



N° Réf :.....

Centre Universitaire  
Abd elhafid Boussof Mila

Institut de Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

**Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master**

**En: Mathématiques**

**Spécialité: Mathématiques appliquées**

# Étude de la dynamique chaotique du système de chen

Préparé par :

 Meroua Aziz  
 Saloua Bouadjel

**Soutenue devant le jury**

|                 |     |                                |            |
|-----------------|-----|--------------------------------|------------|
| Meskine Habiba  | MAA | C. U. Abdelhafid Boussof, Mila | Président  |
| Labed Boudjemaa | MAA | C. U. Abdelhafid Boussof, Mila | Rapporteur |
| Mehazzem Allal  | MCB | C. U. Abdelhafid Boussof, Mila | Examineur  |

**Année universitaire: 2023/2024**

---

# REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie Dieu Tout-Puissant qui m'a donné la force, la patience et la détermination pour réaliser ce travail dans les meilleures conditions et de la meilleure manière possible.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et notre appréciation à notre superviseur, Monsieur **Boudjemaa Labed**, pour son aide précieuse dans l'amélioration du contenu de ce mémoire.

Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements aux membres du jury, Examinateur : **Mehazzem allal**. Le président du jury : **Mesquine Habiba**, pour avoir accepté d'examiner ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions constructives.

Je remercie tous les enseignants du département de mathématiques pour leur soutien constant.

Enfin, je voudrais exprimer ma gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Merci infiniment à tous.

---

# DÉDICASSE

Louanges à Allah qui a fait de la connaissance une lumière que nous guidons, je dédie mon diplôme à ceux qui ont attendu ces moments pour se réjouir avec moi, à ceux dont les mains ont travaillé pour me procurer un instant de bonheur, à ceux qui ont récolté les épines pour me protéger et ont pavé le chemin de la connaissance pour moi, à mon cher père **Rabeh**, dont la présence, même lointaine, est un énorme soutien grâce à son grand cœur.

À celle dont les prières étaient le secret de mon succès, à celle qui m'a entouré de ses chants de prière et m'a enseigné la résilience peu importe les circonstances, à ma précieuse mère **Nouara**.

À ceux qui ont sacrifié pour moi, à ceux qui ont été les premiers à me soutenir et à être mes premiers partisans, à mon frère **Fateh** et à mes sœurs **Hanane, Nadjwa, Zineb**.

À mes **grands-mères** décédées, que Dieu ait leur âme.

À celle qui m'a accompagné dans ce voyage, mon amie **Meroua**.

À mes amies de toujours **Amani, Madjeda, Manel**.

À tous ceux qui m'ont soutenu par un mot d'encouragement ou une prière sincère, je vous dédie mon diplôme.

---

# DÉDICASSE

Une page de la vie s'est tournée, une page où l'effort et la persévérance ont toujours été nos compagnons. C'est un moment où nous quittons les études et la fatigue, et le temps de la récolte est venu, où nous récoltons les fruits de notre travail acharné, en disant au revoir aux moments de rires avec les camarades, en levant nos chapeaux en signe de respect pour nos enseignants. Adieu à chaque moment où nous avons porté notre rêve et avancé pour le réaliser. Merci à ceux qui nous ont soutenus et ont partagé notre joie de réussir et de graduer.

À cette occasion, je tiens à dédier ma graduation à celui dont je porte le nom avec fierté et honneur, et qui a consacré son temps et ses efforts pour que j'atteigne ce niveau, mon cher père **Ali**, et à celle qui m'a entouré de ses prières pures et m'a comblé de son immense tendresse, ma chère mère **Rabia**.

À ceux qui sont mon soutien et mon appui, mes chers frères **Walid** et **Choayb**.

Et aux petites fleurs de la maison, mes neveux et nièces **Ghufran, Zaid, Omar Haidar**.

À la compagne de route et de labeur, dans ses bons et mauvais moments, tout au long des cinq années, **Seloua**.

Et à l'institution dont j'ai tiré le savoir, mes honorables professeurs, je vous adresse toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Et à mes camarades de promotion, vous avez tout mon respect et mon estime.



## ملخص

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة نظام تشين، وهو أحد الأنظمة الديناميكية الفوضوية المستمرة. بدأنا بذكر تاريخه والمعادلة المميزة له، وكذلك خصائصه الرياضية. ثم بحثنا عن النقاط الثابتة وإستقرارها بإستخدام الأساليب النظرية و العددية، وأجرينا تحليلا و مناقشة للنتائج المتحصلة. أخيرا، قمنا بدراسة النظام بشكل مفصل.

### الكلمات المفتاحية:

النظام الديناميكي، الفوضى، الإستقرار، سلوك النظام، نظام تشين.

---

# RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous avons étudié le système de Chen, l'un des systèmes dynamiques chaotiques continus. Nous avons commencé par mentionner son historique et son équation caractéristique, ainsi que ses propriétés mathématiques. Ensuite, nous avons examiné les points fixes et leur stabilité en utilisant des méthodes théoriques et numériques, et nous avons mené une analyse et une discussion des résultats obtenus. Enfin, nous avons étudié en détail le comportement du système.

**Les mots clés :**

Systeme dynamique, chaos, stabilité, comportement du système, système de Chen.

---

# ABSTRACT

In this paper, we studied the Chen System, one of the continuous chaotic dynamical Systems. We began by mentioning its history and characteristic equation, as well as its mathematical properties. Then, we examined the fixed points and their stability using theoretical and numerical methods, and conducted an analysis and discussion of the obtained results. Finally, we conducted a detailed study of the system's behavior.

**Keywords :**

Dynamical system, chaos, stability, system behavior, Chen system.

---

# TABLE DES MATIÈRES

|                                                                |          |
|----------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Introduction Générale</b>                                   | <b>1</b> |
| <b>1 Préliminaires sur les systèmes dynamique</b>              | <b>3</b> |
| 1.1 Définition générale . . . . .                              | 3        |
| 1.1.1 Définition du système dynamique . . . . .                | 3        |
| 1.1.2 Systèmes autonomes et non autonomes . . . . .            | 4        |
| 1.1.3 Flot . . . . .                                           | 4        |
| 1.1.4 Systèmes conservatifs et dissipatifs . . . . .           | 5        |
| 1.1.5 Espace des phases . . . . .                              | 5        |
| 1.1.6 Portrait de phase . . . . .                              | 5        |
| 1.2 Propriétés des systèmes dynamiques . . . . .               | 6        |
| 1.2.1 Point d'équilibre . . . . .                              | 6        |
| 1.2.2 Point périodique et P-cycles . . . . .                   | 6        |
| 1.2.3 Solution périodique . . . . .                            | 6        |
| 1.2.4 Trajectoires, orbites et cycles limites . . . . .        | 7        |
| 1.2.5 Classification des cycles limites . . . . .              | 8        |
| 1.2.6 Existence et non-existence des cycles limites . . . . .  | 10       |
| 1.3 Classification des systèmes dynamiques . . . . .           | 11       |
| 1.4 Stabilité de systèmes dynamique à temps continu . . . . .  | 11       |
| 1.4.1 Linéarisation des systèmes dynamique . . . . .           | 11       |
| 1.4.2 Stabilité au sens de Lyapounov à tempe continu . . . . . | 12       |
| 1.4.3 Classification des points d'équilibres . . . . .         | 15       |
| 1.5 Critère de Routh-Hurwitz . . . . .                         | 18       |
| 1.6 Théorie de bifurcation . . . . .                           | 19       |

|          |                                                                  |           |
|----------|------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.6.1    | Bifurcation de noeud-col . . . . .                               | 20        |
| 1.6.2    | Bifurcation de fourche . . . . .                                 | 21        |
| 1.6.3    | Bifurcation de Hopf . . . . .                                    | 23        |
| 1.7      | Diagramme de bifurcations . . . . .                              | 25        |
| <b>2</b> | <b>Théorie Du Chaos</b>                                          | <b>26</b> |
| 2.1      | Histoire de chaos . . . . .                                      | 26        |
| 2.2      | Définition du chaos . . . . .                                    | 26        |
| 2.3      | Définition mathématique du chaos . . . . .                       | 27        |
| 2.4      | Système dynamique chaotiques . . . . .                           | 28        |
| 2.5      | Transitions vers le chaos . . . . .                              | 28        |
| 2.5.1    | Doublément de période . . . . .                                  | 28        |
| 2.5.2    | Intermittence . . . . .                                          | 28        |
| 2.5.3    | Quasi périodicité . . . . .                                      | 28        |
| 2.6      | Propriétés des systèmes chaotiques . . . . .                     | 29        |
| 2.6.1    | Non-linéarité . . . . .                                          | 29        |
| 2.6.2    | Déterminisme . . . . .                                           | 29        |
| 2.6.3    | Sensibilité aux conditions initiales . . . . .                   | 29        |
| 2.6.4    | Aspect aléatoire . . . . .                                       | 29        |
| 2.6.5    | Les attracteurs étrange . . . . .                                | 30        |
| 2.7      | Détection du chaos . . . . .                                     | 30        |
| 2.7.1    | Les exposants de Lyapounov . . . . .                             | 30        |
| 2.7.2    | Dimension fractale . . . . .                                     | 35        |
| 2.8      | Quelques modèles des système chaotique à tempe continu . . . . . | 37        |
| 2.8.1    | Système de Lorenz . . . . .                                      | 37        |
| 2.8.2    | Système de Rössler . . . . .                                     | 38        |
| 2.9      | Domaines d'application du chaos . . . . .                        | 39        |
| <b>3</b> | <b>Étude du Système de Chen</b>                                  | <b>41</b> |
| 3.1      | Système de Chen . . . . .                                        | 41        |
| 3.1.1    | Historique . . . . .                                             | 41        |
| 3.2      | Propriétés dynamiques du système de Chen . . . . .               | 42        |
| 3.2.1    | Quelques propriétés mathématiques . . . . .                      | 42        |
| 3.2.2    | Dissipation et existence de l'attracteur . . . . .               | 42        |
| 3.3      | Les points fixes du système de chen . . . . .                    | 43        |
| 3.3.1    | Stabilité des points fixes . . . . .                             | 44        |
| 3.3.2    | Résultats et discussion . . . . .                                | 47        |

|                      |                                   |           |
|----------------------|-----------------------------------|-----------|
| 3.4                  | Étude numérique . . . . .         | 50        |
| 3.4.1                | Comportement du système . . . . . | 50        |
| 3.4.2                | L'attracteur étrange . . . . .    | 52        |
| <b>conclusion</b>    |                                   | <b>53</b> |
| <b>Bibliographie</b> |                                   | <b>53</b> |

---

# TABLE DES FIGURES

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                            |    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Classification des cycles limites. . . . .                                                                                                                                                                                                                                 | 8  |
| 1.2  | Cycles limite du système (1.7). . . . .                                                                                                                                                                                                                                    | 9  |
| 1.3  | portrait de phases dans cas réel. . . . .                                                                                                                                                                                                                                  | 17 |
| 1.4  | portrait de phases dans cas complexes. . . . .                                                                                                                                                                                                                             | 17 |
| 1.5  | Les portraits de phase pour : <b>(a)</b> $r < 0$ , <b>(b)</b> $r = 0$ ; et <b>(c)</b> $r > 0$ . . . . .                                                                                                                                                                    | 20 |
| 1.6  | Diagramme de Bifurcation nœud-col. . . . .                                                                                                                                                                                                                                 | 21 |
| 1.7  | Diagramme de Bifurcation fourche. . . . .                                                                                                                                                                                                                                  | 22 |
| 1.8  | Diagramme de Bifurcation Hopf. Ce diagramme comporte une dimension supplémentaire $\theta$ . Les flèches représente quelques lignes de force du champs de vecteurs. . . . .                                                                                                | 24 |
| 1.9  | Les diagrammes de plan phase des composantes $(x, y)$ : un foyer devient un cycle limite stable pour $\theta = 1$ et <b>(a)</b> : $r = 0$ ; <b>(b)</b> : $r = 0$ ; <b>(c)</b> : $r = 0.2$ ; <b>(d)</b> : $r = 0.5$ ; <b>(e)</b> : $r = 1$ ; <b>(f)</b> : $r = 2$ . . . . . | 24 |
| 1.10 | Diagramme de bifurcation de Rössler . . . . .                                                                                                                                                                                                                              | 25 |
| 2.1  | Aspect aléatoire du système de Rössler. . . . .                                                                                                                                                                                                                            | 29 |
| 2.2  | Méthode de Wolf pour estimer le plus grand exposant de Lyapounov. . .                                                                                                                                                                                                      | 34 |
| 2.3  | l'attracteur de lorenz. . . . .                                                                                                                                                                                                                                            | 38 |
| 2.4  | l'attracteur de Rössler. . . . .                                                                                                                                                                                                                                           | 39 |
| 3.1  | Analyse de la stabilité du système de Chen au point d'origine $P_1$ selon les conditions $c$ . . . . .                                                                                                                                                                     | 47 |
| 3.2  | Stabilité des points d'équilibre $P_{2,3}$ en fonction des conditions initiales. .                                                                                                                                                                                         | 48 |
| 3.3  | perte de stabilité du système de Chen pour $c > 20$ . . . . .                                                                                                                                                                                                              | 49 |
| 3.4  | Trajectoires pour $c > 28$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                       | 50 |

|     |                                                                          |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.5 | Comportement du système de Chen. . . . .                                 | 51 |
| 3.6 | La projection de l'attracteur de Chen sur les axes $(x, y, z)$ . . . . . | 52 |



---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans le domaine de la physique et des mathématiques, la théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques non linéaires qui, sous certaines conditions, présentent un phénomène appelé chaos. Ce dernier se caractérise par sa sensibilité aux conditions initiales, où de petites variations dans ces conditions peuvent entraîner des résultats totalement différents à long terme. Cette théorie a été étudiée dans plusieurs domaines, notamment l'ingénierie et les mathématiques.

Au fil des décennies, de nombreux chercheurs et scientifiques se sont penchés sur l'étude des systèmes naturels et artificiels, fascinés par les comportements complexes qui semblent simples. Le mathématicien français **Henri Poincaré** a introduit le concept de la théorie du chaos au **XIXe** siècle en observant que certains systèmes, comme le mouvement des planètes ou le pendule double, sont sensibles aux conditions initiales.

Cependant, c'est au **XXe** siècle que la théorie du chaos a pris son envol, grâce à des scientifiques tels qu'**Edward Lorenz**, **Mitchell Feigenbaum** et **Benoît Mandelbrot**, qui ont contribué à sa compréhension et à son application. Ainsi, la compréhension du comportement chaotique des systèmes et leur prédiction ont des implications importantes tant sur le plan scientifique que pratique.

La théorie du chaos est utilisée dans de nombreux domaines tels que la météorologie (prévision météorologique), la dynamique des populations (croissance démographique), la biologie (rythmes cardiaques), la chimie (réactions chimiques), l'économie (marchés financiers), l'astronomie (mouvement des planètes), l'ingénierie (systèmes électroniques), la médecine (étude des maladies) et la psychologie (comportement hu-

---

main), entre autres.

La compréhension du comportement des systèmes chaotiques et leur prédiction ont un impact significatif à la fois sur le plan scientifique et pratique, en nous aidant à prendre des décisions éclairées dans un monde complexe et imprévisible.

Dans ce mémoire, nous avons étudié trois chapitres principaux :

- Dans **le premier chapitre**, nous avons présenté les concepts de base des systèmes dynamiques.
- Dans **le deuxième chapitre**, nous avons abordé la théorie du chaos et ses propriétés.
- Dans **le troisième chapitre**, nous avons étudié les propriétés mathématiques du système de Chen, la recherche des points fixes et leur stabilité, ainsi que l'analyse et la discussion des résultats relatifs au comportement du système.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## PRÉLIMINAIRES SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

### 1.1 Définition générale

#### 1.1.1 Définition du système dynamique

Système des équations différentielles de la forme [4] (cas continu) :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, v), \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n; \quad v \in V \subseteq \mathbb{R}^p. \quad (1.1)$$

Ou des applications (cas discret) :

$$x_{k+1} = f(x_k, v), \quad x_k \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad v \in V \subseteq \mathbb{R}^p; \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Les systèmes (1.1) et (1.2) s'appellent des systèmes dynamiques.  $\mathbb{R}^n$  est l'espace des phases,  $\mathbb{R}^p$  est l'espace des paramètres.

**Exemple 1.1.1.** *L'oscillateur de Duffing :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t, \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $\delta$ ,  $\gamma$  et  $\omega$  sont des paramètres physiques réels. L'espace des phases est  $\mathbb{R}^2$  et l'espace des paramètres est  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemple 1.1.2.** L'application de Hénon :

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2, \\ y_{k+1} = bx_k. \end{cases} \quad (1.4)$$

Où  $a$  et  $b$  sont des paramètres réels. L'espace des phases est  $\mathbb{R}^2$  et l'espace des paramètres est  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.1.2 Systèmes autonomes et non autonomes

### a- Systèmes autonomes

**Définition 1.1.1.** [7]

On dit que le système différentiel est **autonome**, si sa loi d'évolution ne dépend pas du temps (la loi est alors dite stationnaire) :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)). \quad (1.5)$$

**Exemple 1.1.3.** Soit le système autonome suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x, \\ x(t_0) = 1, y(t_0) = 0. \end{cases}$$

### b- Systèmes non autonomes

**Définition 1.1.2.** [7]

On dit que le système différentiel est **non autonome** ; sa loi d'évolution dépend alors du temps :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t). \quad (1.6)$$

**Exemple 1.1.4.** Soit le système non autonome suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + t, \\ x(t_0) = 1, y(t_0) = 0. \end{cases}$$

## 1.1.3 Flot

Considérons un ensemble  $E$  et un groupe additif  $F$  (comme  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ ). Supposons qu'il existe des applications  $f^t$  (où  $t$  appartient à  $F$ ) qui prennent des éléments de  $E$  et

les renvoient dans  $E$ . On appelle le couple  $(E, f^t)$  (où  $t$  appartient à  $F$ ) un "flot" ou un "système dynamique".

L'ensemble  $E$  constitue l'espace des phases de ce flot. Chaque point  $x$  dans cet espace représente un état du système dynamique [16].

### 1.1.4 Systèmes conservatifs et dissipatifs

Un système conservatif est celui qui conserve la somme d'énergie et possède une constante de mouvement, tandis qu'un système dissipatif est celui qui perd de l'énergie et est influencé par la vitesse [16].

**Théorème 1.1.1.** (Théorème de divergence) [16]

soit  $\varphi_t$  un flot, et soit  $V$  un volume dans l'espace des phases au temps  $t = 0$ , où  $V(t) = \varphi_t(V)$  est l'image de  $V$  par  $\varphi_t$ . Nous avons la relation suivante :

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=0} = \int_V \operatorname{div} f dx_1 \dots dx_n \text{ et } \operatorname{div} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Le système est **dissipatif** si :  $\frac{dV}{dt} < 0$ .

