

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf -Mila

Institut des Sciences et de Technologie

Département de Génie mécanique et Électromécanique



N°Réf :.....

**Projet de fin d'Etude préparé En vue de l'obtention du diplôme de
MASTER**

**En : Génie Mécanique
Spécialité :ÉNERGETIQUE**

***Simulation numérique d'un écoulement bidimensionnel
MHD tournant avec transfert de chaleur dans un
récipient conique***

**Réalisé par : -Hamdi Asma
 -Berrehal Safa**

Soutenue devant le jury :

Litouche Billel	C.U.Abdelhafid Boussouf	Mila	Président
Debbah Djebbair	C.U.Abdelhafid Boussouf	Mila	Examineur
Bendjaghlouli Ali	C.U.Abdelhafid Boussouf	Mila	Encadreur

Année universitaire : 2023/2024

Remerciements

En premier lieu, nous tenons à remercier Dieu tout Puissant qui nous a donné

la force de continuer et de terminer nos Études et ce travail

Nous remercions en première ligne à

Dr BENDJAGHLOULI Ali docteur à Centre universitaire Mila

Pour encadrer et diriger ce travail avec patience

Nous remercions vivement aux membres de jury

Nous remercions tous les enseignants du département Génie mécanique

Pour tout le savoir que nous avons acquis grâce à eux durant notre formation.

Nous remercions nos famille surtout nos parentes et nos frères et proches amis

Qui ont été si présents, et n'ont jamais cessé de nous encourager.

Et nous Souhaitant beaucoup de réussite dans leurs vies et un bon avenir.

Dédicace

الحمد لله أولا و آخرا وما توفيقي إلا بالله

اللهم كما أنعمت فرد وكما زدت فبارك وكما باركت فتمم وكما أتممت فثبت
إلى من كلل العرق جبينه ومن علمني أن النجاح لا يأتي إلا بالصبر والإصرار إلى النور الذي أثار دربي وسراج الذي لا ينطفئ نوره بقلبي
ابداً

من بذل الغالي والنفيس واستقديت منه قوتي واعتزازي بذاتي

والذي العزيز

إلى من جعلت الجنة تحت أقدامها وسهلت لي الشدائد بدعائها إلى الإنسانية العظيمة التي لطالما تمننت أن تقر عينها لرؤيتي في يوم كهذا
أمي العزيزة

إلى ضلعي الثابت وأماني أيامي إلى من شددت عضدي بهم فكانوا لي ينباع أرتوي منها إلى خيرة أيامي وصفوتها إلى قرّة عيني
إخواني شراف, نور الدين , صلاح و وأخواتي الغاليات سمية, أمينة, خديجة, حليلة و مسعودة, زوجات اخوتي فطيمة و رملة,
واخواتي الصغيرات بنات اخواتي شمس, شهد و لميس
لكل من كان عوناً وسنداً في هذا الطريق للأصدقاء الأوفياء ورفقاء السنين لأصحاب الشدائد والأزمات إلى من أفاضني بمشاعره ونصائحه
المخلصة

اميمة هدير و نهاد

إلى شريكتي اسماء

إليكم عائلتي أهديكم هذا الانجاز وثمره النجاح الذي لطالما تمنيتّه ها أنا اليوم أكملت وأتممت أول تمراته

بفضله سبحانه وتعالى الحمد لله على ما وهبني

فمن قال أنا لها نالها فأنا لها وإن أبت رغما عنها أتيت بها

فالحمد لله شكراً وحبا وامتناناً على البدء والختام وآخر دعواهم أن الحمد لله رب العالمين

صفاء

Dédicace

بسم الله الرحمن الرحيم الحمد لله الذي ما نجحنا و ما علونا و ما توقفنا الا برضاه الحمد لله الذي ما اجتزنا دريا و لا تخطينا جهدا
الا بفضلله و اليه ينسب الفضل و الكمال و الاكمال

{ وَآخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنِ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ }

:وبكل الامتنان والكلمات الصادقة أهدي هذا العمل و النجاح الأخير المتواضع

لنفسي اولا ثم الى كل من سعى معي لإتمام هذه المسيرة

إلى روح أبي الغالي رحمه الله

أحن الاباء ، الذي عرفني على القيم الحميدة وأنار لي طريق حياتي بنصائحه الحكيمة. مهما فعلت ومهما قلت، لن أتمكن من وصفه بشكل صحيح.

رحمه الله تعالى وأسكنه فسيح جناته وتغمده بواسع رحمته

إلى امي العزيزة

الأكثر لطفًا وتعاطفًا، الشخص التي كانت بجانبني دائمًا وضحت من أجل نجاحي. لا أستطيع أن أشكرها في بضعة أسطر لكن هذا...العمل يعكس امتناني

إلى إخواني الأعزاء عماد و مروان وأخواتي ايمان و منى و منال... أنا محظوظة بوجودكم في حياتي ، أنتم أعمدتي وقوتي ومصدر حبي. أشكركم على دعمكم الغير المشروط، أحبكم إلى ما لا نهاية

... إلى كل صديقاتي و أصدقائي عبير، فردوس ريان ،إنصاف نهلة، جمانة ، فيراس ، عبدو

أنتم مثل الأخواتو الاخوة بالنسبة لي، أشكركم على وجودكم بجانبني، أنتم استثنائيون

إلى شريكتي صفاء

إلى كل من أحبه ومن يحبني

أسماء

Résumé

Nous présentons une étude numérique d'un écoulement tournant, à l'intérieur d'une enceinte de forme conique remplie d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$), engendré par la rotation de disque inférieur.

Le code CFD Fluent basé sur la méthode des volumes finis sera utilisé pour résoudre numériquement les équations gouvernant le phénomène étudié.

Dans le cas stable, nos simulations numériques seront présentées pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison α avec différentes valeurs du nombre de Reynolds Re dans lesquelles les vortex sont apparus pour la convection forcée. Puis nous présentons une convection mixte dans le cas où $Re=1000$ avec des valeurs du nombre de Richardson Ri pour voir l'effet de la stabilité de l'écoulement. Ensuite, nous appliquons un champ magnétique axial de diverses intensités via la variation du nombre de Hartmann Ha .

Enfin, nous présentons l'aspect d'un écoulement pleinement bidimensionnel, avec un diagramme de stabilité qui sera établi.

Abstract

We present a numerical study of a rotating flow inside a conical-shaped enclosure filled with a low prandtl number. Fluid ($Pr=0.015$). generated by the rotation of the lower disk. The fluent CFD code based on the finite volume method will be used to numerically solve the equations. governing the phenomenon being studied. In the stable case our numerical simulations will be presented for different values of the inclination angle α with different values of the Reynolds number Re where forced convection vortices appear. Then to check this number on flow stability we present a mixed convection where $Re=1000$ with the value of the Richardson number Ri .

After that we apply an axial magnetic field of various intensities by varying the Hartman Ha number.

Finally, We present the appearance of a fully two-dimensional flow, with a stability diagram that will be established.

ملخص

نقدم دراسة عددية للتدفق الدوار، داخل حاوية مخروطية الشكل مملوءة بسائل براندتل المنخفض ذو رقم $(Pr=0.015)$ ، الناتج عن دوران القرص السفلي. سيتم استخدام كود Fluent CFD المعتمد على طريقة الحجم المحدود لحل المعادلات التي تحكم الظاهرة المدروسة عدديًا. في الحالة المستقرة، سيتم عرض عمليات المحاكاة العددية لقيم مختلفة لزاوية الميل α مع قيم مختلفة لعدد رينولدز Re الذي ظهرت فيه الدوامات للحمل القسري. ثم نقدم الحمل الحراري المشترك في حالة $Re=1000$ مع قيم رقم رينولدسون Ri لنرى هذا الرقم على استقرار الجريان. بعد ذلك، نطبق مجالًا مغناطيسيًا محوريًا بكثافات مختلفة عبر تغيير رقم هارتمان Ha . أخيرًا، نقدم مظهر التدفق ثنائي الأبعاد بالكامل، مع مخطط الاستقرار الذي سيتم إنشاؤه.

Sommaire

Remerciement

Dédicace

Résumé

Sommaire

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction général

Chapitre I: Généralités et revue bibliographique

I.1. Généralités.....	03
I.1.1 Phénomène de d'Ekman dans l'écoulement tournant.....	04
I.1.2 Instabilités de couche limite.....	05
I.1.3 Instabilités de cisaillement.....	05
I.1.4 Écoulement MHD.....	06
I.2 Revue bibliographique.....	07

Conclusion.....	22
-----------------	----

Chapitre II: Géométrie-modèle mathématique, et méthode numérique

II.1 Ecoulement axisymétrique.....	23
II.1.1 Hypothèses simplidicatrices.....	24
II.1.2 Equations de transport.....	25
II.1.3 Formes adimensionnelles des équations.....	27
II.1.4 Les conditions aux limites et initiales.....	29
II.1.5 Outils d'analyse de l'écoulement axisymétrique.....	30
II.2 Ecoulement non-axisymétrique.....	32
II.3 Méthode numérique.....	32
II.3.1 Maillage.....	33

II.3.2 Discrétisation implicite de l'équation général de transport à l'état axisymétrique.....	36
--	----

II.3.3 Algorithmes de résolution.....	39
---------------------------------------	----

Conclusion.....	46
-----------------	----

Chapitre III : Résultat et discussion

III.1:Introduction.....	47
-------------------------	----

III.2:Modèle géométrique.....	47
-------------------------------	----

III.3:Validation du code de calcul.....	48
---	----

III.4:Convection forcée avec différentes valeurs de l'angle d'inclinaison	49
---	----

III.5: Convection mixte avec différentes valeurs de l'angle d'inclinaison.....	53
--	----

III.6:L'effet de champ magnétique.....	59
--	----

Conclusions	63
--------------------------	----

Bibliographie

Liste des figures

Chapitre I

Figure (I.1) : Couche limite de fluide en rotation d'après Moisy et al.,2004.....	4
Figure (I.2) : Ecoulement entre deux disque avec le disque supérieur tournant.....	5
Figure (I.3) :Schéma de l'écoulement entre disques en contre-rotation, δ_t et δ_b sont les épaisseurs de couches limites du disque supérieur (rapide) et inférieur	6
Figure (I.4):La configuration proposée par Batchelor en 1951. Deux disques lisses infinis séparés par une distance H , se font face pour entrainer le fluide en rotation.....	8
Figure (I.5): Distribution de la vitesse de rotation entre les disques en contre rotation proposé par Batchelor (1951) pour $Re \rightarrow \infty$	9
Figure (I.6) : Diagramme de stabilité btenu expérimentalement par Escudier (1984).....	10
Figure (I.7) :Dessin schématique d'expérience (Escudier et Cullen ,1996).....	11
Figure (I.8): Dessin de domaine d'écoulement d'après Okulov et al. (2005).....	16
Figure (I.9) : Différent type de motifs topologique des zones de recirculation dans le plan.....	17
Figure (I.10) :Ecoulements tridimensionnels avec une bulle axisymétrique de vortex breakdown fixée à la surface d'après Serre et Bontoux (2007).....	18

Chapitre II

Figure (II.1) : Géométrie du problème axisymétrique.....	24
Figure (II.2) : Schématisation des conditions aux limites du problème adimensionnel.....	30
Figure (II.3) : Géométrie du problème non-axisymétrique.....	32
Figure (II.4) : Maillages bidimensionnels et nœuds du maillage.....	34
Figure (II.5) : Volume de contrôle typique.....	34
Figure (II.6) : Volume de contrôle décalé pour u et v dans un maillage entrela.....	35
Figure (II.7) : Maillage utilisé pour le cas axisymétrique un nombre de nœuds 202.....	36

Figure (II.8) : Schéma représentatif de l'algorithme simple.....	40
Figure (II.9) : Volume de contrôle de l'équation de continuité.....	42

CHAPITRE III

Figure (III.1): Géométrie de problème considéré..... ;.....	48
Figure (III.2): Comparaison des lignes de courant obtenues avec celles de Martins et al.....	49
Figure (III.3): Contours de lignes de courant pour le cas de $Re_{cr}=2800$ avec $\alpha=0$	49
Figure(III.4): Contours de lignes de courant pour le cas de $Re_{cr}=2100$ avec $\alpha=5$	50
Figure(III.5): Contours de lignes de courant pour le cas de $Re_{cr}=1900$ avec $\alpha=7$	50
Figure (III.6): Contours de lignes de courant pour le cas de $Re_{cr}=1900$ avec $\alpha=7$	51
Figure (III.7) : Contours de lignes de courant pour le cas de $Re_{cr}=1650$ avec $\alpha=11$...	52
Figure (III.8): La variation du nombre de Reynolds critique (Re_{cr}) en fonction de l'angle d'inclinaison (α) pour la disparition des vortex.....	53
Figure (III.9) : Contours de lignes de courant (a),et contours des isothermes (b) pour le cas de $Re=1000$ avec $\alpha=0$	54
Figure (III.10) : Contours de lignes de courant (a),et contours des isothermes (b) pour le cas de $Re=1000$ avec $\alpha=0$	55
Figure (III.11): Contours de lignes de courant (a), et contours des isothermes (b) pour le cas de $Re=1000$ avec $\alpha=7$	56
Figure(III.12): Contours de lignes de courant (a),et contours des isothermes (b) pour le cas de $Re=1000$ avec $\alpha=9$;.....	57
Figure (III.13): Contours de lignes de courant (a),et contours des isothermes (b) pour le cas de $Re=1000$ avec $\alpha=11$	58

