton à 28 jours (MPa).

γ_b : Coefficient partiel de sécurité pour le béton (généralement 1.5).

θ_{bc} : Coefficient tenant compte des effets à long terme (généralement 0.85).

B : Aire de la section transversale de béton seul (sans aciers).

$\sigma_{sc(2\%o)}$: Résistance de calcul de l'acier, donnée por l'équation 4.6

$$\sigma_{sc(2\%o)} = \frac{f_e}{\gamma_s} \quad (\text{Eq.4.6})$$

f_e : Limite d'élasticité caractéristique de l'acier (MPa).

γ_s : Coefficient partiel de sécurité pour l'acier (généralement 1.15).

A_{sc} : section totale des armatures longitudinales.

4.5.2. Calcul à l'état limite de stabilité de forme

Lors de la vérification de la stabilité de forme (flambement) d'un poteau en béton armé, des précautions supplémentaires sont nécessaires. En effet, les défauts d'exécution (défauts d'aplomb, irrégularités de surface, etc.) réduisent sa résistance

réelle par rapport à la résistance théorique. Les Modifications apportées pour la sécurité sont les suivants:

- **Coefficient réducteur α** : ce coefficient est appliqué pour prendre en compte de manière forfaitaire l'imperfection géométrique initiale (manque de rectitude) et l'excentricité accidentelle des charges. Il est généralement inférieur à 1. Il diminue la résistance nominale pour couvrir les incertitudes liées au flambement.
- **Section réduite de béton Br** : Utilisée à la place de la section transversale réelle du béton B pour tenir compte spécifiquement de la sensibilité aux défauts locaux d'exécution en surface (enrobage irrégulier, béton moins compact en périphérie). Br est une section fictive obtenue en retirant une épaisseur (ex: 1 cm) sur tout le pourtour de la section réelle B .
 - Pour une section rectangulaire: $Br = (b - 0.02) \times (a - 0.02)$
 - Pour une section circulaire de diamètre D : $Br = \pi \times (D - 0.02)^2 / 4$

4.5.3. Condition de résistance finale :

La force normale de calcul ultime N_u (effort de compression appliquée au poteau) doit être inférieure à la résistance réduite du poteau, calculée comme suit :

$$N_u \leq \alpha \cdot \left(\frac{Br \cdot f_{c28}}{0,9 \cdot \gamma_b} + A_{sc} \cdot \sigma_{sc(2\%)} \right) \quad (\text{Eq.4.7})$$

Décomposition de la formule :

(a) Résistance du béton réduit :

- $Br \times f_{c28}$: Résistance à la compression du béton sur la section réduite (f_{c28} = résistance caractéristique à 28 jours).
- $(0.9 \times \gamma_b)$: Coefficient de sécurité appliqué à la résistance du béton.
 - Le 0.9 est un coefficient supplémentaire conventionnel de sécurité appliqué spécifiquement au béton dans la résistance au flambement (d'origine réglementaire BAEL).
- Signification : $\left(\frac{Br \cdot f_{c28}}{0,9 \cdot \gamma_b} \right)$ représente la résistance de calcul au flambement attribuable au béton *confiné* dans la section réduite Br .

(b) Résistance des aciers comprimés :

- A_{sc} : Section totale des armatures longitudinales comprimées.
- $\sigma_{sc(2\%)}$: Contrainte de calcul dans les aciers comprimés.
- Signification : $A_{sc} \cdot \sigma_{sc(2\%)}$ représente la résistance de calcul au flambement attribuable aux armatures longitudinales.

(c) Somme des résistances et application de α :

- $(\frac{B_r f_{c28}}{0,9 \gamma_b} + A_{sc} \cdot \sigma_{sc(2\%)})$: Représente la résistance nominale au flambement du poteau (béton + acier) sur section réduite.
- $\alpha \times [...]$: Le coefficient réducteur global α est appliqué à cette résistance nominale pour obtenir la résistance de calcul *admissible* au flambement, tenant compte des imperfections géométriques globales.
- Signification finale : Le terme de droite $\alpha \cdot (\frac{B_r f_{c28}}{0,9 \gamma_b} + A_{sc} \cdot \sigma_{sc(2\%)})$ est la résistance de calcul ultime au flambement (Nult) du poteau, après application de toutes les réductions de sécurité.

4.5.4. Calcul de α en fonction de l'Élancement λ

α est un coefficient (inférieur ou égal à 1.0) qui réduit la capacité portante théorique d'un poteau en béton armé (N_u) pour tenir compte des effets du second ordre (déformations supplémentaires et efforts induits par la flexion due au flambement sous charge axiale).

Les calculs classiques (premier ordre) supposent que la charge est parfaitement centrée et que le poteau est parfaitement droit. En réalité, des imperfections (excentricités accidentelles, défauts de rectitude) et les déformations sous charge causent un flambement, réduisant la capacité portante réelle.

α permet d'effectuer une vérification simplifiée au flambement en réduisant directement la résistance du matériau (le béton) dans le calcul de N_u .

- **Cas 1 : $\lambda \leq 50$** (Poteaux courts ou moyennement élancés) voir l'équation (Eq.4.8)

$$\alpha = \frac{0,85}{\left(1+0,2 \cdot \left(\frac{\lambda}{35}\right)^2\right)} \quad (\text{Eq.4.8})$$

- **Cas 2 : $50 < \lambda \leq 70$** (Poteaux très élancés) voir l'équation (Eq.4.9)

$$\alpha = 0,6 \cdot \left(\frac{50}{\lambda}\right)^2 \quad (\text{Eq.4.9})$$

Note : La valeur de α doit être divisée par :

- 1,10 si la majorité des charges ($> 50\%$) sont appliquées avant 90 jours,
- 1,20 si la majorité des charges ($> 50\%$) sont appliquées avant 28 jours (dans ce cas, remplacer f_{c28} par f_{cj} dans les calculs).

4.5.5. Armatures longitudinales

a. **Calcul de la section théorique** : la section théorique des aciers longitudinaux peut être tirée par l'utilisation de l'équation précédente (Eq.4.7), on obtient ainsi la formule sur l'équation suivante :

$$A_{sc} = A_{sc\text{théorique}} \geq \left[\frac{\left(\frac{N_u}{\alpha} - B_r f_{c28} \right)}{0,9 \gamma_b} \right] \quad (\text{Eq.4.10})$$

b. Calcul de la section minimale

Cette formule permet de limiter la fissuration et assurer la ductilité, elle est donnée par la formule suivante :

$$A_{min} = \max(4u, 0.2\%B) \quad (\text{Eq.4.11})$$

Avec : u périmètre de la section béton (en mètre),

c. Calcul de la section maximale

Correspond à 5% de la section de béton, elle permet d'éviter le surarmage (rupture fragile du béton), et assurer le bon compactage du béton entre les armatures, elle est donnée par la formule suivante :

$$A_{max} = 5\%B \quad (\text{Eq.4.12})$$

d. Section d'acier finale : (équation 4.13)

$$A_{sc} = \max(A_{sthéor}, A_{min}) \text{ et } A_{sc} \leq A_{max} \quad (\text{Eq.4.13})$$

4.5.6 Armatures transversales :

Les armatures transversales (cadres) a pour rôle d'empêcher le flambage des aciers longitudinaux (déformation latérale sous compression) et assurer :

- Le confinement du béton (amélioration de la ductilité),
- La stabilité géométrique des armatures lors du coulage,
- La résistance aux efforts tranchants (dans les poutres).

a. Diamètre minimal des armatures transversales (ϕ_t) :

Le diamètre minimal des armatures transversales est donné par l'équation ci-dessous :

$$\phi_t \geq \frac{\phi_{l,max}}{3} \quad (\text{Eq.4.14})$$

ϕ_t : Diamètre de l'armature transversale (mm),

$\phi_{l,max}$: Diamètre maximal des armatures longitudinales maintenues (mm).

- Pourquoi 1/3 ? , pour assurer une rigidité suffisante pour bloquer le flambement des barres longitudinales.

b. Espacement maximal entre les nappes (s_t)

$$s_t \leq \min(40 \text{ cm} ; a + 10 \text{ cm} ; 15\phi_{l,min})$$

- s_t : Espacement centre-à-centre entre nappes (cm),
- a : Plus petite dimension transversale de la pièce (cm),
- $\phi_{l,\min}$: Diamètre minimal des armatures longitudinales (cm).
- **40 cm** : Limite absolue pour garantir un **maintien fréquent**.
- **$a+10 \text{ cm}$** : Adapté à la **taille de la section** (ex: si $a=30 \text{ cm} \rightarrow s_t \leq 40 \text{ cm}$).
- **$15\phi_{l,\min}$** : Limite liée au **diamètre des barres** (ex: si $\phi_{l,\min}=12 \text{ mm} \rightarrow s_t \leq 15 \times 1.2 = 18 \text{ cm}$).

c. Cas particulier : Zones de recouvrement

Au moins 3 nappes d'armatures transversales dans les zones de recouvrement. Les recouvrements (soudure par chevauchement des barres) sont des zones critiques où :

- Les contraintes sont localisées,
- Le risque de désordre (éclatement du béton, flambement) est élevé.

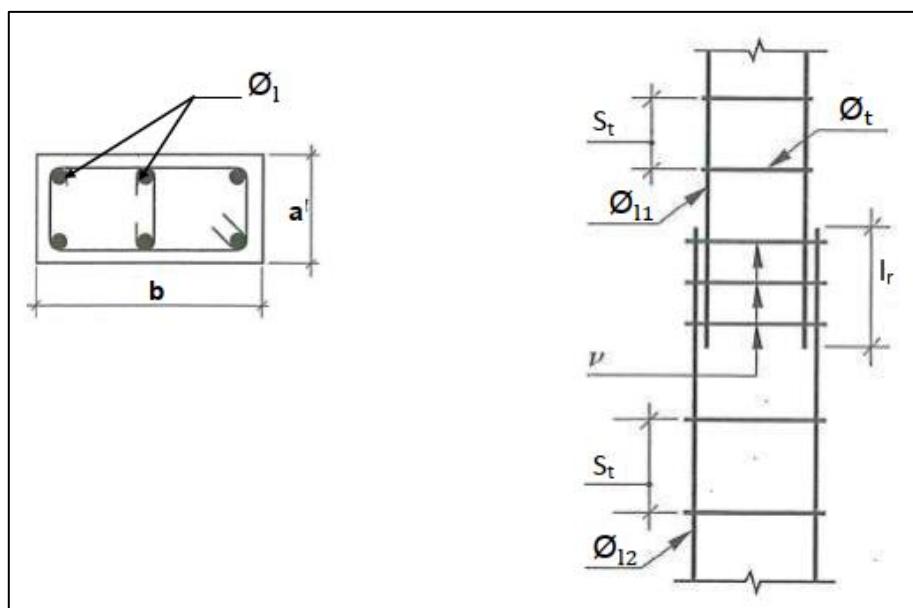


Figure. 3.6 : Les armatures transversales

4.5.7 Dispositions constructives et recommandations

4.5.7.1. L'enrobage :

L'enrobage est l'épaisseur de béton située entre la surface extérieure d'une armature et la surface la plus proche de l'élément en béton (parement). C'est un paramètre crucial pour :

- **Protection des aciers contre la corrosion** : C'est sa fonction principale. Le béton crée un environnement alcalin protégeant l'acier. Un enrobage suffisant

retarde la pénétration des agents agressifs (chlorures de l'eau de mer, CO₂ de l'air provoquant la carbonatation, humidité, produits chimiques).

- **Adhérence béton-acier :** Permet une bonne transmission des efforts entre le béton et les armatures (ancrage).
- **Protection contre l'incendie :** Le béton constitue une couche isolante thermique protégeant les aciers de températures excessives pendant un certain temps.
- **Confiner les armatures :** Maintient les barres en position lors du coulage du béton.

a) Règles d'enrobage minimal (c_{\min}) :

L'enrobage minimal dépend **principalement de l'environnement** auquel l'élément en béton est exposé. Les valeurs données sont des minima absolus :

- **$c_{\min} \geq 5 \text{ cm (50 mm)}$:**
 - **Environnement :** Très agressif.
 - **Exemples concrets :**
 - Ouvrages en **mer** (digues, quais, piles de ponts maritimes).
 - Ouvrages exposés aux **embruns** (front de mer, ponts côtiers).
 - Ouvrages dans des **industries chimiques** (usines, réservoirs exposés à des acides, bases, solvants agressifs).
 - **Pourquoi ?** L'eau de mer (chlorures) et les atmosphères chimiques sont hautement corrosives. Un enrobage épais est indispensable pour retarder considérablement l'atteinte des armatures par ces agents.
- **$c_{\min} \geq 3 \text{ cm (30 mm)}$:**
 - **Environnement :** Agressif ou exposé aux intempéries/condensations.
 - **Exemples concrets :**
 - **Parois extérieures** de bâtiments (façades, balcons, corniches).
 - Éléments exposés aux **intempéries** (poteaux extérieurs, dalles de toiture-terrasse non protégées, ponts routiers).
 - Éléments soumis à des **condensations fréquentes et importantes** (salles de bains mal ventilées, piscines couvertes, locaux de process humides et chauds, certains parkings souterrains).

- Zones exposées aux **sels de déverglaçage** (dalles de ponts routiers, trottoirs).
- **Pourquoi ?** L'eau (pluie, neige, condensation) et les cycles gel/dégel accélèrent la pénétration des agents corrosifs et la dégradation du béton. Les sels de déverglaçage sont très corrosifs.
- **$c_{min} \geq 1 \text{ cm (10 mm)}$** :
 - **Environnement** : Peu ou pas agressif.
 - **Exemples concrets** :
 - **Parois intérieures** de bâtiments **couverts et clos** (murs, poteaux, poutres, dalles à l'intérieur d'un bureau, d'un appartement, d'une usine "sèche").
 - **Condition essentielle** : Pas d'exposition aux condensations significatives ni aux intempéries.

b) Règles complémentaires ($c \geq \varphi_l$ et c_g) :

En plus des minima liés à l'environnement, l'enrobage minimal doit **toujours** satisfaire à deux autres conditions, quelle que soit l'exposition :

- **$c \geq \varphi_l$ (Diamètre maximal des armatures longitudinales)** :
 - **Pourquoi ?**
 - **Adhérence** : Assurer une longueur d'ancrage suffisante autour de la barre.
 - **Mise en place/Compactage** : Permettre au béton de bien enrober la barre et de circuler sans blocage, surtout dans les zones très ferraillées.
 - **Fissuration** : Limiter la largeur des fissures en surface (l'enrobage influence l'espacement des fissures).
- **$c \geq c_g$ (Diamètre maximal du granulat)** :
 - **Pourquoi ?**
 - **Compactage** : Permettre au béton, en particulier aux plus gros granulats, de passer librement entre les armatures et le coffrage pour remplir tout l'espace et éviter les nids de gravier (vides). Un granulat trop gros par rapport à l'enrobage bloquerait contre l'armature ou le coffrage.
 - **Homogénéité** : Garantir une répartition homogène des granulats près de la surface.

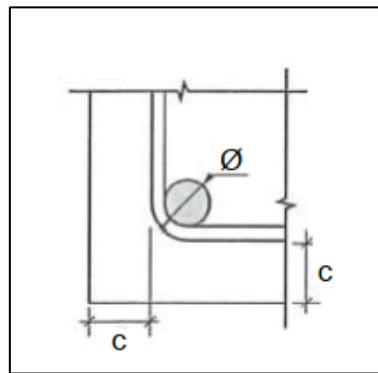


Figure. 4. 7. Enrobage dans le béton

4.5.7.2. L'espacement entre les armatures longitudinales :

Les armatures sont placées près des parois (généralement les faces tendues) pour résister aux efforts de flexion. La répartition doit être efficace pour résister à la flexion, quelle que soit la direction de celle-ci (axe fort ou axe faible de la section).

- **Distance maximale (e) entre 2 armatures voisines sur une même face :**

Deux critères stricts limitent cet espacement e :

- **Critère 1 : Petit côté du rectangle + 10 cm**
 - Si la section fait $b \times h$ avec $b < h$ (petit côté = b), alors $e \leq b + 10$ cm.
 - *Exemple* : Si $b = 30$ cm, alors $e \leq 30 + 10 = 40$ cm.
- **Critère 2 : 40 cm**
 - $e \leq 40$ cm est une limite absolue, quelle que soit la dimension de la section.
 - *Exemple* : Si $b = 35$ cm, $b + 10 = 45$ cm. Mais e ne peut pas dépasser 40 cm. Donc $e \leq 40$ cm.

"Si > 35" (sous-entendu : "Si le petit côté > 35 cm") : Cette phrase est cruciale et souvent incomplète dans les résumés. La règle complète est généralement :

"Si le petit côté de la section > 35 cm, alors il faut prévoir des armatures intermédiaires dans la zone tendue."

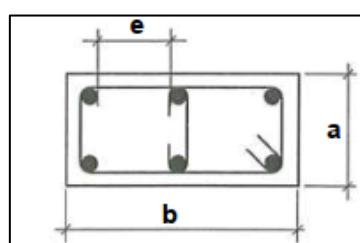


Figure. 3.8 : L'espacement entre les armatures longitudinales

4.5.7.3. La longueur de recouvrement :

La longueur de recouvrement (lr) est la longueur sur laquelle deux barres d'acier doivent se chevaucher pour assurer une transmission continue des efforts de traction ou de compression.

Formule minimale : (Equation 4.15)

$$lr \geq 0.6 \cdot ls \quad (\text{Eq.4.15})$$

où ls = longueur de scellement droit (longueur d'ancre nécessaire pour développer la résistance maximale de l'acier).

La formule $lr \geq 0.6 \cdot ls$ s'applique **uniquement** si :

- **Pourcentage d'armatures recouvertes $\leq 50\%$** : Les recouvrements sont décalés (sinon lr augmente).
- **Distance libre entre barres $\leq 4 \cdot \varphi$** :
 - Si $> 4 \cdot \varphi$, utiliser $lr \geq ls$.
- **Armatures transversales** : Des cadres ou étriers doivent maintenir les barres en place.

La longueur de base $lr=0.6 \cdot ls$ doit être multipliée par des coefficients **$\alpha 1$ à $\alpha 7$** selon :

Facteur	Condition	Coefficient
$\alpha 1$	Position (sup./inf.)	0.7 à 1.4
$\alpha 2$	Enrobage minimal	0.7 à 1.0
$\alpha 3$	Confinement par étriers	0.7 à 1.0
$\alpha 4$	Confinement par barres transversales	0.7 à 1.0
$\alpha 5$	Pression transversale	0.7 à 1.0

Longueur finale : $lr=0.6 \cdot ls \cdot \alpha 1 \cdot \alpha 2 \cdot \alpha 3 \cdot \alpha 4 \cdot \alpha 5 \geq 150 \text{ mm}$

4.5.7.4. Pour le calcul de Nu , les aciers pris en compte sont (Figure. 3.9):

Dans le calcul des éléments comprimés (art. 5.8 de l'EC2), **Nu** représente la résistance ultime en compression. La section d'acier **A** considérée n'est pas toujours la section totale placée, mais uniquement **les armatures efficaces** vis-à-vis du flambement. Deux critères filtrent les aciers :

- **Critère 1 : Barres maintenues par des cadres** (Figure. 3.9)

Seules les barres longitudinales maintenues par des armatures transversales (cadres/étriers) espacées d'au plus **$15\varnothing$** (\varnothing = diamètre de la barre longitudinale) sont prises en compte.

- **Critère 2 : Barres augmentant la rigidité dans le plan de flambement ($\lambda > 35$)**

Si l'élancement $\lambda > 35$, seules les barres situées **dans les zones efficaces** (contribuant à la rigidité dans le plan de flambement) sont incluses dans **A**.