Le système est **conservatif** si :  $\frac{dV}{dt} = 0$ .

### 1.1.5 Espace des phases

Étant donnée la possibilité d'implémenter un modèle décrivant l'évolution temporelle d'un système à partir des équations caractéristiques, nous pouvons ainsi construire un ensemble de variables d'état associées à ce système. Un espace mathématique, appelé espace des phases, est assigné à l'ensemble des variables d'état précédemment introduites. Cet espace mathématique est donc multidimensionnel et représente toutes les valeurs possibles que peut prendre la sortie d'un système en fonction de ses paramètres.

### 1.1.6 Portrait de phase

Il s'agit d'une représentation géométrique de la dynamique d'un système. Elle peut être unidimensionnelle, bidimensionnelle, tridimensionnelle, voire même multidimensionnelle. Chaque axe dans le portrait de phase correspond à une variable d'état à un instant donné. L'ensemble des points représentant l'évolution du système génère des trajectoires caractéristiques du systèmes. En utilisant le portrait de phase, nous pouvons identifier l'attracteur correspondant à un système.

## 1.2 Propriétés des systèmes dynamiques

### 1.2.1 Point d'équilibre

**Définition 1.2.1.** Le point  $x^*$  est appelé un point critique ou point d'équilibre du système (1.1) s'il vérifie :

$$f(x^*, t, v) = 0.$$

### 1.2.2 Point périodique et P-cycles

La notion de périodicité est l'une des notions les plus importantes dans le domaine des systèmes dynamiques. Son importance découle du fait que de nombreux phénomènes physiques présentent des schémas qui se répètent. Ces schémas produisent des cycles (ou des cycles périodiques), où un cycle est compris comme l'orbite d'un point périodique. Dans cette section, nous abordons les questions de l'existence et de la stabilité des points périodiques [9].

**Définition 1.2.2.** S'il existe  $k \geq 1$ , tel que  $f^k(x) = x$ , on dit que  $x$  est un point **périodique**, la **période** d'un point périodique  $x$  est le plus petit entier  $k \geq 1$  tel que :

$$f^k(x) = x.$$

Un ensemble  $(x_0; x_1; \dots; x_{p-1})$  forme un cycle d'ordre  $p$  (ou une orbite périodique d'ordre  $p$ , ou encore un **P-cycle**), si :

$$\begin{cases} f(x_j) = x_{j+1}, \text{ pour } j = 0, 1, 2, \dots, p-1 \\ f(x_p) = x_0. \end{cases}$$

**Remarque 1.2.1.** Il n'est pas possible d'avoir un comportement périodique dans les systèmes à une dimension en temps continu [28].

### 1.2.3 Solution périodique

Une solution périodique est définie comme toute solution  $x = \psi(t)$  de l'équation  $\dot{x} = f(x, t, v)$ , pour laquelle il existe un nombre  $T > 0$  tel que  $\psi(t + T) = \psi(t)$ .

**Remarque 1.2.2.** Si la fonction  $\psi(t)$  a une période  $T$ , alors la solution aura également une période  $kT$ , en supposant que  $T$  est la plus petite période. De plus, les points d'équilibre sont considérés comme des solutions périodiques avec une période arbitraire  $T \in \mathbb{R}^+$ .

### **Théorème 1.2.1. [14]**

Soit  $\psi(t)$  une solution du système  $\dot{x} = f(x, t, v)$ , supposons qu'il existe deux instants  $t_1$  et  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ ) tels que  $\psi(t_1) = \psi(t_2)$  (c'est à dire que l'orbite de  $\psi(t)$  se recoupe). Alors,  $\psi(t)$  est une solution périodique définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

## **1.2.4 Trajectoires, orbites et cycles limites**

### **Définition 1.2.3. [20]**

Soit  $\{\varphi_t, t \in \mathbb{R}\}$  un système dynamique à temps continu sur un espace des phases  $\Omega$ , paramètre par l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on note  $U_t$  la partie de  $\Omega$  sur laquelle l'application  $\varphi_t$  est définie. Pour tout point  $x$  de  $\Omega$ , on note  $I_x$  l'ensemble des  $t \in \mathbb{R}$  tels que  $x \in U_t$ , c'est-à-dire tels que  $\varphi_t(x)$  soit défini.

1. On appelle trajectoire d'un point  $x$  de  $\Omega$  l'application, définie sur  $I_x$  et à valeurs dans  $\Omega$ ,  $t \mapsto \varphi_t(x)$ .
2. On appelle orbite d'un point  $x$  de  $\Omega$  la partie  $\{\varphi_t(x), t \in I_x\}$  de l'espace des phases  $\Omega$ .
3. Un élément  $x$  de  $\Omega$  est dit point fixe, ou point d'équilibre du système dynamique si son orbite est  $\{x\}$ .
4. L'orbite d'un point  $x$  de  $\Omega$  est dite périodique si  $x$  n'est pas un point d'équilibre et s'il existe un élément  $T$  de  $I_x$ , vérifiant  $T > 0$  et  $\varphi_T(x) = x$ . On dit alors que  $T$  est une période de l'orbite périodique considérée.

### **Proposition 1.2.1. [20]**

Les hypothèses et notations sont celles des définitions précédentes.

1. L'orbite d'un point  $x$  de  $\Omega$  contient toujours le point  $x$ .
2. Si Les orbites d'un point  $x$  et d'un point  $y$  de  $\Omega$  ont une intersection non vide, elles sont confondues.
3. La propriété "deux points  $x$  et  $y$  de  $\Omega$  appartiennent à la même orbite" est une relation d'équivalence sur  $\Omega$ . La partition de l'espace des phases  $\Omega$  en classes d'équivalence (pour cette relation) est appelée portrait de phases du système dynamique.
4. Soit  $x$  un point de  $\Omega$  dont l'orbite est périodique de période  $T > 0$ . Alors  $I_x = \mathbb{R}$ , et l'orbite de  $x$  est aussi périodique de période  $kT$ , pour tout entier  $k \geq 1$ .

### **Définition 1.2.4. (Cycle limite) [23] :**

Un système  $\dot{x} = f(x)$  possèdent un cycle limite  $C$  s'il existe Un intervalle de temps  $[t_0; t_0 + T[$  et un point de départ  $x_0 \in C$ , tel que en désignant par  $\Phi(t)$  la solution de système avec pour condition initiale  $x(t_0) = x_0 = \Phi(t_0)$  on ait :

- $\Phi(t) \in C, \forall t \in [t_0; t_0 + T[$ .
- $\Phi(T) = x_0$ .

Un cycle limite est une trajectoire fermée solution du système.

### 1.2.5 Classification des cycles limites

**Définition 1.2.5.** [23]

Soit  $C$  un cycle limite :

- **Stable** : toutes les trajectoires dans un voisinage du cycle  $\rightarrow C$ .
- **Instable** : toutes les trajectoires divergent de  $C$ .
- **Semi stable** : certaines trajectoires convergent vers  $C$ .

**Remarque 1.2.3.** Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.

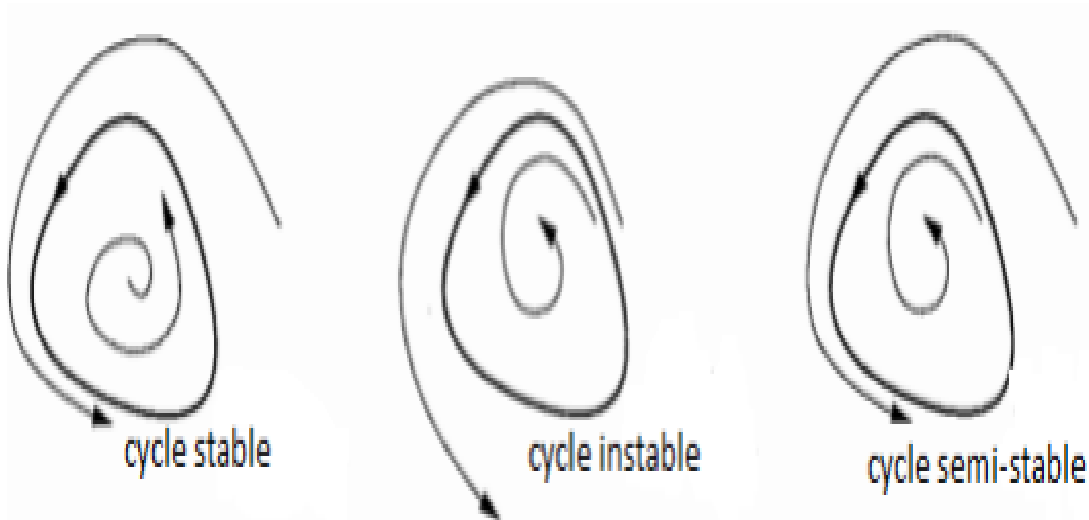


FIGURE 1.1 – Classification des cycles limites.



**Exemple 1.2.1.** Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.7)$$

En coordonnées polaires  $x = r\cos(\theta)$  et  $y = r\sin(\theta)$  avec  $r > 0$ , le système (1.7) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

D'où

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = \pm 1.$$

Comme  $r > 0$ , on n'accepte que la racine positive  $r = 1$ . Donc, pour  $r = 1$  on a la solution périodique

$$(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0)), \text{ avec } \theta(0) = \theta_0.$$

Dans le plan de phase il y a un seul cycle limite d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  et d'amplitude  $r = 1$ .

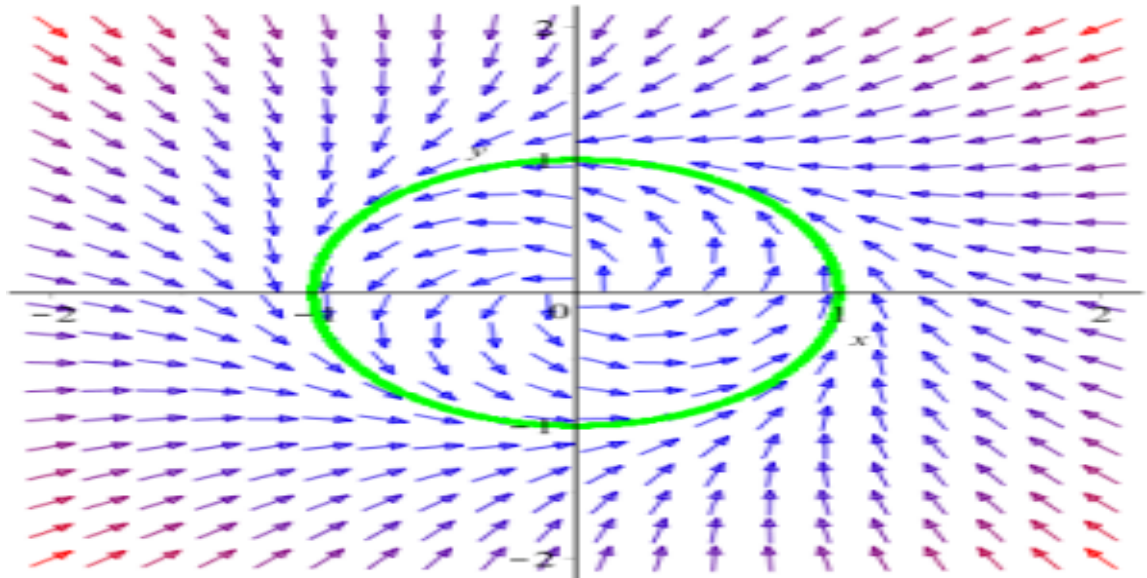


FIGURE 1.2 – Cycles limite du système (1.7).

### 1.2.6 Existence et non-existence des cycles limites

#### Théorème 1.2.2. (Poincaré-Bendixon) [8]

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.8)$$

Supposons que  $P, Q$  sont des fonctions de classe  $C^1$  sur  $E$ , où  $E$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , le système (1.8) a une orbite  $\omega$  telle que l'orbite positive  $\omega_+(p) = \{\psi(p, t), t \geq 0\}$  passant par le point  $p$  est contenue dans un sous ensemble compact  $A$  de  $E$ . Alors on est dans l'un des trois cas suivants :

- Soit  $\omega_+(p)$  tend vers un point d'équilibre.
- Soit  $\omega_+(p)$  tend vers une orbite périodique.
- Soit  $\omega_+(p)$  est une orbite périodique.

Si  $A$  contient de points critiques, alors il existe une orbite périodique du système (1.8).

#### Théorème 1.2.3. (Critère de Bendixon) [19] :

Considérons le système (1.8) et supposons que  $D$  soit un domaine simplement connexe (pas de trous dans  $D$ ).

$$\nabla(P, Q) = \text{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \neq 0.$$

Dans  $D$ . Alors il n'y a pas de cycles limites entièrement contenus dans  $D$ .

**Exemple 1.2.2.** Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 2y^4, \\ \dot{y} = x^2 - y^2 - x^2y^3. \end{cases}$$

Soit  $F = (2xy - 2y^4, x^2 - y^2 - x^2y^3)^T$ . On calcule la divergence du champ de vecteur  $F$ , on obtient

$$\begin{aligned} \text{div}(F) = \nabla(F) &= \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 2y^4) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2 - x^2y^3) \\ &= 2y - 2y - 3x^2y^2 \\ &= -3x^2y^2 < 0. \end{aligned}$$

D'où, d'après le critère de Bendixon ce système n'a aucun cycle limite dans  $\mathbb{R}^2$ .

#### Théorème 1.2.4. (Critère de Dulac) [19] :

Considérez une région annulaire, appelée  $A$ , contenue dans un ensemble ouvert  $E$ . Si :

$$\nabla(P, Q) = \text{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

*Si la fonction ne change pas de signe dans  $A$ , alors il y a au plus un cycle limite entièrement contenu dans  $A$ .*

## 1.3 Classification des systèmes dynamiques

Les systèmes dynamiques peuvent être classés en fonction de leur évolution temporelle. Ainsi, on distingue trois types de systèmes dynamiques :

**Les systèmes stochastiques**, évoluent de manière aléatoire dans tout l'espace, sans être régis par des équations spécifiques. Il n'est pas possible de faire des prévisions exactes sur leur évolution dans le temps.

**Les systèmes déterministes**, sont régis par des lois mathématiques bien connues, ce qui permet de prévoir exactement leur évolution dans le temps.

**Les systèmes chaotiques**, présentent un comportement complexe. Ils sont attirés de manière irrésistible par une structure géométrique également complexe, sur laquelle ils se comportent de manière erratique et aléatoire, sans jamais la quitter ni repasser deux fois par le même point. Ces systèmes semblent suivre à la fois des lois déterministes et des lois aléatoires, ce qui rend toute prévision à long terme impossible. Parmi ces systèmes, on peut retrouver une grande partie des systèmes physiques courants tels que le (calcul des trajectoires, d'un mobile à  $n$  éléments, d'une planète, etc...). Mais on y trouve également l'évolution des populations, la météorologie et bien d'autres domaines.

## 1.4 Stabilité de systèmes dynamique à temps continue

La stabilité d'un système dynamique se réfère au comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier comment sa trajectoire d'état évolue lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre. Il existe plusieurs concepts pour décrire la stabilité des systèmes dynamiques, tels que la stabilité au sens de Lyapounov.

### 1.4.1 Linéarisation des systèmes dynamique

Considérons le système dynamique non linéaire défini par [11] :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (1.9)$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , et  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  et soit  $x^*$  un point d'équilibre de ce système. Supposons qu'une petite perturbation  $\varepsilon(t)$  soit appliquée au voisinage du point d'équilibre  $x^*$ . La fonction  $f$  peut être développée en série de Taylor au voisinage du point  $x^*$  comme suit :

$$\dot{\varepsilon}(t) + \dot{x}^* = f(x^*) + \varepsilon(t) \simeq f(x^*) + J_f(x^*) \cdot \varepsilon(t). \quad (1.10)$$

Où  $J_f(x^*)$  est la matrice Jacobienne de la fonction  $f$  définie par :

$$J_f(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Comme  $f(x^*) = \dot{x}^*$ , alors l'équation (1.10) devient :

$$\dot{\varepsilon}(t) = J_f(x^*) \cdot \varepsilon(t). \quad (1.12)$$

L'écriture (1.12) veut dire que le système (1.9) est linéarisé.

### 1.4.2 Stabilité au sens de Lyapounov à tempe continu

Les équations d'un systèmes non linéaires sont définies par la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0, \text{ condition initiales.} \end{cases} \quad (1.13)$$

Où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue. Nous désignons par  $x^*$  un point d'équilibre de (1.13)  $f(x^*; t) = 0; \forall t \geq t_0$ , et par  $x(t; t_0; x_0)$  la solution à l'instant  $t \geq t_0$  du système (1.13) initialisée en  $x_0$  à l'instant  $t_0$ , et  $f$  une fonction non linéaire.

**Définition 1.4.1. (La stabilité au sens de Lyapounov) [27]**

Le point d'équilibre  $x^* = 0$  est appelé point d'équilibre stable de (1.13) si pour tout  $t_0 > 0$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta(t_0, \varepsilon)$  tel que

$$|x_0| < \delta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow |x(t; t_0; x_0)| < \varepsilon, \forall t > t_0,$$

où  $x(t)$  est la solution de (1.13) à partir de  $x_0$  à  $t_0$ .

**Définition 1.4.2. (La stabilité uniforme) [27]**

Le point d'équilibre  $x^* = 0$  est appelé point d'équilibre uniformément stable de (1.13) si dans la définition précédente.

**Définition 1.4.3. (Attractif) [7]**

Le point d'équilibre  $x^*$  du système (1.13) est **attractif** si :

$$\forall t_0 \in \mathbb{R} : \exists \delta(t_0), \text{ tel que } \|x(t_0) - x^*\| < \delta(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t_0, x(t_0)) = x^*.$$

lorsque ;  $\delta(t_0) = +\infty$  on dit que le point d'équilibre  $x^*$  est globalement attractif.

**Définition 1.4.4. (Stabilité asymptotique) [27]**

Le point d'équilibre  $x^* = 0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable de (1.13) si

- $x^* = 0$  est un point d'équilibre stable de (1.13), et si
- $x^* = 0$  est attractif, c'est-à-dire que pour tout  $t_0 > 0$  il existe un  $\delta(t_0)$  tel que :

$$|x_0| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t; t_0; x_0)| = 0.$$

Une caractéristique intéressante de cette définition est qu'elle nécessite deux conditions distinctes : premièrement, que le point d'équilibre soit stable, et deuxièmement que les trajectoires convergent vers le point d'équilibre lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Bien que cela puisse sembler être le cas de manière superficielle, l'exigence que les trajectoires convergent vers l'origine n'implique pas la stabilité du point d'équilibre.