Figure (III.14): La variation du nombre de Richardson critique (Ricr) en fonction de l'angle d'inclinaison (α) pour la disparition des vortex.....	59
Figure (III.15): Contours de lignes de courant dans le cas de $Re=1000$ et $Ri=2.5$ pour différentes valeurs de Ha avec $\alpha=0$	60
Figure (III.16) : Le nombre de Nusselt moyen au disque inférieur, dans le cas de $\alpha=0$ avec $Re = 1000$ pour différentes valeurs de Ri	61
Figure (III.17) : La vitesse axiale le long du cône, dans le cas de $\alpha=0$ avec $Re = 1000$ et $Ri=2.5$ pour différentes valeurs de Ha	62

Liste des tableaux

Chapitre II

Tableau II-1 : Différentes quantités transportées et leurs termes de transport.....	37
---	----

Chapitre III

Tableau III-1 Paramètres numériques trouvés après la simulation pour une convection forcée.....	52
---	----

Tableau III-2 Paramètres numériques trouvés après la simulation pour une convection mixte.....	59
--	----

Nomenclature

a: Coefficients dans le système d'équations algébriques discrétisées.

b: Terme source dans le système d'équations algébriques discrétisées.

C_p:Chaleur spécifique à pression constante (J.kg-1.K-1).

D:Terme de diffusion dans le système d'équations algébriques discrétisées.

g : Accélération de pesanteur (m. s-2).

Gr: Nombre de Grashof.

H : Hauteur du cylindre (m).

Nu : Nombre de Nusselt local.

m : mode azimutal

p': La pression (N. m-2).

p : La pression adimensionnelle.

Pr : Nombre de Prandtl .

r': Direction radiale (m).

R: Rayon du cylindre (m).

r : Rayon adimensionnelle du cylindre.

Ra : Nombre de Rayleigh.

Re : Nombre de Reynolds .

Recr : Nombre de Reynolds critique.

R_m : Nombre de Reynolds magnétique.

Ri : Nombre de Richardson.

S ϕ :Terme source .

T: Température(K).

t : Temps (s).

T_c : Température de disque cold(K).

T_h : Température de disque heat (K).

u': Composante de la vitesse suivant la direction radiale (m. s⁻¹).

u: Composante de la vitesse radiale adimensionnelle.

V : Vecteur de la vitesse dans le plan méridien.

v': Composante de la vitesse suivant la direction axiale (m. s⁻¹).

v: Composante de la vitesse axiale adimensionnelle.

V_C : Volume de contrôle (m³)

w': Composante de la vitesse suivant la direction azimutale (m. s⁻¹).

w: Composante de la vitesse azimutale adimensionnelle.

z' : Direction axiale (m).

z : Hauteur adimensionnelle.

Symboles grecs

α : Diffusivité thermique du liquide ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)

β : Coefficient d'expansion thermique à pression constante (K^{-1})

γ : Rapport d'aspect.

δt : Epaisseur de couche limite thermique(m)

θ : Direction azimutale (rad).

μ : Viscosité dynamique ($\text{kg. m}^{-1}.\text{s}^{-1}$)

ν : Viscosité cinématique ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)

ρ : Masse volumique (kg. m^{-3})

τ : Temps adimensionnel.

λ : Conductivité thermique ($\text{W. m}^{-1}.\text{K}^{-1}$).

ω : Vorticité adimensionnelle

$\Delta\tau$: Incrément adimensionnel du temps

$\Delta r, \Delta z$: Dimensions du volume de contrôle considéré.

ψ : Fonction de courant adimensionnelle.

Ω : Vitesse angulaire (rad. s^{-1}).

Θ : Température adimensionnelle.

ϕ : Variable dépendante.

$\Gamma\phi$: Coefficient de diffusion.

Introduction

Introduction générale

La plupart des chercheurs en mécanique des fluides manifestent un vif intérêt pour les écoulements rotationnels, attirés par les implications de la rotation dans divers domaines. Cette dernière confère en effet des propriétés hautement bénéfiques dans de multiples applications, notamment en générant des forces centrifuges ou centripètes lorsque des systèmes ou des fluides sont mis en rotation.

La rotation joue également un rôle crucial dans de nombreuses applications industrielles, telles que les turbomachines, les cuves de mélange, les systèmes de conversion d'énergie (turbines ou éoliennes), voire même en informatique avec le refroidissement des disques durs. Ces types d'écoulements revêtent une importance croissante en raison de leurs applications diversifiées dans plusieurs domaines de l'ingénierie, tels que les viscosimètres, les machines centrifuges, le pompage de métaux liquides à haute température de fusion, ou encore la production de cristaux par le procédé de tirage Czochralski, entre autres.

De plus, en cas d'instabilité de l'écoulement, des défauts peuvent survenir dans le cristal formé, entraînant des problèmes d'impuretés et de non-homogénéité des métaux liquides. Une approche pour obtenir des cristaux de haute qualité consiste à contrôler la convection dans le fluide. Étant donné que l'action d'un champ magnétique influence le mouvement d'un fluide électriquement conducteur, il est suggéré que le mouvement du fluide puisse être contrôlé en cultivant un cristal en présence d'un champ magnétique.

Notre objectif consistera à la détermination des instabilités hydrodynamiques et thermiques qui naissent dans une enceinte conique ayant un rapport de forme égal à 2, rempli d'un fluide à faible nombre de Prandtl et ayant deux disques, le disque inférieur tourne à une vitesse angulaire Ω tandis que le disque supérieur reste fixe. l'écoulement axisymétrique bidimensionnel, visqueux et incompressible.

Nous avons présenté différentes valeurs du nombre d'inclinaison α (0, 5, 7, 9, et 11) et des valeurs du Re (2800, 2100, 1900, 1750 et 1650), sont des valeurs dans lesquelles les vortex sont apparus. Et nous avons présenté aussi un cas où $Re=1000$ avec des valeurs du nombre de Richardson Ri (2.5, 1.5, 0.8, 0.7 et 0.6) pour voir l'effet du nombre de Richardson Ri sur la stabilité de l'écoulement. A la fin de cette partie nous avons appliqué un champ magnétique vertical portant le nombre de Hartmann Ha (10, 13 et 15) dans le cas de $\alpha=0$, pour mettre en évidence l'influence du champ magnétique sur la stabilité de l'écoulement.

- **Organisation du mémoire**

Le premier chapitre est présenté une étude bibliographique sur les instabilités hydrodynamiques et thermiques de convection forcée et mixte des métaux liquides dans des configurations similaires à celle traitée dans notre étude et les écoulements MHD.

Le deuxième chapitre, détaille la géométrie, le modèle mathématique décrivant la convection forcée et mixte des écoulements axisymétriques et la méthode numérique des volumes finis pour la résolution des systèmes d'équations différentielles partielles couplées est décrite en conjonction avec le schéma et le maillage.

Le troisième chapitre, présente la validation du code de calcul de CFD Fluent, et les résultats obtenus commentés et visuellement récapitulés de la simulation d'un écoulement axisymétrique bidimensionnel, suivi d'une conclusion générale.

Chapitre I

Généralités et revue
bibliographique

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

Ce chapitre explore la littérature concernant la stabilité des écoulements tournants. Il sera articulé en deux parties : tout d'abord, nous examinerons les étapes clés de l'évolution de l'étude des écoulements tournants en convection mixte et forcé, avec et sans champ magnétique. Ensuite, nous aborderons les concepts relatifs aux diverses formes d'instabilité et aux écoulements Magnéto Hydro Dynamiques (MHD). Dans cette section, nous nous concentrerons sur l'étude des différentes formes d'instabilité.

I.1 Généralités

L'étude des écoulements dans les disques en rotation remonte à plus d'un siècle. Outre leurs applications industrielles, telles que les turbomachines, ces écoulements fournissent une configuration simple où la rotation influence la turbulence, comme dans les viscosimètres, les machines centrifuges, le pompage des métaux liquides à haute température de fusion, ou encore la production de cristaux par le procédé de tirage Czochralski, entre autres.

De nombreuses études récentes, qu'elles soient expérimentales ou numériques, se sont penchées sur la stabilité des écoulements de type rotor-stator. Initialement, l'écoulement entre deux disques finis de contre-rotation, entourés par un cylindre et connu sous le nom de géométrie Von Karman, revêt une importance pratique dans de nombreux dispositifs industriels. Dans le contexte industriel, les recherches fondamentales menées au cours des dernières décennies ont permis d'approfondir notre compréhension des écoulements tournants de type cavité tournante ou rotor-stator. À de faibles nombres de Reynolds, les structurations spatio-temporelles des écoulements rotor/stator ont été minutieusement étudiées expérimentalement (**Schouveiler et al., 2001**). Pour la première fois, le diagramme de transition de l'écoulement entre un disque fixe et un disque en rotation a été établi. Tandis que la couche d'Ekman du disque en rotation subit une transition avec l'émergence d'ondes de type chaos (**Floriani et al., 2000**), la couche de Bödewadt du disque fixe se déstabilise par l'apparition et l'interaction d'ondes circulaires et spirales. La zone de fluide ralentie par le frottement contre la paroi est connue sous le nom de couche limite et joue un rôle crucial en mécanique des fluides (**Fig.I-1**). Son épaisseur, notée δ , représente la distance sur laquelle la rotation imposée Ω est diffusée sous l'effet de la viscosité dans les couches intermédiaires du fluide. Dans le cas idéalisé d'un fluide en

rotation au-dessus d'une paroi infinie, il est possible de montrer que $\delta \approx (\nu/\Omega)^{1/2}$ (où ν est la viscosité cinématique du fluide), cette valeur étant constante sur toute la surface du disque, indépendamment de la distance r à l'axe de rotation (Moisy et al., 2004).

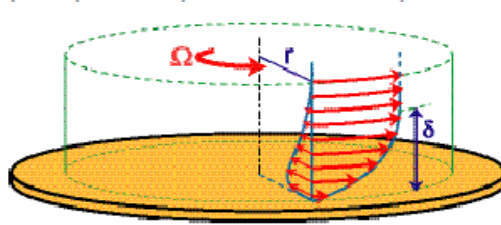


Figure I-1: Couche limite de fluide en rotation
d'après Moisy et al.,2004

I.1.1 Phénomène de pompage d'Ekman dans l'écoulement tournant

Ce phénomène se manifeste chaque fois qu'il y a un écoulement d'un fluide visqueux en contact avec un disque tournant infini. Le disque en rotation exerce une force d'attraction sur le fluide le long de sa région centrale (proche de l'axe de rotation), l'incitant à s'accélérer radialement vers l'extérieur dans une couche limite ($1/\sqrt{Re}$) appelée la couche d'Ekman (**Fig. I-2**). À proximité de la paroi latérale du cylindre, le fluide suit des trajectoires spirales en se déplaçant vers l'autre extrémité du cylindre. Dans les zones éloignées des parois, un équilibre entre les forces centrifuges et le gradient radial de pression se forme, engendrant un écoulement secondaire connu sous le nom de recirculation méridienne (Davidson, 2001).

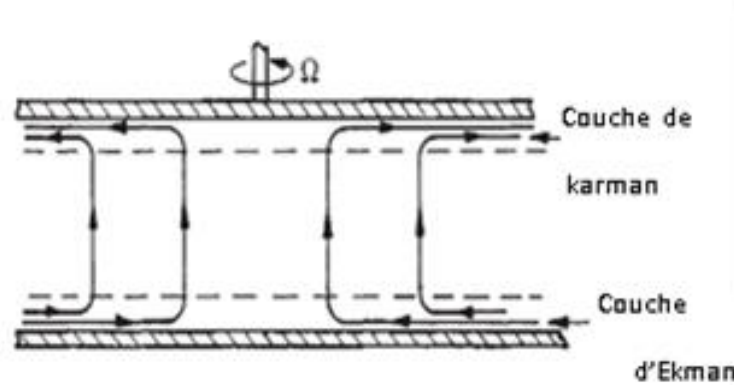


Figure I-2: écoulement entre deux disques avec le disque supérieur tournant.