- **$\lambda > 35$** : Risque élevé de flambement → la résistance dépend de la **rigidité flexionnelle (EI)**, non seulement de la section d'acier totale.
- **Zones efficaces**
 - Si flambement selon l'axe Y → seules les barres **éloignées de l'axe Y** comptent (car elles augmentent I_y),
 - Si flambement selon l'axe Z → seules les barres **éloignées de l'axe Z** comptent.
- **Conséquence** : Les barres proches des axes neutres (centre ou zones peu excentrées) sont **négligées** car elles contribuent peu à la rigidité flexionnelle.

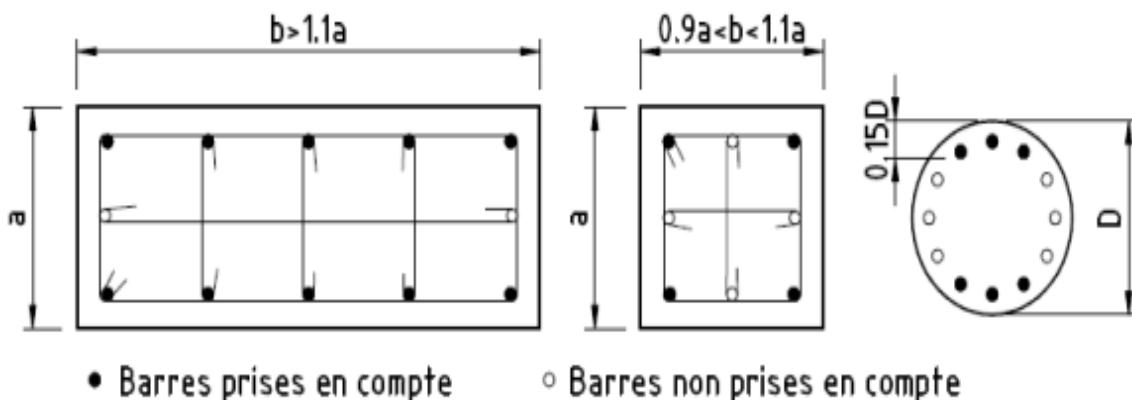


Figure. 3.9 : Acier à prendre en compte pour le calcul de Nu

4.6. Applications

4.6. 1. Exercice 1

Un poteau de section rectangulaire de 45x35cm soumis à un effort normal centré $N_u=2330\text{KN}$.

Ce poteau fait partie de l'ossature d'un bâtiment à étages multiples, sa longueur de flambement a pour valeur $l_f=3.2\text{m}$.

Les armatures longitudinales sont en acier FeE400.

Le béton a pour résistance à la compression à 28j $f_{c28}=25 \text{ Mpa}$.

La majorité des charges n'est appliquée qu'après 90 jours.

1. déterminer la section des armatures longitudinales et transversales ainsi que leur espacement.
2. Faites le choix des aciers et le schéma de ferraillage de la section transversale.

Solution :

1. détermination de la section des armatures longitudinales et transversales ainsi que leur espacement :

Pour une section rectangulaire : $a = 35 \text{ cm}$, $b = 45\text{cm}$

$$I_{min} = \frac{b \cdot a^3}{12}, \quad i_{min} = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad \lambda = \frac{l_f \cdot 2\sqrt{3}}{b}.$$

$$\lambda = \frac{l_f \cdot 2\sqrt{3}}{a} = \frac{320.2\sqrt{3}}{35} = 31.672 \leq 50$$

$$\text{Selon l'équation (Eq.4.8)}: \lambda \leq 50 \Rightarrow \alpha = \frac{0,85}{\left(1+0,2\left(\frac{\lambda}{35}\right)^2\right)} = \frac{0,85}{\left(1+0,2\left(\frac{31,672}{35}\right)^2\right)} = 0,7304$$

$$\alpha = 0,7304$$

$$\text{selon l'équation(Eq. 4.8): } A_{sc} = A_{sc\text{théorique}} \geq \left[\frac{\left(\frac{N_u}{\alpha} - \frac{B_r \cdot f_{c28}}{0,9 \cdot \gamma_b} \right)}{\sigma_{sc(2\%o)}} \right]$$

Pour une section rectangulaire: $Br = (b - 0,02) \times (a - 0,02) = (45-0,02) \times (35 \times 0,02)$

$$Br = 1419\text{cm}^2$$

$$\sigma_{sc(2\%o)} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{400}{1,15} = 347..83 \text{ MPa}$$

$$A_{sc\text{théorique}} \geq \left[\frac{\left(\frac{N_u}{\alpha} - \frac{B_r \cdot f_{c28}}{0,9 \cdot \gamma_b} \right)}{\sigma_{sc}(2\%)} \right] = \left[\frac{\left(\frac{2330 \cdot 10^3}{0,7304} - \frac{14019 \cdot 10^2 \cdot 25}{0,9 \cdot 1,5} \right)}{347,83} \right]$$

$$A_{sc\text{théorique}} = 1616,687 \text{ mm}^2 = 16.168 \text{ cm}^2$$

$$A_{min} = \max(4u, 0.2\%B) = \max(4 \cdot [45 + 35] * 2 ; 0.2\% * 35 * 45)$$

$$A_{min} = \max(6.4 ; 3.15) \text{ cm}^2$$

2. Choix des armatures

$$A_{sc} = 16.168 \text{ cm}^2 = 4\text{HA20} + 2\text{HA16} = 16.59 \text{ cm}^2$$

Armature transversale :

Diamètre des barres transversales : Equation (Eq.4.14)

$$\phi_t \geq \frac{\phi_{lmax}}{3} \Rightarrow \phi_t \geq \frac{20}{3} = 6.66 \text{ mm}$$

$$\phi_t = 8 \text{ mm}$$

Espacement entre les armatures transversales

$$s_t \leq \min(40 \text{ cm} ; a+10 \text{ cm} ; 15\phi_{l,min}) \Rightarrow s_t \leq \min(40 \text{ cm} ; 35+10 \text{ cm} ; 15*20)$$

$$s_t \leq \min(40 \text{ cm} ; 45 \text{ cm} ; 24 \text{ cm})$$

$$s_t = 20 \text{ cm}$$

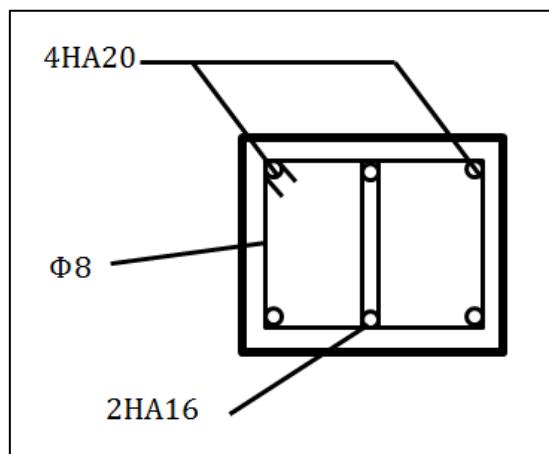


Schéma de ferraillage

4.6.2. Exercice 2

Un poteau de section rectangulaire 30 cm × 20 cm est soumis à un effort normal centré $N_u=425$ kN. Il fait partie de l'ossature d'un bâtiment à étages multiples, avec une longueur de flambement $l_f=4$ m. Les armatures longitudinales sont en acier FeE400, et le béton a une résistance caractéristique $f_{c28}=25$ MPa.

1. Déterminer la section des armatures longitudinales et transversales, ainsi que leur espacement.
2. Faire le choix des aciers et le schéma de ferraillage de la section transversale.

Solution:

1. Calcul des armatures longitudinales

- Rayon de giration minimal :

$$i_{min} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{0.2}{2\sqrt{3}} = 0.0577m$$

- Élancement géométrique :

$$\lambda = \frac{l_f \cdot 2\sqrt{3}}{a} = \frac{4.5 \cdot 2\sqrt{3}}{0.2} = 69.282 > 50 \rightarrow \text{Réduction requise}$$

b) Coefficient de réduction (α) :

Selon l'équation (Eq.4.9): $\alpha = 0,6 \cdot \left(\frac{50}{\lambda}\right)^2 = 0,6 \cdot \left(\frac{50}{69.282}\right)^2 = 0.3125$

Pour une section rectangulaire:

$$Br = (b - 0.02) \times (a - 0.02) = (0.2 - 0.02) \times (0.3 - 0.02)$$

$$Br = 504 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{sc(2\%o)} = \frac{fe}{\gamma_s} = \frac{400}{1.15} = 347..83 \text{ MPa}$$

$$A_{sc_{théorique}} \geq \left[\frac{\left(\frac{N_u}{\alpha} - \frac{Br \cdot f_{c28}}{0.9 \cdot \gamma_b} \right)}{\sigma_{sc(2\%o)}} \right] = \left[\frac{\left(\frac{425 \cdot 10^3}{0.3125} - \frac{504 \cdot 10^2 \cdot 25}{0.9 \cdot 1.5} \right)}{347.83} \right]$$

$$A_{sc_{théorique}} = 12266 \text{ mm}^2 = 12.266$$

$$A_{min} = \max(4u, 0.2\%B) = \max(4 \cdot [30 + 20] * 2 ; 0.2\% * 30 * 20)$$

$$A_{min} = \max(4 ; 1.2) \text{ cm}^2$$

2. Choix des armatures

$$A_{sc} = 12.173 \text{ cm}^2 = 4\text{HA}20 = 12.57 \text{ cm}^2$$

Armature transversale :

Diamètre des barres transversales : Equation (Eq.4.14)

$$\phi_t \geq \frac{\phi_{lmax}}{3} \Rightarrow \phi_t \geq \frac{20}{3} = 6.66 \text{ mm}$$

$$\phi_t = 8 \text{ mm}$$

Espacement entre les armatures transversales

$$s_t \leq \min(40 \text{ cm}; a+10 \text{ cm}; 15\phi_{l,min}) \Rightarrow s_t \leq \min(40 \text{ cm}; 30+10 \text{ cm}; 15*20)$$

$$s_t \leq \min(40 \text{ cm}; 40 \text{ cm}; 24 \text{ cm})$$

$$s_t = 20 \text{ cm}$$

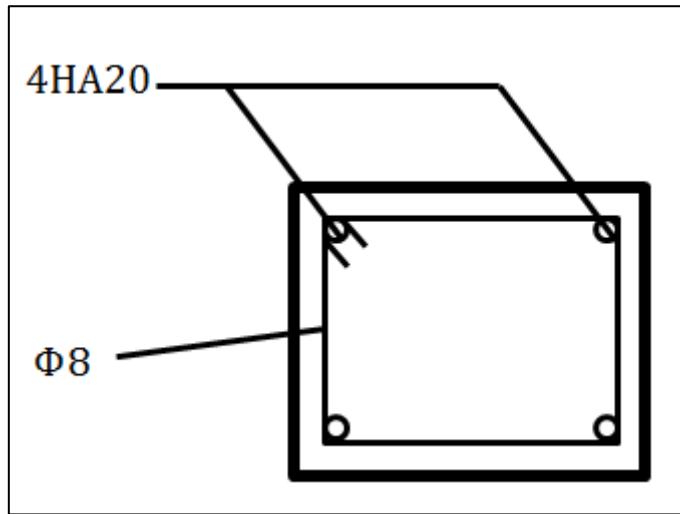


Schéma de ferraillage

Chapitre 5 : Calcul de sections en béton armé soumises à la flexion simple

5.1. Définition :

Un élément (poutre, dalle, semelle de fondation, etc.) est soumis à la flexion simple (Figure.5.1) lorsque, dans chaque section transversale le long de cet élément, les efforts internes (ou sollicitations) résultant des charges appliquées se réduisent uniquement à deux composantes :

- **Un Moment Fléchissant (M_f ou M)** : est un couple de forces qui tend à provoquer la flexion (courbure) d'un élément structurel. Il génère des contraintes asymétriques dans la section transversale : des contraintes de compression apparaissent sur une face de l'axe neutre, tandis que des contraintes de traction se développent sur la face opposée. Cette sollicitation est déterminante pour le ferraillage, car elle conditionne principalement la quantité et la disposition des armatures longitudinales. Celles-ci sont placées en zone de traction pour résister à l'effort de traction, et parfois en compression si nécessaire. Dominante dans le dimensionnement des sections, le moment fléchissant constitue ainsi le paramètre clé pour prévenir la rupture en flexion.
- **Un Effort Tranchant (T ou V)** : est une force sollicitant un élément structurel perpendiculairement à son axe longitudinal, tendant à provoquer un cisaillement (glissement relatif des sections adjacentes). Il génère principalement des contraintes de cisaillement dans un élément chargé. Cette sollicitation est déterminante pour le ferraillage transversal : elle conditionne la quantité et la disposition des armatures d'âme (cadres, étriers, épingle). Leur rôle est essentiel pour empêcher les modes de rupture par cisaillement, notamment la formation de fissures inclinées ou la rupture des bielles de béton comprimé. Bien qu'étroitement lié à la flexion, le calcul de l'effort tranchant intervient généralement après celui du moment fléchissant dans le processus de dimensionnement.
- **L'Exigence Fondamentale : Effort Normal Nul ($N = 0$)** : cette exigence signifie qu'aucune force résultante ne sollicite la section perpendiculairement à sa surface, suivant l'axe longitudinal de l'élément. L'effort normal N génère habituellement des contraintes normales uniformes (de compression ou de traction) sur toute la section. Son absence ($N = 0$) implique que les contraintes normales présentes sont exclusivement induites par le moment fléchissant. Ces contraintes varient alors linéairement à travers la hauteur de la section, atteignant une compression maximale sur une face et une traction maximale sur la face opposée, de part et d'autre de l'axe neutre. Cette distinction est cruciale : la présence d'un effort normal non nul ($N \neq 0$), qu'il soit de compression ou de traction, définit un état de flexion composée (respectivement flexion avec compression ou flexion avec traction). Le dimensionnement en flexion composée est significativement plus complexe, nécessitant l'utilisation de diagrammes d'interaction $M-N$, contrairement au cas simplifié de la flexion simple. Ainsi, la flexion simple constitue un cas particulier de la flexion composée, caractérisé par la nullité de l'effort normal ($N = 0$).

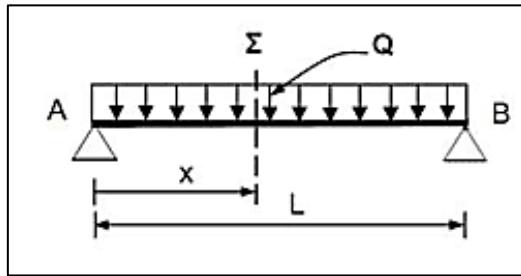


Figure. 5.1 : Schéma mécanique d'une poutre soumise à la flexion,

Les éléments clés des structures en flexion simple sont les poutres, qu'elles soient isostatiques ou hyperstatiques. Dans le cas du béton armé, le dimensionnement des armatures répond à deux sollicitations distinctes : le moment fléchissant impose les aciers longitudinaux, et l'effort tranchant dicte les aciers transversaux (cadres, étriers ou épingle). Ces deux calculs sont effectués séparément. Le présent chapitre aborde spécifiquement le dimensionnement sous moment fléchissant. Il expose les méthodes de calcul pour les sections rectangulaires et en T, avec ou sans armatures comprimées, en considérant à la fois l'état limite ultime (ELU) et l'état limite de service (ELS).

5.2 Calcul des armatures longitudinales à l'E.L.U.

5.2.1 Hypothèses de calcul - Explications :

5.2.1.1. Hypothèse de Navier-Bernoulli :

Les sections planes perpendiculaires à l'axe de la poutre avant déformation restent planes et perpendiculaires à l'axe déformé après chargement. La déformation longitudinale (ϵ) varie **linéairement** à travers la hauteur de la section. C'est la base de l'analyse des contraintes et du calcul de la position de l'axe neutre.

5.2.1.2. Pas de glissement relatif entre l'acier et le béton : Il y a une parfaite adhérence entre les armatures en acier et le béton qui les entoure. La déformation de l'acier (ϵ_{st} ou ϵ_{sc}) est **égale** à la déformation du béton environnant au même niveau. Cela permet de relier directement les déformations dans le béton et dans l'acier.

5.2.1.3. La résistance du béton en traction est négligée Signification : On considère que le béton situé dans la zone tendue de la section (sous l'axe neutre) ne contribue **pas** à la résistance en traction. Toute la force de traction est reprise uniquement par les armatures en acier placées dans cette zone. Le béton tendu est supposé fissuré. C'est une hypothèse de sécurité.

5.2.1.4. La section d'acier est concentrée en son centre de gravité : L'aire totale des armatures longitudinales (A_s ou A'_s) est considérée comme ponctuelle, située à son centre de gravité (distance d de la fibre comprimée extrême pour les aciers tendus, distance d' pour les aciers comprimés). Simplifie grandement les calculs d'équilibre (moments, forces) en remplaçant la distribution réelle des barres par une force unique appliquée en un point. La distance d (hauteur utile) est un paramètre clé.

5.2.1.5. Lois de comportement des matériaux :

(a) Béton (Compression) : Diagramme rectangulaire simplifié (Parabole-rectangle simplifié) :

La distribution réelle complexe des contraintes de compression dans le béton (parabole) est remplacée par un diagramme rectangulaire équivalent.

- Contrainte uniforme : $\sigma_{bc} = f_{bu} = 0.85 \cdot f_{cj} / \gamma_b$ ($\gamma_b \approx 1.5$).
- Hauteur de la zone comprimée : $y = \alpha \cdot d$ ($\alpha < 1$).
- Hauteur du bloc rectangulaire de contraintes : $y = \beta \cdot y$ ($\beta \approx 0.8$ pour $f_{cj} \leq 50$ MPa).

La résultante des efforts de compression dans le béton $N_{bc} = f_{bu} \cdot (\text{largeur } b) \cdot y$.

y : est de son bras de levier par rapport aux aciers tendus.

(b) Acier : Diagramme bilinéaire de calcul (Traction et Compression) :

Le comportement élasto-plastique réel de l'acier est modélisé par deux droites.

Zone élastique ($\varepsilon \leq \varepsilon_{su}$) : $\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$. (Loi de Hooke, pente = module d'Young $E_s \approx 200000$ MPa).

Zone plastique ($\varepsilon_{su} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ud}$) : $\sigma_s = f_{su} = f_e / \gamma_s$ ($\gamma_s \approx 1.15$) = constante (palier plastique).

Déformation limite : $\varepsilon_{ud} \approx 45\%$ à 90% selon les aciers (souvent prise à 10% pour le pivot A).

la force de traction ($N_{st} = A_s \cdot \sigma_{st}$) ou de compression ($N_{sc} = A_s' \cdot \sigma_{sc}$).

5.2.1.6. Déformations limites : Méthode des « trois pivots » (Flexion simple) :

Pour qu'une section atteigne sa capacité portante ultime (rupture), la déformation de l'un des matériaux doit atteindre sa limite ultime définie par les pivots.

(a) Pivot A (Rupture par allongement excessif de l'acier tendu) :

- $\varepsilon_{st} = \varepsilon_{ud}$ (limite d'allongement de l'acier, souvent **10%** pour les calculs ELU courants).
- ε_{bc} peut varier entre **0%** et **3.5%** (limite de raccourcissement du béton).
- **Situation** : Axe neutre relativement bas. Rupture ductile (acier très déformé avant écrasement béton).

(b) Pivot B (Rupture par écrasement du béton comprimé) :

- $\varepsilon_{bc} = 3.5\%$ (limite de raccourcissement ultime du béton).
- ε_{st} peut varier entre **0%** et **10%**.

- Situation :** Axe neutre relativement haut. Rupture plus brutale (béton écrasé avant que l'acier n'ait pu pleinement se déformer).

(c) Pivot C : Pertinent pour les sections entièrement comprimées (flexion composée avec forte compression), non considéré ici.

Signification : Cette méthode définit les **états de déformation admissibles à la rupture** pour dimensionner la section. Le calcul consiste à trouver la position de l'axe neutre (y ou $\alpha = y/d$) qui, sous l'effet du moment ultime M_u , amène la section dans un état de déformation correspondant soit au Pivot A, soit au Pivot B.