**Définition 1.4.5. (Instabilité) [27]**

Le point d'équilibre  $x^* = 0$  est appelé point d'équilibre instable s'il n'est pas stable au sens de Lyapounov.

Il y a deux méthodes différentes pour Lyapounov : directe et indirecte. Nous fournirons une définition de chacune avec un exemple pour la compréhension.

**a- Première méthode de Lyapounov (méthode indirecte)**

La méthode indirecte, aussi appelée première méthode de Lyapounov, considère à linéariser le système dynamique autour d'un point fixe  $x^*$  et à tester la stabilité du système.

**Théorème 1.4.1. [7]**

Soit le système non linéaire (1.13), et soient  $\lambda_i, i = 0, 1, \dots, n$ , les valeur propres de la matrice jacobienne de  $f(x)$  au point d'équilibre  $x^*$  du système (1.13) est :

1. Asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne sont de partie réelle strictement négative.

2. Instable (ou répulsif) si la matrice jacobienne admet au moins une valeur propre au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive.
3. On ne peut pas conclure la stabilité locale du point fixe si certaines valeurs propres de la matrice jacobienne sont nuls.

**Exemple 1.4.1.** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x, \\ \dot{y} = x^3 - 2y - xz, \\ \dot{z} = -z + xy. \end{cases}$$

L'origine  $(0,0,0)$  est un point fixe ; et son linéarisation est :

$$Df(0,0,0) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propre  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = -1$ , tout les valeurs négatives d'où le point d'équilibre  $(0,0,0)$  est **asymptotiquement stable**.

#### b- Seconde méthode de Lyapounov (méthode directe)

Dans la méthode directe de Lyapounov, on cherche une fonction scalaire (de type énergétique), que admet une différence négative. Cette fonction est appelée fonction de Lyapounov [7].

**Définition 1.4.6.** Soit le système (1.13), la fonction de Lyapounov est une fonction scalaire  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , continue en  $x(t)$  ; tel que :

1.  $V(0) = 0$ .
2.  $V(x(t)) > 0, \forall x(t) \neq 0$ .
3.  $V(x(t)) \rightarrow +\infty, \text{ si, } \|x(t)\| \rightarrow +\infty$ .

**Théorème 1.4.2.** [7] Le principe de la deuxième méthode de Lyapounov consiste à remplacer l'étude de convergence de  $x(t)$  vers  $x^* = 0$ , c'est-à-dire le point d'équilibre  $x^* = 0$  est asymptotiquement stable s'il existe une fonction de Lyapounov  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que :

$$\dot{V}(x(t), y(t)) < 0, \quad \forall x(t) \neq 0.$$

C'est-à-dire la fonction de Lyapounov est strictement décroissante.

**Exemple 1.4.2.** soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - x^2, \\ \dot{y} = xy - y^3. \end{cases}$$

Nous étudions la stabilité en point d'équilibre  $(0, 0)$  avec une fonction de Lyapounov, supposons

$$V(x, y) = x^2 + y^2,$$

alors

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y}, \\ &= 2x(-x^3 - x^2) + 2y(xy - y^3). \end{aligned}$$

donc

$$\dot{V}(x, y) = -2x^4 - 2xy^2 + 2xy^2 - 2y^4.$$

Alors :

$$\dot{V}(x, y) = -2x^4 - 2y^4 = -2(x^4 + y^4).$$

On a

- $V(x, y) = x^2 + y^2 > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0)$ .
- $V(0, 0) = 0$ .
- $\dot{V}(x, y) = -2(x^4 + y^4) < 0, \forall (x, y) \neq (0, 0)$ .
- $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} V(x, y) = +\infty$ .

Alors  $(0, 0)$  est asymptotiquement stable.

### 1.4.3 Classification des points d'équilibres

#### a. cas des systèmes linéaires

Considérons le système linéaire [11] :

$$\dot{x}(t) = Mx, \tag{1.14}$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $M$  une matrice constante inversible. Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $M$ .

**Définition 1.4.7. 1.** Si les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont réelles et de même signe, la solution  $x = 0$  est appelée **nœud**.

2. Si les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont réelles, non nulles et de signes différents, la solution  $x = 0$  est appelée **selle**.

3. Si les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont complexes avec  $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$ , la

solution  $x = 0$  est appelée **foyer**.

4. Si les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont complexes avec  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , la solution  $x = 0$  est appelée **centre**.

**Exemple 1.4.3.** [14]

Un système linéaire à deux dimensions est un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy. \end{cases}$$

qu'on écrit plus généralement :

$$MX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Où  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est une matrice constante inversible, et  $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de la matrice  $M$  qui sont les racines du polynôme caractéristique suivant.

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + a.d - b.c.$$

**1. Cas réel :**

- (i) Si les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles, non nulles et de signes différents, la solution  $x^* = x_0$  est appelée **un selle** est toujours instable.
- (ii) Si les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles, non nulles et de même signe, la solution  $x^* = x_0$  est appelée **un nœud**. Si de plus :
  - $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  est **un nœud impropre stable**.
  - $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  est **un nœud impropre instable**.
  - Si  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$  on a deux cas :
    - Si  $A$  est diagonalisable, la singularité est **un nœud propre**, il est stable si  $\lambda < 0$  et instable si  $\lambda > 0$ .
    - Si  $A$  est non diagonalisable, la singularité est **un nœud exceptionnel**, il est stable si  $\lambda < 0$  et instable si  $\lambda > 0$ .

**Remarque :**

- **Nœud impropre** si les valeurs propres sont réelles distinctes mais de même signe (nœud attractif si négatives ; nœud répulsif si positives) .
- **Nœud propre** s'il y a une seule valeur propre semi-simple et réelle non-nulle (nœud attractif si négative ; nœud répulsif si positive).
- donne un nœud dit **exceptionnel**, attractif ou répulsif selon le signe la valeur propre



réelle non semi-simple  $\lambda$ . Si  $P$  est une matrice de passage à une base de Jordan :

$$p^{-1}e^{tA}p = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

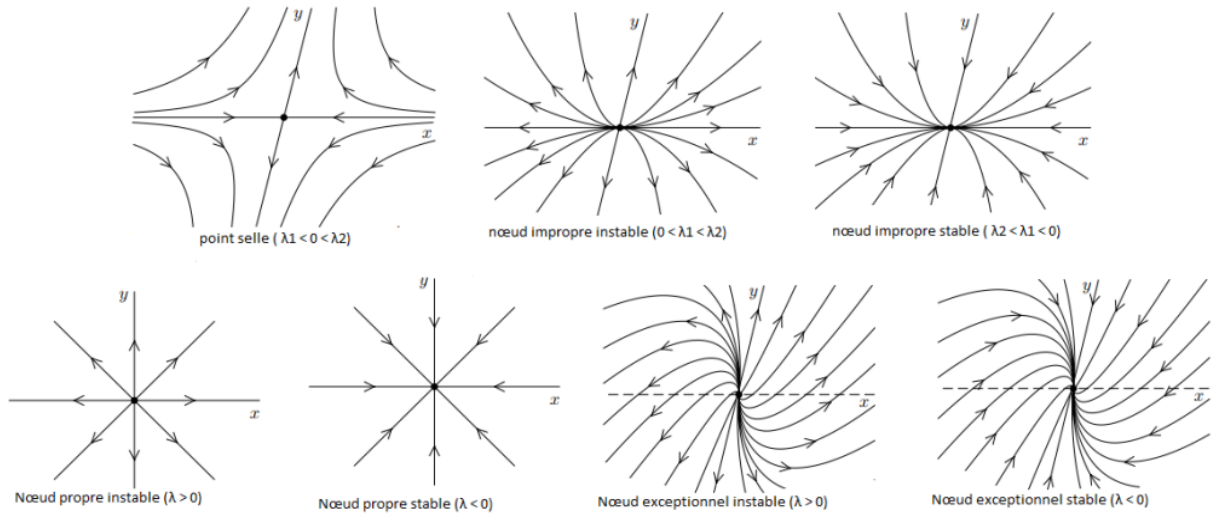


FIGURE 1.3 – portrait de phases dans cas réel.

## 2. Cas complexes :

Si les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont complexes conjuguées

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\beta, \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta. \end{cases}$$

(i) Si  $\alpha \neq 0$  on a :

- $\alpha > 0$  est un **foyer instable**.
- $\alpha < 0$  est un **foyer stable**.

(ii) Si  $\alpha = 0$  : le point critique est **un centre**. Il est stable mais pas asymptotiquement stable.

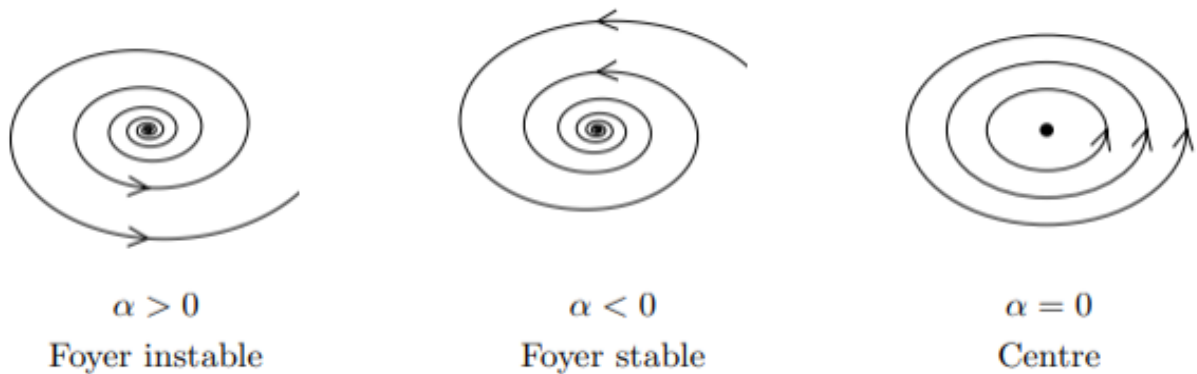


FIGURE 1.4 – portrait de phases dans cas complexes.

## b. cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non linéaire [11] :

$$\dot{x}(t) = f(x). \quad (1.15)$$

**Définition 1.4.8.** Un point critique de  $x^*$  de (1.15) est appelé **puits** si toutes les valeurs propres de la matrice  $M = Df(x^*)$  ont des parties réelles négatives, il est appelé **sources** si toutes les valeurs propres de la matrice  $M = Df(x^*)$  ont des parties réelles positives, il est appelé **selle** s'il est hyperbolique et si  $M = Df(x^*)$  a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive ou au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

**Théorème 1.4.3.** Soit  $\dot{x}(t) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1$ , un système dynamique à temps continu. Si  $x^*$  un point fixe ( $f(x^*) = 0$ ), alors si les valeurs propres de  $Df(x^*)$  sont de partie réelle négative  $x^*$  est stable, et instable si l'une de ces valeurs propres de  $Df(x^*)$  est de partie réelle positive.

## 1.5 Critère de Routh-Hurwitz

Pour démontrer que le point d'équilibre est asymptotiquement stable, il est donc nécessaire de calculer les  $k$  valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice  $M$  et de vérifier que toutes les parties réelles de ces valeurs propres sont inférieures à zéro. Une méthode algébrique a été développée par Roth-Hurwitz, basée sur le calcul de déterminants particuliers appelés déterminants de Routh-Hurwitz.

Supposons le système :

$$\dot{x} = \varphi(x).$$

Son linéarisé si écrit :

$$\dot{x} = Mx.$$

avec  $\det(M) \neq 0$ , l'équation caractéristique si écrit :

$$P(\lambda) = \det(M - \lambda I) = 0 \iff A_0 \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + A_2 \lambda^{n-2} + \dots + A_{n-1} \lambda + A_n = 0.$$

Les déterminants Hurwitz sont donnés par :

$$H_1 = |A_1|, \quad H_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ A_0 & A_2 \end{vmatrix}, \quad H_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$H_i = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 & \cdots \\ A_0 & A_2 & A_4 & \cdots \\ 0 & A_1 & A_3 & \cdots \\ 0 & A_0 & A_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_i \end{vmatrix}.$$

**Proposition 1.5.1.** *le point d'équilibre  $\bar{x}$  est asymptotiquement stable  $\iff \forall \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \iff \forall \operatorname{Re}(H_i) > 0$ .*

**Théorème 1.5.1. (critère de Routh-Hurwitz) [16]**

*soit  $P$  un polynôme tel que  $A_0 > 0$ . Pour que  $P$  soit uniformément asymptotiquement stable (u. a. s), il faut que les déterminants principaux de la matrice de Hurwitz soient strictement positifs.*

## 1.6 Théorie de bifurcation

La bifurcation, en termes simples, désigne un changement structurel dans la trajectoire d'un système. C'est le mathématicien français Henri Poincaré qui a signalé pour la première fois ce phénomène dans ses travaux. L'étude des bifurcations se concentre sur la manière dont les changements structurels se produisent lorsque les paramètres du système varient. Le point où se produit la bifurcation est appelé point de bifurcation. À ces points de bifurcation, le comportement du point fixe ainsi que la nature des trajectoires peuvent subir des changements significatifs. Les caractéristiques de l'attraction et de la répulsion sont généralement altérées lorsqu'une bifurcation se produit. Le diagramme des valeurs des paramètres par rapport aux points fixes du système est appelé diagramme de bifurcation. Dans cette section, nous examinerons des systèmes à un degré de liberté et étudierons successivement trois bifurcations principales [17] :

- Bifurcation de noeud-col (saddle-node) : un point fixe unique  $\iff$  un point fixe nul.
- Bifurcation de fourche (pitchfork) : un point fixe unique  $\iff$  deux points fixes.
- Bifurcation de Hopf (Hopf) : un point fixe unique  $\iff$  un cycle limite.

Dans chaque cas, on va chercher à :

- identifier les points d'équilibre  $x^*$  du système, c'est-à-dire les états tels que le système est invariant ( $\frac{df}{dt} = 0$  en  $x = x^*$ ).
- étudier leur stabilité : comment le système évolue-t-il à partir d'un point fixe si on lui applique une perturbation? [3].

### 1.6.1 Bifurcation de noeud-col

La bifurcation de type selle de cheval est le mécanisme de base par lequel les points fixes sont créés et détruits. Lorsqu'un paramètre est varié, deux points fixes se déplacent l'un vers l'autre, entrent en collision et s'annihilent mutuellement.

L'exemple prototype d'une bifurcation de type selle de cheval est donné par un système du premier ordre.

$$\dot{x} = g(x, r) = r + x^2; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Où  $r$  est un paramètre. Lorsque  $r$  est négatif, il existe deux points fixes, l'un stable et l'autre instable.

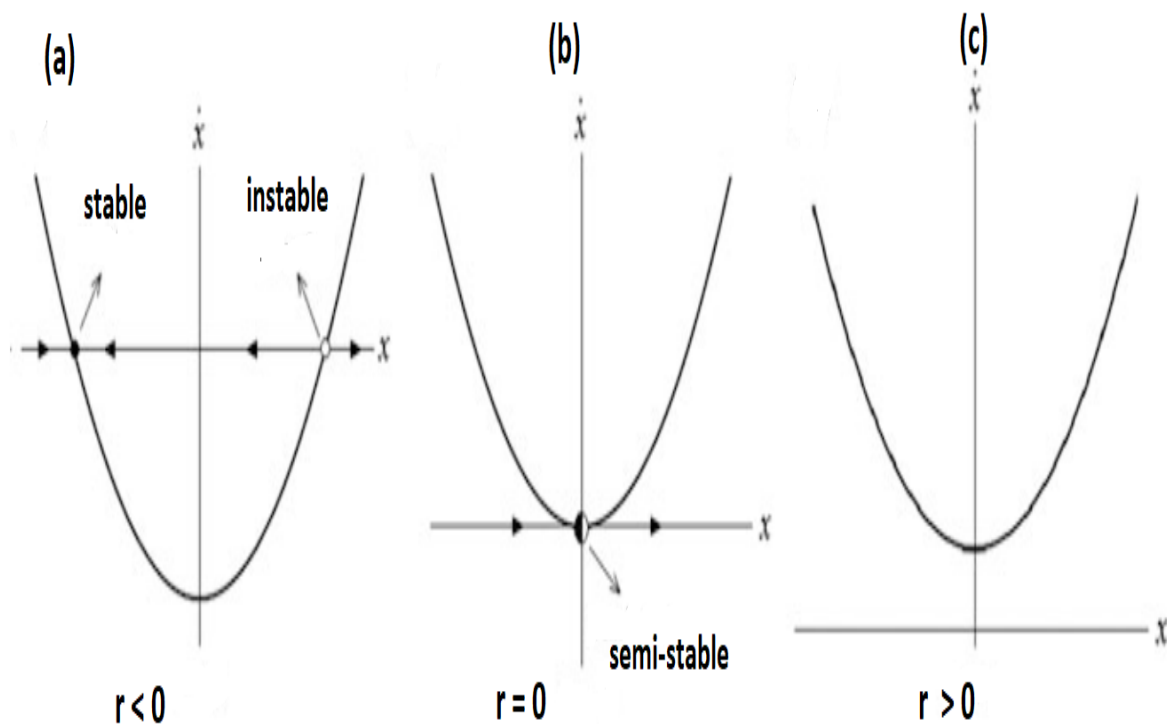


FIGURE 1.5 – Les portraits de phase pour : (a)  $r < 0$ , (b)  $r = 0$ ; et (c)  $r > 0$ .

À mesure que  $r$  approche de 0 par en dessous, la parabole monte et les deux points fixes se rapprochent l'un de l'autre. Lorsque  $r = 0$ , les points fixes fusionnent en un point fixe demi-stable à  $x^* = 0$  (Figure 1.5(b)). Ce type de point fixe est extrêmement délicat-il disparaît dès que  $r \neq 0$ , et maintenant il n'y a plus de points fixes du tout (Figure 1.5(c)). Dans cet exemple, nous disons qu'une bifurcation s'est produite à  $r = 0$ , car les champs vectoriels pour  $r > 0$  et  $r < 0$  sont qualitativement différents[30].

**Remarque 1.6.1.** Même étude faite lorsque  $g(x, r) = -r - x^2$ ,  $g(x, r) = r + x^2$ ,  $g(x, r) = -r + x^2$

Mais dans tous les cas, il y a une transition à  $r = 0$  entre existence d'aucun point fixe et de deux points fixes dont un est stable et l'autre instable.

La Figure (1.6) représente le diagramme de bifurcation du nœud-col (la variation du point d'équilibre en fonction du paramètre pour le cas  $g(x, r) = r + x^2$ ).