I.1.2 Instabilités de couche limite

Dans une configuration d'écoulement à deux disques, deux couches limites peuvent se former à proximité des disques, conformément à la solution de Batchelor. Par analogie avec le cas d'un seul disque, la couche limite adjacente au disque en rotation est habituellement désignée sous le nom de couche d'Ekman, tandis que celle près du disque stationnaire est appelée la couche de Bodewadt. **Gauthier et ses collaborateurs** ont identifié et mesuré l'épaisseur des deux couches limites de leur dispositif expérimental en utilisant la visualisation laser (**Gauthier et al. 1999**).

I.1.3 Instabilités de cisaillement

Dans la configuration rotor-stator, où les deux disques tournent dans la même direction, l'écoulement présente des instabilités de couche limite qui se manifestent par des motifs axisymétriques ou spiralés. En revanche, lorsque les deux disques tournent en sens contraire (en contra-rotation), une nouvelle forme d'instabilité a récemment été observée à la fois expérimentalement et numériquement. Cette nouvelle instabilité, spécifique à l'écoulement en contra-rotation, est caractérisée par un cisaillement qui conduit, lorsque le rapport d'aspect R/h est faible, à la formation d'un ensemble de tourbillons disposés selon un motif polygonal. Avec l'augmentation du rapport d'aspect, ce motif évolue progressivement vers un réseau de tourbillons spiralés, connus sous le nom de spirales négatives (se dirigeant vers le centre dans le sens opposé au disque le plus rapide). La raison de cette instabilité particulière dans l'écoulement en contra-rotation réside dans la configuration de base de l'écoulement, illustrée dans la (**figure I-3**).

À un rapport de contra-rotation suffisamment élevé, chaque disque tend à développer une couche limite centrifuge. L'écoulement sortant associé au disque le plus rapide entraîne une recirculation centripète à la périphérie du disque le plus lent en raison du confinement latéral. La compétition entre les couches limites centrifuge et centripète sur le disque le plus lent conduit à la formation d'un cercle de stagnation, entraînant le détachement de la couche limite centripète et la formation d'une couche de cisaillement libre entre les deux disques. Cette couche de cisaillement peut éventuellement devenir instable à des nombres de Reynolds suffisamment élevés (**Hide et Titman, 1967 ; Rabaud et Couder, 1983 ; Moisy et Pasutto, 2002**)

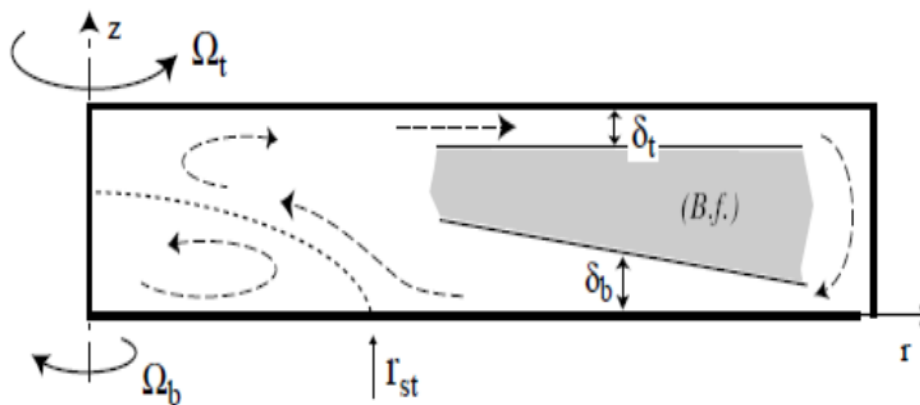


Figure I-3: Schéma de l'écoulement entre disques en contre-rotation, δ_t et δ_b sont les épaisseurs de couches limites du disque supérieur (rapide) et inférieur (**Moisy et Pasutto, 2002**) .

I.1.4 Ecoulement MHD

L'influence des champs magnétiques se fait sentir dans de nombreux écoulements, qu'ils soient naturels ou artificiels. Dans l'industrie, les champs magnétiques sont largement utilisés pour diverses applications telles que le chauffage, le pompage, l'agitation et la séparation des métaux liquides. L'étude de ces phénomènes d'écoulement est connue sous le nom de magnétohydrodynamique (MHD).

Les fluides concernés doivent être électriquement conducteurs mais non magnétiques. Les champs magnétiques offrent un moyen polyvalent et non invasif de contrôler le mouvement des métaux liquides. Ils peuvent repousser les surfaces des métaux liquides, atténuer les mouvements indésirables et stimuler les mouvements dans un liquide qui serait autrement immobile. Un champ magnétique statique peut même supprimer complètement le mouvement d'un liquide électriquement conducteur .

Même un champ magnétique de faible intensité peut fournir une force de freinage électromagnétique suffisante pour réduire considérablement la turbulence et l'instabilité dans la plupart des mouvements impliqués, éliminant ainsi de nombreux micro-défauts dans le cristal. Le taux de réduction de l'instabilité dépend à la fois de la force et de l'orientation du champ magnétique appliqué par rapport à la circulation convective (Davidson, 2001; Bessaïh et al., 1999).

I.2 Revue bibliographique.

En 1921, **Von Karman** a présenté une solution simplifiée des équations de Navier-Stokes qui décrit un écoulement visqueux incompressible et stationnaire d'un fluide dans une région semi-infinie, généré par un disque tournant à l'infini. Cette solution n'est pas exprimée de manière analytique, car elle implique la résolution numérique de deux équations différentielles non linéaires ordinaires avec une seule variable indépendante. Si l'on note Ω_f la vitesse de rotation du fluide loin du disque et Ω_d la vitesse de rotation du disque lui-même, Von Kármán étudie le cas où ($\Omega_f = 0$; $\Omega_d \neq 0$).

Le mécanicien allemand **Bödewadt (1940)** est le premier à avoir décrit la situation idéalisée d'un fluide en rotation uniforme au-dessus d'une paroi immobile infinie. Il s'intéresse également au problème complémentaire d'un fluide en rotation uniforme à l'infini, freiné par un disque à l'arrêt ($\Omega_f \neq 0$; $\Omega_d = 0$). La couche limite correspondante est maintenant désignée sous le nom de "couche de Bödewadt", tandis que la couche limite dans le cas du disque en rotation est souvent appelée "couche de Kármán". Ainsi, la couche limite qui se développe dans le cas d'un disque infini en rotation surmonté d'un fluide lui aussi en rotation uniforme à un taux voisin ($\Omega_f \approx \Omega_d \neq 0$) est appelée "couche d'Ekman".

Batchelor (1951) a entrepris une étude analytique d'un écoulement généré par deux disques coaxiaux de rayon infini, contenant un fluide incompressible et visqueux. Ces deux disques tournent en sens opposé avec des vitesses angulaires différentes Ω séparés par une

distance arbitraire d . Il introduit ainsi un nombre de Reynolds Re basé sur d et la vitesse d'un des disques, tandis que le rapport des vitesses de rotation s constitue le deuxième paramètre adimensionnel du problème. Batchelor ne résout pas les équations de manière explicite, mais fournit des arguments qualitatifs sur la structure des écoulements à des nombres de Reynolds élevés. Les résultats obtenus par **Batchelor (1951)**, illustrés dans la **figure (I-4,5)**, présentent un profil axial de rotation caractérisé par deux couches limites près de chaque disque et deux zones de contre-rotation dans le volume de l'écoulement, séparées par une zone de transition. Le rôle des conditions aux limites est crucial pour obtenir des solutions de ce type, comme l'a souligné Batchelor.

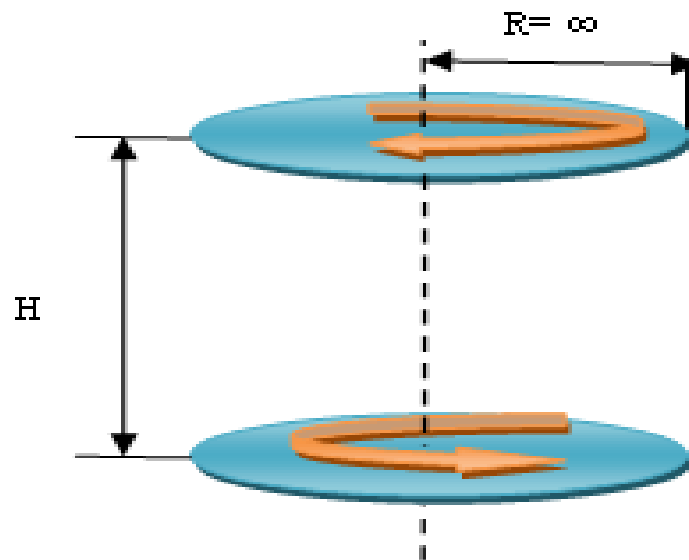


Figure I-4: La configuration proposée par Batchelor en 1951. Deux disques lisses infinis séparés par une distance H , se font face pour entraîner le fluide en rotation.

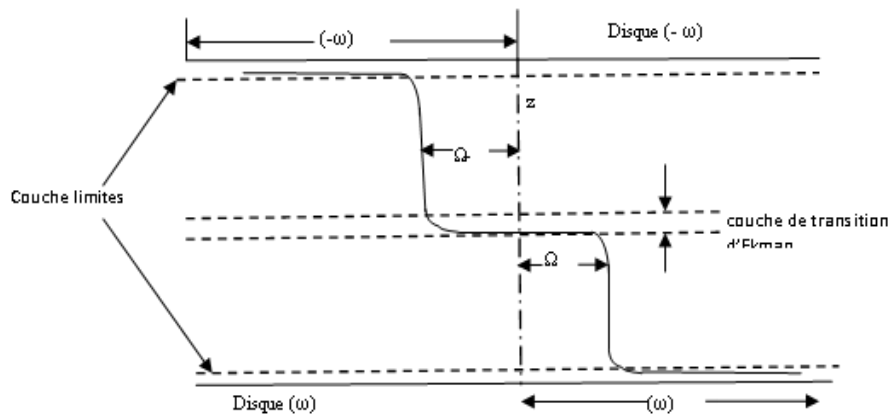


Figure I-5: distribution de la vitesse de rotation entre les disques en contre rotation proposé par Batchelor (1951) pour $Re \rightarrow \infty$

Deux ans plus tard, **Stewartson (1953)** a examiné de manière expérimentale et théorique le mouvement d'un fluide visqueux stable confiné entre deux disques rotatifs coaxiaux. Les observations expérimentales ont révélé que lorsque les disques tournent dans le même sens, le corps principal du fluide tourne également, tandis que lorsqu'ils tournent en sens opposés, le corps principal du fluide reste pratiquement immobile.

Mellor et ses collègues (1968) ont réalisé une étude combinant des approches numériques et expérimentales sur l'écoulement entre deux disques coaxiaux infinis, l'un étant rotatif et l'autre fixe. Les résultats des calculs numériques ont révélé la possibilité de plusieurs solutions pour un nombre de Reynolds donné, $\Omega.L^2/\nu$ (où Ω est la vitesse angulaire du disque en rotation et l représente l'espacement entre les deux disques). Trois branches de solutions distinctes ont été identifiées, chacune correspondant à des configurations comportant respectivement une, deux et trois cellules d'écoulement dans le plan méridien. La seconde partie de l'étude présente les résultats des mesures expérimentales pour des nombres de Reynolds variant entre 0 et 100.

Nguyen et ses collaborateurs (1975) ont utilisé une configuration similaire à celle de Mellor et ses collègues, en proposant à la fois des arguments physiques et numériques qui appuient une solution de type Batchelor.

D. Dijkstra et ses collaborateurs (1984) ont examiné, à la fois numériquement et expérimentalement, un écoulement provoqué par deux disques rotatifs finis situés à l'intérieur d'un cylindre. Pour cette configuration géométrique non infinie, ils ont résolu numériquement les équations stationnaires de Navier-Stokes sans faire d'hypothèse de similarité. Les données obtenues par stéréophotographie ont été en accord satisfaisant avec

les résultats numériques. Lorsque les disques tournent en sens opposé, un point de stagnation se forme sur le disque qui tourne plus lentement. Cette zone de stagnation est associée à une structure à deux cellules dans le plan méridien. Ce point de stagnation est observé expérimentalement sous la forme d'un anneau de particules sur le disque en rotation plus lente.

Escudier (1984) a employé la méthode de fluorescence induite par laser (fluorescence induite par laser) afin de représenter visuellement l'écoulement tourbillonnaire d'un fluide (glycérine/eau) qui occupe tout le volume d'une enceinte cylindrique avec un fond tournant. Il a observé le comportement de l'écoulement avec une, deux et trois bulles du breakdown du vortex et a établi un diagramme de stabilité (rapport d'aspect du cylindre H/R et nombre de Reynolds en rotation $\Omega R^2/\nu$), comme illustré dans la **figure (I-6)**. Sur ce diagramme, on peut observer les limites du nombre de Reynolds au-delà desquelles l'écoulement est oscillatoire, y compris pour les grands nombres de Reynolds, où le vortex breakdown peut se manifester par une, deux ou trois bulles stationnaires successivement. Une autre remarque que les expériences d'Escudier apportaient était la.