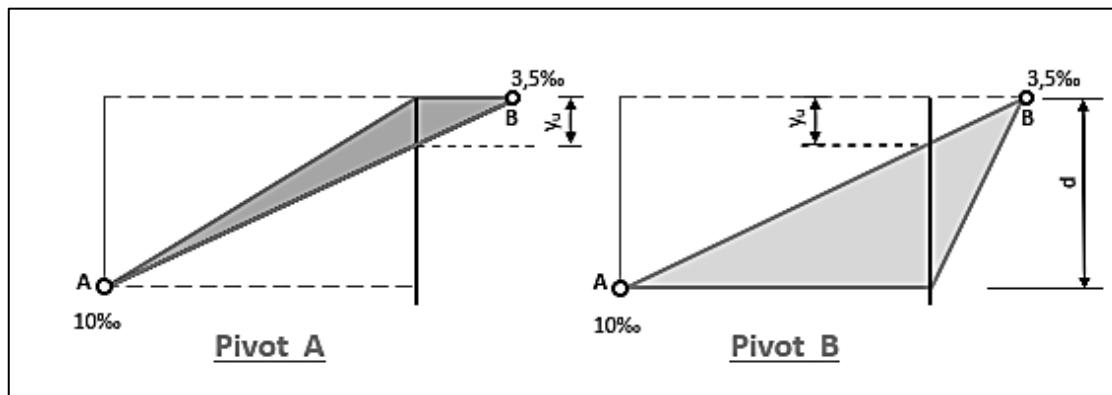


Fig. 5.2 : Diagramme des déformations limites d'une section soumise à la flexion simple

5.2.2. Relation fondamentale des déformations et positions particulières de l'axe neutre

L'hypothèse de Navier-Bernoulli (déformation linéaire) et l'absence de glissement (déformations égales au même niveau) conduisent à la relation géométrique fondamentale (Figure 4.3) suivante entre les déformations dans le béton comprimé (ε_{bc}) et dans l'acier tendu (ε_{st}):

$$\frac{y_u}{\varepsilon_{bc}} = \frac{d-y_u}{\varepsilon_{st}} \quad (\text{Eq.5.1})$$

où :

- y_u = hauteur de l'axe neutre,
- d = hauteur utile.

De cette relation on peut déduire l'équation suivante :

$$\frac{y_u}{d} = \frac{\varepsilon_{bc}}{\varepsilon_{st} + \varepsilon_{bc}} \quad (\text{Eq.5.2})$$

En introduisant : $\alpha_u = \frac{y_u}{d}$, α_u (position relative de la fibre neutre par rapport à la fibre la plus comprimée), on obtient l'équation suivante :

$$\alpha_u = \frac{y_u}{d} = \frac{\varepsilon_{bc}}{\varepsilon_{st} + \varepsilon_{bc}} \quad (\text{Eq.5.3})$$

Valeurs particulières de α_u

- Voir Fig. 4.3.
- Si la droite des déformations passe par les pivots A et B alors :

$$\alpha_u = \alpha_{AB} = \frac{3.5}{10+3.5} = \mathbf{0.2591} \quad (\text{Eq.5.4})$$

- **Valeurs particulières de α_u et domaines de pivot**

Le tableau 5.1. Rassemble les valeurs de α_u et limite des déformations du béton et de l'acier (Voir Figure. 4.3 pour illustration)

Tableau 5.1. Valeurs de α_u , et déformations limites

Valeur de α_u	Domaine de pivot	Déformations	Interprétation technique
$\alpha_u = 0.259$	Pivot A-B	$\varepsilon_{bc} = 3.5\%$, $\varepsilon_{st} = 10\%$	Frontière entre pivots A et B.
$\alpha_u < 0.167$	Pivot A	$\varepsilon_{bc} < 2\%$, $\varepsilon_{st} = 10\%$	Béton sous-utilisé → section surdimensionnée.
$0.167 \leq \alpha_u < 0.259$	Pivot A	$2\% \leq \varepsilon_{bc} \leq 3.5\%$, $\varepsilon_{st} = 10\%$	Zone optimale pour l'acier.
$0.259 \leq \alpha_u \leq \alpha_l$	Pivot B	$\varepsilon_{bc} = 3.5\%$, $\varepsilon_l \leq \varepsilon_{st} \leq 10\%$	Zone optimale pour le béton ($\varepsilon_l = f_e / (\gamma_s \cdot E_s)$).
$\alpha_u > \alpha_l$	Pivot B	$\varepsilon_{bc} = 3.5\%$, $\varepsilon_{st} < \varepsilon_l$	Acier sous-utilisé → sections d'armatures excessives.

Avec :

- ε_l : Déformation limite de l'acier ($\varepsilon_l = \varepsilon_e = \frac{f_e}{(\gamma_s \cdot E_s)}$).
- α_l : Valeur minimale en pivot B ($\alpha_l = \frac{3.5}{\varepsilon_l + 3.5}$).

Si $\alpha_l \leq \alpha_u \leq 1 \Rightarrow$ pivot B ($\varepsilon_{bc} = 3.5\%$ et $\varepsilon_l \geq \varepsilon_{st} \geq 0$) : l'acier travaille insuffisamment, ce qui conduit à de grandes sections d'armatures.

Conclusion : Pour une utilisation efficace des matériaux, il est préconisé de prendre :

$$0.167 \leq \alpha_u \leq \alpha_l$$

- **En pivot A ($\alpha_u < 0.259$)** : L'acier est pleinement sollicité ($\varepsilon_{st} = 10\%$).
- **En pivot B ($\alpha_u \geq 0.259$)** : Le béton est pleinement sollicité ($\varepsilon_{bc} = 3.5\%$).

→ Cette plage garantit un équilibre entre la résistance du béton et la ductilité de l'acier, évitant le gaspillage de matériaux.

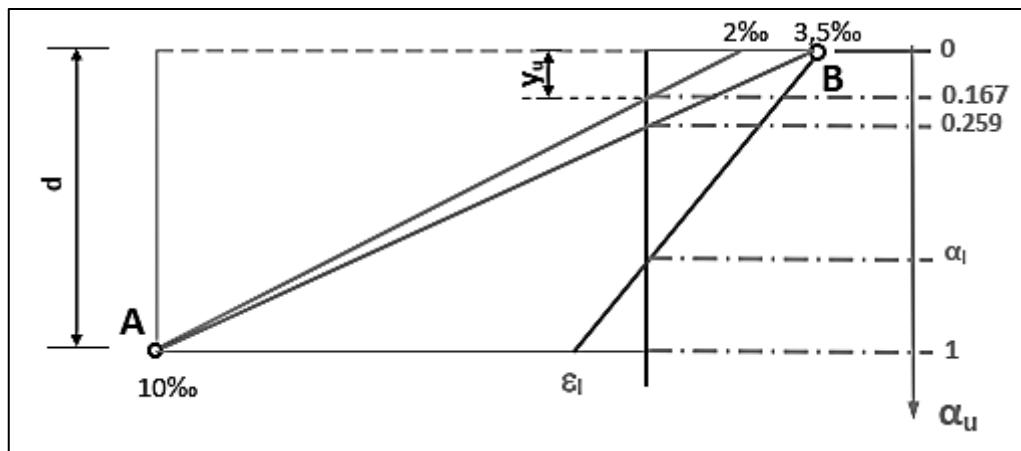


Figure 5.3. Position particulière de l'axe neutre

5.2.3 Section rectangulaire

Les poutres rectangulaires en béton armé constituent l'élément de base des structures fléchies (planchers, poutres porteuses, etc.). Soumises à un moment fléchissant, ces sections développent des contraintes internes complexes :

- **Zone comprimée** : Le béton travaille en compression au-dessus de l'axe neutre.
- **Zone tendue** : L'acier absorbe les tractions sous l'axe neutre, le béton étant considéré *fissuré et non résistant* (hypothèse fondamentale).

5.2.3.1 Section sans aciers comprimés :

(a) définition :

Les sections rectangulaires simplement armées sont la forme la plus élémentaire des poutres en béton armé soumises à la flexion. La figure 5.4 présente les diagrammes contrainte-déformation parabole-rectangle et rectangulaire simplifié dans la section de béton comprimé.

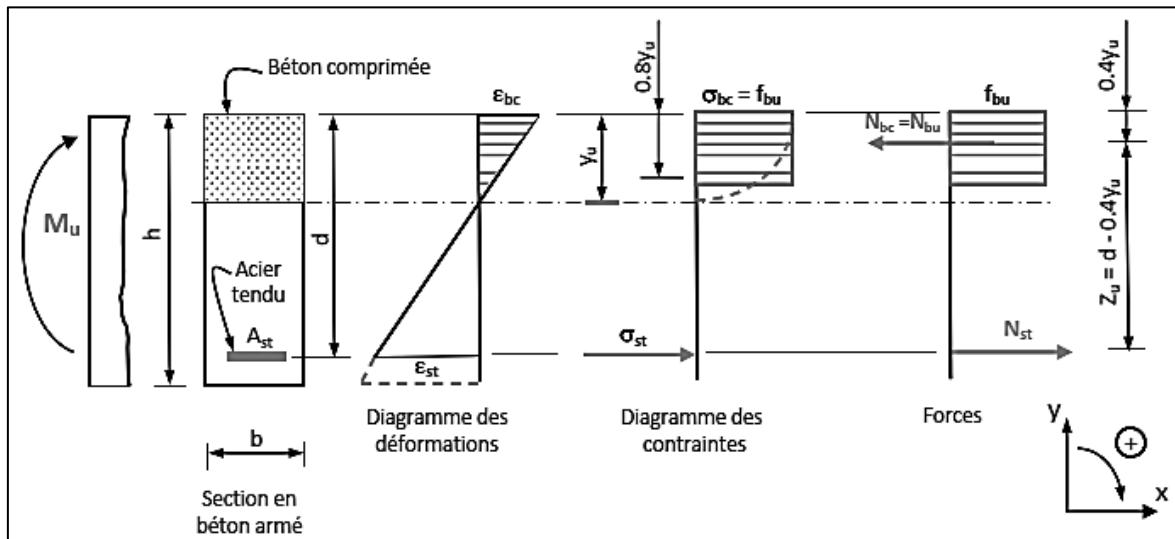


Figure. 5.4 : Diagrammes contrainte-déformation parabole-rectangle et rectangulaire simplifié dans la section de béton comprimé.

L'équilibre des forces horizontales ($\Sigma F_x = 0$) permet de déduire l'équation suivante :

$$0.8y_u \cdot b \cdot f_{bu} = A_{st} \cdot \sigma_{st} \quad (\text{Eq.5.5})$$

Avec:

- A_{st} : Section d'acier tendu
- σ_{st} : Contrainte dans l'acier
- y_u : Hauteur de l'axe neutre
- b : Largeur de la poutre
- f_{bu} : Résistance du béton en compression

L'équilibre des moments ($\Sigma M = 0$) permet de déduire l'équation suivante :

$$M_u = A_{st} \cdot \sigma_{st} \cdot Z_u \quad (\text{Eq.5.6})$$

Avec : $Z_u = d - 0.4 \cdot y_u$

- Bras de levier Z_u : Distance entre la résultante béton et les aciers tendus
- d : Hauteur utile

Le tableau 5.2 résume les paramètres adimensionnels fondamentaux d'une section rectangulaire

Tableau 5.2. Paramètres adimensionnels fondamentaux

Paramètre	Formule	Signification
α_u	$\alpha_u = y_{ud}$	Profondeur relative axe neutre
β_u	$\beta_u = 1 - 0.4\alpha_u$	Bras de levier réduit
μ_u	$\mu_u = M_u / b \cdot d^2 \cdot f_{bu}$	Moment réduit

- $\mu_u = 0.8\alpha_u (1 - 0.4\alpha_u)$
- $\alpha_u = 1.25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu_u})$

(b) Domaines de rupture (Pivots A et B) (Voir Tableau 5.3)

Tableau 5.3. Domaines de rupture d'une section soumise à la flexion

Condition	Pivot	Déformations	Intervalle μ_u
$\alpha_u < 0.167$	A	$\varepsilon_{bc} < 2\%$, $\varepsilon_{st} = 10\%$	$\mu_u < 0.125$
$0.167 \leq \alpha_u < 0.259$	A	$2\% \leq \varepsilon_{bc} \leq 3.5\%$, $\varepsilon_{st} = 10\%$	$0.125 \leq \mu_u < 0.186$
$0.259 \leq \alpha_u$	B	$\varepsilon_{bc} = 3.5\%$, $\varepsilon_{st} \geq \varepsilon_l$	$\mu_u \geq 0.186$

(c) Étapes de calcul à l'ELUR pour une section rectangulaire sans aciers comprimés

Détermination de la section d'acier tendu A_s nécessaire pour équilibrer un moment ultime M_u .

- **Etape 1 : Calculer le moment réduit μ_u** : par l'utilisation de l'équation suivante

$$\mu_u = \frac{M_u}{b \cdot d^2 \cdot f_{bu}} \quad (\text{Eq.5.7})$$

Avec,

$$f_{bu} = 0.85 \cdot \frac{f_{c28}}{\gamma_b} \quad (\text{Eq.5.8})$$

- **Etape 2 : Vérifier la nécessité d'aciers comprimés**

- **Condition** : $\mu_u \leq \mu_{lim}$

- Si $\mu_u > \mu_{lim}$: → Section avec aciers comprimés (non traité ici).
 - Si $\mu_u \leq \mu_{lim}$: → Poursuite sans aciers comprimés.
- **Etape 3 : Calculer la profondeur relative de l'axe neutre α_u** : par l'utilisation de l'équation suivante :

$$\alpha_u = 1.25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu_u}) \quad (\text{Eq.5.9})$$

- **Contraintes :**

- α_u doit être $\leq \alpha_{lim} = 0.259$.

- **Etape 4 : Déterminer la contrainte dans l'acier σ_{st}** : (Equation 4.10)

- Si $\alpha_u \leq 0.259 \rightarrow \sigma_{st} = \frac{f_e}{\gamma_s}$ ($\gamma_s = 1.15$)

$$\quad \quad \quad (\text{Eq.5.10})$$

- **Justification** : L'acier est plastifié ($\varepsilon_{st} \geq \varepsilon_{su} = 10\%$).

- **Etape 5 : Calculer le bras de levier réduit β_u** (Equation 4.11)

$$\beta_u = 1 - 0.4\alpha_u \quad (\text{Eq.5.11})$$

Bras de levier : $Z_u = \beta_u \cdot d$

- **Etape 6 : Calculer la section d'acier A_{st}** : (Equation 4.12)

$$A_{st} = \frac{M_u}{(\sigma_{st} \cdot \beta_u \cdot d)} \quad (\text{Eq.5.12})$$

5.2.3.2 Section avec aciers comprimés

Lorsque le moment réduit μ_u dépasse la limite μ_{l1} dans une section rectangulaire aux dimensions fixées ($\mu_u > \mu_l$), le moment ultime M_u ne peut être équilibré par les seuls aciers tendus. On doit alors :

- **Placer des armatures comprimées** (A_{sc}) dans la zone comprimée (ces armatures participent à la reprise du moment excédentaire).
- **Renforcer la zone tendue** avec des aciers supplémentaires.

Principe de calcul des sections d'armatures (Voir la figure 5.5) :

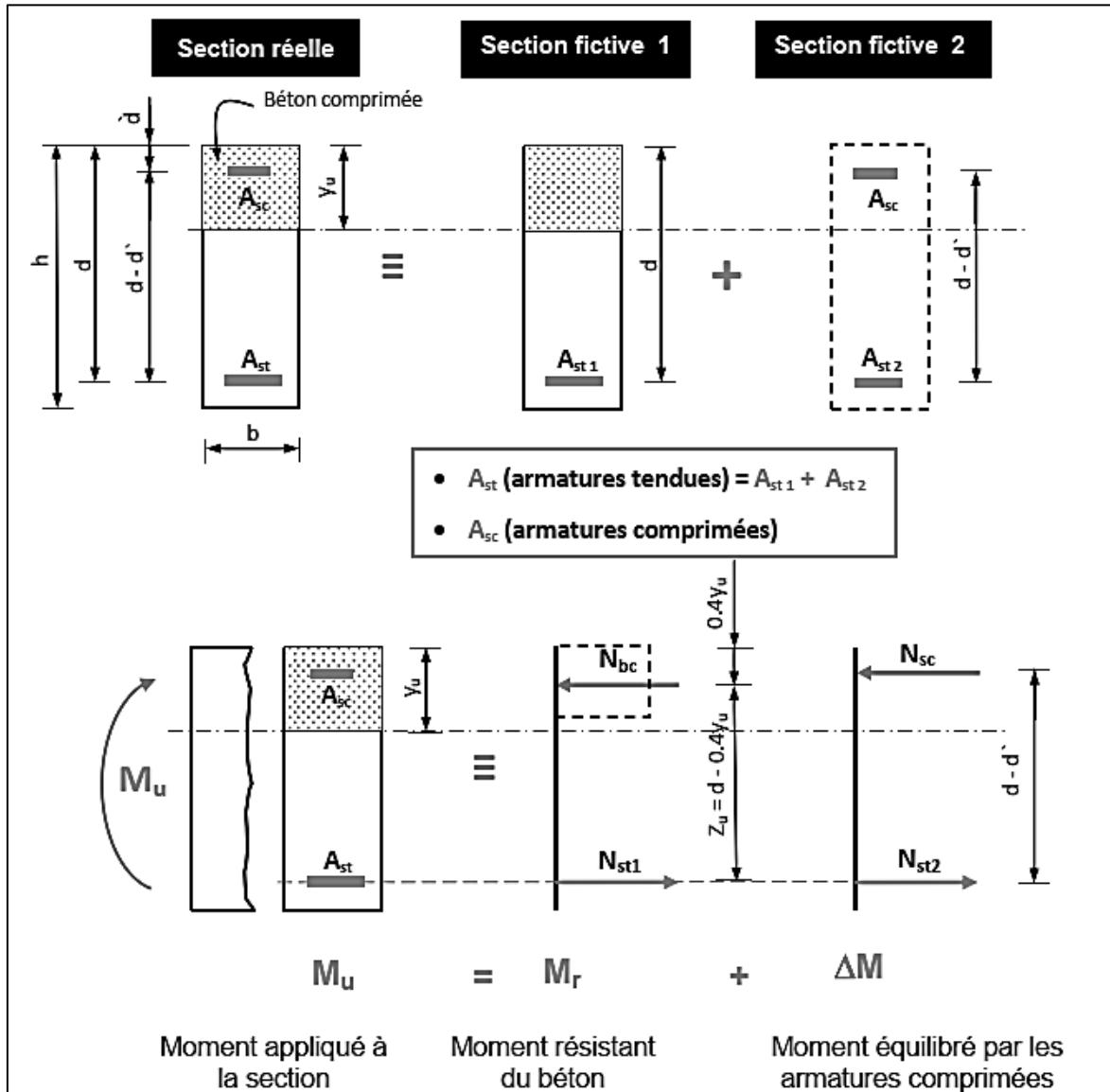


Figure. 5.5 : Principe de calcul  l'ELU d'une section rectangulaire avec aciers comprimés

- M_r : Moment résistant maximal de la section sans aciers comprimés.
- ΔM : Moment r  sidual  équilibrer par les aciers comprimés :

$$\Delta M = M_u - M_r$$

- **Section fictive 1** : quilibre M_r avec les aciers tendus A_{st1} .
- **Section fictive 2** : quilibre ΔM avec un couple A_{st2}/A_{sc} .

$$N_{st} = N_{st1} + N_{st2} \quad (\text{Eq.5.13})$$

- **Calcul du moment résistant du béton M_r :**

Le moment résistant est calculé par l'utilisation de l'équation (Eq.5.7) pour déduire la formule suivante :

$$M_r = \mu_l b \cdot d^2 \cdot f_{bu} \quad (\text{Eq.5.14})$$

ou : μ_l : le moment ultime réduit limite

- **Calcul du moment résiduel ΔM :**

Le moment résiduel présente la différence entre le moment ultime et le moment résistant selon l'équation suivante :

$$\Delta M = M_u - M_r \quad (\text{Eq.5.15})$$

- **Calcul des armatures tendues de la section fictive 1 (A_{st1}) :**

$$A_{st1} = \frac{M_r}{\sigma_{st} \cdot \beta_l \cdot d} \quad (\text{voir paragraphe 5.2.2.1}),$$