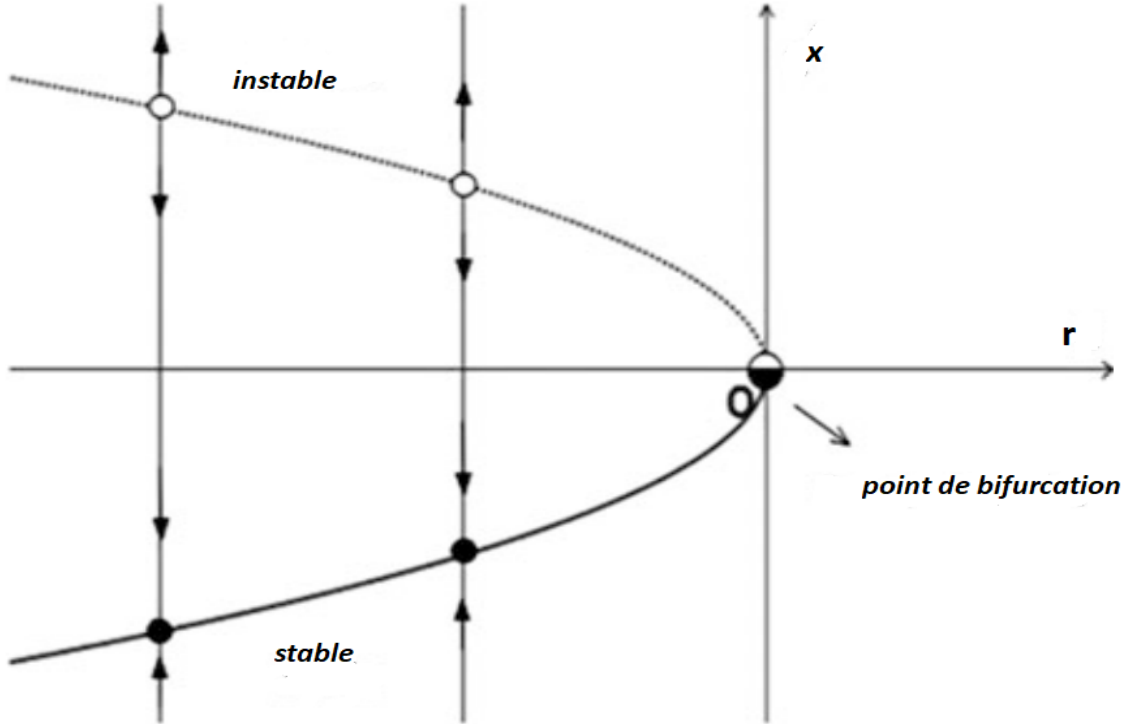


FIGURE 1.6 – Diagramme de Bifurcation nœud-col.

### 1.6.2 Bifurcation de fourche

Si on peut réduire  $g(x, r)$  à un polynôme cubique  $x^*$  ces quatre cas :

$$g(x, r) = rx - x^3, \quad (1.16)$$

$$g(x, r) = rx + x^3, \quad (1.17)$$

$$g(x, r) = -rx + x^3, \quad (1.18)$$

$$g(x, r) = -rx - x^3. \quad (1.19)$$

L'équation (1.16) s'appelle la forme normale d'une bifurcation fourche super critique. Nous calculons les points fixes :

$$x(r - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0 \text{ pour tout } r, \\ x^* = \pm \sqrt{r} \text{ pour } r > 0. \end{cases}$$

Nous étudions la stabilité de ces points fixes :

$$g'(x^*) = r - 3(x^*)^2 \Rightarrow \begin{cases} r \text{ pour } x^* = 0, \\ r - 3r = -2r \text{ pour } x^* = \pm \sqrt{r}. \end{cases}$$

Le point fixe  $x^* = 0$  est donc stable pour  $r < 0$ , et devient instable à  $r = 0$  quand les branches de nouveaux points fixes  $x^* = \pm \sqrt{r}$  sont créées. Ces nouveaux points fixes sont toujours stables quand ils existent. Faisons le même calcul pour (1.17) qui est la forme normale d'une bifurcation fourche sous critique.

$$x(r + x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0 \text{ pour tout } r, \\ x^* = \pm \sqrt{-r} \text{ pour } r < 0, \end{cases}$$

$$g'(x^*) = r + 3(x^*)^2 \Rightarrow \begin{cases} r \text{ pour } x^* = 0, \\ r + 3(-r) = -2r \text{ pour } x^* = \pm \sqrt{r}. \end{cases}$$

Comme pour le cas super critique, le point fixe  $x^* = 0$  est stable pour  $r < 0$  et devient instable à  $r = 0$ . Mais contrairement au cas super critique, les autres points fixes  $\pm \sqrt{r}$  existent dans la région où  $\pm \sqrt{r} = 0$  est stable, et sont toujours instables Fig(1.7) [11].

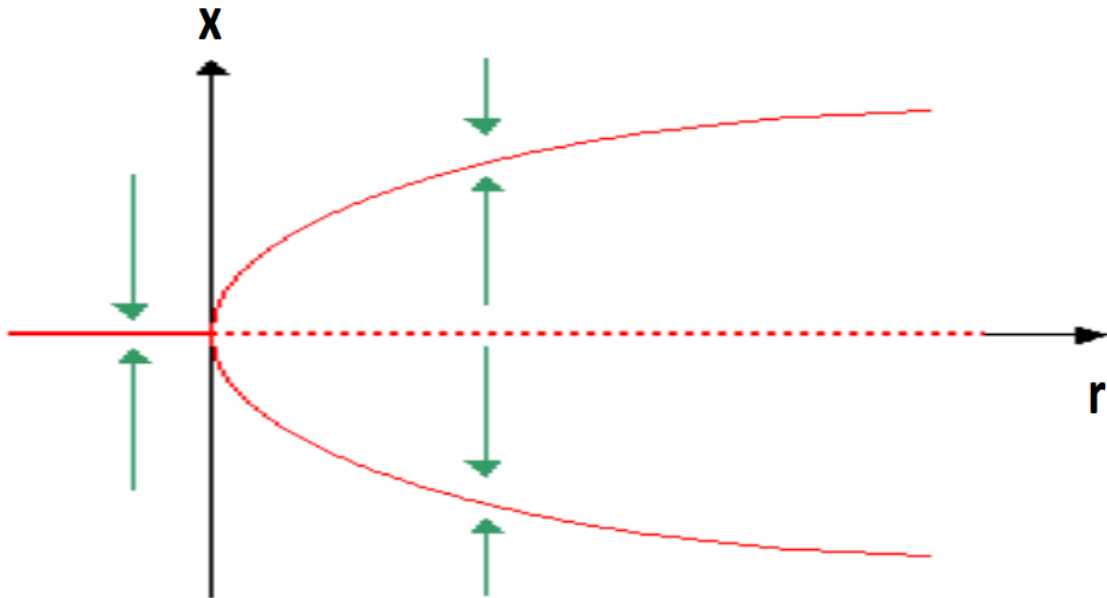


FIGURE 1.7 – Diagramme de Bifurcation fourche.

### 1.6.3 Bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf survient lorsque le paramètre de bifurcation atteint une valeur critique  $r_0$ , à laquelle la matrice jacobienne du système a une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe imaginaire. Cela signifie qu'au point de bifurcation de Hopf, la partie réelle des valeurs propres s'annule, entraînant un changement dans le type de stabilité de l'équilibre existant. De plus, à ce stade, un cycle limite se forme (voir la Figure 1.8) avec une fréquence angulaire correspondant à la partie imaginaire des valeurs propres. Le déterminant de la matrice jacobienne reste de même signe après la bifurcation. Alors que toutes les bifurcations que nous avons décrites sont stationnaires, la bifurcation de Hopf donne naissance à des solutions oscillantes. L'espace des phases a désormais deux composantes, et la forme normale est exprimée dans le plan complexe

$$\dot{z} = (r + i\theta)z - |z|^2 z, \quad (1.20)$$

l'est remarquable que cette forme normale est l'équivalent complexe des bifurcations en fourche. Pour mettre en évidence ses solutions, il est pratique de passer en variables réelles en utilisant un repère soit cartésien, soit polaire. En posant par exemple  $z = x + iy$ , la forme normale peut être réécrite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = [r - (x^2 + y^2)]x - \theta y, \\ \dot{y} = \theta x + [r - (x^2 + y^2)]y. \end{cases} \quad (1.21)$$

Outre la solution stationnaire  $z = 0$  (soit  $x = y = 0$ ) il existe une autre solution telle que  $|z|^2$  soit indépendant du temps, soit :

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = r.$$

Cette condition définit l'équation d'un cercle dans le plan  $(x, y)$ , de rayon égale égale à  $\sqrt{r}$  (voir La Figure 1.9).

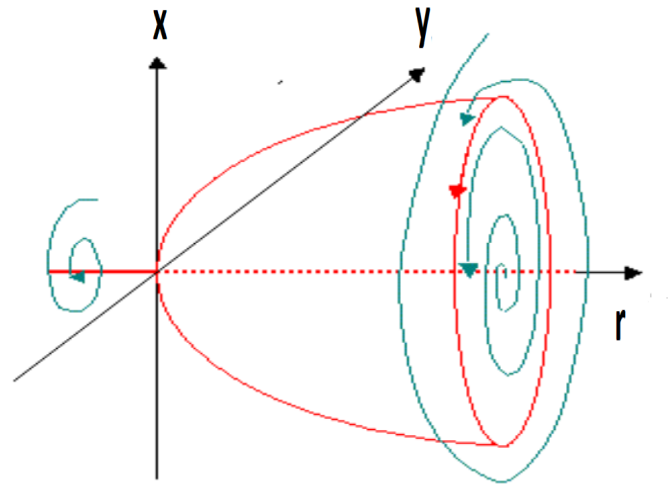


FIGURE 1.8 – Diagramme de Bifurcation Hopf. Ce diagramme comporte une dimension supplémentaire  $\theta$ . Les flèches représente quelques lignes de force du champs de vecteurs.

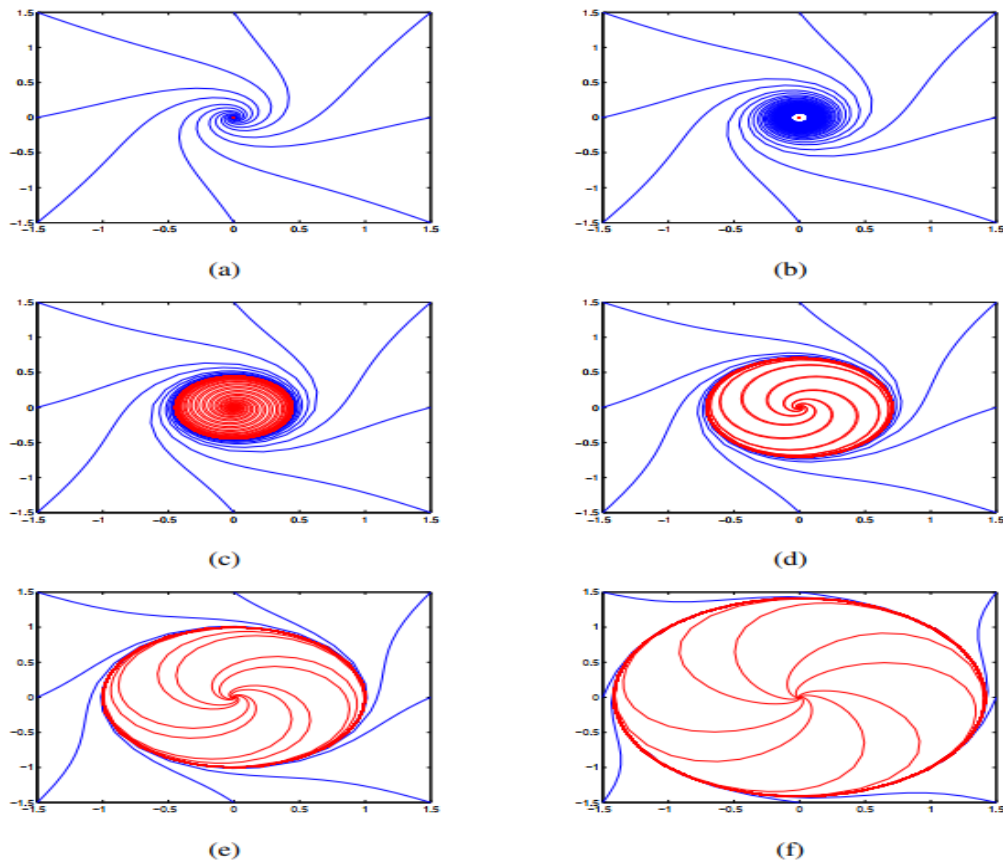


FIGURE 1.9 – Les diagrammes de plan phase des composantes  $(x, y)$  : un foyer devient un cycle limite stable pour  $\theta = 1$  et (a) :  $r = 0$ ; (b) :  $r = 0$ ; (c) :  $r = 0.2$ ; (d) :  $r = 0.5$ ; (e) :  $r = 1$ ; (f) :  $r = 2$ .



## 1.7 Diagramme de bifurcations

Le diagramme de bifurcation est un outil utilisé pour analyser un système et présenter une gamme de solutions possibles en fonction des variations d'un de ses paramètres. Ce diagramme affiche les différentes valeurs du paramètre sur l'axe horizontal et des valeurs spécifiques des variables sur l'axe vertical. Le diagramme de bifurcation peut aider à identifier les valeurs qui entraînent des changements significatifs dans le comportement final du système, y compris la transition vers des états chaotiques.

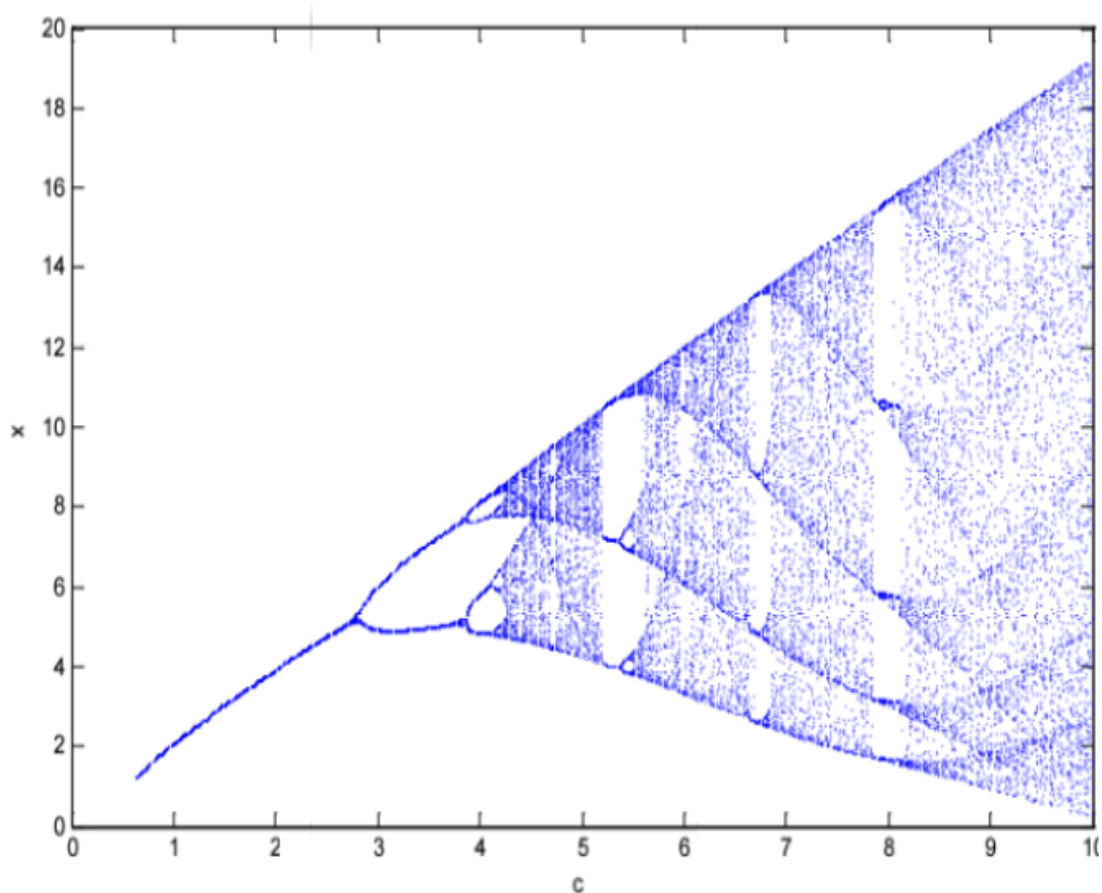


FIGURE 1.10 – Diagramme de bifurcation de Rössler .

---

---

## CHAPITRE 2

---

# THÉORIE DU CHAOS

### 2.1 Histoire de chaos

- 1890 Le Roi Oscar II de Suède octroie un prix au premier chercheur qui pourrait déterminer et résoudre le problème des  $n$ -corps des orbites des corps célestes et ainsi prouver la stabilité du système solaire. Jusqu'à ce jour, le problème n'a pas été résolu.
- 1890 Henri Poincaré gagne le premier prix du Roi Oscar II. Étant le plus proche à résoudre le problème de  $n$ -corps, il a découvert que l'orbite de trois corps célestes agissantes l'une sur l'autre peut engendrer un comportement instable et imprévisible. Ainsi, le chaos est né (mais pas encore mentionné!).
- 1963 Edward Lorenz découvre le premier système chaotique dans la météo ou encore appelé attracteur étrange.
- 1975 Tien-Yien Li et James A. Yorke ont présenté pour la première fois le terme "chaos" dans un article intitulé "Period three implies chaos".
- 1978 Mitchell Feigenbaum introduit un nombre universel associé au chaos.
- 1990 Edward Ott, Celso Grebogi et James A. Yorke. Introduisent la notion de contrôle du chaos.
- 1990 Lou Pecora. Synchronisation des systèmes chaotiques.

### 2.2 Définition du chaos

Un système chaotique est un système déterministe non linéaire possédant un attracteur sensible aux conditions initiales. L'attracteur d'un système est défini comme

le sous-ensemble de points vers lequel convergent toutes les trajectoires de ce système. Les attracteurs les plus connus sont le point fixe, le cycle limite et le tore. Ces attracteurs sont décrits périodiquement par les trajectoires représentatives du système étudié. Le comportement de ces systèmes est prévisible : connaissant l'état initial, il est possible de prédire les états futurs. Même si cette connaissance comporte une marge d'erreur, celle-ci reste du même ordre de grandeur pour toute détermination future. En d'autres termes, deux trajectoires initialement voisines le resteront toujours au cours du temps. Cette propriété a pour conséquence que de tels attracteurs ne peuvent correspondre aux attracteurs de systèmes chaotiques [22].

**Définition [22] :**

Une application  $f$  est dite chaotique sur un ensemble invariant  $A$ , appelé attracteur, si :

- $f$  est transitive sur  $A$ , c'est-à-dire si l'orbite  $\{x, f(x), \dots, f^t(x)\}$  est dense dans  $A$ . En d'autres termes, l'attracteur n'est pas décomposable.
- Les points périodiques, s'il en existe, sont denses sur  $A$ .
- $f$  exhibe de la sensibilité aux conditions initiales sur  $A$ .