Unsteady = Transitoire

Steady = Permanent

Breakdown=Eclatement tourbillonnaires

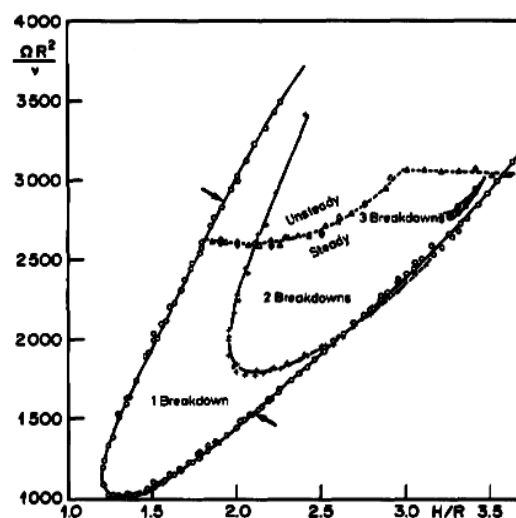


Figure I-6: Diagramme de stabilité btenuexpérimentalement par Escudier (1984).

Escudier et Cullen (1996) ont employé la méthode de la fluorescence induite par laser sur un liquide viscoélastique pour visualiser un écoulement tourbillonnaire stationnaire remplissant entièrement le volume d'une enceinte cylindrique avec un fond rotatif (**Fig.I-7**). Leur observation a révélé qu'un vortex intense se formait près du fond rotatif, avec un écoulement en spirale se développant à l'extérieur au-dessus de celui-ci. Ce vortex engendrait un deuxième vortex en contre-rotation, de moindre intensité, dans la

région du fond stationnaire. Dans certaines circonstances, ils ont également noté l'apparition d'un jet axial de fluide s'éloignant du fond rotatif, présentant une structure de double vortex dans les liquides viscoélastiques légers et les liquides élastiques à faible nombre de Reynolds.

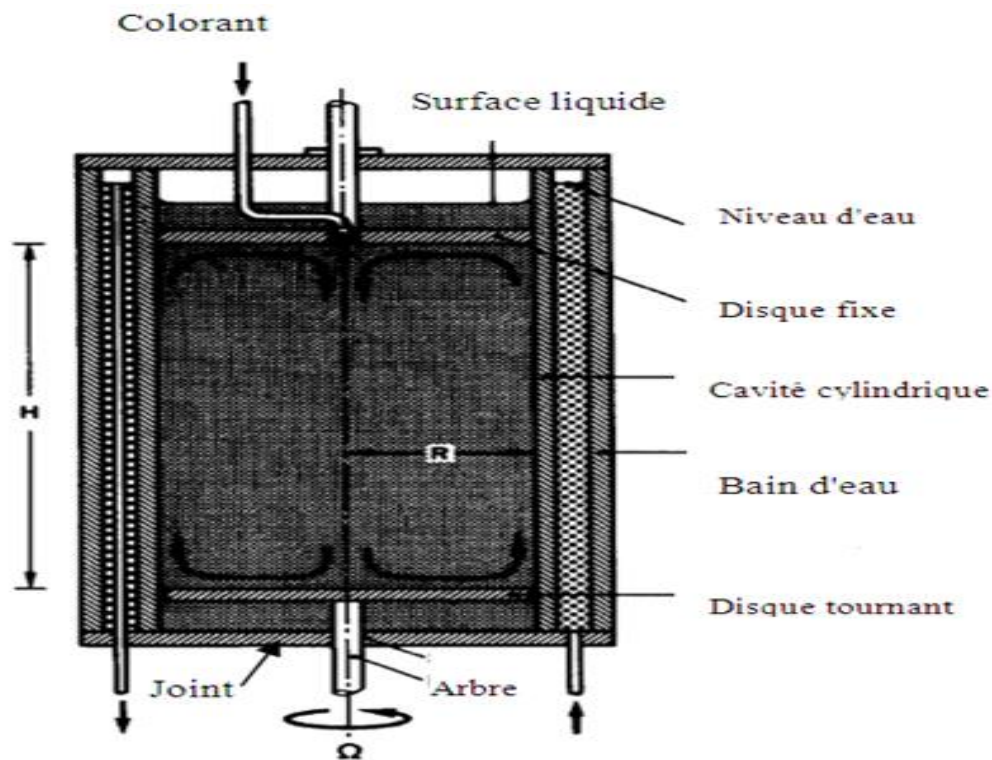


Figure I-7: Dessin schématique d'expérience (Escudier et Cullen, 1996).

Vogel (1968, 1975) a mis en place une configuration de base consistant en un cylindre droit contenant le fluide considéré, avec un disque de fond en rotation. Cette configuration était la première à être utilisée dans ses expériences, mettant en lumière la possibilité pour un vortex (tourbillon) de subir un arrêt ou une panne, phénomène nommé "vortex breakdown". Il a également établi une courbe délimitant les conditions dans lesquelles le vortex breakdown se produit, représentant les limites de stabilité dans le plan $(H/R, Re = \Omega R^2 / \nu)$, où R désigne le rayon du cylindre, H sa hauteur et Re le nombre de Reynolds rotationnel.

Ronnenberg (1977) a mené des expériences avec $H/R = 1.59$ et $\Omega R^2 / \nu = 1580$, au cours desquelles il a rapporté des mesures détaillées de la structure globale du fluide, confirmant ainsi l'existence du phénomène de vortex breakdown observé dans les expériences de Vogel. Il a également démontré de manière quantitative qu'un phénomène

de pompage d'Ekman se produisait, en accord presque parfait avec l'analyse de Von Kármán sur l'écoulement du fluide en contact avec un disque tournant infini.

Gelfgat et ses collègues (1996) ont entrepris une étude visant à examiner l'impact de la rotation des deux disques d'extrémité sur le déclenchement d'instabilités oscillatoires. Leur étude a examiné en détail les états stables ainsi que le début des instabilités oscillatoires dans un écoulement tournant axisymétrique d'un fluide newtonien incompressible confiné à l'intérieur d'un cylindre droit. Dans cette configuration, deux disques situés aux extrémités du cylindre tournent de manière indépendante l'un par rapport à l'autre .

Lopez et ses collaborateurs (2002) ont exploré un écoulement incompressible dans une enceinte cylindrique avec rotation du disque inférieur. Pour résoudre les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles, ils ont opté pour la méthode spectral-Galerkin. Leur approche numérique a produit des résultats en accord étroit avec les observations expérimentales. Parallèlement, **Lopez (1999)** a comparé la visualisation expérimentale avec les simulations numériques de la rupture de vortex dans des écoulements tourbillonnants laminaires induits par la rotation d'un disque inférieur. En outre, les simulations numériques ont mis en évidence l'émergence d'un écoulement oscillatoire, un aspect non clairement élucidé par les expériences de visualisation. Les études expérimentales ont révélé que cet écoulement subit des transitions à mesure que les deux paramètres, Re et H/R , varient. Une analyse détaillée du développement des caractéristiques de l'écoulement avec Re et H/R a été présentée, mettant en évidence le passage de l'état stable à d'autres régimes. Notamment, dans une région spécifique des paramètres, à savoir $Re \leq 3000$ et $H/R < 3,5$, l'écoulement reste majoritairement axisymétrique et laminaire, atteignant généralement un état stable.

Gauthier et ses al (2002) ont proposé une étude expérimentale sur un écoulement entre deux disques en rotation ($R/H = 20.9$), entourés par un cylindre, dans les cas de co-rotation et de contre-rotation. Cette configuration d'écoulement a donné lieu à une variété de modèles d'instabilité. Ils ont observé qu'en cas de contre-rotation avec un rapport de rotation plus élevé, une structure à deux cellules apparaît avec un cercle de stagnation sur le disque le plus lent. De plus, ils ont identifié un nouveau type de modèle d'instabilité, connu sous le nom de "spirales négatives", et ont présenté les principales caractéristiques

de ce modèle, y compris les temps de croissance, les modes critiques et les vitesses de phase.

Iwatsu. (2004) avait examiné numériquement les motifs des lignes de courant et les caractéristiques de transfert de chaleur de l'écoulement tourbillonnant du fluide visqueux, incompressible et axisymétrique engendré par la rotation constante du couvercle supérieur dans une enceinte cylindrique sous l'hypothèse de Boussinesq, et la différence fixe (ΔT) des températures imposées entre les disques supérieur ($T_0 + \Delta T/2$) et inférieur (du fond $T_0 - \Delta T/2$) avec des parois latérales adiabatiques. Il avait présenté des solutions d'état stable, obtenues pour les gammes de paramètres gouvernants, le nombre de Reynolds $10^2 \leq Re \leq 3.10^3$, le nombre de Richardson $0 \leq Ri = (\kappa \Delta T g \gamma^3 / R \Omega^2) \leq 1.0$, pour un fluide ayant un nombre de Prandtl $Pr = \nu / a = 1.0$ confiné dans un cylindre de rapport d'aspect $\gamma = H/R = 1.0$ (où κ est le coefficient d'expansion thermique, a est la diffusivité thermique). Diverses tracés des isothermes exposent la transition de la solution dominée par convection vers la solution dominée par conduction si Ri est augmenté. Alors, il était remarqué que quand Ri est augmenté, une structure de couche horizontale apparaît dans la moitié inférieure avec une distribution verticalement linéaire de la température, et pour des valeurs intermédiaires de Ri , c.-à-d. $0 < Ri < 1.0$, des séparatrices apparaissent dans l'écoulement sur le disque de fond en fonction des valeurs de Re et Ri . Ainsi, qu'une classification en plusieurs types différents des motifs des écoulements dans le plan (Re , Ri) avait été donnée. Dans un autre article d'**Iwatsu (2005)** a poursuivi ses investigations numériques sur les écoulements stables tourbillonnants de fluide visqueux incompressible dans une enceinte cylindrique, cette fois-ci induits par la rotation du disque de fond à une vitesse angulaire constante. L'étude paramétrique a couvert un large intervalle de nombres de Reynolds et de rapports d'aspect du conteneur, révélant une diversité de motifs d'écoulement en fonction des paramètres du système. Les résultats ont été comparés aux études expérimentales et numériques antérieures, fournissant ainsi une compréhension approfondie des différents régimes d'écoulement possibles.

Omi et Iwatsu (2005) ont mené une étude numérique sur les écoulements tourbillonnants de fluide de Boussinesq confinés entre deux disques tournants en co-/contre-rotation dans un récipient cylindrique. Leur analyse a porté sur une gamme étendue de paramètres, notamment le nombre de Reynolds, Re , $100 \leq Re \leq 2000$ le nombre de Richardson, Ri , $0 \leq Ri \leq 1$ et le nombre de Prandtl, Pr , $Pr = 1$. Le rapport entre la vitesse angulaire du disque supérieur et le disque inférieur, s , $-1 \leq s \leq 1$. Le rapport d'aspect de

cylindre: $h = 2,0$. Dans le cas d'une différence de température négligeable ($Ri \approx 0$) et Re augmenté, le fluide intérieur tourne à une vitesse angulaire intermédiaire des deux disques d'extrémité pour le cas de co-rotatifs ($s > 0$). Lorsque les deux disques sont en contre rotation ($s < 0$), on s'est crée un écoulement de cisaillement avec recirculation méridienne.

En cas de différence de température importante, l'aspiration d'Ekman est supprimée et la couche limite de la paroi latérale disparaît à mi-hauteur du cylindre. Avec différents paramètres donnés, l'écoulement secondaire dans la section méridienne du récipient cylindrique présente différents types de tourbillons. Ces modèles d'écoulement sont présentés sous forme de diagrammes sur le plan (s, Re) et le plan (s, Ri).

Mahfouz et Badr (1999) ont abordé la problématique de la convection mixte (forcée et naturelle) autour d'un cylindre horizontal effectuant un mouvement oscillant rotatoire dans un fluide immobile de dimensions infinies. Alors que la convection forcée découle de l'oscillation du cylindre, la convection naturelle est engendrée par les forces de poussée. Le processus de transfert de chaleur est régi par le nombre de Rayleigh (Ra), le nombre de Reynolds (Re), et la fréquence d'oscillation adimensionnelle (S). Leur étude a embrassé une plage de valeurs de Ra allant jusqu'à 10^3 , Re jusqu'à 400, et S jusqu'à 0.8. Les résultats ont révélé que, pour un même nombre de Rayleigh Ra , le taux moyen de transfert de chaleur se situait entre deux valeurs limites. La première correspondait au taux de transfert de chaleur stable résultant de la convection naturelle autour d'un cylindre fixe, tandis que la seconde représentait le taux de transfert de chaleur stable observé lorsque le cylindre tournait fermement à une vitesse égale à sa vitesse maximale d'oscillation rotative. Pour de faibles valeurs de f , le nombre de Nusselt moyen au fil du temps se rapprochait de celui du cylindre fixe pour un même Ra , et l'effet de la fréquence adimensionnelle f se limitait uniquement à la variation d'amplitude du nombre de Nusselt fluctuant.