On a : $\varepsilon_{st} = \varepsilon_l \Rightarrow \sigma_{st} = f_{su}$ (voir Figure. 5.2 et Figure. 5.3)

Donc la section A_{st1} peut être écrite sous la forme suivante :

$$A_{st1} = \frac{M_r}{\sigma_{st} \cdot \beta_l \cdot d} \quad (\text{Eq.5.16})$$

- **Calcul des armatures tendues de la section fictive 2 (A_{st2}) :**

Le moment résiduel en fonction de la force et de bras de levier peut être écrit sous la forme suivante :

$$\Delta M = N_{st2} \cdot (d - d') \quad (\text{Eq.5.17})$$

Avec :

$$N_{st2} = f_{su} \cdot A_{st2} \quad (\text{Eq.5.18})$$

En remplaçant (Eq. 4.18) dans (Eq. 5.17), on a:

$$\Delta M = f_{su} \cdot A_{st2} \cdot (d - d') \Rightarrow$$

$$A_{st2} = \frac{\Delta M}{f_{su} \cdot (d - d')} \quad (\text{Eq.5.19})$$

- **Calcul des armatures comprimées de la section fictive 2 (A_{sc}) :**

L'utilisation de la figure 5.5 permet de déduire l'égalité suivante :

$$N_{sc} = N_{st2} \quad (\text{Eq.5.20})$$

Avec

$$\Delta M = N_{sc} \cdot (d - d') \quad (\text{Eq.5.21})$$

La force de compression dans les aciers est donnée par l'équation suivante :

$$N_{sc} = \sigma_{sc} \cdot A_{sc} \quad (\text{Eq.5.22})$$

En remplaçant (Eq.5.22) dans (Eq.5.21)), on a :

$$\Delta M = \sigma_{sc} \cdot A_{sc} \cdot (d - d') \quad (\text{Eq.5.23})$$

Donc la section d'armature dans la section comprimée du béton est donnée par la formule suivante :

$$A_{sc} = \frac{\Delta M}{\sigma_{sc} \cdot (d - d')} \quad (\text{Eq.5.24})$$

- **Détermination de la contrainte de l'acier comprimé (ε_{sc}) :**

En se basant sur le principe des triangles semblables (Figure. 5.6), on a :

$$\frac{\varepsilon_{sc}}{3.5 \cdot 10^{-3}} = \frac{y_u - d'}{y_u} \Rightarrow \varepsilon_{sc} = 3.5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{y_u - d'}{y_u} \right) \quad (\text{Eq.5.25})$$

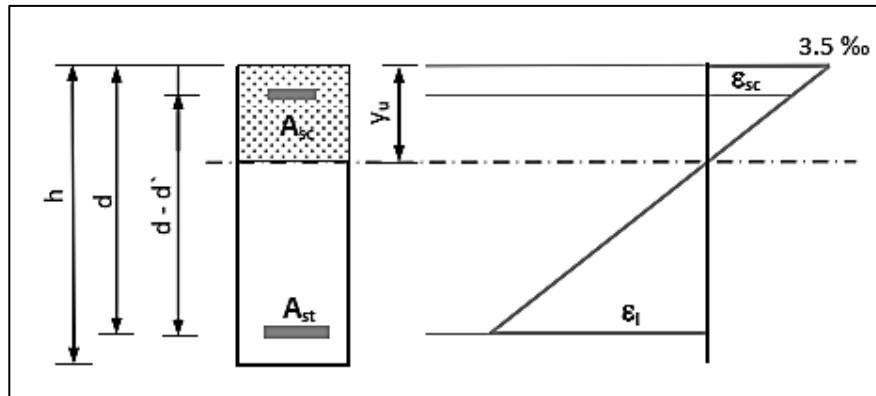


Figure 5.6. Diagramme de déformation d'une section doublement armé

- **Contrainte σ_{sc} :**

La contrainte de compression dans les aciers est donnée par la relation suivante :

$$\sigma_{sc} = \begin{cases} E_s \cdot \varepsilon_{sc} & \text{si } \varepsilon_{sc} < \varepsilon_l \\ f_{su} & \dots \dots \text{ si } \varepsilon_{sc} \geq \varepsilon_l \end{cases}$$

Avec

$$\varepsilon_l = \frac{f_e}{E_s} \quad (\text{Déformation élastique de l'acier})$$

- **Section totale d'armatures**

$$A_{st} = A_{st1} + A_{st2} \quad (\text{Eq.5.26})$$

5.2.4 Section en Té

Dans les structures en béton armé (bâtiments, ponts, etc.), les poutres principales supportent fréquemment des dalles pleines ou hourdis. Physiquement, ces éléments travaillent ensemble sous les charges :

- La dalle repose sur les poutres et leur transmet les charges verticales.
- Sous flexion positive (moment fléchissant vers le bas), la partie supérieure de la poutre est comprimée.

Pour les poutres associées à des dalles (bâtiments, ponts), le BAEL permet d'intégrer une portion du hourdis comme table de compression. Cette largeur effective b_{eff} est calculée en ajoutant à la largeur de l'âme b_0 des extensions symétriques de part et d'autre, limitées par trois conditions (Figure. 5.7) :

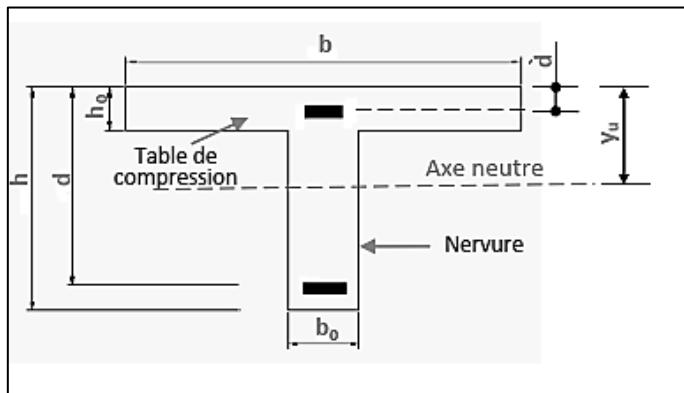


Figure. 5.7 : Elément en béton armé de section en forme d'un Té

Les 3 limites réglementaires (par côté de l'âme) sont :

Pour chaque côté de la nervure, la largeur participante ne doit pas dépasser la plus petite valeur parmi :

$$1. \frac{l}{2}$$

- ℓ = distance entre faces externes des nervures adjacentes.
- Justification : Évite le chevauchement des zones de compression entre poutres voisines.

$$2. \frac{L}{10}$$

- L = portée libre de la travée.
- Justification : Limite l'influence des effets de bord et du cisaillement longitudinal.

$$3. \frac{2}{3}d_a$$

- d_a = distance entre la section calculée et l'appui extrême le plus proche.
- Justification : Prend en compte la réduction de l'efficacité de la table près des appuis (effort tranchant élevé).

Formule de calcul complète : la largeur efficace de la table est donnée par l'équation suivante :

$$b_{eff} = b_0 + 2 \times \min \left\{ \frac{l}{2}, \frac{L}{10}, \frac{2}{3}d_a \right\} \quad (\text{Eq.5.27})$$

Où :

- B_0 = largeur de l'âme,
- Le terme $\min\{\dots\} \min$ s'applique **symétriquement** de chaque côté de l'âme.

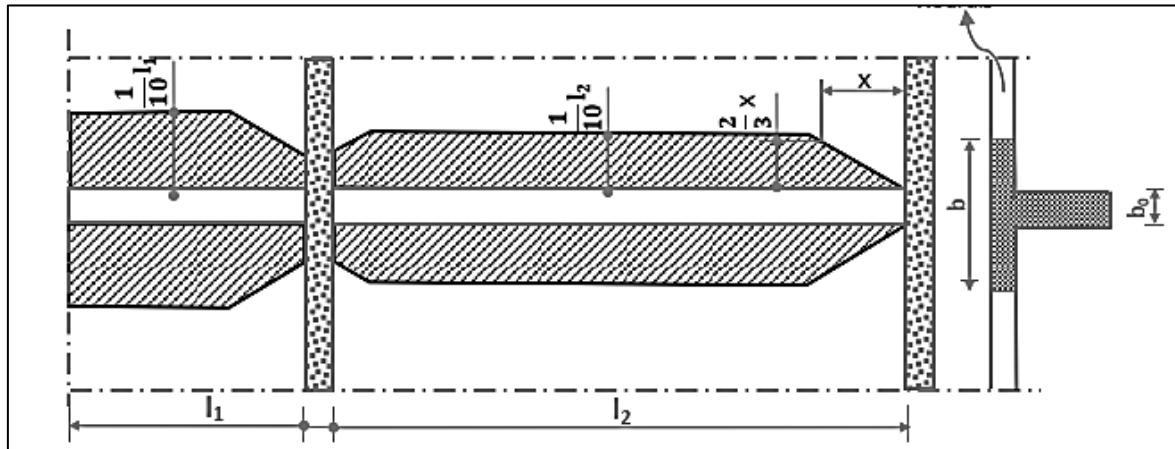


Figure 5.8. Largeur de la table de compression

- **Exemple**

Contexte :

- Largeur âme (b_0) : 30 cm
- Distance entre nervures (ℓ) : 250 cm
- Portée (L) : 800 cm
- Distance à l'appui (d_a) : 200 cm

Calcul des limites (par côté) :

1. $\frac{l}{2} = \frac{250}{2} = 125 \text{ cm}$
2. $\frac{L}{10} = \frac{800}{10} = 80 \text{ cm}$
3. $\frac{2}{3}d_a = \frac{2}{3} \cdot 200 = 133.33 \text{ cm}$

Valeur retenue : {125, 80, 133.33} = 80 cm (par coté)

Longueur totale $b_{eff} := 30 + 2 \times 80 = 190 \text{ cm}$

5.2.4.1 Section sans aciers comprimés

Dans une poutre en T, la partie comprimée peut se situer soit uniquement dans la table de compression (la dalle), soit s'étendre aussi dans la nervure (l'âme verticale). La position de la fibre neutre (l'axe où les déformations sont nulles) détermine laquelle de ces deux situations se produit. Savoir si la fibre neutre est dans la table ou dans la nervure est crucial pour le calcul de la section d'acier nécessaire.

Pour trancher entre les deux cas sans avoir à résoudre complètement l'équation d'équilibre, on utilise un moment de référence appelé moment équilibré par la table (M_t). C'est le moment maximal que la section peut supporter si toute la compression est reprise uniquement par la table de compression, et que la fibre neutre est juste à la base de cette table.

$$M_t = b \cdot h_0 \cdot \left(d - \frac{h_0}{2} \right) f_{bu} \quad (\text{Eq 5.28})$$

b : Largeur de la table de compression (mm)

h_0 : Épaisseur de la table de compression (mm)

d : Hauteur utile de la section (distance de la fibre comprimée extrême au centre de gravité des aciers tendus) (mm)

f_{bu} : Contrainte de calcul du béton en compression à l'ELU (N/mm^2 ou MPa).

Cette formule représente le bras de levier ($d - h_0/2$) (distance entre le centre de gravité des aciers tendus et le centre de gravité de la table comprimée) multiplié par la force de compression maximale que peut développer la table ($b \cdot h_0 \cdot f_{bu}$). C'est bien le moment maximal que la table seule peut équilibrer.

Les deux cas : Comparaison entre M_t et M_u

(a) Premier Cas : $M_t \geq M_u$

Le moment de flexion sollicitant la section (M_u) est inférieur ou égal au moment maximal que la table seule peut équilibrer (M_t). La zone comprimée est entièrement contenue dans l'épaisseur de la table (h_0). La fibre neutre est située dans la table (au-dessus de la nervure) (Figure 5.9). Dans ce cas, la nervure n'intervient pas dans la reprise de la compression. On peut donc ignorer complètement la nervure pour le calcul des aciers.

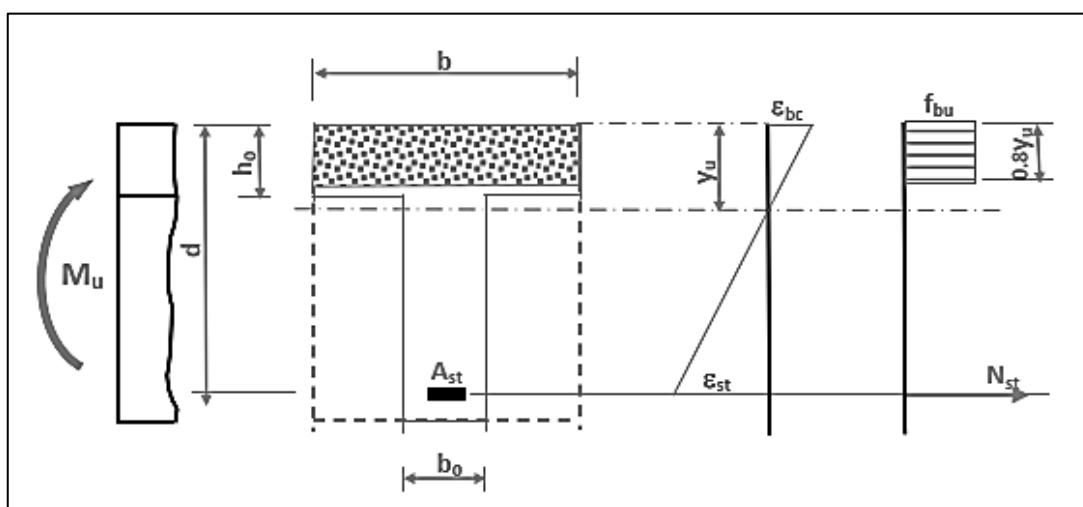


Figure 5.9. Principe de calcul à l'ELU d'une section en T, avec : $M_t \geq M_u$

On dimensionne la section d'acier tendu (A_s) comme s'il s'agissait d'une section rectangulaire classique (Voir paragraphe : 5.2.3).

Les dimensions de cette section rectangulaire fictive sont :

- **Largeur :** La largeur de la table (b)
- **Hauteur utile :** La hauteur utile réelle de la poutre (d)

On utilise la méthode standard pour les sections rectangulaires sans aciers comprimés (paragraphe 5.2.2 de votre document), par exemple :

(b) Deuxième Cas : $M_t < M_u$ (Non détaillé dans votre extrait, mais c'est la suite logique)

Le moment de flexion sollicitant la section (M_u) est **supérieur** au moment maximal que la table seule peut équilibrer (M_t). La table seule est **insuffisante** pour reprendre toute la compression. La zone comprimée **s'étend nécessairement dans la nervure**. La fibre neutre est située dans la nervure.

Le calcul devient plus complexe. Il faut alors considérer la section réelle en T. Généralement, on décompose la section (Figure 5.10) :

- Une partie rectangulaire de largeur b (la table) équilibrant un moment M_t .
- Une partie rectangulaire de largeur b_0 (largeur de la nervure) équilibrant le moment résiduel $M_u - M_t$.
- On calcule la section d'acier correspondant à chacune de ces parties et on les additionne.

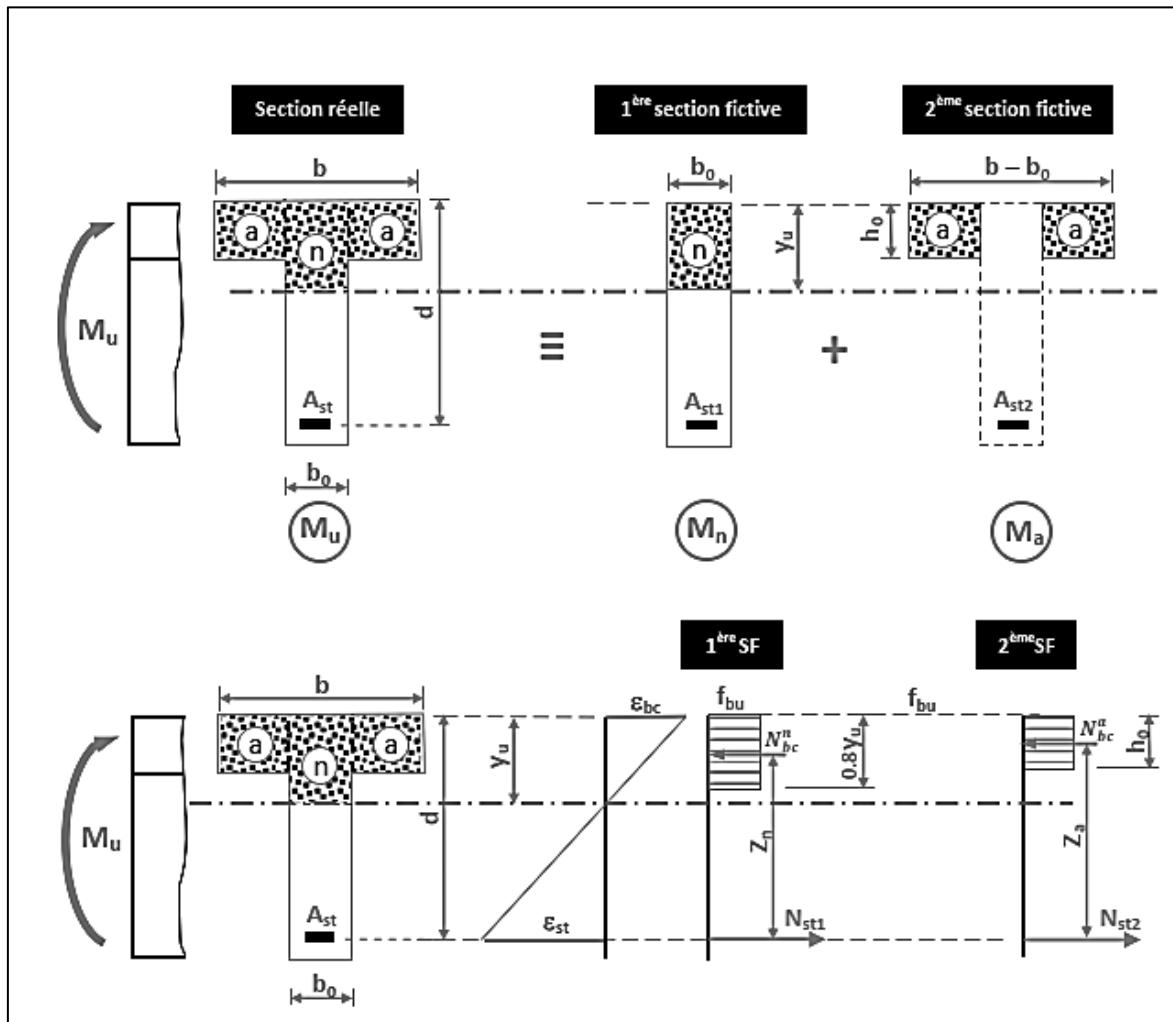


Fig. 5.10: Principe de calcul à l'ELU d'une section en T, avec : $M_t < M_u$

M_u : Moment ultime appliqué

M_a : Moment repris par la table

M_n : Moment repris par la nervure comprimée

- **Section d'acier totale :**

$$A_{st} = A_{st1} + A_{st2} \quad (\text{Eq.5.29})$$

A_{st1} : Acier nécessaire pour équilibrer M_n (nervure)

A_{st2} : Acier nécessaire pour équilibrer M_a (table)

- **Calcul de M_a (Moment équilibré par la table) :**

Le moment équilibré par la table est donné par la relation suivante :

$$M_a = (b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu} \cdot \left(d - \frac{h_0}{2} \right) \quad (\text{Eq.5.30})$$

Avec :

$(b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu}$: Force de compression dans la table (aire \times contrainte).

$(d - \frac{h_0}{2})$: Bras de levier (distance entre aciers tendus et centre de gravité de la table).