## 2.3 Définition mathématique du chaos

Il existe plusieurs définitions possibles du chaos, allant de la théorie ergodique, à l'approche topologique. Nous choisirons cette dernière car elle a le mérite de mettre en exergue trois concepts véritablement clés dans un comportement chaotique : imprédictibilité, irréductibilité et un élément de régularité. L'évolution de système dynamique est imprédictible en ce sens qu'elle est sensible aux conditions initiales. Il est en particulier clair que la moindre erreur ou simple imprécision sur la condition initiale interdit de décider à tout temps quelle sera la trajectoire effectivement suivie et, en conséquence, de faire une prédiction autre que statistique sur le devenir à long terme du système. Ainsi, bien que l'on traite de systèmes déterministes, il est impossible de prévoir à long terme leurs comportements s'ils sont chaotiques. La seule manière est d'opérer effectivement l'évolution du système. Si cette simulation se fait numériquement, un problème de précision sur les conditions initiales se pose alors de petites erreurs d'arrondis dues à la précision du type de la variable codant ces conditions initiales peuvent exponentiellement s'amplifier de telle sorte que la trajectoire de phases obtenue n'est pas représentative de la réalité [7].

## 2.4 Système dynamique chaotiques

**Définition 2.4.1.** *Le chaos est couramment défini comme un comportement spécifique d'un système dynamique déterministe et non linéaire.*

## 2.5 Transitions vers le chaos

Plusieurs scénarios existent pour décrire l'évolution vers le chaos. Dans tous les cas, l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas continue, mais caractérisée par des changements brusques appelés bifurcations. Trois scénarios de transition d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique peuvent être identifiés lors de la modification d'un paramètre.

### 2.5.1 Doublement de période

Dans les années 60, R. May a observé ce scénario en dynamique des populations en utilisant l'application logistique. Ce schéma est marqué par une série de bifurcations en fourche. à mesure que la contrainte augmente, la période d'un système sous contrainte est doublée, puis quadruplée, et ainsi de suite. Ces doublages de périodes se rapprochent de plus en plus les uns des autres. Lorsque la période devient infinie, le système devient chaotique [15] [13].

### 2.5.2 Intermittence

L'intermittence vers la chaos se manifeste par un mouvement régulier ponctué de périodes chaotiques, avant que le régime ne redevienne régulier à nouveau, et ainsi de suite. L'apparition de ces périodes chaotiques se fait de manière aléatoire dans le temps. L'augmentation d'un paramètre entraîne une augmentation de la fréquence des perturbations, puis les périodes chaotiques deviennent rares et distantes, jusqu'à ce que finalement le chaos prédomine dans le comportement du système.

### 2.5.3 Quasi périodicité

Ce modèle de quasi-périodicité a été identifié grâce aux travaux théoriques de Ruelle et Takens. Dans un système dynamique qui présente un comportement périodique à une fréquence unique, une modification d'un paramètre entraîne l'apparition d'une seconde fréquence. Si le rapport entre ces deux fréquences est rationnel, le comportement demeure périodique [25].

## 2.6 Propriétés des systèmes chaotiques

### 2.6.1 Non-linéarité

Un système chaotique est un système dynamique qui n'est pas linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique.

### 2.6.2 Déterminisme

Le déterminisme implique la capacité de "prédire" le futur d'un phénomène à partir d'un événement passé ou présent. L'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est causée par ses non-linéarités. Dans les phénomènes aléatoires, il est absolument impossible de prédire la trajectoire d'une quelconque particule. En revanche, un système chaotique obéit à des règles fondamentalement déterministes et non probabilistes.

### 2.6.3 Sensibilité aux conditions initiales

Les systèmes chaotiques se caractérisent par une sensibilité extrême aux perturbations. Cette sensibilité a été observée pour la première fois par Edward Lorenz, qui la illustrée par ce qu'on appelle l'effet papillon.

### 2.6.4 Aspect aléatoire

Chaque état d'un système chaotique présente des caractéristiques aléatoires. La figure suivante met en évidence l'aspect aléatoire du système de Rössler.

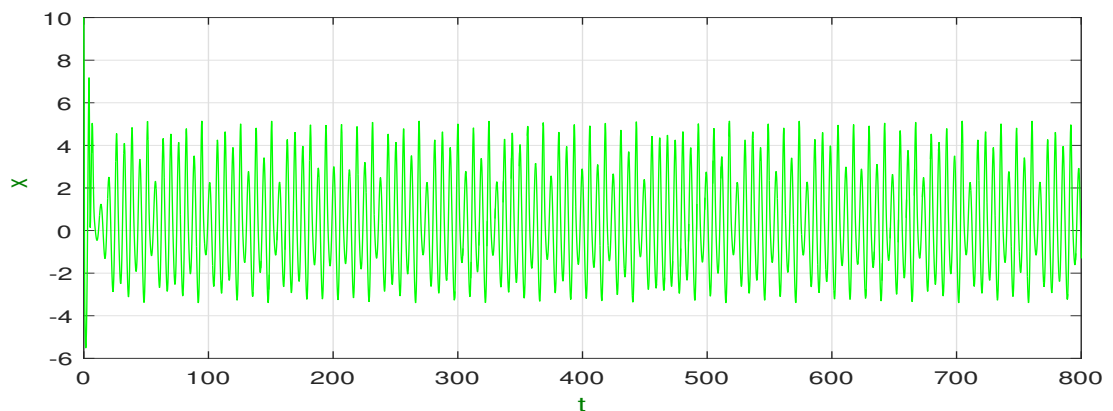


FIGURE 2.1 – Aspect aléatoire du système de Rössler.

### 2.6.5 Les attracteurs étrange

une "définition" d'un attracteur étrange peut être formulée ainsi : un sous-ensemble borné  $A$  de l'espace est un attracteur étrange pour une transformation  $T$  de l'espace s'il existe un voisinage  $\mathbb{R}$  de  $A$  vérifiant les propriétés suivantes :

- Attraction

$\mathbb{R}$  est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par  $T$  dont le point initial est dans  $\mathbb{R}$  est entièrement contenue dans  $\mathbb{R}$ . De plus, toute orbite devient et rest aussi proche de  $A$  que l'on veut.

- Sensibilité

Les orbites dont le point initiales est dans  $\mathbb{R}$  sont extrêmement sensible aux conditions initiales.

- Fractal

$A$  est un objet fractal.

- Mélange

pour tout point de  $A$ , il existe des orbites démarrées dans  $\mathbb{R}$  qui passent aussi près que l'on veut de ce point [5].

## 2.7 Détection du chaos

Plusieurs méthodes sont disponibles pour déterminer si des systèmes non linéaires sont chaotiques ou non. Ces méthodes ne sont généralement pas très nombreuses et ne couvrent pas une période suffisamment longue à l'échelle du système étudié. Nous avons choisi d'utiliser deux des méthodes les plus couramment employées : **la dimension fractale et les exposants de Lyapounov**.

### 2.7.1 Les exposants de Lyapounov

Comprendre l'évolution chaotique est complexe, car la divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide. Lorsque cette divergence augmente de manière exponentielle avec le temps pour la plupart des conditions initiales proches d'un point donné, on observe le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. C'est une idée à laquelle sont associés les exposants de Lyapounov, qui offrent une mesure quantitative de cette divergence exponentielle locale et évaluent le degré de sensibilité d'un système dynamique. Commençons par rappeler cette formule et examinons comment Lyapounov a

pu en déduire une telle expression.

$$\lambda = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln |L'(t_{k-1})|.$$

Prenons un système dynamique donné avec une condition initiale  $x_0$  par une erreur infinitésimale  $E_0$ . Après  $m$  itérations, l'erreur initiale  $E_0$  sera multipliée par un facteur  $\frac{E_m}{E_0}$ .

Si le facteur  $E$  est inférieur à 1, l'erreur diminue ; s'il est supérieur à 1, elle augmente.

En utilisant la relation

$$\left| \frac{E_m}{E_0} \right| = \left| \frac{E_m}{E_{m-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{m-1}}{E_{m-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{m-2}}{E_{m-3}} \right| \cdots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right|,$$

il suffit de calculer ce produit pour déterminer comment l'erreur initiale  $E_0$  s'amplifie.

Lorsqu'on prend le logarithme d'un produit, cela équivaut à la somme des logarithmes des facteurs. Utilisons cette propriété du logarithme du produit pour approfondir cette étude.

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{E_m}{E_0} \right| &= \ln \left( \left| \frac{E_m}{E_{m-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{m-1}}{E_{m-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{m-2}}{E_{m-3}} \right| \cdots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \right) \\ &= \ln \left| \frac{E_m}{E_{m-1}} \right| + \ln \left| \frac{E_{m-1}}{E_{m-2}} \right| + \ln \left| \frac{E_{m-2}}{E_{m-3}} \right| + \cdots + \ln \left| \frac{E_2}{E_1} \right| + \ln \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \\ &= \sum_{k=1}^m \ln \left| \frac{E_k}{E_{k-1}} \right|. \end{aligned}$$

Avant de laisser cette quantité tendre vers l'infini, on détermine d'abord la moyenne de la somme obtenue, ce qui nous permet d'obtenir l'exposant de Lyapounov.

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \left( \sum_{k=1}^m \ln \left| \frac{E_k}{E_{k-1}} \right| \right).$$

Si  $E_k$  et  $E_{k-1}$  sont des valeurs très petites, le rapport correspond à la dérivée de la fonction associée à l'équation utilisée, à condition que la fonction soit naturellement dérivable. En effet,  $L(t_k)$  soit cette fonction :

$$E_k = L(t_{k-1} + E_{k-1}) - L(t_{k-1}),$$

et

$$\frac{E_k}{E_{k-1}} = \frac{L(t_{k-1} + E_{k-1}) - L(t_{k-1})}{E_{k-1}},$$

puisque :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{L(t + \Delta x) - L(t)}{\Delta x} = L'(t),$$

alors, si  $L$  est dérivable on a :

$$\frac{E_k}{E_{k-1}} = \frac{L(t_{k-1} + E_{k-1}) - L(t_{k-1})}{E_{k-1}} = L'(t_{k-1}) \text{ lorsque } E_{k-1} \rightarrow 0,$$

par conséquent :

$$\lambda = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln |L'(t_{k-1})|.$$

Lorsque l'exposant de Lyapounov est positif :

$$\ln \left| \frac{E_m}{E_0} \right| > 0,$$

et par conséquent :

$$\left| \frac{E_m}{E_0} \right| > 1.$$

**Remarque 2.7.1.** - Les exposants de Lyapounov sont une extension des valeurs propres pour le point fixe et des coefficients caractéristiques pour les solutions périodique.

- Dans le cas d'un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapounov sont tous inférieurs ou égaux à zéro, avec une somme globalement négative. Un attracteur étrange possède toujours au moins trois exposants de Lyapounov, dont au moins un est positif (Voir le tableau 2.1).

## A. Classification des orbites suivant le signe de l'exposant de Lyapounov

En général, on peut classer les orbites en trois catégories selon le signe de l'exposant de Lyapounov :

- 1- Si  $\lambda < 0$ , l'orbite est attirée vers un point fixe ou vers une orbite périodique stable, ce qui caractérise les systèmes dissipatifs. Ce genre de système présente une stabilité asymptotique : plus l'exposant est négatif, plus la stabilité est forte. Les points fixe et les points périodiques très stables ont un exposant de Lyapounov qui tend vers  $-\infty$ .
- 2- Si  $\lambda = 0$ , l'orbite correspond à un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est qualifié de conservatif. Dans ce cas, les orbites maintiennent une distance constante entre elles.



3- si  $\lambda > 0$ , l'orbite est instable et chaotique. Tous les points adjacents doivent être visités ; ces points sont qualifiés d'instables. Dans un système discret, on obtient un ensemble de points sans aucune relation liée. Dans un système continu, l'espace de phase est constitué d'un ensemble de lignes entrecroisées.

| Etat stable         | Flot      | Dimension de Lyapounov | Exposants de Lyapounov                                                                     |
|---------------------|-----------|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| Point d'équilibre   | point     | 0                      | $\lambda_m < \dots < \lambda_1 < 0$                                                        |
| Périodique          | cercle    | 1                      | $\lambda_1 = 0$<br>$\lambda_m < \dots < \lambda_2 < 0$                                     |
| Période d'ordre 2   | tore      | 2                      | $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$<br>$\lambda_m < \dots < \lambda_3 < 0$                         |
| Période d'ordre $j$ | $j$ -tore | $j$                    | $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_j = 0$<br>$\lambda_m < \dots < \lambda_{j+1} < 0$ |
| Chaotique           |           | Non entier             | $\lambda_1 > 0$<br>$\sum_{k=1}^m \lambda_k < 0$                                            |
| Hyperchaotique      |           | Non entier             | $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$<br>$\sum_{k=1}^m \lambda_k < 0$                             |

TABLE 2.1 – Classification des régimes permanents selon les exposants de Lyapounov.

## B. Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapounov

Un exposant de Lyapounov positif signifie que dans la direction qu'il représente, la divergence entre deux trajectoires voisines augmente de manière exponentielle avec le temps. Cela indique clairement qu'il s'agit d'un attracteur étrange.

Pour une application bidimensionnelle, la relation entre le type de l'attracteur et le signe des exposants de Lyapounov (qui sont ici au nombre de deux) peut être résumée dans le tableau (2.2)

| Type d'attracteur             | Signe des exposants de Lyapounov |
|-------------------------------|----------------------------------|
| Point fixe                    | $- , - , -$                      |
| Cycle limite périodique       | $0 , - , -$                      |
| Cycle limite quasi périodique | $0 , 0 , -$                      |
| Attracteur étrange            | $+ , 0 , -$                      |

TABLE 2.2 – Caractérisation des attracteurs par le signe des exposants de Lyapounov.

### C. Exposant de Lyapounov pour un système à temps continu

Il existe divers algorithmes permettant d'estimer le plus grand exposant de Lyapounov à partir de l'observation d'une série temporelle : Eckmann et al. [1986], Sano et Sawada [1985], Wolf, Swift, Swinney et Vastano [1985]. Nous avons ici choisi d'appliquer l'algorithme élaboré par Wolf et al. [1985] dont une représentation schématique est reproduite sur la Figure (2.2) :

On choisit tout d'abord un point initial (à la date  $t_0$ ) sur une orbite quelconque de

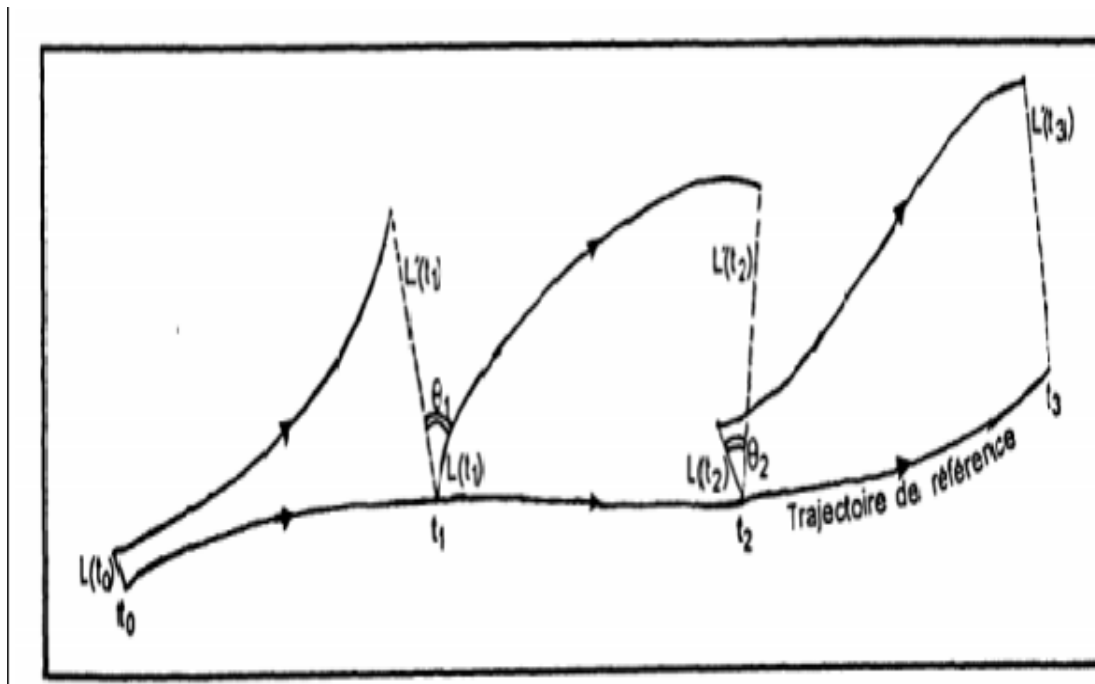


FIGURE 2.2 – Méthode de Wolf pour estimer le plus grand exposant de Lyapounov.

l'attracteur . On localise ensuite le plus proche voisin de ce point initial et on note la distance entre ces deux points  $L(t_0)$ . A une date  $t_1$  ultérieure, la distance initiale  $L(t_0)$  entre ces deux points aura évolué en une distance  $L'(t_1)$ . On cherche alors une nouvelle trajectoire (remplaçant la précédente) qui doit satisfaire les deux critères suivants :

- sa distance  $L(t_1)$  par rapport à la trajectoire de référence doit être faible.

- la séparation angulaire  $\theta_1$  entre  $L(t_1)$  et  $L(t_1)$  doit être petite.

On répète cette procédure jusqu'à ce que la trajectoire de référence ait "traversé" l'ensemble des données. On estime alors le plus grand exposant de Lyapounov  $\lambda$  par :

$$\lambda = \frac{1}{t_m - t_0} \sum_{k=1}^m \ln \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})},$$

où  $m$  est le nombre total de remplacements de trajectoires [22].

## 2.7.2 Dimension fractale

La dimension fractale est une caractéristique distinctive d'un attracteur étrange. Dans cette section, nous allons définir ce qu'est exactement une dimension fractale. Un ensemble  $A$  est considéré comme fractal lorsque sa dimension de Hausdorff n'est pas un nombre entier. Il existe également d'autres dimensions non entières ou fractales telles que la dimension de Kolmogorov ou de capacité, la dimension de corrélation, la dimension de Lyapounov, etc . . .

Ces dimensions sont toutes étroitement liées et partagent les propriétés suivantes :

1.  $A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$ .
2.  $A = \emptyset \Rightarrow d(A) = 0$ ,
3.  $d(A \times B) = d(A) + d(B)$ .
4. Si  $g$  est une application différentiable sur  $A$ , alors  $d(g(A)) = d(A)$ .