Kilict et al. (1994) ont mené une étude combinée, à la fois numérique et expérimentale, sur l'écoulement entre des disques contre-rotatifs pour des valeurs de $-1 \leq \Gamma \leq 0$ et $Re\phi = 105$, où Γ représente le rapport des vitesses entre le disque le plus lent et celui le plus rapide, et $Re\phi$ est le nombre de Reynolds en rotation du disque le plus rapide. Lorsque $\Gamma = 0$, correspondant au cas rotor-stator, les calculs laminaires et turbulents, ainsi que les mesures expérimentales, ont révélé un écoulement laminaire de type Batchelor : un écoulement radial se forme dans la couche limite sur le disque en rotation, un écoulement se produit sur le disque fixe, avec un noyau de fluide en rotation entre les deux. Pour $\Gamma = -$

1, les calculs laminaires ont montré un écoulement de type Batchelor : un écoulement radial se forme sur les deux disques, avec un écoulement dans la couche de cisaillement libre dans le plan médian, et un noyau de fluide en rotation persiste. Les calculs de turbulence et les mesures de vitesse pour $\Gamma = -1$ ont révélé un écoulement de type Stewartson : l'écoulement radial se produit dans les couches limites laminaires des disques. Pour les valeurs intermédiaires de Γ , la transition d'un flux de type Batchelor à un flux de type Stewartson est associée à une structure à deux cellules, séparées par une ligne de courant stagnante sur le disque le plus lent. Un écoulement de type Batchelor se forme radialement vers l'extérieur du point de stagnation, tandis qu'un écoulement de type Stewartson se forme radialement vers l'intérieur. Les calculs turbulents concordent principalement avec les vitesses mesurées pour $\Gamma = 0$ et $\Gamma = -1$, où les écoulements de type Batchelor ou Stewartson sont observés ; cependant, il existe un moindre accord pour les valeurs intermédiaires de Γ , notamment pour $\Gamma = -0,4$ où une double transition entre les écoulements de type Batchelor et Stewartson, ainsi qu'entre les écoulements laminaires et turbulents, se produit dans la structure à deux cellules.

Okulov et al. (2005) ont entrepris une étude numérique de la formation de recirculations de bulles dans un écoulement de fluide visqueux stationnaire, confiné dans une enceinte cylindrique avec des disques d'extrémités en co/contre-rotation (**Fig.I-8**). Ils ont varié le nombre de Reynolds et le rapport d'aspect H/R , explorant divers régimes d'écoulement axisymétrique. Leurs observations ont révélé que la topologie des structures de vortex était intimement liée à un changement de la symétrie hélicoïdale des lignes de vortex. Les calculs ont démontré que les modifications de symétrie étaient dues à l'augmentation du nombre de Reynolds, et que l'inversion de l'écoulement le long de l'axe de symétrie était associée à une augmentation du paramètre de torsion de la ligne de vortex. Pour tous les cas d'écoulement étudiés, quelle que soit la valeur du rapport d'aspect et du nombre de Reynolds, les chercheurs ont observé que le paramètre de torsion du vortex central (l'axe de symétrie) atteignait une valeur seuil de $K=0.6$ (où K est le paramètre adimensionnel local de torsion des lignes de vortex) au point où l'inversion de l'écoulement se produisait.

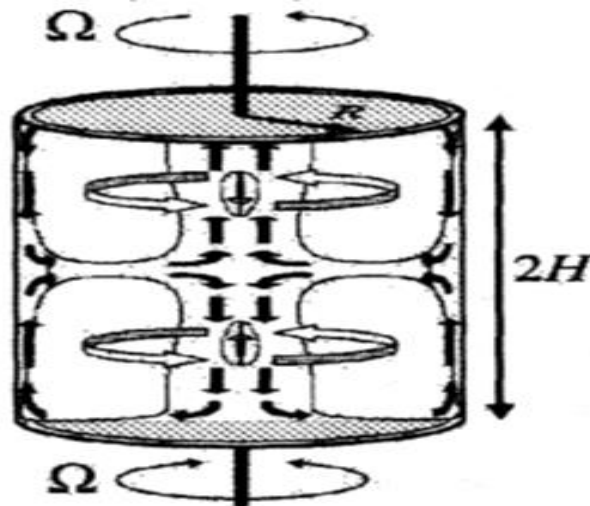


Figure I-8: Dessin de domaine d'écoulement d'après Okulov et al. (2005).

Xinjun (2003) a présenté des simulations numériques des équations de Navier-Stokes pour étudier l'écoulement axisymétrique d'un fluide en rotation induit par la rotation des couvercles d'extrémités d'un cylindre à différentes vitesses par rapport à la paroi latérale. L'étude s'est concentrée sur le comportement transitoire des zones de recirculation dans le plan méridien au fil du temps, avant que les régimes stables ne s'établissent. Les résultats ont révélé des changements significatifs dans la structure topologique des motifs des lignes de courant méridiennes au fil du temps. L'évolution temporelle des motifs a montré des similitudes entre le démarrage et l'arrêt brusque des parois en mouvement aux premiers instants mais des différences par la suite. Xinjun a utilisé une discrétisation par différences finies centrales du second ordre pour les dérivées spatiales, ainsi qu'une approximation par moyenne pondérée avec un facteur de pondération pour les dérivées temporelles. Il a identifié quatre types de motifs topologiques de base des zones de recirculation dans le plan méridien. (**Fig. I-9**).

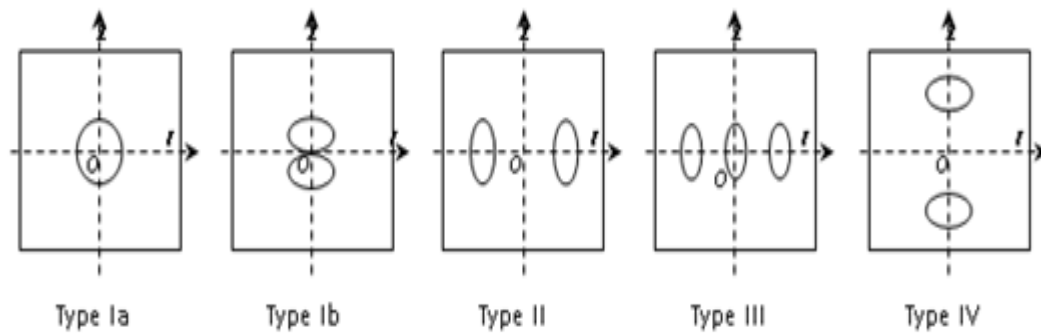


Figure I-9 : Différent type de motifs topologique des zones de recirculation dans le plan.

Bontoux (2007) a démontré comment il est possible de modifier et de contrôler l'écoulement d'un fluide dans une enceinte cylindrique de rapport d'aspect ($\gamma = H/R = 4$), induit par la rotation d'un disque inférieur, avec l'autre extrémité constituée d'une surface libre (**Fig. I-10**). La dynamique de l'écoulement a été explorée à l'aide de solutions numériques résolvant les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles transitoires, basées sur des approximations spectrales d'ordre élevé. Les résultats ont montré que la présence d'une surface libre favorise le début de la périodicité, avec un nombre de Reynolds critique d'environ 15 fois inférieur à celui du cas avec une couverture rigide. De plus, les bifurcations se sont produites sur une plage beaucoup plus courte de nombres de Reynolds entraînant rapidement un régime multifréquence avec plus de cinq fréquences distinctes. Dans le régime instable le vortex breakdown se caractérise par une zone ovale et asymétrique de recyclage attachée à la surface libre autour de l'axe du récipient. Avec l'augmentation de la rotation, la ligne circulaire de stagnation sur la surface libre prend une forme plus irrégulière et commence à se déplacer autour de l'axe du cylindre dans le même sens que le disque rotatif. Les chercheurs ont démontré que la couche limite verticale contrôle le processus de vortex breakdown et la transition vers l'instabilité.

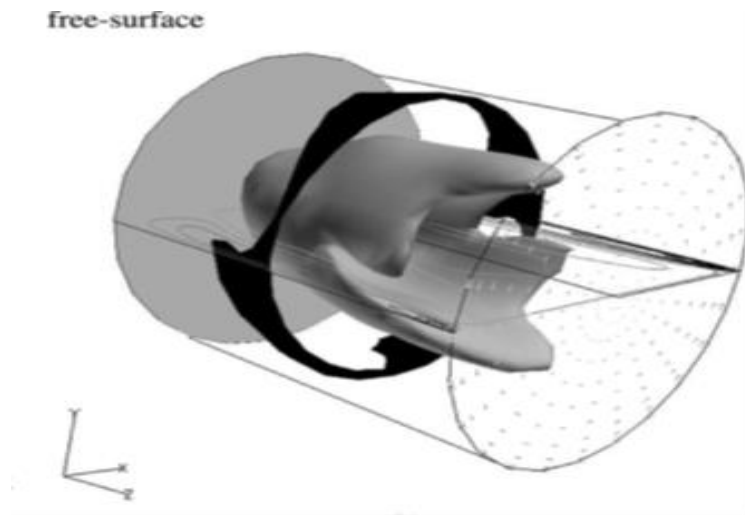


Figure I-10: Ecoulements tridimensionnels avec une bulle axisymétrique de vortex breakdown fixée à la surface d'après Serre et Bontoux (2007).

Mahfoud et Bessaïh (2012) ont réalisé une étude numérique portant sur un écoulement tournant axisymétrique confiné dans une cavité cylindrique, avec et sans la présence d'un champ magnétique. Ils ont utilisé un code de calcul basé sur la méthode des volumes finis pour résoudre numériquement les équations régissant ce phénomène. Leur étude a examiné un cas stable, en comparant l'écoulement induit par la co-rotation des disques d'extrémités avec celui résultant de leur contre-rotation. Dans le cadre de régimes transitoires, ils ont présenté des simulations numériques pour diverses valeurs du nombre de Hartmann ($Ha=0, 5, 10, 20$ et 30) et différentes valeurs du nombre de Richardson ($Ri=0, 0.5, 1, 2, 4$). Ils ont analysé l'impact de ces paramètres sur le nombre de Reynolds critique (Re_{cr}) et la fréquence d'oscillation critique (F_{cr}). Des diagrammes de stabilité ont été élaborés pour mettre en évidence la relation entre le nombre de Reynolds critique et l'augmentation du nombre de Hartmann Ha , pour différentes valeurs du nombre de Richardson Ri .

Mahfoud et ses collègues (2016) ont entrepris une simulation numérique d'un écoulement engendré par deux disques tournants en co-rotation à l'intérieur d'une enceinte cylindrique, caractérisée par un rapport d'aspect $H/R=2$. Le fluide utilisé avait un faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$) et était soumis à un gradient de température ainsi qu'à un champ magnétique orienté verticalement. Pour résoudre les équations régissant ce phénomène, ils ont employé la méthode des volumes finis, en prenant également en compte les équations d'énergie et de potentiel, ainsi que les conditions aux limites appropriées. Les résultats obtenus étaient en concordance avec les études antérieures. Ils

ont observé une augmentation du nombre de Reynolds, entraînant la perte de stabilité de l'état de base axisymétrique, donnant lieu à des motifs de vortex circulaires et des ondes en spirale. Dans le cas de convection mixte, ils ont noté la disparition du mode axisymétrique au profit d'un mode asymétrique $m = 1$. De plus, ils ont constaté que les seuils primaires, correspondant aux modes $m = 1$ et 2 , augmentaient avec l'élévation du nombre de Hartmann (Ha). Ils ont ainsi conclu que lorsque l'amplitude du champ magnétique dépassait une certaine valeur critique, l'instabilité devenait une bifurcation constante. Enfin, ils ont établi des diagrammes de stabilité basés sur les résultats numériques de leur étude, illustrant l'évolution des seuils primaires en fonction du nombre de Hartmann pour différentes valeurs du nombre de Richardson.