Concrètement : C'est le même calcul que M_t dans l'étape précédente, mais appliqué uniquement aux "débords" de la table (largeur $b - b_0$).

- **Calcul de M_n (Moment équilibré par la nervure) :**

Le moment équilibré par la nervure présente la différence entre le moment ultime et le moment de la table (aile) selon la relation suivante :

$$M_n = M_u - M_a \quad (\text{Eq.5.31})$$

Le moment non repris par la table ($M_u - M_a$) doit être repris par la partie comprimée de la nervure.

- **Calcul de A_{st1} (Acier pour la nervure)**

On traite la nervure comme une section rectangulaire de largeur b_0 :

Étape 1 : Moment réduit de la nervure :

$$\mu_{bu} = \frac{M_n}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}} \quad (\text{Eq.5.32})$$

Étape 2 : Comparer μ_{bu} au moment réduit limite μ_l (dépendant de l'acier et du béton) :

- Si $\mu_{bu} \leq \mu_l \rightarrow$ **Pas d'aciers comprimés** (pivot A ou B).
- Si $\mu_{bu} > \mu_l \rightarrow$ **Aciers comprimés nécessaires** (pivot B).

Étape 3 (sans aciers comprimés) :

- Calculer $\alpha_u = 1.25(1 - 1 - 2\mu_{bu})$
- Calculer $\beta_u = 1 - 0.4\alpha_u$ (coefficient de bras de levier).
- Calculer σ_{st} (contrainte dans les aciers tendus) :
- Pivot A : $\sigma_{st} = f_{su}$
- Pivot B : $\sigma_{st} = \frac{f_{su}}{\gamma_s} \cdot \frac{\alpha_u - 0.8}{\alpha_u}$

La section d'acier au niveau de la nervure est donnée par l'équation ci-dessous :

$$A_{st1} = \frac{M_n}{\sigma_{st} \cdot \beta_u \cdot d} \quad (\text{Eq.5.33})$$

- **Calcul de A_{st2} (Acier pour la table) :**

La section des aciers tendus au niveau de la table est la suivante :

$$A_{st2} = \frac{(b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu}}{f_{su}} \quad (\text{Eq.5.34})$$

Ou :

$(b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu}$: Force de compression dans la table.

f_{su} : Contrainte de calcul de l'acier ($f_{su} = f_e / \gamma_s$).

Équilibre des forces : La compression dans la table est équilibrée par A_{st2} , donc

$$A_{st2} \cdot f_{su} = (b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu}$$

- **Section d'acier totale**

$$A_{st} = A_{st1} + A_{st2}$$

5.2.4.2 Section avec aciers comprimés

Cette méthode s'applique lorsque la nervure seule ne peut équilibrer le moment M_n sans dépasser la capacité de compression du béton (Figure. 5.11). On ajoute alors des aciers comprimés (A_{sc}) pour renforcer la zone comprimée.

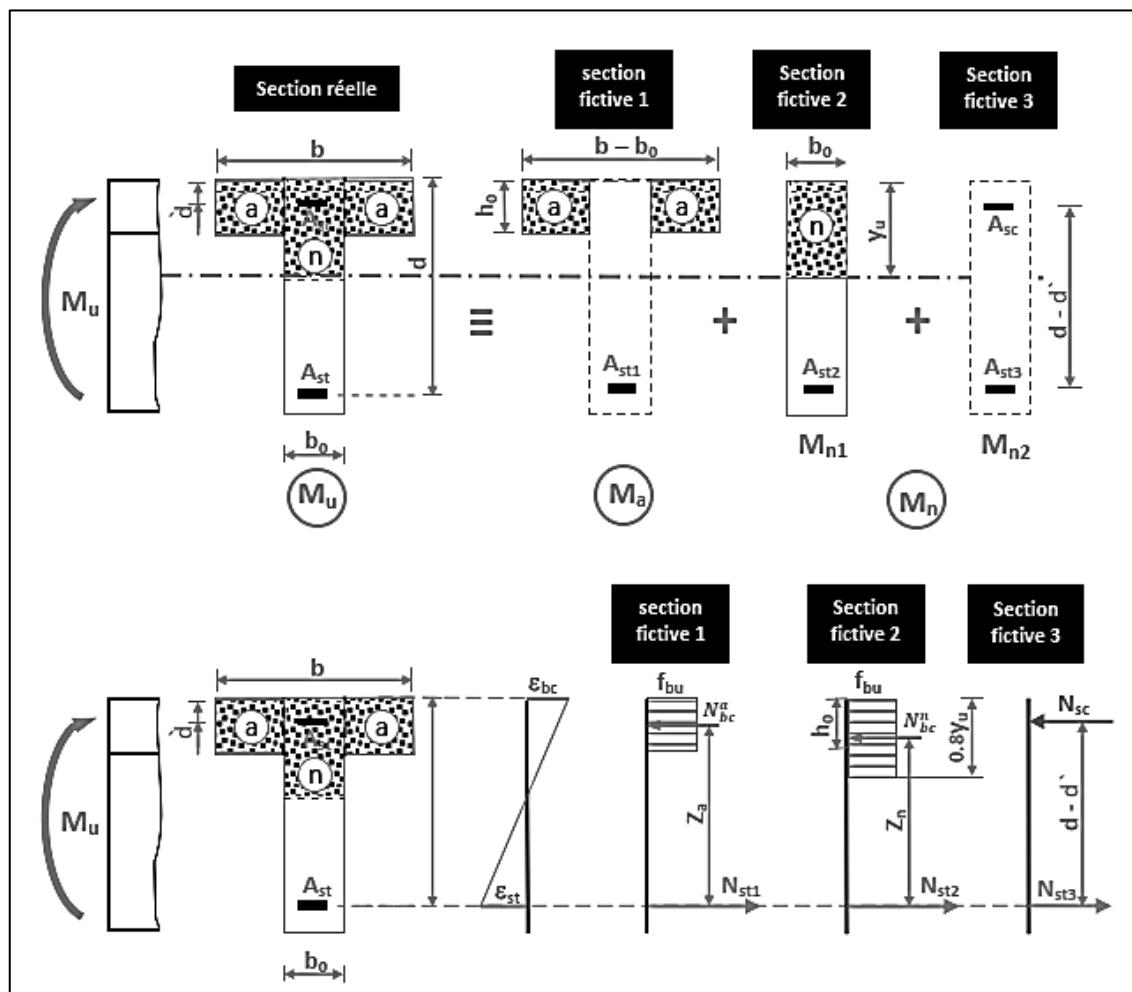


Figure. 5.11 : Principe de calcul à l'ELU d'une section en T avec aciers comprimés

Principe de superposition permet d'écrire : $M_u = M_a + M_n$

Donc : $M_n = M_{n1} + M_{n2} \Rightarrow M_u = M_a + M_{n1} + M_{n2}$

et : $A_{st} = A_{st1} + A_{st2} + A_{st3}$

Etape de calcul de la section des armatures d'une poutre en forme Té:

(a) Calcul de M_a et de M_n :

Identique à la méthode des sections en T *sans* aciers comprimés..

(b) Calcul de la section fictive 1 (table comprimée)

Moment équilibré par la table :

$$M_a = N_{bc}^a \cdot Z_a = N_{st1} \cdot Z_a = A_{st1} \cdot f_{su} \cdot \left(d - \frac{h_0}{2} \right) \quad (\text{Eq.5.35})$$

Section d'acier tendu associée est donnée par la relation suivante :

$$A_{st1} = \frac{M_a}{f_{su} \cdot \left(d - \frac{h_0}{2} \right)} \quad (\text{Eq.5.36})$$

(c) Calcul de la section fictive 2 (Nervure sans aciers comprimés)

On a comme donnés μ_l , α_l et β_l

- **Moment résistant maximal du béton (contrainte limite) :**

$$M_r = \mu_l \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{bu} = M_{n1}$$

- **Moment résiduel à équilibrer M_{n2} :**

$$M_{n2} = M_n - M_{n1}$$

- **Acier tendu pour la nervure (la section fictive A_{st2}) :**

$$A_{st2} = M_{n1} / (f_{su} \cdot \beta_l \cdot d) \quad (\text{Eq.5.37})$$

Calcul de la section fictive 3 (Aciers comprimés)

- **Section théorique des armatures comprimées (A_{sc}):**

$$M_{n2} = \sigma_{sc} \cdot A_{sc} \cdot (d - d') \Rightarrow A_{sc} = M_{n2} / (\sigma_{sc} \cdot (d - d')) \quad (\text{Eq.5.38})$$

Où σ_{sc} est déterminé via la déformation $\varepsilon_{sc} = 3.5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{\alpha_l \cdot (d - d')}{\alpha_l \cdot d} \right)$

- **Aciers tendus complémentaires (A_{st3}) :**

$$M_{n2} = N_{st3} \cdot (d - d') \quad (\text{Eq.5.39})$$

$$N_{st3} = f_{su} \cdot A_{st3} \quad (\text{Eq.5.40})$$

En remplaçant (5.39) dans (5.37), on a: $M_{n2} = f_{su} \cdot A_{st3} \cdot (d - d')$

$$A_{st3} = \frac{M_{n2}}{f_{su} \cdot (d - d')} \quad (\text{Eq.5.41})$$

- **Section théorique totale des armatures tendues :**

$$A_{st} = A_{st1} + A_{st2} + A_{st3}$$

- **Section théorique des armatures comprimées : A_{sc}**

5.3 Les justifications vis-à-vis de l'E.L.S

5.3.1. Objectif des vérifications à l'E.L.S

Les justifications à l'E.L.S concernent la durabilité de la structure en phase d'exploitation. Elles visent à contrôler :

- La fissuration des éléments en béton armé
- Les déformations excessives
- La stabilité à long terme

5.3.2. Méthodes de justification

Deux approches sont possibles :

- **Vérification directe des contraintes**

Contrôle du respect des limites réglementaires :

- Contrainte de compression du béton
- Contrainte de traction des aciers

- **Méthode comparative** : Calcul de la section d'armature requise à l'E.L.S et comparaison avec celle obtenue à l'E.L.U.R.

5.3.3. Règles de priorité selon le degré de fissuration :

Justification : En cas de FTP (milieux agressifs), la maîtrise de la fissuration est primordiale pour la durabilité, d'où la priorité donnée à l'E.L.S (Tableau 5.4).

Tableau 5.4 Dimensionnement et vérification des sections selon le type de fissuration

Type de fissuration	Dimensionnement initial	Vérification
Peu préjudiciable (FPP)	E.L.U	E.L.S
Préjudiciable (FP)	E.L.U	E.L.S
Très préjudiciable (FTP)	E.L.S	E.L.U

5.3.4. Hypothèses de calcul

Les hypothèses de calcul pour les vérifications à l'État Limite de Service (E.L.S) reposent sur les postulats suivants :

5.3.4. 1. Hypothèse de Navier-Bernoulli

Les sections planes restent planes après déformation :

La distribution des déformations est linéaire sur la hauteur de la section.

5.3.4.2. Adhérence parfaite

Absence de glissement entre aciers et béton :

Les déformations sont compatibles à l'interface acier-béton ($\varepsilon_s = \varepsilon_b$).

5.3.4.3. Négligence du béton tendu

Le béton tendu est considéré comme non résistant :

Seule la zone comprimée participe à la résistance.

5.3.4.4. Comportement élastique linéaire

Lois de Hooke applicables :

- Béton : $\sigma_{bc} = E_b \cdot \varepsilon_{bc}$
- Acier : $\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$

- **Coefficient d'équivalence n**

Paramètre	Valeur	Signification
n	15	Rapport $n = E_s / E_b$

Une section d'acier A_s est équivalente à une section fictive de béton $n \cdot A_s$.

L'homogénéisation permet de ramener toute la section à un matériau unique (béton fictif). Les contraintes dans l'acier s'en déduisent par amplification d'un facteur n.

Ces hypothèses permettent d'appliquer la méthode des sections homogénéisées :

1. Calcul du centre de gravité de la section homogène (béton + acier transformé en béton)
2. Détermination du moment d'inertie équivalent $I_{équiv}$
3. Calcul des contraintes de flexion :

La méthode privilégiée est la vérification directe des contraintes. Elle exige :

- **Respect de la contrainte limite de compression du béton :** (Voir chapitre 2)
- **Respect de la contrainte limite de traction des aciers :** (Voir Chapitre 2)

5.3.5 Combinaisons d'actions

Pour les vérifications à l'État Limite de Service (E.L.S), la combinaison d'actions de base dans les cas courants est : G + Q

5.3.6. Caractéristiques géométriques

5.3.6.1. Position de 'axe neutre pour une section rectangulaire homogénéisée :

L'axe neutre (AN) passe par le centre de gravité de la section homogénéisée. Le moment statique par rapport à l'AN est nul (Figure 5.12):

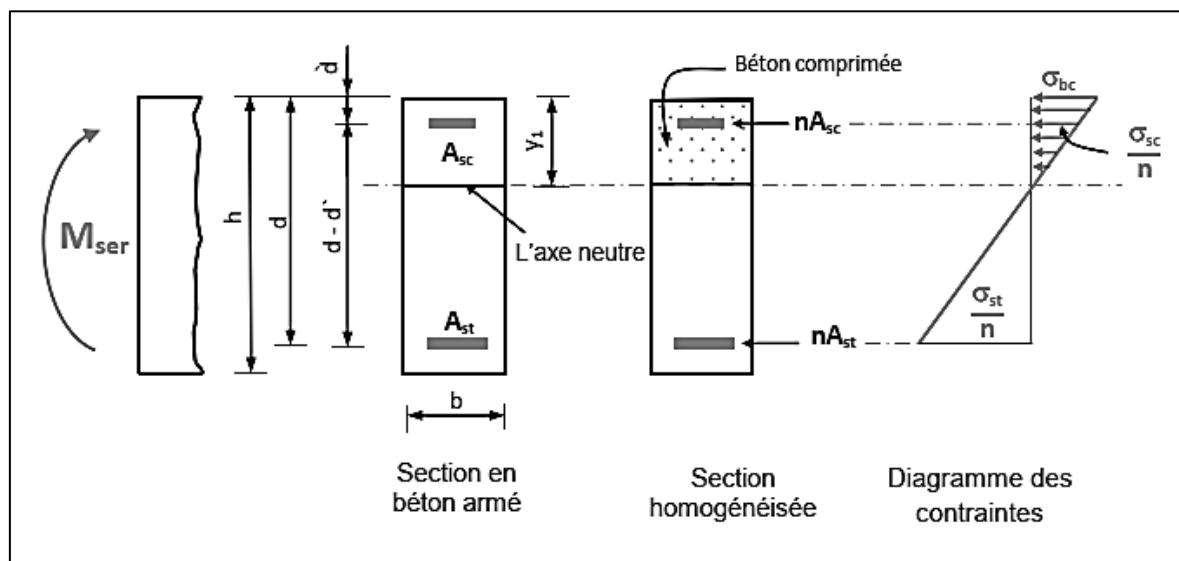


Figure 5.12. Section rectangulaire avec armatures comprimées

- Pour une section rectangulaire avec armatures comprimées ($A_{sc} \neq 0$) (Fig. 5.12):

$$M_s/G_x = 0 \Rightarrow b \frac{y_1^2}{2} + nA_{sc}(y_1 - d') - nA_{st}(d - y_1) = 0 \quad (\text{Eq.5.42})$$

Les valeurs de y_1 sont obtenues en résolvant cette équation de deuxième degré à une inconnue.

y_1 : la distance entre la fibre la plus comprimée de la section et l'axe neutre.

- Pour une section rectangulaire sans armatures comprimées ($A_{sc} = 0$), l'équation (5.42) devient :

$$b \frac{y_1^2}{2} - nA_{st}(d - y_1) = 0 \quad (\text{Eq.5.43})$$

5.3.6.2. Position de 'axe neutre pour une section en Té homogénéisée :

Pour déterminer la position de l'axe neutre (AN) dans une section en T homogénéisée, on utilise la propriété fondamentale :

Le moment statique de la section homogénéisée par rapport à l'AN est nul.

$$H = \frac{b}{2} h_0^2 + nA_{sc}(h_0 - d') - nA_{st}(d - h_0) = 0 \quad (\text{Eq.5.44})$$

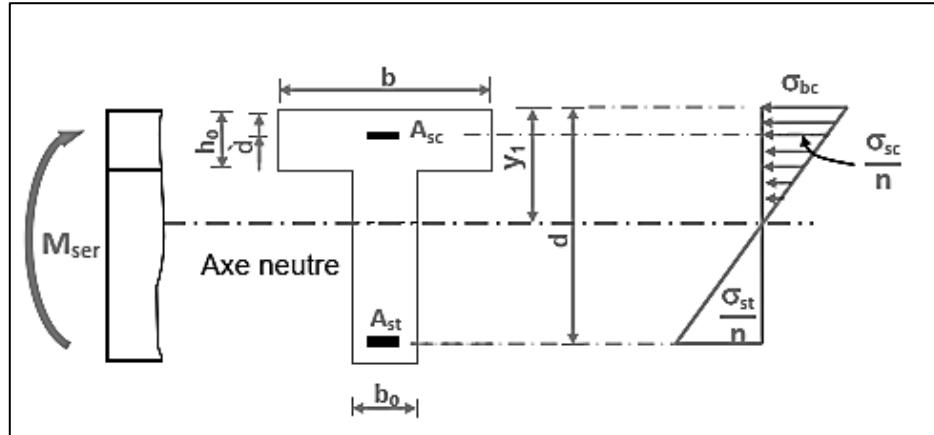


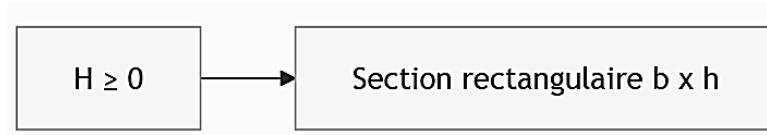
Figure. 5.13. Section en T avec armatures comprimées.

La position de l'axe neutre (y) dans une section en T homogénéisée est déterminée par le signe du paramètre H (moment statique relatif). Deux cas distincts se présentent :

(a). Cas où l'axe neutre est dans la table de compression

- **Condition** : $H \geq 0$
 - **Position** : $y \leq h_0$

La section se comporte comme une **section rectangulaire pleine** de largeur bb (largeur de la table).



$$b \frac{y_1^2}{2} + nA_{sc}(y_1 - d') - nA_{st}(d - y_1) = 0$$

(b) Cas où l'axe neutre est dans la nervure

- **Condition** : $H < 0$
 - **Position** : $y > h_0$

La section fonctionne comme une véritable section en T (nécessitant le calcul spécifique des caractéristiques de la nervure)



$$b \frac{y_1^2}{2} - (b - b_0) \frac{(y_1 - h_0)^2}{2} + nA_{sc}(y_1 - d') - nA_{st}(d - y_1) = 0 \quad (\text{Eq.5.45})$$

5.3.6.3 Moment d'inertie par rapport à l'axe neutre pour une section rectangulaire

- (a) Pour une section rectangulaire avec armatures comprimées ($A_{sc} \neq 0$) (Figure. 5.12)

$$I_x = b \frac{y_1^3}{3} + nA_{sc}(y_1 - d')^2 + nA_{st}(d - y_1)^2 \quad (\text{Eq.5.46})$$

- (b) Pour une section rectangulaire sans armatures comprimées ($A_{sc} = 0$)

$$I_x = b \frac{y_1^3}{3} + nA_{st}(d - y_1)^2 \quad (\text{Eq.5.47})$$

5.3.6.3 Moment d'inertie par rapport à l'axe neutre pour une section Té

- (a) L'axe neutre est dans la table, dans ce cas, le moment d'inertie est donné comme suit :

$$I_x = \frac{y_1^3}{3} + nA_{sc}(y_1 - d')^2 + nA_{st}(d - y_1)^2 \quad (\text{Eq.5.48})$$

- (b) L'axe neutre est dans la nervure, dans ce cas, y_1 est déterminé par l'équation des moments statiques par rapport à l'axe neutre:

$$I_x = b \frac{y_1^3}{3} - (b - b_0) \frac{(y_1 - h_0)^3}{3} + nA_{sc}(y_1 - d')^2 - nA_{st}(d - y_1)^2 \quad (\text{Eq.5.49})$$

5.3.7. Calcul des contraintes du béton et de l'acier

À l'État Limite de Service, le comportement élastique linéaire du béton et de l'acier permet de déterminer les contraintes par la théorie des poutres en flexion

Contrainte de compression du béton est donnée par l'équation suivante :

$$\sigma_{bc} = \frac{M_{ser}}{I_x} y_1 \quad (\text{Eq.5.50})$$

Contrainte de compression des aciers selon la formule ci-dessous:

$$\sigma_{sc} = n \frac{M_{ser}}{I_x} (y_1 - d') \quad (\text{Eq.5.51})$$

Contrainte de traction des aciers (Eq.5.52):

$$\sigma_{st} = n \frac{M_{ser}}{I_x} (d - y_1) \quad (\text{Eq.5.52})$$

5.3.8 Vérification des contraintes

Les valeurs de σ_{bc} , σ_{sc} et σ_{st} sont comparées avec les contraintes limites :

$$\overline{\sigma_{bc}}, \overline{\sigma_{sc}}, \text{ et } \overline{\sigma_{bt}} \quad (\text{Eq.5.53})$$

5.4. Condition de non-fragilité

La condition de non fragilité conduit à placer une section minimale d'armatures tendues pour une dimension de coffrage donnée.