### A. Dimension de Hausdorff

Si  $V$  est un ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , le diamètre de  $V$  est défini par :

$$|V| = \sup \{|X - Y|, X, Y \in V\}.$$

Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  recouvert par des ensembles  $V_i$  de diamètre plus petit qu'un  $\varepsilon$  donné c'est-à-dire :

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i, 0 < |V_i| \leq \varepsilon.$$

Soit  $d$  un nombre réel,  $d \geq 0$ ; on pose :

$$\eta_i(A, \varepsilon) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |V_i|^d, V_i \leq \varepsilon,$$

on définit alors la d-mesure de Hausdorff par :

$$\eta_d(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_d(A, \varepsilon).$$

Hausdorff a démontré qu'il existe une valeur unique  $d_H$  pour laquelle

$$\eta_d(A) = \begin{cases} 0 & \text{quand } d > d_H, \\ \infty & \text{quand } d < d_H, \end{cases}$$

$d_H$  appelé la dimension de Hausdorff de l'ensemble  $A$ .

## B. Dimension de Kolmogorov ou de Capacité

Soit  $A$  un ensemble non vide équipé d'une métrique, et  $M(\varepsilon, A)$  le nombre minimum d'ensembles ayant un diamètre inférieur ou égal à  $\varepsilon$  nécessaires pour recouvrir  $A$ . La dimension de capacité  $d_c$  est définie comme suit :

$$d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log M(\varepsilon, A)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

De manière intuitive, cette dimension mesure comment le nombre d'ensembles nécessaires pour recouvrir  $A$  augmente lorsque le diamètre  $\varepsilon$  tend vers 0.

## C. Dimension de corrélation

Appelons  $C(R)$  le nombre de cellules requises pour chaque dimension  $M$ . On peut définir la dimension de corrélation en utilisant une fonction appropriée, qui peut être exprimée comme suit :

$$C(R) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M^2} \xi.$$

avec  $\xi$  représente le nombre de paires  $i, j$  dont la distance  $|X_i - X_j| < R$  : on peut récrire la fonction  $C(R)$  comme :

$$C(R) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^n H(R - |X_i - X_j|),$$

la dimension de corrélation est alors définie par :

$$\mu = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log(C(R))}{\log(R)}.$$

## D. Dimension de Lyapounov

Une autre méthode pour évaluer l'aspect fractal des attracteurs est la dimension de Lyapounov.

si  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  sont les exposants de Lyapounov du système dynamique, classés dans l'ordre décroissant, et  $k$  est un entier tel que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k \geq 0$ , alors, pour les espaces de phase de dimension supérieure à 2, la dimension de Lyapounov telle que proposée par Fredrickson et al. sera définie comme suit :

$$d_l = k + \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}{|\lambda_{k+1}|}.$$

Une dimension fractionnaire est considérée comme un indicateur de l'existence d'un comportement chaotique. Ainsi, les attracteurs chaotiques sont considérés comme des fractales en raison de leur dimension non entière.

## 2.8 Quelques modèles des système chaotique à tempe continu

### 2.8.1 Système de Lorenz

Le modèle de Lorenz a eu un rôle historique majeur car son évolution temporelle révèle un comportement chaotique. De plus, il a été le premier système différentiel dissipatif célèbre à permettre l'observation d'un attracteur étrange pour certaines valeurs des paramètres.

Les équation du modèle [1] :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha (y - x), \\ \dot{y} = \gamma x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - \beta z. \end{cases}$$

Les variables qui participent au modèle sont :

- les variations de température horizontale et verticale  $(y, z)$ .
- le taux d'échauffement par convection  $(x)$ .

accompagné des paramètres (tous les trois positifs) :

- Le nombre de Prandtl  $(\alpha)$ .

- le nombre de Rayleigh ( $\beta$ ).
- la taille physique du système ( $\gamma$ ).

Les valeurs des paramètres utilisées par Lorenz étaient :  $\alpha = 10$ ,  $\beta = \frac{8}{3}$  et  $\gamma = 28$  comme illustré sur la FIGURE 2.4.

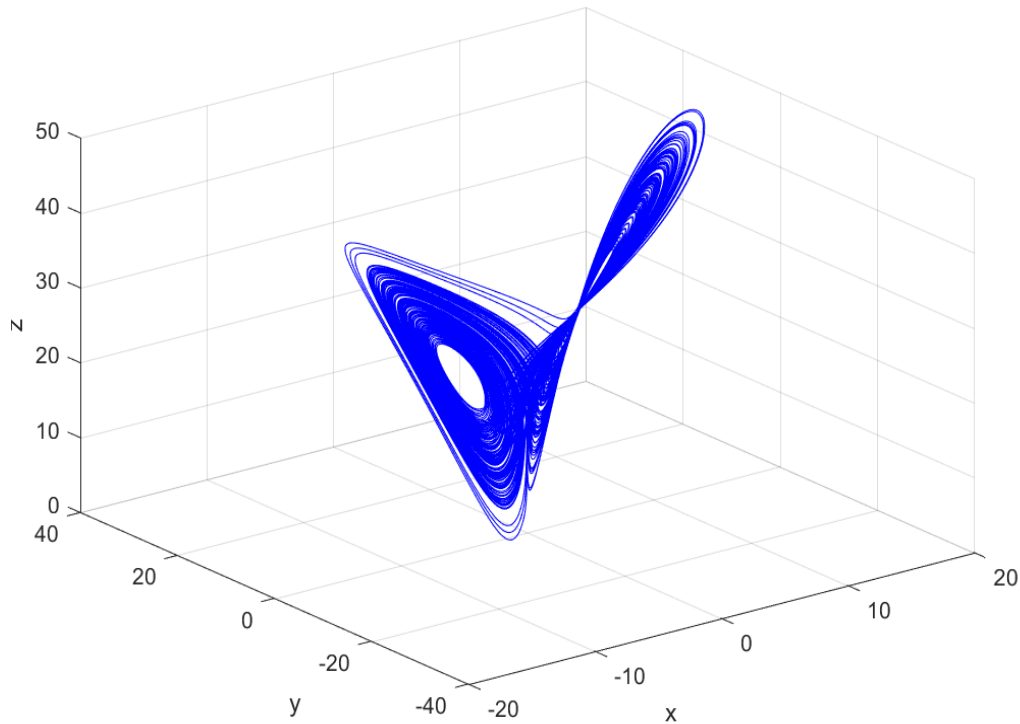


FIGURE 2.3 – l'attracteur de Lorenz.

## 2.8.2 Système de Rössler

Les équation du modèle [2] :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b - cz + xz. \end{cases} \quad (2.1)$$

Avec  $a$ ,  $b$  et  $c$  des constantes.

le système (2.1) avec  $a = 0.398$ ,  $b = 2$ ,  $c = 4$ , présent un attracteur chaotique comme montré dans la Figure suivante :

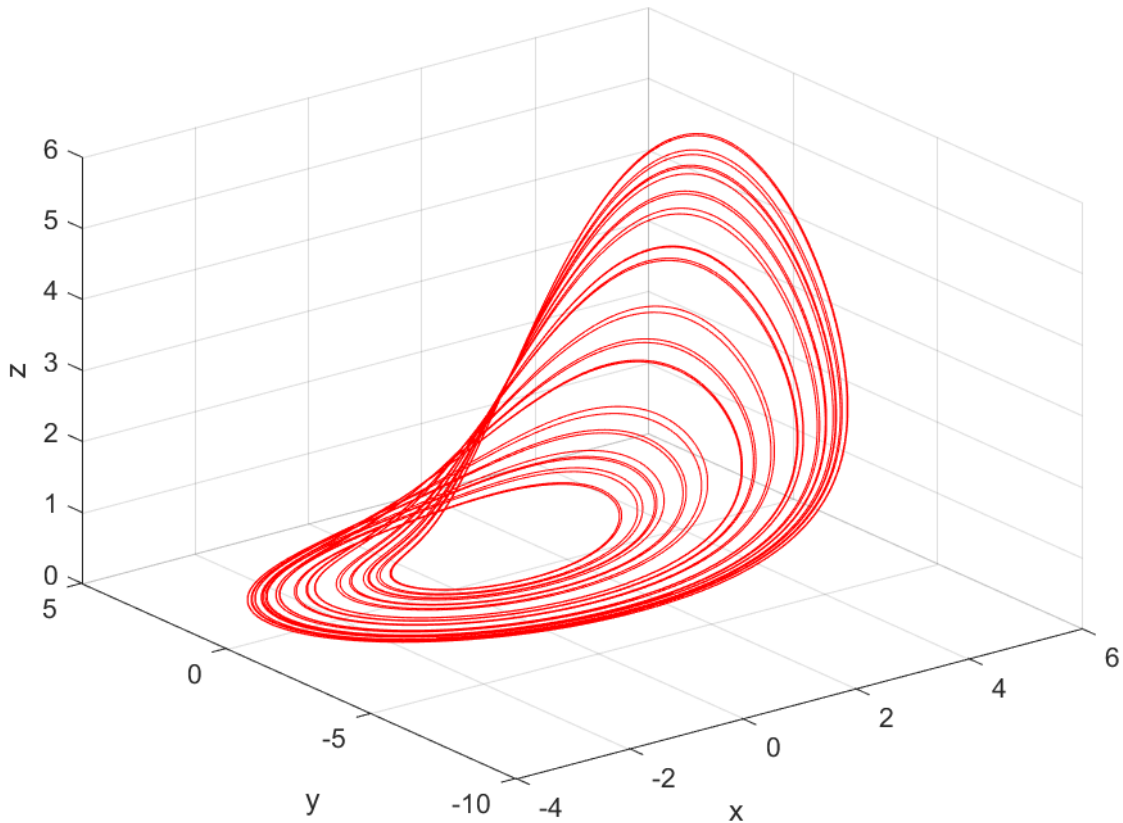


FIGURE 2.4 – l'attracteur de Rössler.

## 2.9 Domaines d'application du chaos

Dans le passé, le concept du chaos a trouvé des applications dès les premières étapes en mathématiques et en physique. Par la suite, ces applications se sont étendues à l'ingénierie, de manière plus contemporaine, ainsi qu'aux sciences de l'information et sociales. Ces dernières années, un intérêt croissant s'est manifesté pour les applications commerciales et industrielles des systèmes chaotiques. Divers types d'applications commerciales et industrielles potentielles sont basés sur différents aspects des systèmes chaotiques, lesquels sont les suivants :

- **Contrôler** : Contrôle des comportements irréguliers dans les appareils et les systèmes.
- **Synthèse** : Contrôle potentiel de l'épilepsie, amélioration des systèmes hésitants, tels que les gyroscopes laser en anneau. Commutation de paquets dans les réseaux informatiques.
- **Synchronisation** : Communications sécurisées, radio large bande chaotique et cryptage.

- **Traitement d'informations** : Codage, décodage et stockage d'informations dans des systèmes chaotiques, tels que des éléments de mémoire et des circuits, Meilleure performance des réseaux de neurones, La reconnaissance de formes.
- **Ingénierie** : Contrôle des vibrations, stabilisation des circuits, réactions chimiques, turbines, réseaux électriques, asers, lits fluidisés, combustion, et bien d'autres.
- **Ordinateurs** : Commutation de paquets dans les réseaux informatiques, Chiffrement, Contrôle du chaos dans les systèmes robotiques.
- **Communications** : Compression et stockage des informations Réseau informatique conception et gestion.
- **Médecine et Biologie** : Cardiologie, analyse du rythme cardiaque (EEG), Prédiction et contrôle de l'activité cardiaque régulière (défibrillateur sensible au chaos) .
- **nucléaire** : emballement d'un réacteur de fission ou extinction d'un plasma confiné (réacteur de fusion).
- **chimie** : emballement d'un réacteur homogène (Bhopal) ou hétérogène (torréfaction bois).
- **mécanique des fluides** : instabilités variées (Saman-Taylor, Rayleigh-Bénard, Marangoni, Taylor-Couette, Kelvin-Helmholtz , . . .).



---

## CHAPITRE 3

---

# ÉTUDE DU SYSTÈME DE CHEN

### 3.1 Système de Chen

#### 3.1.1 Historique

Le système de Chen a été découvert par le mathématicien chinois Chen Guanrong en 1999. Chen Guanrong était un pionnier dans le domaine de la théorie du chaos et de la bifurcation, et c'est dans ce contexte qu'il a développé le système de Chen. Ce système a été conçu pour être similaire au de Lorenz, mais avec des variations spécifiques. Ses recherches ont démontré que ce système présente des dynamiques chaotiques intéressantes, ce qui en fait un sujet de recherche et d'étude important dans le domaine de la théorie du chaos et de ses applications [26].

Le système de Chen est défini par les équations tridimensionnelles suivantes.

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = (c - a)x - xz + cy, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur de paramètres.

## 3.2 Propriétés dynamiques du système de Chen

### 3.2.1 Quelques propriétés mathématiques

Il est facile de remarquer que ce système (3.1) possède une propriété de symétrie simple : elle reste inchangée sous la transformation suivante [31] :

$$(x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, z). \quad (3.2)$$

Ensuite, récrivons le système (3.1) sous la forme vectorielle suivante :

$$\frac{dX}{dt} = f(X). \quad (3.3)$$

Où  $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et  $f(X)$  est le côté droit de l'équation (3.1). La transformation (3.2) peut maintenant être désignée comme

$$P : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3; X \mapsto PX; P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Qui satisfait

$$f(PX) = Pf(X). \quad (3.5)$$

### 3.2.2 Dissipation et existence de l'attracteur

Pour le système de Chen, la divergence du champ de vitesse est donnée par [2] :

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}.$$

ce qui donne :

$$\operatorname{div} f = -a - b + c.$$

Pour que le système soit dissipatif, il faut que :

$$\operatorname{div} f < 0.$$

Pour les paramètres  $(a, b, c) = (35, 3, 28)$ , le système de Chen est dissipatif. Ainsi, le volume de n'importe quel attracteur du système doit être nul, quand  $t$  tend vers  $\infty$ .

### 3.3 Les points fixes du système de chen

Les points d'équilibre dans le système (3.1) sont les solutions des équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a(y - x) = 0, & (1) \\ (c - a)x - xz + cy = 0, & (2) \\ xy - bz = 0. & (3) \end{cases}$$

De l'équation (1), nous trouvons :

$$x = y.$$

En remplaçant  $x = y$  dans l'équation (3), nous trouvons :

$$x^2 - bz = 0 \implies z = \frac{x^2}{b}.$$

En remplaçant  $x$  et  $z$  dans l'équation (2), nous trouvons :

$$(c - a)x - x\frac{x^2}{b} + cx = 0 \implies x\left[(c - a) - \frac{x^2}{b} + c\right] = 0 \implies \begin{cases} x = 0, \\ \text{ou} \\ (c - a) - \frac{x^2}{b} + c = 0. \end{cases}$$

Donc :

$$\frac{x^2}{b} = c - a + c \implies x^2 = (2c - a)b \text{ donc } x = \pm \sqrt{b(2c - a)}.$$

- Si  $x = 0 \implies y = 0$  et  $z = 0$ .
- Si  $x = \pm \sqrt{b(2c - a)} \implies y = \pm \sqrt{b(2c - a)}$  et  $z = \frac{(2c - a)b}{b} = 2c - a$ .

Donc les trois point fixe sont :

$$P_1 = (0, 0, 0).$$

$$P_2 = \left( \sqrt{b(2c - a)}, \sqrt{b(2c - a)}, (2c - a) \right).$$

$$P_3 = \left( -\sqrt{b(2c - a)}, -\sqrt{b(2c - a)}, (2c - a) \right).$$

### 3.3.1 Stabilité des points fixes

Pour examiner la stabilité des points d'équilibre, nous utiliserons la méthode de Lyapounov. Il suffit alors d'analyser les signes des valeurs propres de la matrice jacobienne correspondante à chaque point d'équilibre.

#### a. A l'origine (le point fixe $P_1$ )

La matrice Jacobienne associée est :

$$J_{(P_1)} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix};$$

et  $\det(J - \lambda I)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -a - \lambda & a & 0 \\ c - a & c - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-b - \lambda) \begin{vmatrix} -a - \lambda & a \\ c - a & c - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-b - \lambda) ((-a - \lambda)(c - \lambda) - (c - a)a). \end{aligned}$$

Après simplification et analyse, nous trouvons :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (a + b - c)\lambda^2 + [b(a - c) - a(2c - a)]\lambda + ba(a - 2c). \quad (3.6)$$

Pour analyser la nature des valeurs propres qui détermineront la stabilité asymptotique en  $P_1$ , nous utiliserons le critère de Routh-Hurwitz. Ainsi, la matrice de Hurwitz associée au polynôme (3.6) pour :

$$A_0 = 1, A_1 = b + a - c, A_2 = b(a - c) - a(2c - a) \text{ et } A_3 = ba(a - 2c),$$

est donnée par :

$$H = \begin{pmatrix} b + a - c & ba(a - 2c) \\ 1 & b(a - c) - a(2c - a) \end{pmatrix}.$$

Maintenant, en appliquant le théorème de Routh-Hurwitz, nous concluons que le polynôme (3.6) est Hurwitz, s'il satisfait à la condition suivante :

$$\Lambda_1 = |b + a - c| > 0.$$

et

$$\Lambda_2 = \begin{vmatrix} b+a-c & ba(a-2c) \\ 1 & b(a-c)-a(2c-a) \end{vmatrix} > 0.$$

Nous pouvons constater  $\Lambda_1$  est positif lorsque  $b+a-c > 0$ , c'est-à-dire, si  $c < b+a$ .  
Maintenant, nous avons besoin que  $\Lambda_2$  soit positif, c'est-à-dire :

$$(a+b-c)[b(a-c)-a(2c-a)] - ba(a-2c) > 0,$$

ce qui est maintenu pour,

$$(a-c)[b^2 + b(a-c) + a(a-2c)] > 0.$$

Par conséquent,  $a-c > 0$  et  $a-2c > 0$ , c'est-à-dire :  $c < a$  et  $c < \frac{a}{2}$ .

Ainsi, le polynôme  $P(\lambda)$  est Hurwitz si et seulement si  $c < b+a$ ,  $c < \frac{a}{2}$ , et en effet le système est **asymptotiquement stable** en pour les conditions ci-dessus.