Ben Hadid et ses collègues (1997) ont utilisé une méthode numérique spectrale pour résoudre directement les équations de Navier-Stokes décrivant l'écoulement tridimensionnel oscillatoire d'un métal liquide conducteur confiné dans une cavité cylindrique horizontale de longueur modérée. Leur analyse portait sur les signaux temporels, les propriétés de symétrie et les bilans d'énergie caractérisant les oscillations de cet écoulement, ainsi que sur l'amortissement de ces oscillations par un champ magnétique vertical jusqu'à la stabilisation de l'écoulement. Cette étude de l'écoulement induit par un champ magnétique tournant dans un métal liquide confiné dans une enceinte cylindrique contribuait aux recherches sur la stabilisation des écoulements industriels. Par exemple, l'étude menée par **Marty et ses collaborateurs (1999)** visait à comprendre en détail l'interaction entre le champ magnétique rotatif et l'écoulement du fluide étudié. Ils ont démontré que l'application d'un champ magnétique rotatif très modéré à un mouvement convectif du fluide, initialement instable, pouvait restaurer la stabilité de l'écoulement.

Bessaïh et ses collaborateurs (2003) ont entrepris une étude numérique et analytique de l'écoulement laminaire stable généré par un disque tournant au sommet d'un cylindre avec un rapport d'aspect $H/R = 1$, rempli d'un métal liquide et soumis à un champ magnétique axial. Ils ont résolu les équations régissant cet écoulement en utilisant la méthode des volumes finis. Ils ont développé différentes formules analytiques de vitesse et ont démontré que, en présence d'un champ magnétique, les profils de vitesse analytiques près des disques aux extrémités étaient en excellent accord avec ceux obtenus par des simulations numériques, surtout pour des valeurs élevées du paramètre d'interaction magnétique N . Ainsi, ils ont souligné l'importance de la conductivité électrique des parois du conducteur (les deux disques et la paroi latérale) dans la régulation de l'écoulement.

Kharicha et ses collègues (2004) ont utilisé le logiciel commercial Fluent V. 5 pour obtenir une solution numérique du modèle d'écoulement MHD laminaire, permanent, induit par un disque tournant au sommet d'une cavité cylindrique remplie de métal liquide. Ils ont examiné les effets du champ magnétique, des conductivités électriques des parois et de l'épaisseur pariétale. Les paramètres appropriés pour ce type d'écoulements ont été variés $Re \geq 100$ et le nombre de Hartmann $0 \leq Ha \leq 100$, ce qui correspond à une gamme de paramètres d'interaction $0 \leq N = Ha^2/Re \leq 100$. Malgré l'hypothèse d'un très faible nombre de Reynolds magnétique R_m , le champ magnétique induit par ce petit R_m a été pris en compte dans la formulation de leur problème. Leur étude visait à prédire l'influence d'un champ magnétique sur le taux de corrosion d'un métal liquide sur une paroi métallique. Ils ont résolu l'équation de concentration pour le produit de corrosion et ont montré que le transfert de masse évolue avec le nombre de Hartmann Ha . De plus, pour une valeur fixe de Ha , le transfert de matière est plus élevé pour des parois électriquement conductrices que pour des parois isolantes.

Kaddeche et ses collaborateurs (2003). Une analyse numérique basée sur la théorie linéaire de la stabilité a été réalisée pour évaluer l'impact d'un champ magnétique horizontal sur les modes marginaux d'une couche fluide avec un gradient de température horizontal. L'accent a été mis sur l'effet de l'orientation du champ magnétique sur les seuils critiques et la nature des modes instables. Les résultats indiquent que lorsque le champ magnétique est incliné dans le plan horizontal, les écoulements de type Hadley peuvent développer des ondes obliques, ce qui n'était pas observé dans les cas sans champ magnétique ou avec des champs magnétiques verticaux, transversaux ou longitudinaux. De plus, l'effet stabilisant présente un comportement asymptotique nouveau dans ces conditions.

Bessaïh et ses collaborateurs (2009) se sont penchés sur la stabilité magnétohydrodynamique d'un écoulement rotatif dans un cylindre contenant du métal liquide ($Pr=0.015$), avec un rapport d'aspect de 2, soumis à un gradient vertical de température et à un champ magnétique. Ils ont utilisé la méthode des volumes finis pour résoudre les équations de continuité, de quantité de mouvement, d'énergie et de potentiel électrique. Leur recherche a révélé que sans champ magnétique, le nombre de Reynolds critique décroît en fonction du nombre de Richardson (avec des valeurs de Reynolds critiques ($Re_{cr}=2575, 924, 802$ et 606) pour des valeurs de Richardson correspondantes de

($Ri=0, 0.5, 1.0$ et 2.0). En présence d'un champ magnétique vertical, la stabilité de l'écoulement est maintenue pour des valeurs plus élevées du nombre de Reynolds. Ils ont élaboré un diagramme de stabilité basé sur leurs résultats numériques, mettant en évidence la relation entre le nombre de Reynolds critique et l'augmentation du nombre de Hartmann(Ha), pour différentes valeurs du nombre de Richardson. En conclusion, cette étude confirme la possibilité de stabiliser l'écoulement du métal liquide en convection mixte grâce à l'application d'un champ magnétique axial.

Mittal et ses collègues (2005) ont exposé une simulation numérique visant à analyser la convection naturelle bidimensionnelle des métaux liquides soumis à un champ magnétique transversal. Leur étude spatio-temporelle a révélé que l'écoulement oscillant évolue vers un régime stable avec l'augmentation de l'intensité du champ magnétique appliqué, pour une gamme du nombre de Rayleigh (Ra) comprise entre 105 et 108. Même au sein de cette plage de valeurs de (Ra), la magnitude du champ magnétique a notablement réduit l'amplitude des vitesses et des oscillations apériodiques de toute variable dynamique. Ils ont ensuite analysé l'interaction entre les forces de flottabilité et les forces électromagnétiques dans le développement et la formation spatio-temporelle des motifs de courant. Pour approfondir cette interaction, ils ont varié l'intensité du champ magnétique appliqué en modifiant le nombre de Chandrasekhar Q ($Q = \sigma H^2 B_0^2 / \rho_0 \nu = Ha^2$) sur une plage de valeurs de Ra , tout en résolvant numériquement les équations bidimensionnelles de Navier-Stokes, d'énergie et de magnétohydrodynamique MHD pour des métaux liquides à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$), cas des semi-conducteurs confinés dans des cavités carrées de profondeur H .

CONCLUSION

Au cours de ce chapitre, nous avons abordé les concepts liés aux instabilités des écoulements tournants (écoulement de Von Karman). Nous avons également exposé une étude bibliographique sur l'écoulement tournant avec MHD, en examinant les diverses études menées dans ce domaine pour différentes configurations. Dans le chapitre suivant, nous examinons en détail le modèle mathématique et la géométrie employée.

Chapitre II

Géométrie-modèle

Mathématique, et Méthode
numérique

CHAPITRE II : Géométrie-modèle mathématique, et Méthode numérique

Le but principal de ce chapitre est de présenter les équations ainsi que les conditions aux limites qui régissent notre étude. Ces équations mettent en évidence le comportement des fluides conducteurs, tels que les métaux liquides, en convection laminaire mixte, qu'elle soit naturelle ou forcée. Elles reposent sur les lois physiques fondamentales : la conservation de la masse (continuité), la quantité de mouvement (Navier-Stokes) et l'énergie. Cependant, en présence d'un champ magnétique, l'apparition d'une nouvelle force, la force de Lorentz, au sein du liquide (écoulement MHD), ajoute une autre équation pour compléter le système. Les démonstrations nécessaires à l'obtention des équations mentionnées ci-dessus, décrivant la dynamique de l'écoulement de fluide laminaire avec transfert de chaleur, sont bien expliquées et illustrées dans de nombreux ouvrages de mécanique des fluides et de transferts thermiques, comme par exemple (Lienhard, 2005).

II.1 Ecoulement axisymétrique

Le système physique décrit (**Fig. II.1**) est une enceinte de forme conique tronquée, avec des rayons R_1 et R_2 et une hauteur H , où le rapport d'aspect est fixé ($\gamma = H/R = 2$). À l'intérieur de l'enceinte se trouve de l'aluminium liquide caractérisé par un faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$). Le disque inférieur tourne à une vitesse angulaire constante Ω , et est maintenu à la température T_h , tandis que le disque supérieur reste fixe, et est maintenu à la température T_c ($T_h > T_c$). La paroi latérale rigide est adiabatique. Le système peut être soumis à un champ magnétique B de magnitude constante, uniforme et orienté verticalement vers le haut. Les parois de l'enceinte conique sont électriquement isolées.

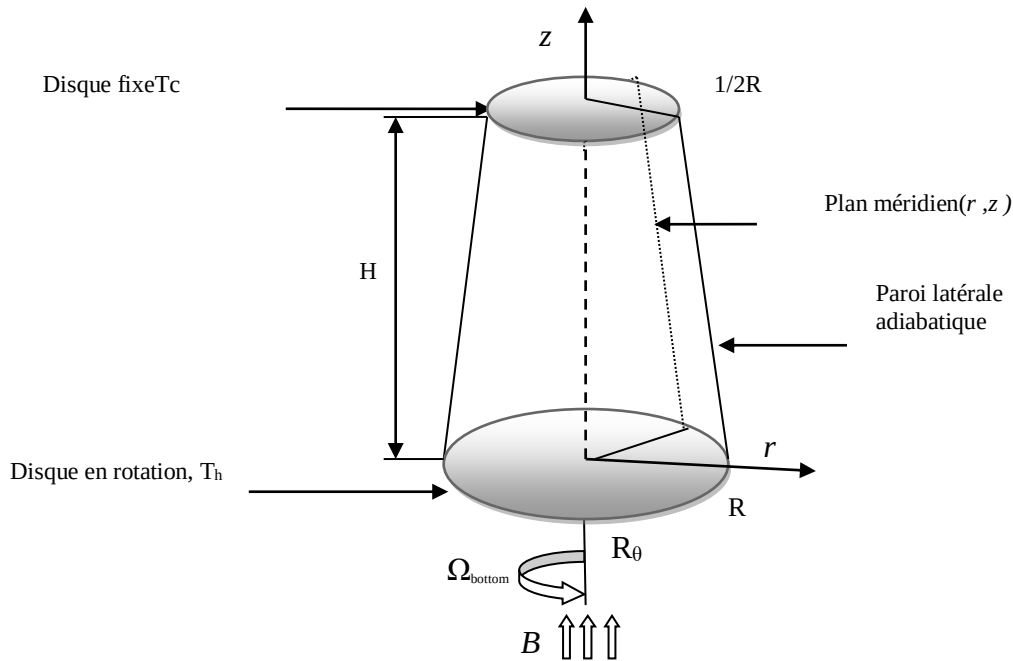


Figure II-1 : Géométrie du problème axisymétrique.

1.1 Hypothèses simplificatrices

Afin d'aborder la résolution des équations régissant la convection mixte MHD d'un métal liquide, relatif à la géométrie déjà montrée, on va adopter les hypothèses de simplifications suivantes:

- L'écoulement avec tourbillon (swirl), laminaire et axisymétrique.
- Le métal liquide est incompressible $\rho = \text{cste}$ et Newtonien.
- L'effet Joule est négligeable.
- La dissipation visqueuse est négligeable.
- Le métal liquide est non-magnétisé puisque la perméabilité magnétique $\mu_m = 1$.
- L'écoulement n'affecte pas le champ magnétique, c.-à-d. le nombre de Reynolds magnétique est très petit ($R_m = \mu_0 \sigma \Omega R^2 \ll 1$).
- Les propriétés physiques du métal liquide (σ, λ, α et ν) sont supposées constantes.
- L'approximation de Boussinesq est valide : Si la variation de densité n'est pas large, on peut considérer la densité comme constante dans les termes transitoire et convectif, et la traiter comme variable seulement dans le terme gravitationnel

suivant z' , en sachant qu'elle est exprimée par la formule : $(\rho - \rho_0)g = \rho_0 g\beta(T-T_0)$

(Lienhard IV, 2005)

Où ρ_0 est la masse volumique de référence, et β est le Coefficient d'expansion thermique à pression constante.