Pour les pièces de section rectangulaire soumises à la flexion simple, on a:

$$A_{st} \geq 0.23 \cdot b \cdot d \cdot \frac{f_{t28}}{f_e} \quad (\text{Eq.5.54})$$

5.5. Application:

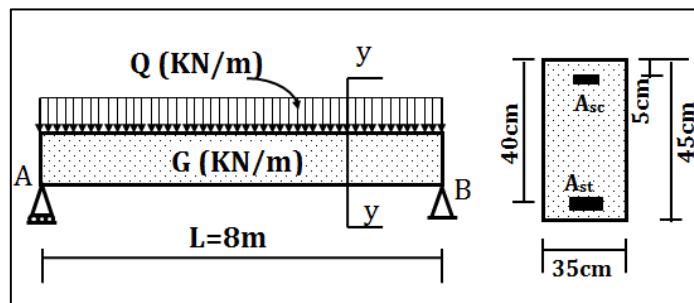
5.5.1. Exercice 1

Soit une poutre simplement appuyée (Figure ci-dessous) de longueur $L = 8 \text{ m}$.

La poutre est en béton armé, représente les caractéristiques suivantes :

$b=35\text{cm}$, $h=45\text{cm}$, $d=40\text{cm}$, $d'=5\text{cm}$

- Charges d'exploitation: $Q = 12 \text{ kN/m}$, Durée d'application des charges > 24h
- Béton: $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$ - Acier: HA FeE 400
- La masse volumique du béton : $D=25\text{KN/m}^3$
- Calculer la section des armatures longitudinales nécessaires à l'ELU au niveau de la partie la plus sollicitée.



Solution:

Calcul des charges et sollicitations

- **Poids propre de la poutre :**

$$G = b \times h \times \gamma_{\text{beton}} = 0.35 \times 0.45 \times 25 = 3.9375 \text{ kN/m}$$

- **Charge totale à l'ELU :**
 $P_u = 1.35G + 1.5Q = 1.35 \times 3.9375 + 1.5 \times 12 = 23.3156 \text{ kN/m}$
- **Moment fléchissant maximal (mi- travée) :**

Caractéristiques des matériaux

- **Béton :** $f_{c28}=30 \text{ MPa}$
 $f_{bu}=0.85 \times f_{c28} / 1.5= 17 \text{ MPa}$
- **Acier :** FeE400
 $\sigma_{st}=400 / 1.15=347.83 \text{ MPa}$

Moment ultime

$$M_u = P_u \cdot L^2 / 8 = 186.52 \text{ KNm}$$

Calcul du moment réduit et vérification

- **Moment réduit :** (Eq 5.7)

$$\mu_u = \frac{M_u}{b \cdot d^2 \cdot f_{bu}} = \frac{186.52 \cdot 10^3}{350 \cdot (400)^2 \cdot 17}$$

$\mu_u = 0.196 > 0.186$ **Pivot B** (section partiellement comprimée, mais aciers tendus plastifiés). Donc : $\varepsilon_{bc} = 3.5\%$

$$\mu_u = 0.196 < \mu_l = 0.392 \text{ (Fe400)} \quad As'=0$$

$$\alpha_u = 1.25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu_u}) = 0.2752$$

$$\beta_u = 1 - 0.4\alpha_u = 0.8899$$

Bras de levier : $Z_u = \beta_u \cdot d = 35.597 \text{ cm}$

$$A_{st} = \frac{M_u}{(\sigma_{st} \cdot \beta_u \cdot d)} = \frac{186.525 \cdot 10^6}{(347.8 \cdot 355.97 \cdot 400)} = 15.065 \text{ cm}^2$$

Vérification des sections minimales et maximales

- **Section minimale :** Chapitre 2 (Eq.2.8)

$$f_{t28}=0.6+0.06f_{c28}=2.4 \text{ MPa}$$

$$A_{smin} \geq \frac{0.23 \cdot b \cdot d \cdot f_{t28}}{f_e} \geq \frac{0.23 \cdot 350 \cdot 400 \cdot 2.4}{400} = 1.932 \text{ cm}^2$$

- **Section maximale :**

$$A_{max} = 0.05 \text{ bh} = 0.05 \times 35 \times 45 = 78.75 \text{ cm}^2$$

Vérification :

$$1.93\text{cm}^2 < 15.06\text{cm}^2 < 78.75\text{cm}^2 \rightarrow \text{OK.}$$

5.5.2. Exercice 2:

On considère une poutre en béton armé de section en T, soumise à un moment fléchissant ultime (Figure ci-dessous).

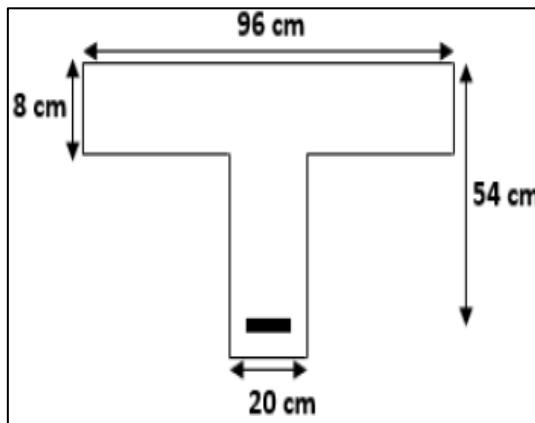
Les données :

- Matériaux : Béton : $f_{c28} = 16 \text{ MPa}$

Acier : feE400 (type HA)

- Charges appliquées : Moment ultime : $M_u = 370 \text{ KN.m}$

On demande de calculer la section des armatures nécessaires à l'État Limite Ultime de Résistance (ELUR).

**Solution :**

Position de l'axe neutre : $f_{bu} = 0.85.f_{c28}/\gamma_b$. $\gamma_b = 9.07 \text{ MPa}$

$$M_t = b \cdot h_0 \cdot \left(d - \frac{h_0}{2} \right) f_{bu} = 0.96 \cdot 0.08 \cdot \left(0.54 - \frac{0.08}{2} \right) 9.07$$

$$M_t = 348.16 \text{ KNm}$$

Donc : $M_u = 370 \text{ KN.m} > M_t = 348.16 \text{ KN.m}$

Axe neutre dans la nervure et le calcul se fait pour section en T

$$M_n = M_u - M_a$$

$$M_u = M_1 + M_2$$

$$M_a = (b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu} \cdot \left(d - \frac{h_0}{2} \right) = (0.96 - 0.2) * 0.08 * 9.07 * \left(0.54 - \frac{0.08}{2} \right)$$

$$M_a = 275.728 \text{ KNm}$$

$$M_n = Mu - Ma = 370 - 275.728 = 94.272 \text{ KNm}$$

$$\mu_{bu} = \frac{M_n}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}} = \frac{94.272 \cdot 10^6}{200.540^2 \cdot 9.07} = 0.178$$

$$\mu = 0,178 < 0,187 \rightarrow \text{Pivot A} ; \varepsilon_s = 10 \% \rightarrow \sigma_s = f_e / \gamma_s = 348 \text{ MPa}$$

$$\alpha_u = 1.25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu_u}) = 0.247$$

Bras de levier : $Z_u = \beta_u \cdot d = d(1 - 0.4 \alpha) = 48.6648 \text{ cm}$

$$A_{st1} = \frac{M_n}{\sigma_{st} \cdot \beta_u \cdot d} = \frac{94.272 \cdot 10^6}{(347.83 \cdot 486.648)} = 556.658 \text{ mm}^2$$

$$A_{st1} = 5.56 \text{ cm}^2$$

$$A_{st2} = \frac{(b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu}}{f_{su}} = \frac{(960 - 200) * 800 * 9.07}{347.83} = 1548.64 \text{ mm}^2$$

$$A_{st2} = 15.84 \text{ cm}^2$$

Armature finale en ELUR est :

$$A_{st} = A_{st1} + A_{st2} = 5.56 + 15.84 = 21.4 \text{ cm}^2, A_{s'} = 0$$

Vérification des sections minimales et maximales

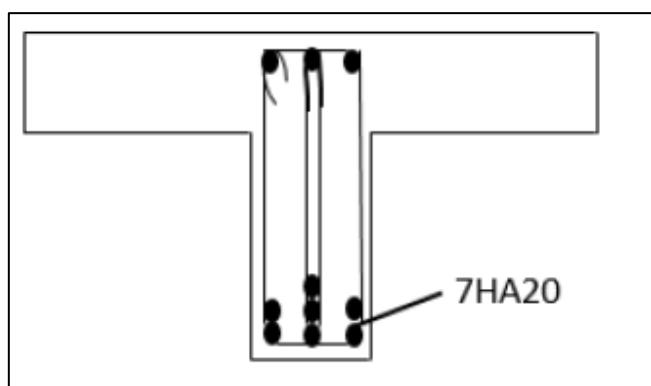
- **Section minimale :** Chapitre 2 (Eq.2.8)

$$f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 1.56 \text{ MPa}$$

$$A_{smin} \geq \frac{0.23 \cdot b \cdot d \cdot f_{t28}}{f_e} \geq \frac{0.23 * 960 * 400 * 1.56}{400} = 0.97 \text{ cm}^2$$

$$A_{st} = 21.4 \text{ cm}^2 = 7 \text{ HA20} = 21.99 \text{ cm}^2$$

Armature dans la section comprimée (Table: 3HA12)



Chapitre 6 : Adhérence et ancrage

6.1. Définition et Rôle crucial de l'adhérence

L'adhérence désigne l'ensemble des forces de liaison qui se développent à l'interface entre l'acier d'armature et le béton qui l'enrobe. Ces forces s'opposent au glissement relatif de la barre d'acier par rapport à la matrice de béton.

Cette adhérence est essentielle pour valider une hypothèse clé du calcul des structures en béton armé : l'absence de glissement entre l'acier et le béton. Cela se traduit par l'égalité des déformations dans les deux matériaux au même point ($\varepsilon_b = \varepsilon_s$), où ε_b est la déformation du béton et ε_s est la déformation de l'acier.

L'adhérence permet la transmission efficace des efforts (principalement de traction) du béton vers les armatures, et vice-versa, assurant ainsi le comportement composite du matériau béton armé. Sans adhérence, l'acier et le béton travailleraient indépendamment, annulant l'intérêt du béton armé.

6. 2. Origines physiques de l'Adhérence

L'adhérence résulte de la combinaison de trois mécanismes distincts, dont l'importance relative varie selon le type d'armature :

6.2.1. Adhérence Chimique (Collage) :

Forces d'attraction moléculaire (type Van der Waals) à l'interface acier-béton, généralement faible et peu fiable. Cette adhésion initiale est rapidement perdue dès l'apparition de micro-glissemens ou sous l'effet de charges cycliques, d'humidité, ou de variations thermiques.

Rôle : Principalement significatif avant la mise en charge ou pour des barres très lisses, mais négligeable en service pour la résistance globale.

6.2.2. Adhérence par Frottement :

Forces résultant du **contact mécanique** entre la surface de l'acier et le béton, dues aux micro-irrégularités naturelles présentes même sur des barres dites "lisses". Plus significative que l'adhérence chimique, mais limitée. Elle dépend fortement de la rugosité naturelle de l'acier et de la contrainte de serrage transversale exercée par le béton durci (ou par des armatures transversales).

6.2.3. Adhérence par engrènement mécanique (Emboutissement) :

Forces générées par l'interpénétration mécanique entre les nervures (saillies périodiques) des barres à Haute Adhérence (HA) et le béton environnant. Les nervures agissent comme des "clavettes" s'appuyant sur le béton. Cet engrènement mobilise directement la résistance du béton en compression (devant les nervures) et en cisaillement (dans les zones de béton situées entre les nervures et en périphérie de la barre). Des micro-fissures de cisaillement radiales apparaissent naturellement autour de la barre.

6 .3 Modes de rupture liée à l'adhérence (Fig. 5.1)

Lorsqu'une barre ancrée dans le béton est soumise à un effort de traction croissant, trois types de ruptures peuvent survenir, reflétant différents niveaux d'efficacité de l'adhérence et de l'ancrage :

6.3.1. Rupture par traction de l'acier :

La barre d'acier atteint sa limite élastique (f_e) ou sa résistance à la rupture (f_u) et se rompt *avant* que l'adhérence ne soit vaincue ou que le béton ne soit endommagé.

C'est la situation idéale, qualifiée d'"**ancrage parfait**". Elle signifie que la longueur d'ancrage (L_b) est suffisamment longue pour permettre à l'acier de développer toute sa capacité portante sans défaillance de l'interface ou du béton environnant. L'adhérence est pleinement efficace.

6.3.2. Glissement de la barre (Arrachement) :

Les forces d'adhérence (quel que soit le mécanisme principal - chimique, frottement ou engrènement) sont dépassées, entraînant le glissement progressif de la barre dans sa gaine de béton.

L'adhérence est insuffisante pour résister à l'effort appliqué. Cela indique généralement une longueur d'ancrage trop courte, une résistance du béton trop faible, ou une qualité d'adhérence médiocre (barres lisses, béton mal compacté, etc.). C'est un mode de rupture fragile et dangereux à éviter.

6.3.3. Arrachement d'un cône de béton (Fendage) :

Sous l'effet des forces d'engrènement (pour les barres HA), les contraintes de cisaillement et de traction induites dans le béton autour de l'extrémité de la barre deviennent trop importantes. Il en résulte la rupture du béton selon une surface conique ou prismatique, entraînant un bloc de béton ("cône d'arrachement") avec la barre.

Bien que l'adhérence par engrènement soit active, la résistance du béton environnant est dépassée. Ce mode est favorisé par un enrobage insuffisant (distance entre la barre et la surface libre du béton trop faible), une résistance du béton faible, ou l'absence d'armatures transversales (cadres, étriers) qui pourraient confiner le béton et empêcher ce fendage.

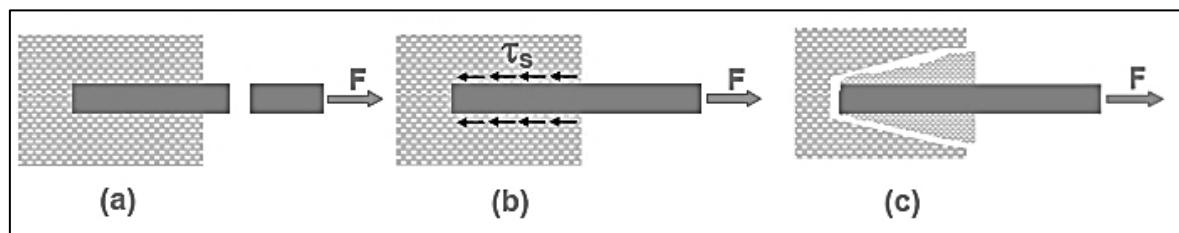


Figure. 6.1 : Types de ruptures dans un essai d'arrachement d'une barre scellée dans un massif en béton.

6.4. Facteurs influençant l'adhérence Acier-Béton

La qualité et la résistance de l'adhérence dépendent de nombreux paramètres :

- **État de Surface des Barres :** Les barres rugueuses (HA) offrent une meilleure adhérence par engrènement que les barres lisses (reliant principalement sur le frottement).
- **Forme des Barres :** Le profil des nervures (hauteur, inclinaison, espacement) sur les barres HA est crucial pour optimiser l'engrènement et limiter les contraintes de cisaillement dans le béton.
- **Groupement d'Armatures :** Des barres trop rapprochées (en paquet ou mal espacées) réduisent la surface d'interface béton-acier par barre et peuvent conduire à un fendage prématué du béton entre les barres.
- **Résistance du Béton (fcj ou fc28) :** C'est un facteur majeur, surtout pour l'adhérence par engrènement et la résistance au fendage. Plus le béton est résistant, meilleure est l'adhérence et plus la résistance au cône d'arrachement est élevée.
- **Compression Transversale (Serrage) :** Une contrainte de compression perpendiculaire à la barre (due à la réaction d'appui, à la précontrainte, ou à des armatures transversales serrées) augmente significativement l'adhérence par frottement et confinement du béton, améliorant la résistance à l'arrachement et au fendage.
- **Épaisseur d'Enrobage (Distance à la Surface Libre) :** Un enrobage suffisant est vital pour :
 - Protéger l'acier de la corrosion.
 - Fournir assez de béton autour de la barre pour développer les forces d'engrènement sans provoquer un fendage prématué vers la surface libre.
 - Assurer un bon confinement. Un enrobage trop faible favorise la rupture par cône d'arrachement.

6.5. La Contrainte d'Adhérence (τ_s) : Mesure Locale de la Liaison Acier-Béton

L'intensité de la liaison mécanique entre une armature et le béton qui l'enrobe est quantifiée par une grandeur locale appelée contrainte d'adhérence, notée τ_s . Cette contrainte représente la force d'adhérence par unité de surface de contact développée le long de l'interface acier-béton.

La contrainte d'adhérence moyenne sur une longueur infinitésimale dx d'une barre est définie par la relation :

$$\tau_s = \frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{u} \quad (\text{Eq.5.1})$$

ou :

dF/dx (N/m ou kN/m) : C'est le gradient d'effort axial dans l'armature. Il représente la variation de l'effort de traction F le long de la barre par unité de longueur x . Physiquement, si l'effort de traction diminue le long de la barre ($dF/dx < 0$), c'est que cet effort est "transmis" au béton environnant via l'adhérence. La valeur absolue $|dF/dx|$ est donc directement proportionnelle à l'intensité de la force d'adhérence sur la longueur dx .

u (m) : C'est le périmètre utile de la section d'acier en contact avec le béton.

- Pour une barre isolée de diamètre \varnothing : $u = \pi \cdot \varnothing$
- Pour un paquet de barres (généralement limité à 2 ou 3 barres identiques en contact) : u est le périmètre de l'enveloppe convexe (filet) du paquet. *Exemple :* Pour 2 barres côté à côté de diamètre \varnothing , $u \approx 2\varnothing + \pi\varnothing$ (périmètre extérieur du "8" formé par les deux cercles).

τ_s (MPa ou N/mm²) : La contrainte d'adhérence résultante, exprimée en contrainte (force/surface). C'est la force d'adhérence par unité de surface de l'interface.