### b. Stabilité des points fixes $P_2, P_3$

pour  $b(2c-a) \geq 0$ , nous avons les points d'équilibre :

$$\begin{cases} P_2 = (\sqrt{b(2c-a)}, \sqrt{b(2c-a)}, 2c-a), \\ P_3 = (-\sqrt{b(2c-a)}, -\sqrt{b(2c-a)}, 2c-a). \end{cases}$$

En linéarisant le flux dans  $P_2$  ou  $P_3$ , nous avons que :

$$J_{(P_2, P_3)} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & \pm \sqrt{b(2c-a)} \\ \pm \sqrt{b(2c-a)} & \pm \sqrt{b(2c-a)} & -b \end{pmatrix};$$

Alors,

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -a-\lambda & a & 0 \\ -c & c-\lambda & \pm \sqrt{b(2c-a)} \\ \pm \sqrt{b(2c-a)} & \pm \sqrt{b(2c-a)} & -b-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-a-\lambda) \begin{vmatrix} c-\lambda & \pm \sqrt{b(2c-a)} \\ \pm \sqrt{b(2c-a)} & -b-\lambda \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} -c & \pm \sqrt{b(2c-a)} \\ \pm \sqrt{b(2c-a)} & -b-\lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Son polynôme caractéristique est donné par :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (b + a - c) \lambda^2 + bc\lambda + 2ba(2c - a). \quad (3.7)$$

Comme dans le cas précédent, pour analyser la nature des valeurs propres du polynôme (3.7) qui déterminera la stabilité dans  $P_2$  et  $P_3$ , nous utilisons le critère de Routh pour  $A_0 = 1$ ,  $A_1 = b + a - c$ ,  $A_2 = bc$  et  $A_3 = 2ba(2c - a)$ , et l'agencement de Routh est donné par :

$$\begin{bmatrix} 1 & bc \\ b + a - c & 2ba(2c - a) \\ B_0 & \dots \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

et

$$B_0 = bc - \frac{2ba(2c - a)}{b + a - c}.$$

Ensuite, selon le théorème de Routh, nous devons analyser les signes de la première colonne de (3.8). Comme  $A_0$  est positif, nous devons alors analyser le signe de  $A_1$  et  $B_0$ .  $A_1$  est positif si  $b + a - c > 0$ , ou ce qui revient au même, si  $c < b + a$ . Notons que si  $B_0$  est positif, alors le polynôme (3.7) est de type Hurwitz et en effet nous aurions une stabilité de type asymptotique aux points d'équilibre  $P_2$  et  $P_3$ . Par conséquent, voyons pour quelles valeurs  $B_0$  est positif, c'est-à-dire :

$$B_0 = bc - \frac{2ba(2c - a)}{b + a - c} > 0,$$

ce qui est satisfait lorsque

$$bc(b + a - c) > 2ba(2c - a) \Leftrightarrow b + a - c > \frac{2a}{c}(2c - a)$$

$$\Leftrightarrow b > c - 2\frac{a^2}{c} + 3a.$$

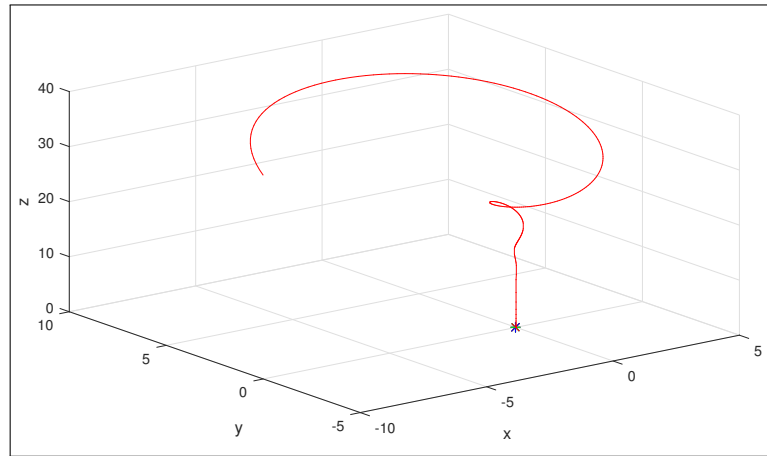
Avec ce qui précède, nous concluons que  $B_0$  est positif lorsque  $c < b + a$  et  $b > c - 2\frac{a^2}{c} + 3a$ , et en effet, selon le théorème de Routh, comme dans la première colonne de (3.8), les valeurs de  $A_0$ ,  $A_1$  et  $B_0$  sont positives pour la restriction ci-dessus, cela signifie que le polynôme (3.7) est de type Hurwitz. Par conséquent, nous avons que  $P_2$  et  $P_3$  sont **asymptotiquement stables** si les conditions ci-dessus sont satisfaites [26].

### 3.3.2 Résultats et discussion

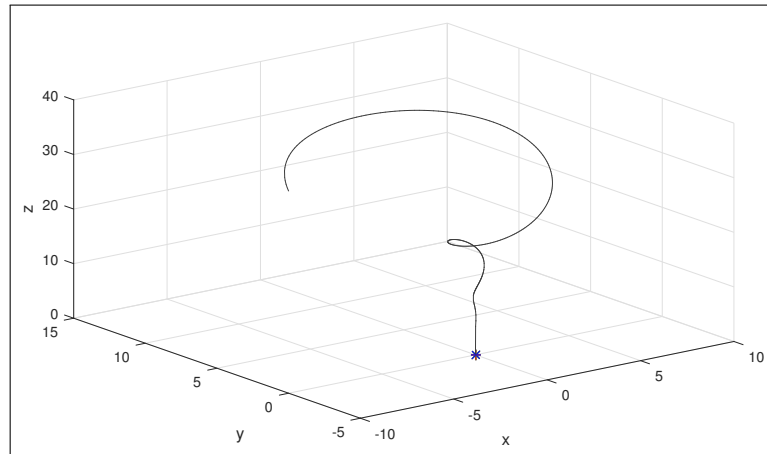
Nous analyserons les résultats de stabilité obtenus précédemment en utilisant les critères de Routh-Hurwitz. De plus, nous effectuerons une simulation dans MATLAB pour résoudre le système chaotique de Chen. Dans la simulation suivante, nous utiliserons les valeurs  $a = 35$  et  $b = 3$ , tout en considérant  $c$  comme variable [26].

#### a- Stabilité à $P_1$

Si  $c < b + a$ ,  $c < \frac{a}{2}$ , alors le système de Chen reste approximativement stable au point zéro  $P_1$ . De plus, le point zéro est stable globalement, ce qui signifie que la trajectoire converge vers le point zéro, comme illustré dans la Figure (3.1).



(a)  $c = 5$



(b)  $c = 17$ .

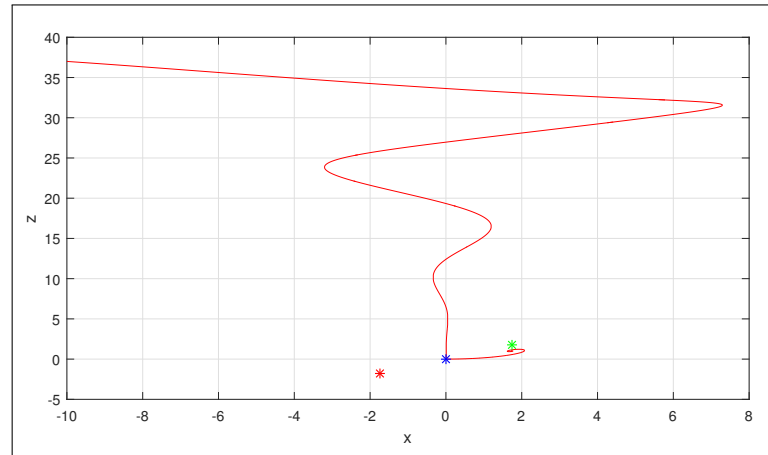
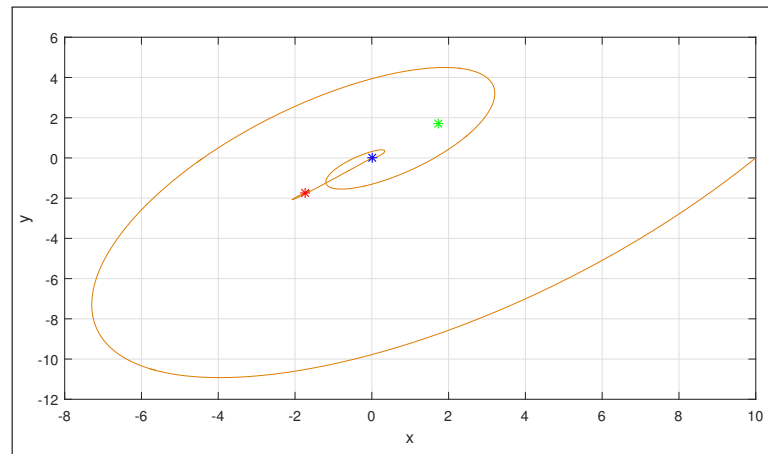
FIGURE 3.1 – Analyse de la stabilité du système de Chen au point d'origine  $P_1$  selon les conditions  $c$ .

**b- Stabilité à  $P_{2,3}$** 

Si les conditions suivantes sont remplies :  $c < b + a$ ,  $b > c - 2\frac{a^2}{c} + 3a$  et  $b(2c - a) \geq 0$ . Alors, nous remarquons que le point vert représente le point d'équilibre  $P_2$ , tandis que le point rouge représente le point d'équilibre  $P_3$ . La stabilité du système de Chen aux points d'équilibre  $P_2$  et  $P_3$  dépend des valeurs des conditions initiales. Par exemple, pour la valeur  $c = 18$  :

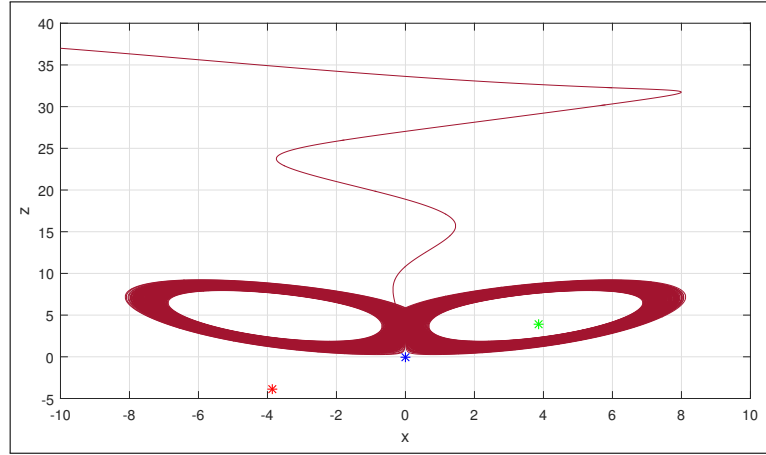
- Dans la (3.2)(a), le système est asymptotiquement stable pour la condition initiale  $(-10, 0, 37)$ .
- Dans la (3.2)(b), le système est asymptotiquement stable pour la condition initiale  $(10, 0, 37)$ .

Cela montre qu'un léger changement dans les conditions initiales peut entraîner une modification de la stabilité entre les points d'équilibre  $P_2$  et  $P_3$ .

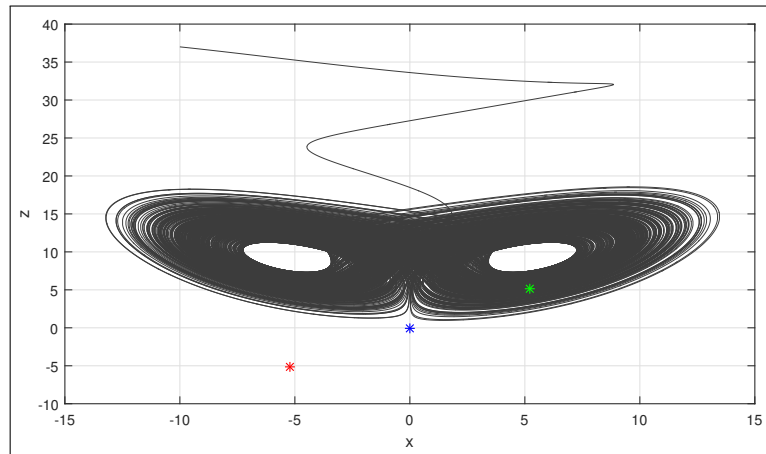
(a)  $c = 18$ (b)  $c = 18$ .FIGURE 3.2 – Stabilité des points d'équilibre  $P_{2,3}$  en fonction des conditions initiales.



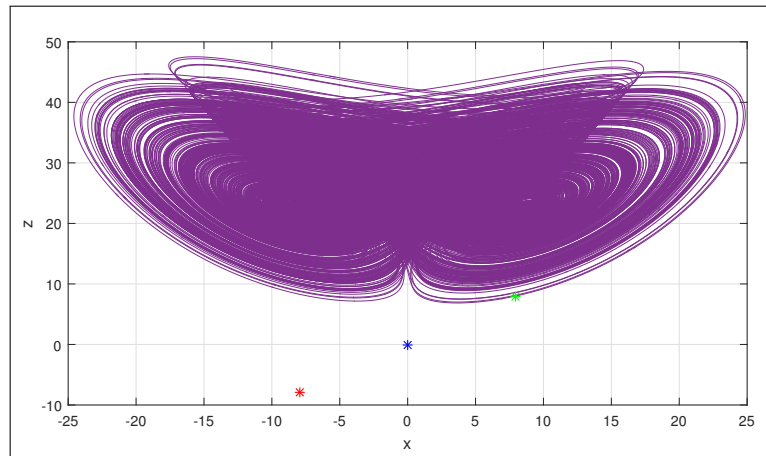
si  $c > 20$ , la stabilité du système de Chen commence à se détériorer sous les conditions dérivées de  $c < b + a$  et  $b > c - 2\frac{a^2}{c} + 3a$ , ainsi que la condition  $b(2c - a) \geq 0$ , comme illustré dans la Figure(3.3).



(a)  $c = 20$



(b)  $c = 22$ .



(c)  $c = 28$

FIGURE 3.3 – perte de stabilité du système de Chen pour  $c > 20$

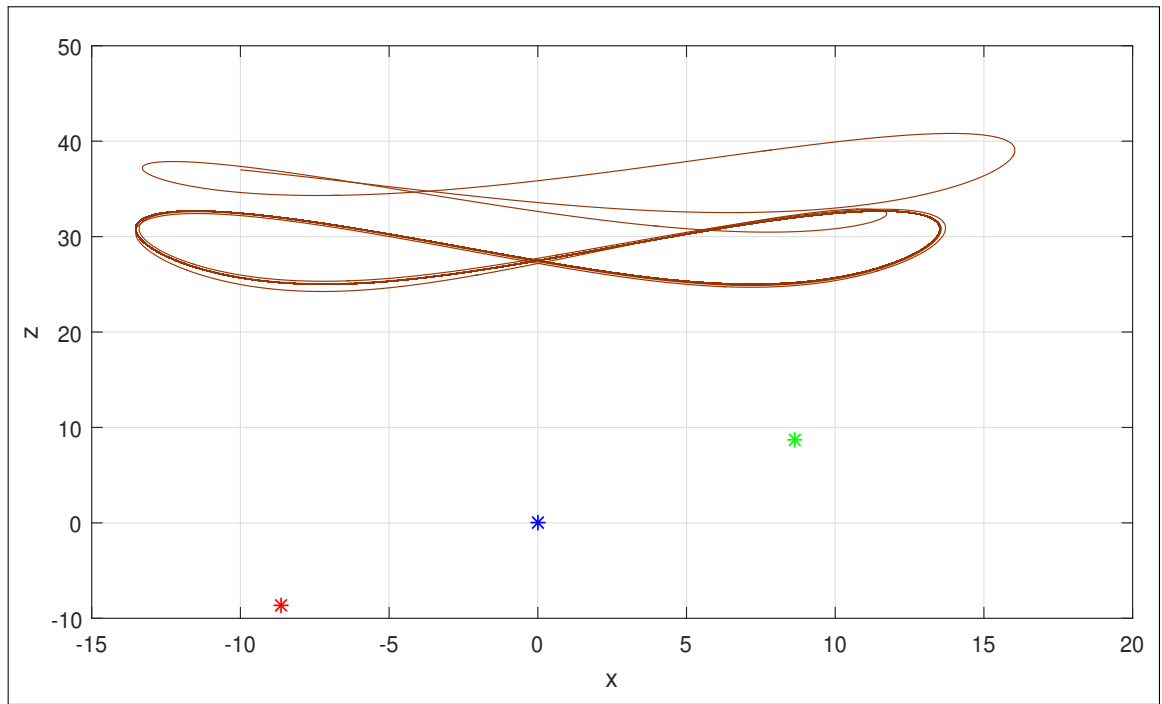
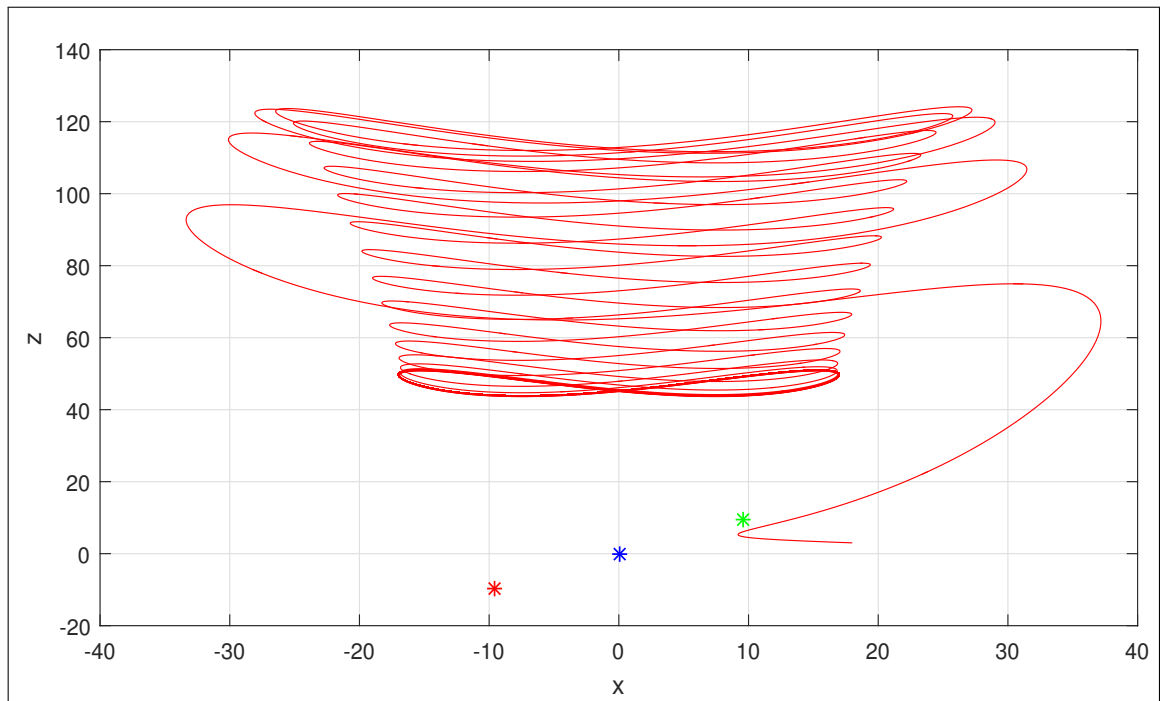

 (a)  $c = 30$ 

 (b)  $c = 33$ .