II.2 Equations de transport

Après l'application des hypothèses de simplification susmentionnées, les équations générales régissant l'écoulement secondaire du métal liquide (**Fig. II.1**) dans le plan méridien, en considérant les forces de buoyancy (phénomène de convection mixte). Ces équations rapportées à un système de coordonnées cylindriques (r', z', θ) sont données selon la description Eulérienne par:

- **Equation de Continuité :**

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial(r'u')}{\partial r'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} = 0 \quad (\text{II.1})$$

- **Equation de quantité de mouvement radiale :**

$$\rho \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial r'} + v' \frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{w'^2}{r'} \right) = -\frac{\partial P'}{\partial r'} + \mu \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial u'}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} - \frac{u'}{r'^2} \right) + f'_{Lr'} \quad (\text{II.2})$$

- **Equation de quantité de mouvement axiale :**

$$\rho \left(\frac{\partial v'}{\partial t} + u' \frac{\partial v'}{\partial r'} + v' \frac{\partial v'}{\partial z'} \right) = -\frac{\partial P'}{\partial z'} + \mu \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial v'}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} \right) + \rho g \beta (T - T_c) + f'_{Lz'} \quad (\text{II.3})$$

- **Equation de quantité de mouvement azimutale (Equation de swirl) :**

$$\rho \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + u' \frac{\partial w'}{\partial r'} + v' \frac{\partial w'}{\partial z'} + \frac{u'w'}{r'} \right) = \mu \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial w'}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} - \frac{w'}{r'^2} \right) + f'_{L\theta} \quad (\text{II.4})$$

Où u', v', w' représentent respectivement les composantes de la vitesse radiale, axiale et azimutale, g est l'accélération de la pesanteur, ρ est la masse volumique du fluide et $f'_{Lr'}, f'_{Lz'}, f'_{L\theta}$ sont respectivement les composantes de la force électromagnétique de Lorentz radiale, axiale et azimutale, cette force EM est donnée par la formule (**Bessaïhet al. , 2003**).

$$\vec{f}_L' = \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (\text{II.5})$$

On note que pour l'écoulement secondaire la situation est purement bidimensionnelle (conséquence de l'axisymétrie)

- **Equation de l'énergie :**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u' \frac{\partial T}{\partial r'} + v' \frac{\partial T}{\partial z'} = \alpha \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r} \left(r' \frac{\partial T}{\partial r'} \right) + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z'^2} \right) \right) \quad (\text{II.6})$$

Où $\alpha = \lambda / \rho C_p$, est la diffusivité thermique du liquide, λ est sa conductivité thermique et C_p sa chaleur spécifique à pression constante.

- **Equation du potentiel électrique :**

Cette équation est introduite au système d'équations gouvernant, lors de la présence du champ magnétique axial pour compléter ce système vis-à-vis l'apparition d'une nouvelle force de volume (Force de Lorentz), dont les composantes sont les termes f_{Lr}' , f_{Lz}' , $f_{L\theta}'$ ajoutés aux équations de Navier-Stokes (Eqs. (II.2-II.4)). En supposant que la conductivité électrique σ du fluide est isotrope, la loi d'Ohm sera:

En supposant que la conductivité électrique σ du fluide est isotrope, la loi d'Ohm sera:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II.7})$$

Où $\vec{j}$ est la densité volumique de courant et $\vec{E}$ le champ électrique local. Suivons dans son mouvement un élément fluide; dans un repère absolu, la dernière équation s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.8})$$

Où $\vec{V} = u' \vec{e}_r + v' \vec{e}_z + w' \vec{e}_\theta$ désigne le vecteur vitesse dans le plan méridien et $\vec{B} = B \vec{e}_z$

(axial): le vecteur du champ magnétique, tandis que $\vec{e}_r, \vec{e}_z, \vec{e}_\theta$ sont les vecteurs unitaires respectivement des directions radiale, axiale et azimutale dans le repère absolu.

Aussi puisque, le courant électrique est conservé :

$$\vec{\text{Rot}} \vec{E} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \quad (\text{II.9})$$

Et

$$\text{div} \vec{j} = 0 \quad (\text{II.10})$$

C.-à-d.: le courant électrique dérive d'un potentiel électrique φ . En substituant les équations (II.9) et (II.10) dans l'équation (II.8), on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \varphi + \vec{V} \wedge \vec{B}) = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = \text{div}(\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.11})$$

- **Champ magnétique axial**

Et explicitement en coordonnées cylindriques, l'équation du potentiel électrique φ s'écrit :

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial \varphi}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = B \left(\frac{w'}{r'} + \frac{\partial w'}{\partial r'} \right) \quad (\text{II.12})$$

Les composantes du vecteur densité de courant électrique :

$$j_r = \sigma \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial r'} + w' B \right) \quad (\text{II.13a})$$

$$j_z = \sigma \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z'} \right) \quad (\text{II.13b})$$

$$j_\theta = \sigma (-u' B) \quad (\text{II.13c})$$

Les composantes de la force EM $f'_{Lr}, f'_{Lz}, f'_{L\theta}$

$$f'_{Lr} = -\sigma u' B^2 \quad (\text{II.14a})$$

$$f'_{Lz} = 0 \quad (\text{II.14b})$$

$$f'_{L\theta} = \sigma B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r'} - w' B \right) \quad (\text{II.14c})$$

Ces formules sont exprimées en termes de quantités dimensionnelles.

II.1.3 Formes adimensionnelles des équations

Les expériences sur les flux sont fréquemment réalisées à l'aide de modèles, et les résultats sont présentés sous forme sans dimensions, permettant ainsi d'extrapoler vers les conditions réelles des flux. Cette même méthode peut également être appliquée aux études numériques. Les équations régissant ces phénomènes peuvent être transformées en une forme sans dimensions en utilisant une normalisation appropriée.

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes respectivement pour le temps, la longueur, la vitesse, la pression, la température et le potentiel électrique:

$$, \quad r = \frac{r'}{R}, \quad z = \frac{z'}{R}, \quad u = \frac{u'}{(\Omega R)}, \quad v = \frac{v'}{(\Omega R)}, \quad \tau = \frac{t}{(1/\Omega)}$$

$$, \quad P = \frac{P'}{\rho(\Omega R)^2}, \quad \Theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \quad \Phi = \frac{\varphi}{(\Omega R^2 B)}, \quad w = \frac{w'}{(\Omega R)}$$

Les équations adimensionnelles gouvernant le système s'écrivent alors :

- **Equation de Continuité :**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.15})$$

- **Equation de quantité de mouvement radiale :**

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{w^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) + NF_{Lr} \quad (\text{II.16})$$

- **Equation de quantité de mouvement axiale :**

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + Ri \cdot \Theta + NF_{Lz} \quad (\text{II.17})$$

- **Equation de quantité de mouvement azimutale (Equation de swirl) :**

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{uw}{r} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{w}{r^2} \right) + NF_{L\theta} \quad (\text{II.18})$$

- **Equation de l'énergie :**

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \Theta}{\partial r} + v \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.19})$$

- **Equation du potentiel électrique :**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (\text{II.20})$$

Avec: Le nombre de Prandtl : $\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$. Le nombre de Reynolds : $\text{Re} = \frac{\Omega R^2}{\nu}$. Le nombre

de Richardson: $Ri = \frac{Gr}{\text{Re}^2} = \frac{\beta g (T_h - T_c)}{\Omega^2 R}$, où $Gr = \frac{\beta (T_h - T_c) g R^3}{\nu^2}$ est le nombre de Grashof,

qui exprime le rapport des forces de gravitation aux forces de viscosité. Le nombre de

Rayleigh, $Ra = \text{Pr} \cdot Gr$. Le paramètre d'interaction : $N = \frac{Ha^2}{\text{Re}} = \frac{\sigma B^2}{\rho \Omega}$, qui représente le

ratio entre les forces électromagnétiques et celles d'inertie, et $Ha = BR \sqrt{\sigma / \rho \nu}$ est le

nombre de Hartmann, qui définit le rapport des forces électromagnétiques aux forces de viscosité. Dans les équations de quantité de mouvement (Eqs. (II.16-II.18)),

F_{Lr} , F_{Lz} , $F_{L\theta}$ sont respectivement les forces de Lorentz adimensionnelles dans les directions radiale, axiale et azimutale, dont les expressions sont obtenues après normalisation des composantes dimensionnelles f'_{Lr} , f'_{Lz} , $f'_{L\theta}$.

- **Champ magnétique axial**

$$F_{Lr} = -u \quad (\text{II.21a})$$

$$F_{Lz} = 0 \quad (\text{II.21b})$$

$$F_{L\theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - w \quad (\text{II.21c})$$

Les courants électriques adimensionnels dans les directions r, z et θ sont respectivement:

$$J_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + w \quad (\text{II.22a})$$

$$J_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{II.22b})$$

$$J_\theta = -u \quad (\text{II.22c})$$

II.1.4 Conditions aux limites et initiales

- **Les conditions initiales :**

Les conditions initiales sont prises pour chaque lancement de calculs comme étant la solution obtenue par le calcul antécédent (les répartitions de u, v, w, P, Φ et Θ dans le fluide). Toutefois, pour la première exécution, on a supposé que le liquide soit au repos et la répartition de température soit nulle, ainsi qu'un champ de potentiel électrique partout nul dans le volume de contrôle. Alors à $\tau = 0$ on aura

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \Theta = 0, \quad \Phi = 0 \quad (0 < r < 1, \quad 0 < z < \gamma) \quad (\text{II.23})$$

- **Les conditions aux limites :**

Les conditions aux limites des quantités adimensionnelles pour l'écoulement de swirl avec transfert de chaleur et un champ magnétique sont, pour un instant $\tau > 0$, Sur l'axe de symétrie:

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad (r = 0, \quad 0 \leq z \leq \gamma) \quad (\text{II.24a})$$

A la paroi latérale adiabatique et électriquement isolée :

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad \left(\frac{z}{4} - 1 \leq r \leq 1 - \frac{z}{4}, \quad 0 \leq z \leq \gamma \right) \quad (\text{II.24b})$$

Au disque inférieur chaud et en rotation

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = r, \quad \Theta = 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0, \quad 0 \leq r \leq 1) \quad (\text{II.24c})$$

Au disque supérieur froid et en contre-rotation

$$u=0, \quad v=0, \quad w=0, \quad \Theta=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}=0 \quad (z=\gamma, \quad 0 \leq r \leq 0.5) \quad (\text{II.24e})$$

En récapitulation, ces conditions aux limites sont visualisées schématiquement sur la **figure (II-2)**.

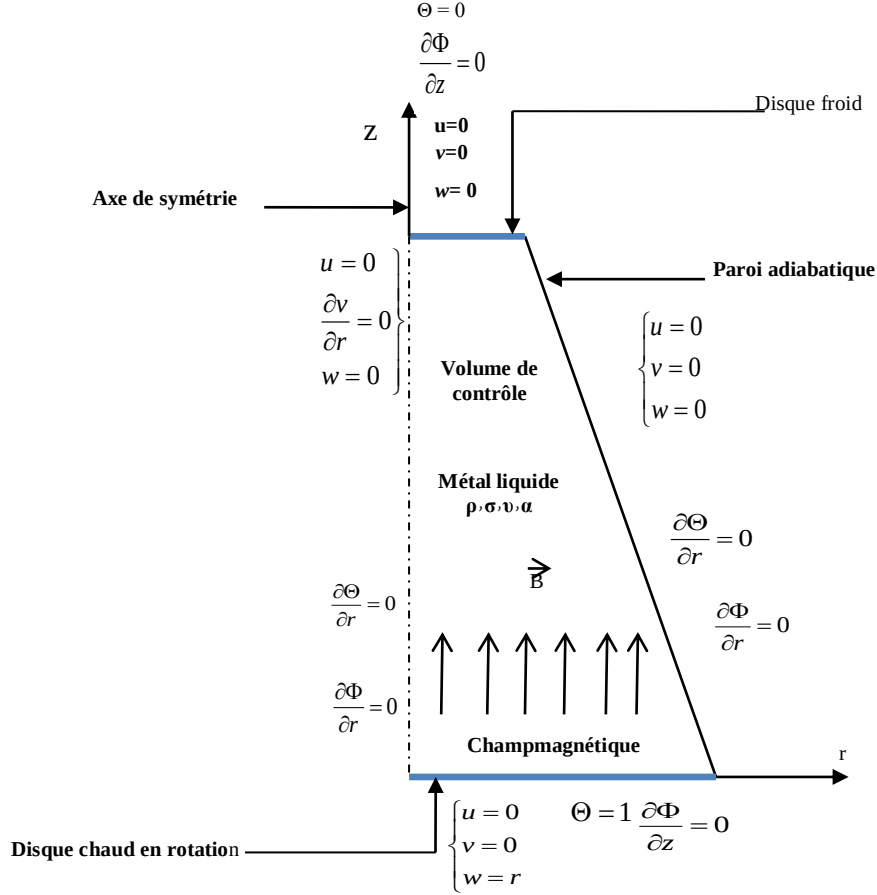


Figure II-2: Schématisation des conditions aux limites du problème adimensionnel.

II.1.5 Outils d'analyse de l'écoulement axisymétrique

Après la résolution des équations régissant la convection mixte de la cavité cylindrique remplie du métal liquide considéré, les six inconnues u, v, w, P, Φ et Θ donnent quantitativement une vue sur le phénomène étudié mais, ils existent d'autres paramètres qui peuvent attribuer aux solutions plus de clarté et substantialité quantitativement et qualitativement, et facilitent l'analyse du phénomène étudié. Quelques paramètres dont la nature peut différer (critère adimensionnel, fonction

Chapitre II: Géométries-modèles mathématiques, et Méthode numérique

mathématique, ...etc.), sont utilisés dans ce travail pour éclaircir la vision physique du problème.