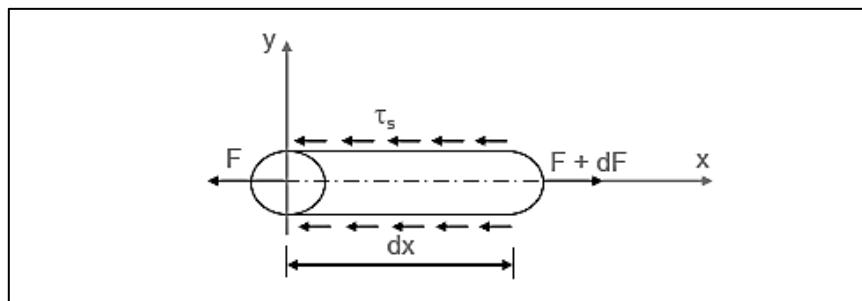


Figure. 5.2. Equilibre d'un tronçon de barre de longueur dx

6.5. 1. Interprétation Physique Détaillée:

- **Transfert d'Effort :**

Imaginons une barre encastrée dans le béton et soumise à un effort de traction F à une de ses extrémités (Figure. 6.2). Pour qu'une section de barre située à une distance x de cette extrémité soit en équilibre, l'effort $F(x)$ qu'elle subit doit être équilibré par la somme des forces d'adhérence développées entre cette section et l'extrémité libre. Si F diminue le long de la barre, c'est que les forces d'adhérence s'opposent au glissement de la barre vers la gauche.

- **Rôle du Périmètre (u) :**

La force d'adhérence totale sur une longueur dx est égale à $\tau_s(u \cdot dx)$ (contrainte x surface de contact). Cette force doit équilibrer la variation d'effort axial dF sur cette même longueur : $dF = \tau_s \cdot u \cdot dx$. En réarrangeant, on obtient $\tau_s = (dF/dx)/u$. Le périmètre u est donc crucial : plus la surface de contact est grande (u grand), plus la contrainte d'adhérence τ_s nécessaire pour équilibrer un gradient d'effort dF/dx donné est faible.

6.5. 2. Importance Pratique dans le Calcul des Structures :

- **Dimensionnement des Ancrages et des Jonctions :**

La contrainte d'adhérence τ_s est la grandeur clé pour calculer la longueur d'ancrage nécessaire (L_b) pour qu'une barre puisse développer sa résistance maximale ($A_s * f_{su}$) sans arrachement. Plus la contrainte d'adhérence admissible τ_{su} est faible, plus la longueur d'ancrage requise est grande.

- **Vérification des Contraintes Locales :**

Dans les zones de forte variation d'effort (autour des appuis, aux jonctions de barres), la contrainte d'adhérence effective τ_s doit être vérifiée pour rester inférieure à une valeur limite τ_{su} définie par les normes (BAEL, etc.) afin d'éviter le glissement ou le fendage du béton.

- **Détermination de τ_{su} par les Normes :**

Les normes de calcul fournissent des formules pour la contrainte d'adhérence de calcul ultime (τ_{su}). Cette valeur dépend principalement de :

- La résistance caractéristique en traction du béton (f_{cj}).
- L'état de surface de la barre (lisse ou HA).
- Le diamètre de la barre (effet d'échelle : adhérence relative meilleure pour les petits diamètres).
- La position de la barre durant le bétonnage (bonnes ou mauvaises conditions).
- La présence de compression transversale.

6.6. Contrainte limite d'adhérence

La contrainte limite d'adhérence (τ_{su}) représente la valeur maximale que la contrainte de cisaillement à l'interface acier-béton ne doit pas dépasser pour garantir un ancrage fiable. Son objectif est d'empêcher tout glissement de la barre d'armature à l'intérieur de la gaine de béton qui l'enserre, préservant ainsi l'intégrité du lien entre les deux matériaux. Cette valeur limite est calculée par la formule suivante :

$$\tau_{su} = 0.6 \cdot \psi_s^2 \cdot f_{tj} \quad (\text{Eq.6.2})$$

où chaque paramètre joue un rôle critique.

Le coefficient 0.6 est un facteur de sécurité global, issu de l'analyse expérimentale et de modélisations, qui intègre la variabilité des propriétés des matériaux et les incertitudes liées à la transmission des efforts.

Le terme ψ_s^2 , appelé coefficient de scellement, dépend directement de la nature de la surface de l'acier : il vaut 1 pour les aciers lisses (offrant une adhérence principalement par frottement) et 1.5 pour les aciers à haute adhérence (HA) (dont

les aspérités génèrent un engrènement mécanique plus efficace mobilisant la résistance du béton).

Enfin, f_{tj} désigne la résistance caractéristique à la traction du béton à j jours, exprimée en MPa. Cette dernière est elle-même estimée à partir de la résistance en compression du béton (f_{cj}) via la relation suivante :

$$f_{tj} = 0.6 + 0.06 \cdot f_{cj}. \quad (\text{Eq.6.3})$$

Cette formule empirique (f_{tj}) traduit le fait que la résistance à la traction du béton est bien inférieure à sa résistance en compression (typiquement ~10%) et évolue proportionnellement avec elle ; le terme constant (0.6) et le coefficient (0.06) sont calibrés sur des essais standardisés, comme l'essai de traction par fendage. En résumé, la formule TSUTSU lie explicitement la résistance admissible à l'arrachement de la barre à la rugosité de l'acier (ψ_s) et à la résistance à la traction du béton environnant (f_{tj}), elle-même dérivée de sa résistance en compression (f_{cj}). Le non-respect de cette limite risque de provoquer un glissement de l'armature ou l'arrachement localisé du béton, compromettant la capacité portante de l'élément structurel.

6.7. Anchorage des aciers

Un ancrage est considéré comme efficace lorsqu'une barre d'acier, sollicitée en traction, transmet intégralement son effort au béton environnant par le biais des forces d'adhérence sur toute la longueur de la zone d'ancrage, sans glissement ni rupture.

6.7.1 Ancre droit

La longueur de scellement droit (l_s) représente la longueur minimale nécessaire pour ancrer une barre de diamètre ϕ soumise à un effort de traction maximal correspondant à sa limite élastique (f_e). Cette longueur est déterminée par l'équilibre entre la force de traction dans l'acier et la force résistante due à l'adhérence sur la surface de contact.

L'équation fondamentale s'établit comme suit :

La force de traction maximale est donnée par l'équation suivante :

$$F_{\text{traction}} = \frac{\pi \cdot \phi^2 \cdot f_e}{4}. \quad (\text{Eq.6.4})$$

La force d'adhérence totale :

$$F_{\text{adhérence}} = \pi \phi \cdot l_s \cdot \tau_{su} \quad (\text{Eq.6.5})$$

où

τ_{su} est la contrainte limite d'adhérence définie précédemment.

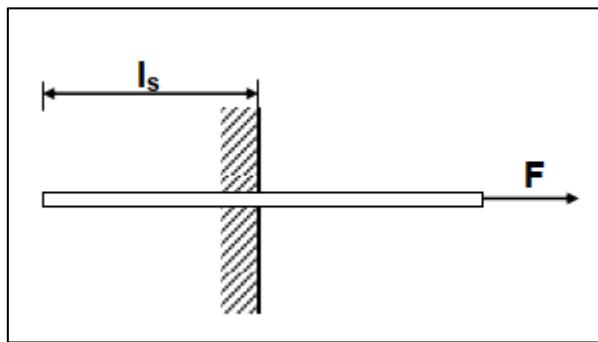


Figure. 6.3. Anchrage droit

En résolvant l'égalité des équations (Eq.6.4 et Eq.6.5), on obtient la relation suivante :

$$l_s = \frac{\phi \cdot f_e}{4\tau_{su}} \quad (\text{Eq.6.7})$$

Cette formule révèle que l_s est proportionnelle au diamètre de la barre (ϕ) et à la limite élastique de l'acier (f_e), mais inversement proportionnelle à la contrainte d'adhérence (τ_{su}).

Physiquement, cela s'explique par le fait qu'une barre plus épaisse ou plus résistante nécessite une surface de contact plus grande pour transmettre un effort accru, tandis qu'une adhérence béton-acier plus forte réduit la longueur requise.

Le facteur **1/4** provient du rapport géométrique entre l'aire de la section transversale de l'acier ($\frac{\pi\phi^2}{4}$) et sa surface latérale par unité de longueur ($\pi\phi$).

À défaut de calcul précis, les normes recommandent des longueurs forfaitaires :

- **40φ pour les aciers HA Fe E 400** (où $f_e=400$ MPa).
- **50φ pour les aciers HA Fe E 500** ($f_e=500$ MPa) ou **les aciers lisses** (Fe E 215/235).

Ces valeurs intègrent implicitement un coefficient de sécurité (généralement $\gamma_s=1.15$) et supposent un coefficient de scellement $\psi_s \geq 1.5$ pour les aciers HA. Elles simplifient le dimensionnement tout en garantissant une marge contre le glissement ou l'arrachement, couvrant également les effets défavorables comme le regroupement de barres ou les variations locales de résistance du béton.

6.7.2 Longueur de scellement droit dans le cas d'un paquet de barres

Bien que les barres d'acier puissent être regroupées en paquets pour des raisons pratiques (optimisation de l'encombrement ou facilitation du ferrailage), leur ancrage doit impérativement être réalisé individuellement (selon les prescriptions de l'article A 6.1.21 des Règles BAEL). Cette exigence fondamentale découle de trois phénomènes mécaniques critiques :

6.7.2.1. Concentration des contraintes d'adhérence :

Dans un paquet, les barres centrales sont partiellement "masquées" par les barres périphériques, limitant le contact direct entre leur surface et le béton frais. Cette configuration réduit localement la surface d'interface effective disponible pour l'adhérence, créant des zones de faiblesse où les contraintes de cisaillement peuvent dépasser la valeur limite τ_{su} .

6.7.2.2. Risque de fissuration prématuée :

Lors du serrage des armatures, le béton peine à pénétrer uniformément entre les barres rapprochées. Il en résulte des vides ou des zones moins compactées, favorisant l'apparition de fissures radiales sous chargement (phénomène amplifié par la "bielle de béton" écrasée entre les barres).

6.7.2.3. Glissement collectif :

Si les barres sont ancrées comme un seul bloc, une défaillance localisée de l'adhérence peut provoquer un décollement en chaîne de l'ensemble du paquet, compromettant brutalement la capacité portante de l'élément structurel.

La figure 6.4 présente la longueur d'ancrage de paquet de barres

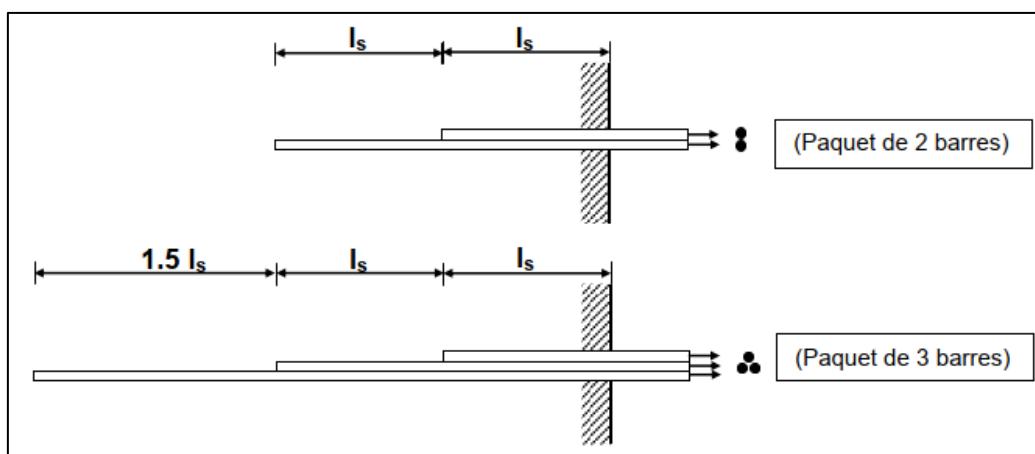


Figure. 6.4 : Anchrage droit dans le cas de paquet de 2 ou 3 barres

6.7.3. Anchrage Courbe (ou par Crochet):

Lorsque l'espace disponible aux extrémités d'un élément structurel (comme un appui de poutre) est insuffisant pour réaliser un ancrage droit de longueur totale $l_s l_s l_s$ (longueur de scellement droit requise), un ancrage courbe est mis en œuvre. Cette solution optimise l'encombrement tout en garantissant l'adhérence de l'armature dans le béton.

Un ancrage courbe se décompose en trois parties distinctes (cf. Figure.6.5) :

- Segment droit initial (AB) :

Longueur notée ℓ_2 : Assure la transition entre la partie libre de l'armature et la courbure.

- **Partie courbe (BC) :**

Arc de cercle défini par son rayon de courbure r et son angle au centre θ (généralement 90° , 135° ou 180° selon les normes). Il a pour rôle de répartir les contraintes d'adhérence sur la zone pliée et limite le risque de fissuration du béton.

- **Segment droit terminal (CD) :**

Longueur notée ℓ_1 (ou "retour droit"), ancrage final dans le béton, contribuant significativement à la résistance d'adhérence.

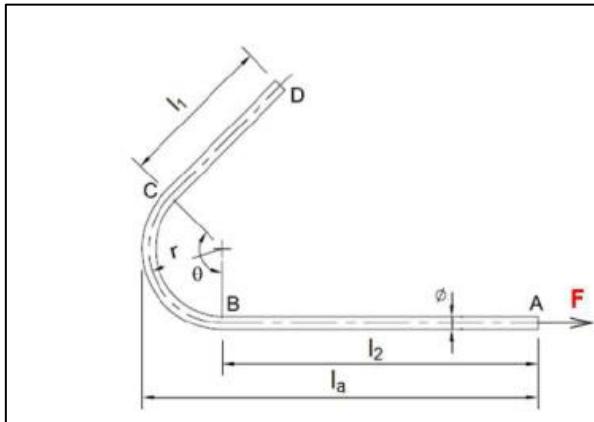


Figure. 6.5 : Ancrage courbe de barres tendues

6.7.3.1. Rayons de courbure minimaux (Norme BAEL A.6.1,25)

Le rayon de courbure minimal garantit l'intégrité de l'acier pendant le façonnage et limite les contraintes dans le béton. Les valeurs varient selon le type d'acier et la fonction de l'armature sont résolus dans le tableau 6.1.

Tableau 6.1. Rayon de courbure minimal garantit

type d'acier	Élément structural	Rayon minimal (r)	Justification
Barres rondes lisses	Crochets d'ancrage	$r \geq 3\phi$	Réduction du risque de fissuration (fragilité accrue des aciers lisses)
	Cadres/Étriers/Épingles	$r \geq 2\phi$	Contraintes mécaniques moindres (rôle secondaire en cisaillement)
Barres à haute adhérence (HA)	Crochets d'ancrage	$r \geq 2\phi$	Meilleure ductilité des aciers HA
	Cadres/Étriers	$r \geq 2\phi$	Standardisation et facilité de mise en œuvre

Exemple : Pour une barre HA de diamètre $\phi=12$ mm, un crochet nécessite $r \geq 24$ mm.

6.7.3.2. Caractéristiques des crochets standards

La longueur équivalente ℓ_s convertit l'ancrage courbe en une longueur droite fictive offrant la même résistance d'adhérence. Elle dépend de l'angle θ et intègre (Tableau 6.2. et figure 6.6) :

- ℓ_1 : Segment droit terminal (CD)
- ℓ_2 : Segment droit initial (AB)
- r : Rayon de courbure.
- Coefficients : Multiplicateurs liés à l'effet de courbure (contribution mécanique accrue).

Tableau 6.2. Formules normatives (BAEL) des crochets avec ancrage courbe

Angle θ	Formule de ℓ_s	Explication physique
90° (Figure.5.6(a))	$\ell_s = 1.87\ell_1 + \ell_2 + 2.19r$	Ancrage minimal, effet de butée limité
120° (Figure.5.6(b))	$\ell_s = 2.31\ell_1 + \ell_2 + 3.28r$	Optimisation encombrement/résistance
135° (Figure.5.6(c))	$\ell_s = 2.57\ell_1 + \ell_2 + 3.92r$	Standard recommandé (équilibre performance/compactez)
180° (Figure.5.6(d))	$\ell_s = 3.51\ell_1 + \ell_2 + 6.28r$	Ancrage maximal (effet de verrouillage mécanique)

- ℓ_s : Longueur de scellement droit équivalente (valeur minimale réglementaire).
- $6.28r$: Correspond à $2\pi r$ (périmètre complet du cercle), traduisant l'effet d'ancrage circulaire.

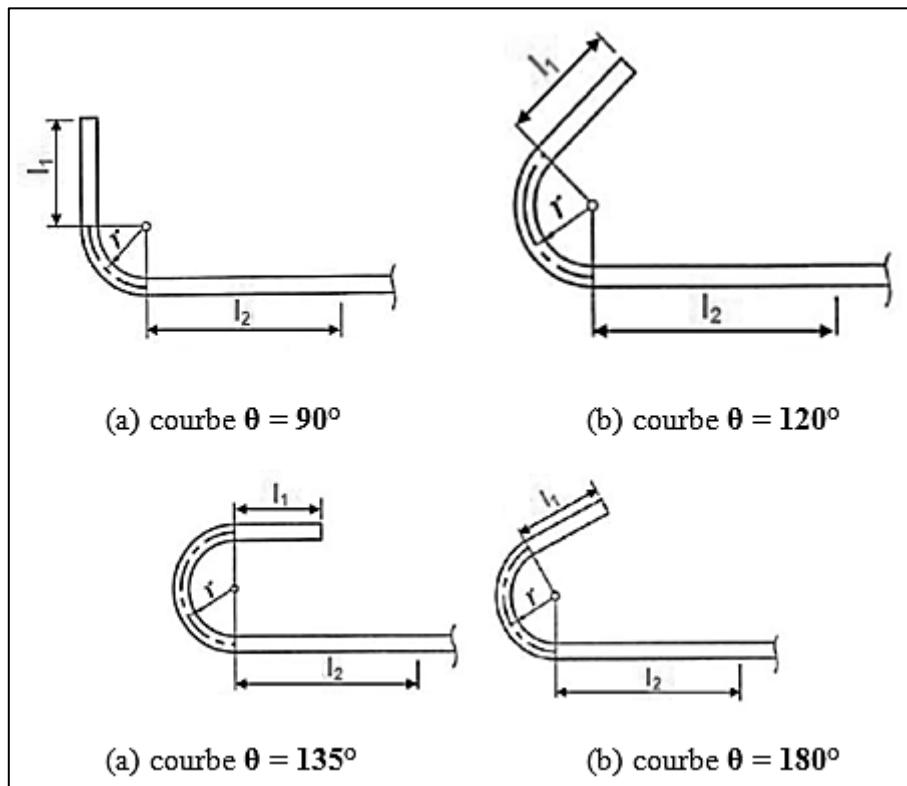


Figure. 6 .6. Caractéristiques des crochets standards avec ancrage courbe

Exemple:

Un crochet à 135° avec $r = 3\phi$, $\ell_1 = 4\phi$, $\ell_2 = 2\phi$ donne :

$$\ell_s = 2.57 \times 4\phi + 2\phi + 3.92 \times 3\phi = 10.28\phi + 2\phi + 11.76\phi = 24.04\phi$$

Soit une réduction d'environ 30% par rapport à un ancrage droit ($\ell_s \approx 40\phi$ pour un acier HA en C25).

6.7.4. Anchorage des cadres, étriers et épingle (BAEL A.6.1,255)

Pour les armatures transversales (cadres, étriers, épingle), l'ancrage est assuré par **courbure + retour droit**. La partie courbe crée un effet mécanique de verrouillage, tandis que le retour droit garantit la stabilité de l'ancrage dans le béton.

Les règles de conception sans résumés au tableau 6.3 et Figure 6.7 :

La courbure doit respecter les rayons minimaux ($r \geq 2\phi$).

Le plan de l'ancrage ne doit pas dévier de plus de $\pi/8$ (22.5°) par rapport au plan de l'armature principale.