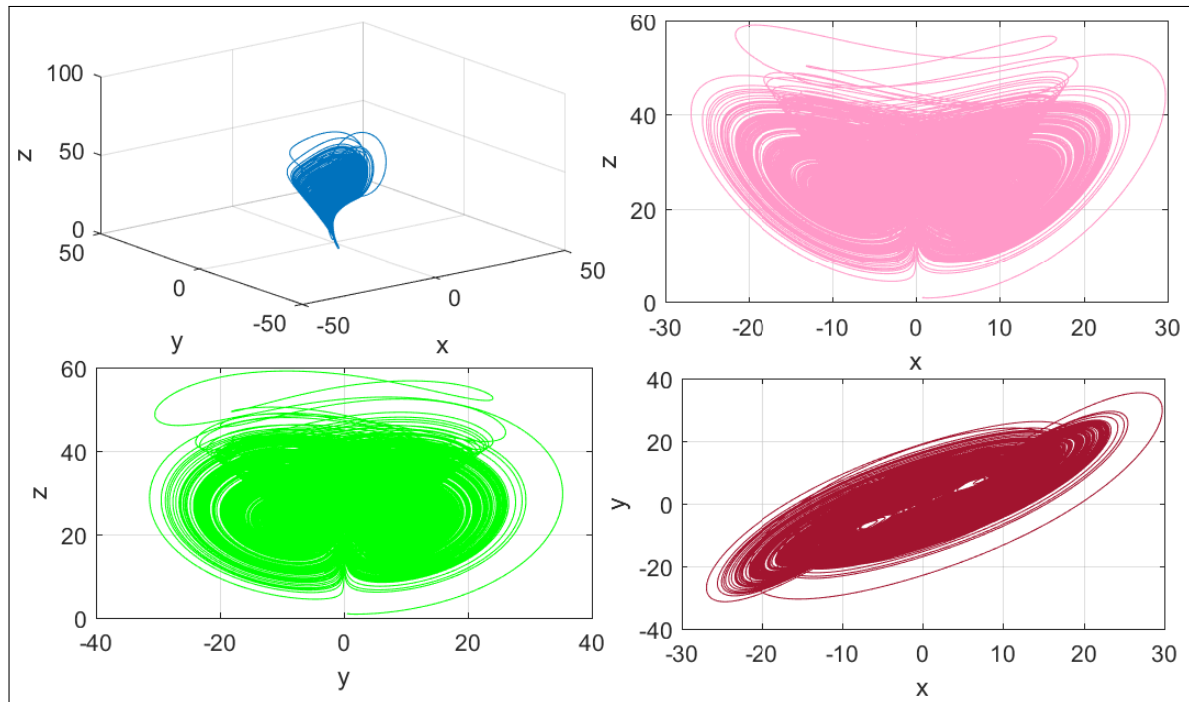
 FIGURE 3.4 – Trajectoires pour  $c > 28$ 

## 3.4 Étude numérique

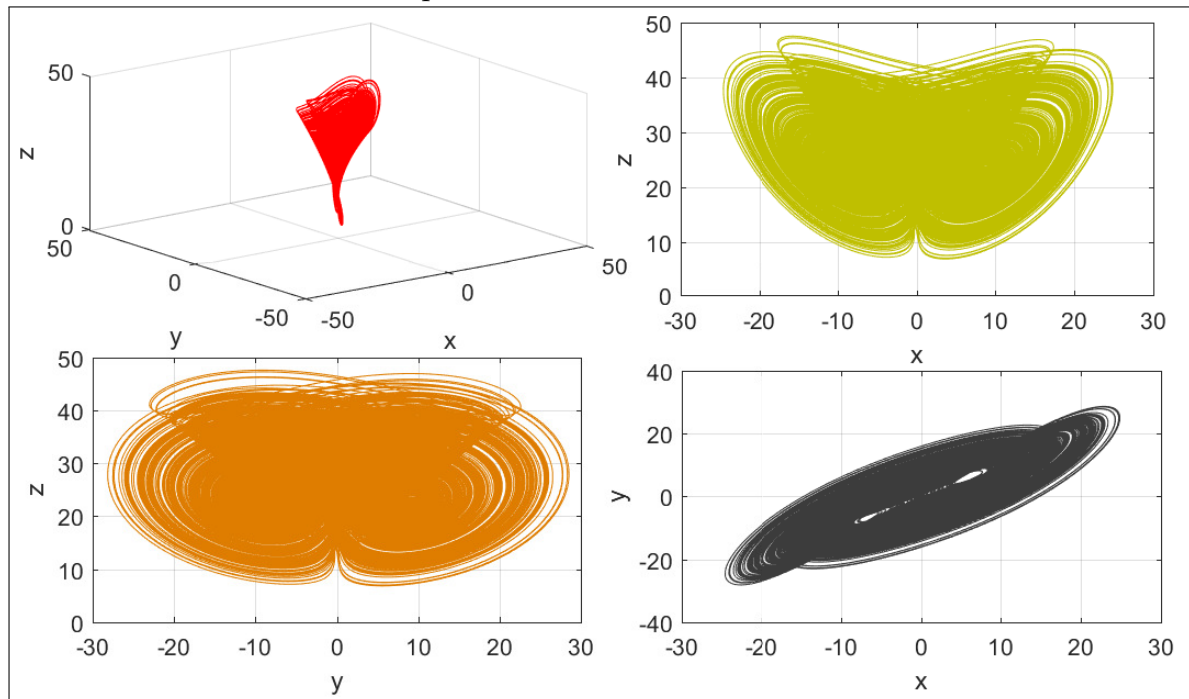
### 3.4.1 Comportement du système

En examinant le système de Chen sous deux conditions initiales distinctes  $C_1(1, 0.5, 1)$  et  $C_2(-10, 0, 37)$ , avec des paramètres constants  $a, b$  et  $c$  est une discrétisation tempo-

relle de 0,001 sur 500 itérations, nous obtenons les résultats affichés dans les deux graphiques représentés dans la figures (3.5).



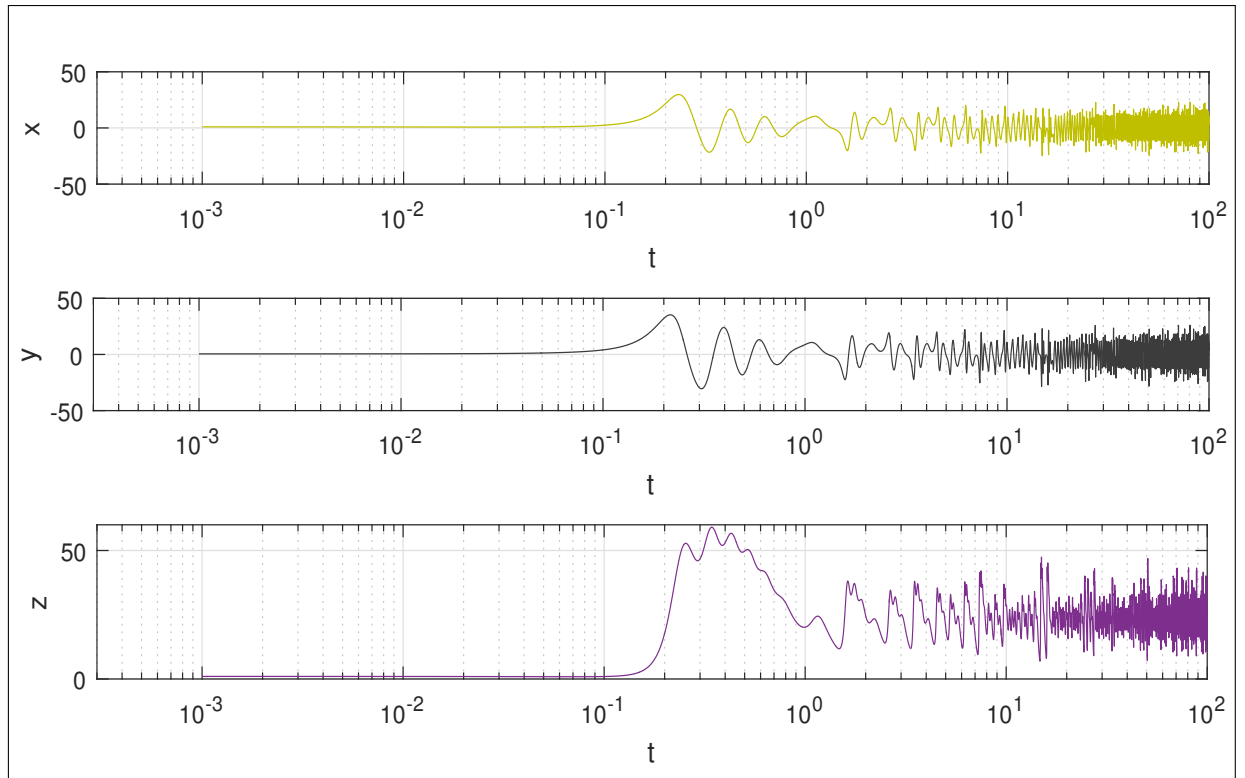
(a) Comportement à la condition initiale  $C_1$ .



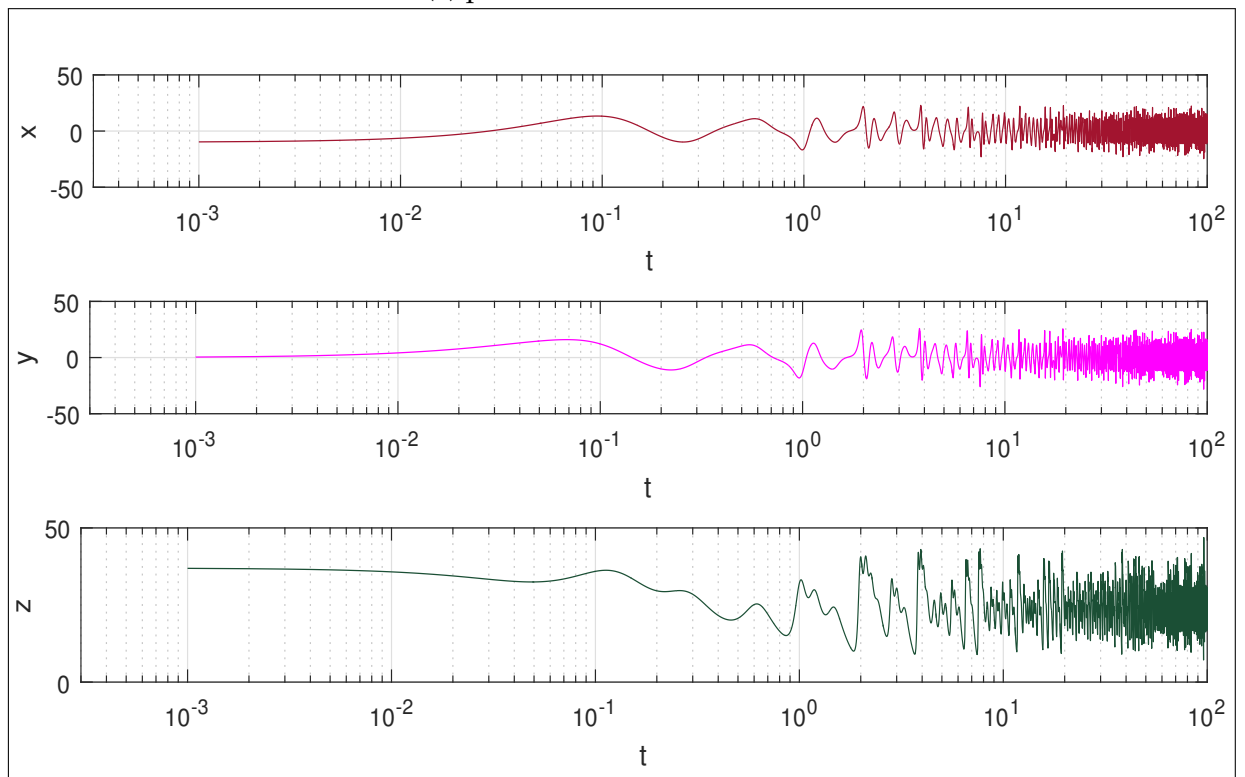
(b) Comportement à la condition initiale  $C_2$ .

FIGURE 3.5 – Comportement du système de Chen.

### 3.4.2 L'attracteur étrange



(a) pour condition initiale  $C_1$ .



(b) pour condition initiale  $C_2$ .

FIGURE 3.6 – La projection de l'attracteur de Chen sur les axes  $(x, y, z)$

---

# CONCLUSION

Le but de cette recherche est de comprendre la dynamique chaotique du système de Chen. Nous avons présenté tous les points essentiels concernant ces systèmes (définitions et caractéristiques, et nous avons conclu que l'étude et l'analyse ne sont pas impossibles malgré leur complexité.

Dans **le premier chapitre**, nous avons présenté des concepts fondamentaux sur les systèmes dynamiques, y compris les définitions et les différentes classifications. Nous avons discuté des points fixes et de la stabilité des systèmes, ainsi que des définitions des bifurcations et de leurs différents types.

Dans **le deuxième chapitre**, nous avons examiné les systèmes dynamiques continus (Lorenz et Rössler) et avons également parlé des caractéristiques des systèmes chaotiques, telles que la non-linéarité, la déterminisme, la sensibilité aux conditions initiales, les aspects aléatoires, ainsi que des attracteurs étranges.

Quant au **troisième chapitre**, nous avons présenté le modèle de Chen avec une étude de ses propriétés mathématiques. Nous avons analysé son comportement chaotique en utilisant son attracteur particulier et recherché les points fixes et leur stabilité, ce qui contribue à une meilleure compréhension de ce phénomène complexe.

En conclusion, nous espérons que ce travail a ajouté une valeur modeste à la bibliothèque de notre université et a aidé nos collègues étudiants à mieux comprendre le sujet.

---

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Alexander, A. Angulo, Pour Obtenir Le Grade De Docteur En Sciences, Thèse. Université Du Sud Toulon Var, (2015).
- [2] Dj. Benzemam, Systèmes Chaotiques Et Hyperchaotiques Pour La Transmission Sécurisée De Données, Thèse de Magister , Université de Telemcen, (2010).
- [3] O. Bonnefoy, Systèmes Dynamiques : Application à La Mécanique Des Fluide, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, (2020).
- [4] H. Dang-vu, C. Delcarte, Bifurcations Et Chaos Une Introduction à La Dynamique Contemporaine Avec Des programmes En Pascal, Fortran Et Mathematica, Ellipes, (2000).
- [5] E. G. Da Silva, Introduction Aux Systèmes Dynamiques Et Chaos, avril (2004).
- [6] N. Djafri, Aspects Chaotiques Dans Les Systèmes Dynamiques Discrets, Thèse de Doctorat, Université Frères Mentouri Constantine 1 (2021).
- [7] k. Djeddi, Systèmes Dynamiques Et Introduction Au Chaos Cours Et Exercices Corrigés, (2022).
- [8] Dj. Djedid, Cycles Limites Des Systèmes Différentiels Ordinaires, Thèse de Doctorat , Université Badji Mokhtar Annaba (2021).
- [9] S. N. Elaydi, Discret Chaos : With Applications In Science And Engineering, 2éd, (1999).
- [10] Z. Elhadj, Etude De Quelques Type De Systems Chaotiques : Generalisation D'un Module Issu Du Modele De Chen, Thèse de Doctorat, Université Mentouri Constantine (2006).
- [11] A. Gasri, Chaos Et Synchronisation (généralisé) Dans Les Systèmes Dynamiques, Thèse de Doctorat, Université Frères Mentouri Constantine 1 (2018).

- [12] M. Hamamda, With Application In Science And Engineering Cycle Limites D'une Classe Des Équations Différentielles Du Troisième Ordre, Thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar De Annaba, (2015/2016).
- [13] R. Hilborn, Chaos And Nonlinear Dynamics An Introduction For Scientists And Engineers, 2<sup>ed</sup>, (1994).
- [14] M. Houdeifa, Solutions Périodiques De Quelques Classes Des Équations Différentielles Ordinaires, Thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar Annaba (2021).
- [15] D. Kaplan, L. Glass, Finite-Difference Equations. Understanding Nonlinear Dynamics. New York : Springer-Verlag, (1995).
- [16] W. Laouira, Contrôle Des Systèmes Dynamiques Chaotiques, Thèse de Doctorat, Université Constantine 1, (2018).
- [17] G. C. Layek, An Introduction To Dynamical Systems And Chaos, Springer, (2015).
- [18] N. Louzzani, Contribution à L'amélioration De La Transmission Sécurisée Des Images à Base Du Chaos, Thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar–Annaba, (2022).
- [19] S. Lynch, Dynamical Systems With Applications Using *Matlab*, Springer International Publishing, (2014).
- [20] Ch. Marle, Ph. Pilibossian, Mathématiques Pour Le 2<sup>e</sup> Cycle, Systems Dynamiques Une Introduction, Ellipses Marketing, (2003).
- [21] O. Megherbi, Etude Et Réalisation D'un Système Sécurisé à Base De Systèmes Chaotiques, Mémoire de Magister, Uniniversite Mouloud Mammaer Tizi-ouzou (2013).
- [22] V. Mignon, La Dynamique Des Marchés Boursiers Est-elle Chaotique ?, Journal De La Société Statistique De Paris , tome 138, n° 2 (1997), p. 63-81.
- [23] P. Müllhaupt, Introduction à L'Analyse Et à La Commande des Systèmes Non Linéaires, (2007).
- [24] R. Ouahabi, Systèmes Dynamiques Et Chaos : Différentes Méthodes De Contrôle Et De Synchronisation, Thèse de Doctorat, Université frères mentouri - Constantine 1 (2018).
- [25] D. Ruelle, F. Takens, On The Nature Of Turbulence, Communication In Mathematica Physics, (1971).
- [26] F. T. Sánchez, P. P. Cárdenas Alzate, C. A. Abello Muñoz, An Approach To The Stability Of The Chen System Through Hurwitz Polynomials, Int. J. Eng. Res. Technol, Vol 14, Num. 10, (2021), pp. 978-986.

- [27] Sh. Sastry, Nonlinear Systems Analysis, Stability, And Control, Springer, (1999).
- [28] E. R. Scheinerman, Invitation To Dynamical Systems, (2000).
- [29] S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics And Chaos : Lab demonstrations, (1994).
- [30] S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics And Chaos : With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering, CRC Press, (2018).
- [31] T. Ueta, G. Chen, Bifurcation Analysis of Chen's Equation, Int. J. Bifurc. Chaos, Vol. 10, No. 8, (2000) pp. 1917-1931.