Tableau. 6.3. Longueurs minimales des retours droits :

Angle de courbure	Longueur minimale du retour droit
180° (cintrage complet)	$\geq 5\phi$
135° (angle standard)	$\geq 10\phi$
90° (angle droit)	$\geq 15\phi$

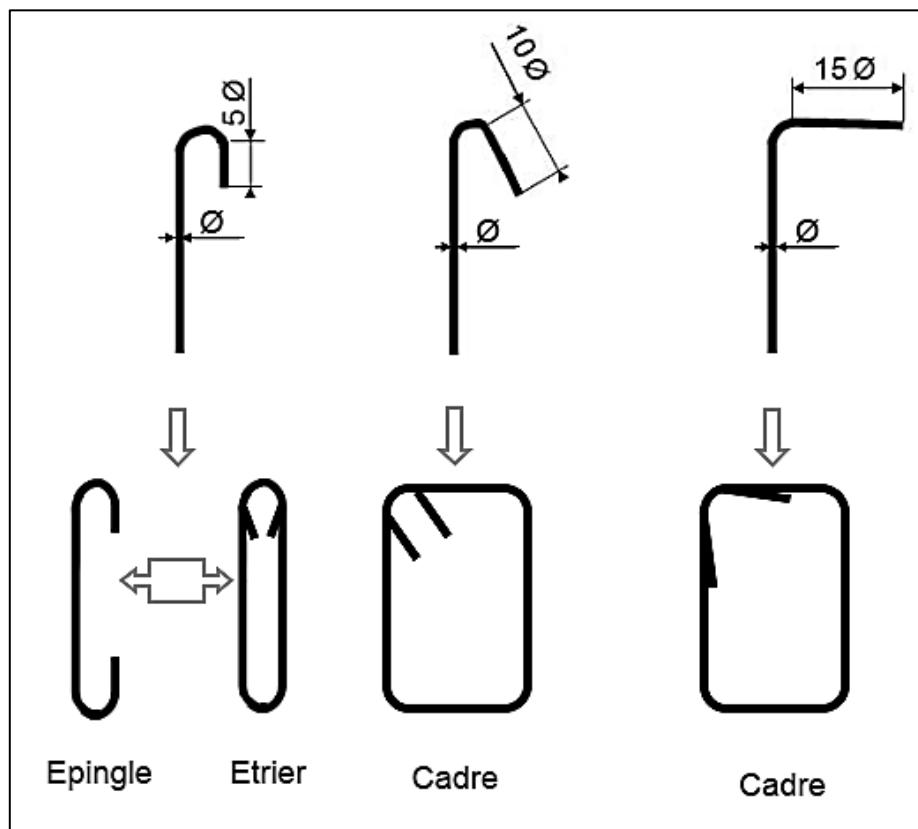


Figure. 6.7 : Ancrage des cadres, étriers et épingle

6.8. Recouvrements des armatures :

Les barres d'acier étant livrées en longueurs standards (généralement ≤ 12 m), les éléments structuraux de grande dimension nécessitent des **jonctions par recouvrement**. Cette technique assure la transmission continue des efforts (traction/compression) entre barres identiques sur une longueur spécifique notée lr.

- **Principe de transfert** : Les efforts se transmettent par :

- **Adhérence acier-béton** le long de l_r .
- **Compression directe béton** (pour barres comprimées).
- **Risque majeur** : Une longueur l_{rlr} insuffisante provoque un arrachement ou un **glissement** des barres (*défaillance fragile*).

6.8.1 Barres rectilignes sans crochets

6.8.1.1 Barres tendues

a) Continuité par recouvrement simple

- **Condition d'espacement** : (Figure 6.8 et Tableau 6.4)

Tableau 6. 4. Recouvrement sans crochet

Cas	Distance entre axes (c)	Longueur l_r
Alignement serré	$c \leq 5\phi$	$l_r = l_s$
Barres écartées	$c > 5\phi$	$l_r = l_s + c$

- **Explication physique :**

- Si $c \leq 5\phi$, les **champs de contraintes** se superposent → efficacité maximale.
- Si $c > 5\phi$, un **effet de levier** apparaît → nécessite une longueur supplémentaire c pour équilibrer les moments.

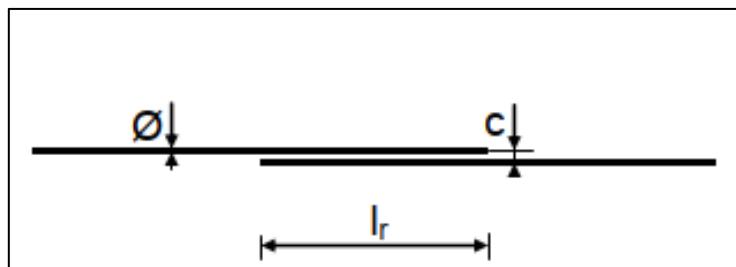


Figure. 6.8 : Simple recouvrement des extrémités des barres sans crochets

Exemple : Barre HA500 Ø16 ($l_s=50\phi=800$ mm) :

- $c = 60$ mm (3.75ϕ) → $l_r=800$ mm
- $c = 100$ mm (6.25ϕ) → $l_r=800+100=900$ mm

b) Recouvrement par couvre-joint

Les barres sont disposées côté à côté *sans contact direct*, créant une **zone de transfert dédoublée** (risque de fissuration réduit) (Figure 6.9).

$$l_r = 2.l_s$$

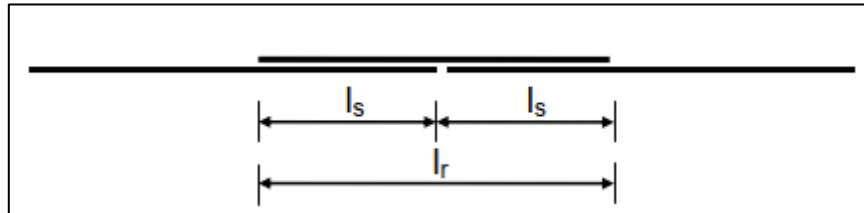


Fig. 5.9 : Recouvrement par couvre-joint

6.8.1.2 Barres comprimées

a) Continuité par recouvrement simple (Figure. 6.1)

- **Formule :** $l_r = 0.6.l_s$
 - La compression génère un frottement latéral accru acier-béton.
 - Le béton participe activement au transfert des efforts → réduction de 40% vs traction.

Valeurs pratiques (BAEL) :

FeE400 $l_r=24\phi$

FeE500 $l_r=30\phi$

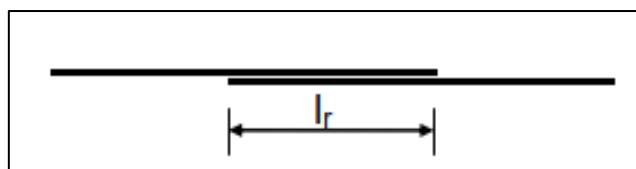


Fig. 5.10 : Simple recouvrement des extrémités des barres comprimées

6.8.1.3 Couture des jonctions (Armatures transversales de recouvrement)

Lorsqu'on réalise un recouvrement de barres parallèles, des contraintes de traction parasites apparaissent perpendiculairement à l'axe des barres. Ces contraintes risquent de provoquer un *éclatement du béton* le long de la jonction. La "couture" désigne les armatures transversales (cadres, étriers) qui confinent la zone et maintiennent l'intégrité de l'assemblage (Figure 6.11).

La résistance totale des armatures de couture doit satisfaire :

$$\sum A_t \cdot f_{et} \geq \sum A_s \cdot f_e$$

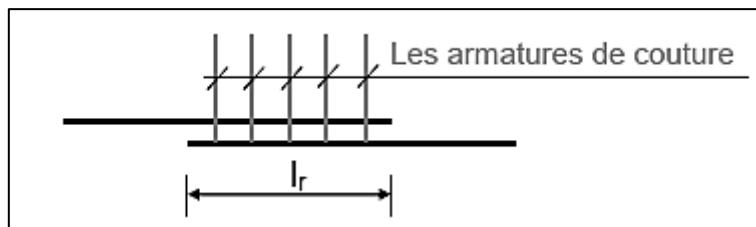


Figure. 6.11 : Couture des joints

Le diamètre des armatures de couture doit être choisi suffisamment petit pour assurer une bonne répartition de ces armatures tout au long de la jonction.

6.8.2 Recouvrement des barres rectilignes avec crochets normaux (BAEL)

Les crochets normaux optimisent l'ancrage et réduisent la longueur de recouvrement grâce à leur **effet mécanique de verrouillage**.

Géométrie du crochet normal (Figure. 6.12)

- **Rayon de courbure** : $r \geq 3\phi$ (ronds lisses) / $r \geq 2\phi$ (acières HA)
- **Retour droit** : $\geq 5\phi$
- **Angle** : $\theta=180^\circ$

Longueurs de recouvrement l_r

- **Ronds lisses** : $l_r = 0.6 l_s$, valeurs pratiques: $l_r = 30 \phi$
- **Acières HA (FeE400)**: $l_r = 0.4 l_s$, valeurs pratiques: $l_r = 16 \phi$
- **Acières HA (FeE500)**: $l_r = 0.4 l_s$, valeurs pratiques: $l_r = 20 \phi$

Explication :

- Réduction de l_r : Le crochet crée un **point d'appui mécanique** dans le béton, diminuant la dépendance à l'adhérence linéaire (-40% vs barres droites).
- Différence aciers lisses/HA : Les barres HA ont une meilleure adhérence → réduction supplémentaire de 33%.

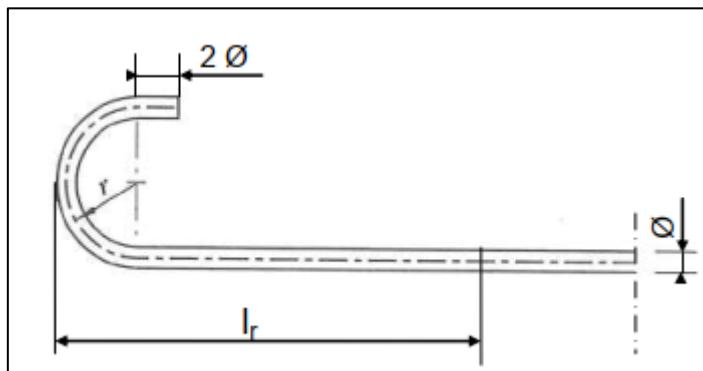


Figure. 6.12 : Façonnage du crochet normal

Exemple

- Barre HA500 Ø16 : $lr=20\times 16=320$ mm
- Rond lisse Ø16 : $lr=30\times 16=480$ mm

La figure 8.13 présente les dispositions constructives pour recouvrements avec crochets normaux.

La disposition des crochets en plan et en élévation est cruciale pour éviter les concentrations de contraintes et assurer un transfert efficace des efforts.

Règles de longueur de recouvrement lr en fonction de l'espacement c (Tableau 6.5)
(c = distance entre axes des barres)

Tableau 6.5. Recouvrements avec crochets normaux.

Condition	Ronds lisses	Aciers HA (FeE400/500)	Explication physique
$c \leq 5\phi$	$lr=0.6$	$lr=0.4ls$	Les barres proches agissent en "groupe cohésif" → transfert direct par adhérence mutuelle
$c > 5\phi$	$lr=0.6ls+c$	$lr=0.4ls+c$	L'espacement crée un effet de levier → nécessite une longueur supplémentaire cc pour équilibrer le moment

Valeurs pratiques :

- **Ronds lisses** : $lr=30\phi$ (si $c \leq 5\phi$)
- **HA FeE400** : $lr=16\phi$

- **HA FeE500** : $lr=20\phi$

Exemple :

Barre HA20 FeE500 ($ls=50\phi$) :

- $c=80 \text{ mm} (4\phi) \rightarrow lr=0.4 \times 50\phi=20\phi=400 \text{ mm}$
- $c=150 \text{ mm} (7.5\phi) \rightarrow lr=400+150=550 \text{ mm}$

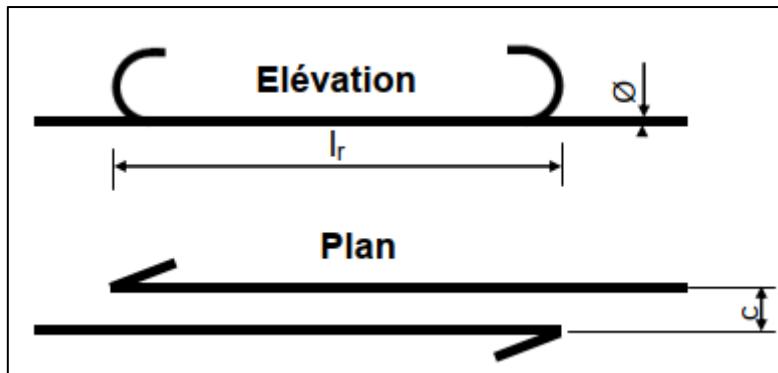


Fig. 6.13 : Jonction de barres tendues avec crochets normaux

6.9. Applications

6.9.1. Exercice 1 :

Une poutre en béton armé (classe C25/30) nécessite l'ancrage de barres d'acier HA FeE500. Les caractéristiques des matériaux sont :

- Béton : $f_{c28}=25 \text{ MPa}$
- Acier : $fe=500 \text{ MPa}$
- Contrainte d'adhérence : $\tau_{su}=0.6 \times ft_{28}$

On demande de :

- Calculer la longueur de scellement droit théorique ls pour une barre de diamètre $\phi=20 \text{ mm}$ en utilisant la formule fondamentale.
- Comparer avec la valeur forfaitaire normative et expliquer l'écart.
- Déterminer ls pour une barre HA FeE400 de même diamètre dans les mêmes conditions.

Solution :

1. Calcul de τ_{su} et ls théorique pour HA FeE500

a) Résistance en traction du béton :

$$f_{t28}=0.6 + 0.06 \times 25 = 2.1 \text{ MPa}$$

b) Contrainte d'adhérence :

$$\tau_{su} = 0.6 \times 2.1 = 1.26 \text{ MPa}$$

c) Longueur de scellement théorique (Eq. 6.7) :

$$l_s = \frac{\phi \cdot f_e}{4\tau_{su}} = \frac{20 \cdot 10^{-3} * 500}{4 * 1.26} = 1.984m = 1984mm$$

d) Expression en diamètres :

$$l_s = \frac{1984}{20} = 99.2\phi$$

2. Comparaison avec la valeur normative

- **Valeur forfaitaire normée** (FeE500) : $50\phi=50 \times 20=1000 \text{ mm}$
- **Écart** : $1984 - 1000 = 984 \text{ mm}$ (soit +98%)

La valeur normative intègre :

- Coefficient de sécurité $\gamma_s=1.15$
- Coefficient de scellement $\psi_s \geq 1.5$
- Marge pour effets défavorables (regroupement de barres, hétérogénéité du béton).

3. Calcul pour HA FeE400 ($\phi=20 \text{ mm}$)

a) Longueur théorique :

$$l_s = \frac{\phi \cdot f_e}{4\tau_{su}} = \frac{20 \cdot 10^{-3} * 400}{4 * 1.26} = 1.587m = 1587mm$$

b) Valeur normative : $40\phi=800 \text{ mm}$

c) Écart : $1587 - 800 = 787 \text{ mm}$ (soit +98%)

4. Vérification de l'équilibre des forces

a) Force de traction maximale (Eq. 6.4) :

$$F_{traction} = \frac{\pi \cdot \phi^2 \cdot f_e}{4} = \frac{\pi \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 500}{4} = 157.08KN$$

b) Force d'adhérence (Eq. 6.5) :

$$F_{adherence} = \pi \phi \cdot l_s \cdot \tau_{su} = \pi \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 1.984 \cdot 1.26 = 157.08 \text{ KN}$$

c) Équilibre :

$$F_{traction} = F_{adherence} = 157.08 \text{ KN C.V}$$

6.9.2. Exercice 2:

Une poutre en béton armé (classe C25/30) est renforcée par une barre d'acier HA FeE500 de diamètre 16 mm. La barre est soumise à un effort de traction axial variable le long de sa longueur. À une distance x de l'extrémité, le gradient d'effort axial mesuré est : $\left(\frac{dF}{dx}\right) = -150 \text{ kN/m}$

Données :

- Béton : $f_{c28}=25 \text{ MPa}$ $f_{t28}=25 \text{ MPa}$
- Coefficient de scellement : $\psi_s=1.5$

On demande de :

1. Calculer la contrainte d'adhérence locale (τ_s) à cette position.
2. Déterminer la contrainte limite d'adhérence (τ_{su}) selon l'Eq. 6.2.
3. Vérifier la sécurité contre le glissement.
4. Calculer la longueur minimale d'ancrage (L_b) pour que la barre puisse développer sa résistance maximale.

Solution :

1. Contrainte d'adhérence locale (τ_s)

Périmètre utile (u) :

$$U = \pi \cdot \varnothing = \pi \times 0.016 = 0.0503 \text{ m}$$

Contrainte d'adhérence (Eq. 5.1) :

$$\tau_s = \frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{u} = \frac{150000}{0.0503} = 2.98 \text{ MPa}$$

Cette valeur de 2.98 MPa représente la force d'adhérence par unité de surface nécessaire pour équilibrer la variation d'effort axial de 150 kN/m sur la barre.

2. Contrainte limite d'adhérence (τ_{su})

Résistance en traction du béton :

$$f_{t28}=0.6+0.06 \times 25=2.1 \text{ MPa}$$

Contrainte limite (Eq. 6.2) :

$$\tau_{su} = 0.6 \cdot \psi_s^2 \cdot f_{tj} = 0.6 \cdot 1.5^2 \cdot 2.1 = 2.835 \text{ MPa}$$

3. Vérification de la sécurité

Comparaison :

$\tau_s = 2.98 \text{ MPa} > \tau_{su} = 2.835 \text{ MPa} \rightarrow$ La contrainte locale (2.98 MPa) dépasse la limite admissible (2.835 MPa) → **Risque de glissement critique**.

Mesures correctives :

- Augmenter la longueur d'ancrage
- Ajouter des armatures transversales pour confiner le béton
- Vérifier la qualité du béton en place

4. Longueur minimale d'ancrage (L_b)

Force maximale dans l'acier :

$$F_{max} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot f_e = \frac{\pi 0.016^2}{4} \cdot 500 \cdot 10^3 = 100.5 \text{ KN}$$

Longueur théorique (Eq. 6.7) :

$$l_s = \frac{\phi \cdot f_e}{4\tau_{su}} = \frac{0.016 \cdot 500}{4 \cdot 2.835} = 0.706 \text{ m} = 706 \text{ mm}$$

Valeur normative forfaitaire :

$$L_{b,norm} = 50 \phi = 50 \times 16 = 800 \text{ mm}$$

Conclusion

- Longueur théorique : 706 mm
- Longueur pratique à mettre en œuvre : **800 mm** (valeur normative, plus sécuritaire compte tenu du dépassement local de τ_{su}).

Références bibliographiques :

1. Granju, J.-L. (2017). Le béton armé selon les règles EC2. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.
2. Thonier, H. (2014). Traité de physique et de technologie du béton armé (3^e éd.). Eyrolles.
3. Eurocode 2 - Calcul des structures en béton - Partie 1-1 : règles générales et règles pour les bâtiments (NF EN 1992-1-1, 2004).
4. Freyssinet, E. (1954). Une révolution dans l'art de bâtir : la précontrainte. Travaux.
5. Histoires des techniques : Bétons et innovations (2012). Presses des Ponts.
6. Taallah. B (2015), Cours Béton Armé 1, Université Mohamed Khider Biskra, Faculté des Sciences et de La Technologie Département de Génie Civil et d'Hydraulique.
7. Soltani M. R, Cours de béton armé Initiation aux Eurocodes, Université de Tébessa
8. Perchat. J, (2006), Eurocode 2. Béton armé - Vérification des états-limites ultimes.
9. Document technique réglementaire DTR-BC.2-41 . règles de conception et de calcul des structures en béton armé CBA93.
10. Perchat. J ; Roux. J (1998), Pratique du B.A.E.L. 91 (Cours avec exercices corrigés), Edition EYROLLES, Deuxième édition,
11. Paillé J. M (2013), Calcul des structures en béton Guide d'application. Eyrolles,
12. Renaud. H ; Lamirault. J (1998), Béton armé : Guide de calcul. Bâtiment et Génie Civil. Edition Foucher.