- **La fonction de courant :**

Nous utilisons cet intelligent dispositif seulement pour identifier les lignes de courant hydrodynamique, et les débits d'écoulement. La fonction de courant ψ (dite de Stokes) est définie en coordonnées cylindriques pour un écoulement incompressible, axisymétrique (c.-à-d. sans variation azimutale ($\partial/\partial\theta = 0$)) par :

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (II.25)$$

Ici les lignes $\psi(r, z) = Cste$ sont les lignes de courant, et le débit entre deux lignes de courant est :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = 2\pi(\psi_2 - \psi_1) \quad (II.26)$$

- **La vorticité :**

Un autre outil, la vorticité qui est associée au vecteur vitesse local $\vec{V} = (u, v, w)$, est définie par :

$$\omega = \overrightarrow{Rot} \vec{V} \quad (II.27)$$

Mais dans les calculs on s'intéresse seulement à la composante azimutale de la vorticité, en la nommant vorticité elle-même :

$$\omega = \omega_\theta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \quad (II.28)$$

- **Le nombre de Nusselt :**

Cet outil est un nombre adimensionnel, aide à analyser les transferts thermiques par convection aux frontières, puisque il est inversement proportionnel à l'épaisseur δ_t de la couche limite thermique, et défini localement comme **(Bessaïhet al. , 2003)**.

$$Nu(r) = -\frac{\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{z=0}}{\lambda \frac{T_h - T_c}{H}} = -\gamma \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} \quad (II.29)$$

Aussi, nous utilisons le nombre de Nusselt moyen calculé pour chaque disque d'extrémité de l'enceinte conique:

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} Nu(r) r d\theta dr \quad \text{Donc} \quad \overline{Nu} = 2 \int_0^1 Nu(r) r dr \quad (\text{II.30})$$

II.2 Ecoulement non-axisymétrique

On va traiter la même configuration étudiée dans l'état de l'écoulement axisymétrique, on utilise les mêmes conditions de l'écoulement et la même géométrie mais on va décaler les axes au milieu de cône pour familiariser avec le CFD Fluent (**Fig.II-3**) on prend en considération l'état tridimensionnelle c.-à-d. on tient compte de la variation azimutale ($\partial/\partial\theta \neq 0$). Il faut noter que l'axe de rotation utilisé dans nos calcul est z et x pour s'adapter avec les équations employés par Fluent.

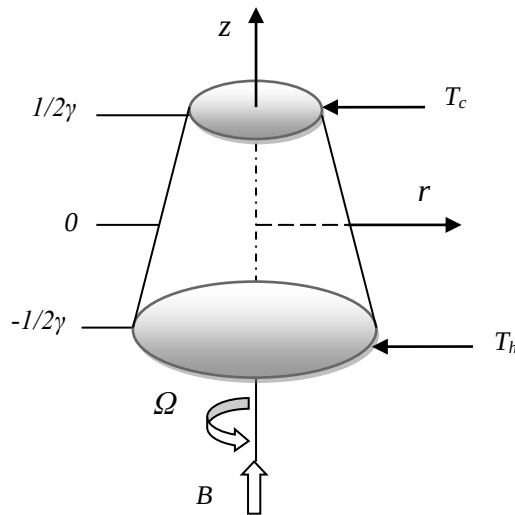


Figure II-3: Géométrie du problème non-axisymétrique.

II.3 Méthode numérique

Les équations régissant le phénomène étudié sont des équations aux dérivées partielles (EDP) non-linéaires, ce qui rend leur résolution analytique impossible à l'aide des outils d'analyse mathématique contemporains. Cependant, une solution numérique peut être obtenue en transformant ces équations différentielles en systèmes d'équations algébriques linéaires par le biais d'une méthode de discrétisation avant de résoudre ce système à l'aide de méthodes directes ou par itérations. Pour notre étude actuelle, nous

avons opté pour la méthode des volumes finis afin de discrétiser les équations du modèle mathématique.

Pour déterminer le champ de la variable dépendante ϕ dans un domaine d'étude par la méthode des volumes finis, les étapes à suivre sont essentiellement :

- Bien définir le domaine d'étude et le décomposer en de petits sous domaines appelés volumes finis.
- Intégrer l'équation de transport sur chaque volume fini obtenant ainsi une équation de bilan (Taux d'accumulation de ϕ dans le volume = flux entrant net de ϕ à travers les faces du volume + taux de production net de ϕ dans le volume).
- Discrétiser les différents termes de la forme intégrée de l'équation de transport (transformer l'équation différentielle ponctuelle en un système d'équations algébriques).
- Incorporer les conditions initiales et aux limites appropriées.
- Résoudre le système algébrique final par une méthode de résolution (itérative ou semi-itérative ou directe) pour un champ approché de ϕ dans des points discrets du domaine considéré.

Un avantage attirant de la méthode des volumes finis est qu'elle satisfait le bilan intégral de ϕ exactement sur chaque volume fini et donc sur tout le domaine. Cette méthode peut accommoder n'importe quel type de maillage, même pour les géométries complexes. Le maillage définit seulement les frontières de volume de contrôle et n'a pas besoin d'être rapporté à un système de coordonnées. L'approche par volumes finis est peut-être la plus simple à comprendre et à programmer. Tous les termes qui doivent être approchés ont la signification physique c'est pourquoi cette méthode est choisie.

II.3.1 Maillage

Dans cette étude, nous avons employé un maillage pour représenter un état axisymétrique d'une configuration tridimensionnelle, en utilisant le code CFD Fluent. La création de la géométrie ainsi que le maillage a été réalisée à l'aide du logiciel GAMBIT. Le domaine physique a été subdivisé en plusieurs volumes finis. Sur la **figure (II-4 à gauche)**, sont présentés un ensemble de volumes de contrôle bidimensionnels typiques.

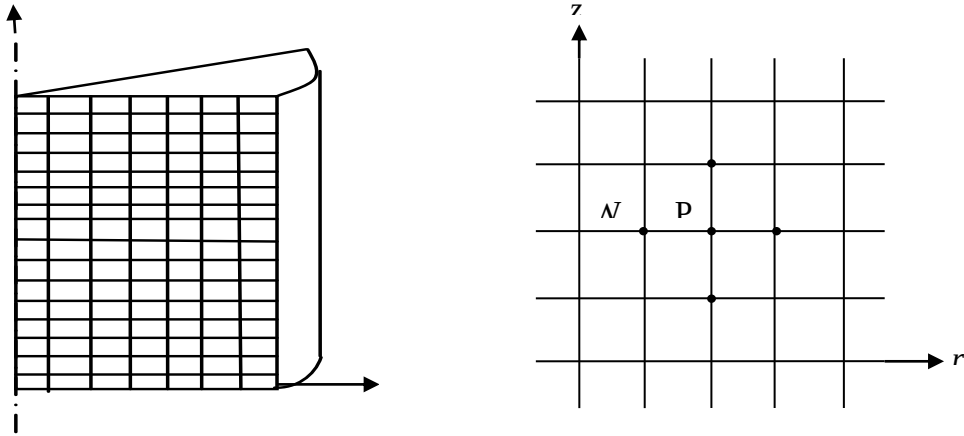


Figure II-4 : Maillages bidimensionnels et nœuds du maillage.

Les variables dépendantes sont stockées dans des points discrets appelés nœuds (points d'intersection des lignes du maillage) voir **figure (II-4 à droite)**. Les nœuds sont numérotés de 1 à N_i , suivant le nœud (i, j) est appelé P, il est entouré par les nœuds E (Est), N (Nord), W (West) et S (Sud). À chaque nœud est associé un volume fini (**Fig. II-5**), les faces du volume sont situées au milieu entre les nœuds, la surface de VC consiste en quatre plans, notés par des lettres minuscules correspondant à leur direction e, w, n et s (Exemple : la face w est au milieu entre les nœuds W et P).

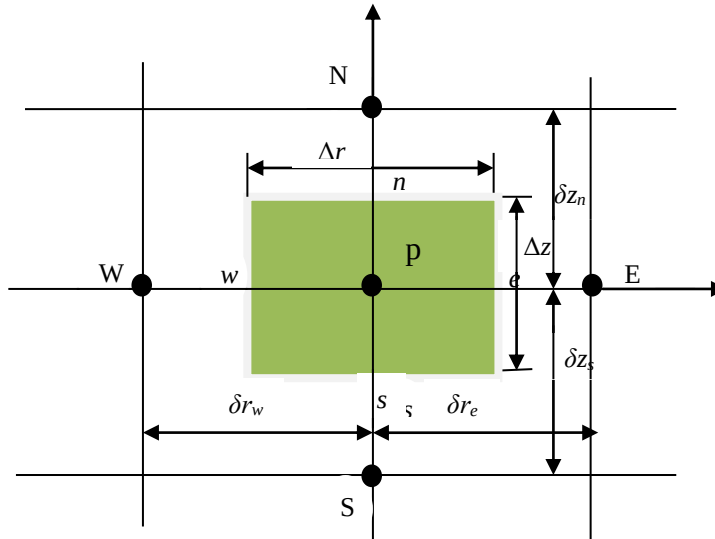


Figure II-5: Volume de contrôle typique

Les incréments de distance $\Delta r, \Delta z, \delta r_e, \delta z_n, \delta r_w, \delta z_s$ sont définis sur la (**Fig.II-5**). Les scalaires ϕ (composantes de vitesse azimutale w , pression p , température Θ et potentiel

électrique Φ) sont stockés au nœud central. Les composantes de vitesse u et v sont stockées dans des nœuds décalés, (**Fig.II-6**) l'emploi de tels maillages entrelacés permet le calcul des gradients de pression dans les équations de quantité de mouvement, sans interpolation des pressions et le calcul des flux convectifs dans les équations sans interpolations des vitesses, et d'éviter l'instabilité bien connue « *checkboard* » (**Michelson,1986**) dans lequel des cellules de réseau supplémentaires montrent des solutions complètement différentes.

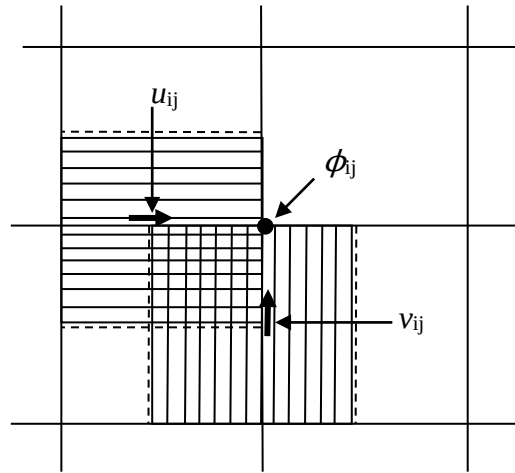


Figure II-6 : Volume de contrôle décalé pour u et v dans un maillage entrelacé.

Dans la deuxième partie c.à.d. le cas tridimensionnel, les équations qui régissent (II.15) - (II.20), ainsi que les conditions aux limites associées, sont résolues à l'aide de la méthode des volumes finis (**Mahfoud, B**). Les composantes de la vitesse (u , v et w) sont stockées aux emplacements décalés et les quantités scalaires (P , Θ et Φ) sont stockées au centre de ces volumes. Un schéma de marche temporel implicite est totalement utilisé. La procédure numérique, SIMPLER (**Patankar, S.V,(1980)**, est utilisée pour gérer le couplage pression-vitesse. Un schéma de différence central est adopté pour le traitement des termes de convection et de diffusion dans les équations (II.16) à (II.19). La convergence à un pas de temps donné est déclarée lorsque la variation relative maximale entre deux niveaux d'itération consécutifs est inférieure à 10^{-5} , pour u , v , w et Θ . A ce stade, la solution à l'état d'équilibre est obtenue. La solution a été obtenue comme suit:

- Les équations (II.15 à II.17) sont d'abord résolues pour obtenir P , u , v et w .
- La température Θ et le potentiel Φ sont ensuite calculés à partir des équations (II.19) et (II.20), respectivement. Les différentes quantités associées à l'ensemble des équations sont discrétisées sur des grilles non uniformes et résolues sur la $(r; \theta; z)$. Pour une simulation numérique directe correctement résolue, en particulier dans le cas d'un

écoulement MHD, il convient de prendre en compte les caractéristiques spécifiques des couches limites d'écoulement, et le transfert de chaleur. En particulier, l'augmentation de Ha résulte des couches de Hartmann plus minces au niveau des parois normales au champ magnétique d'épaisseur $\sim 1 / Ha$. En conséquence, des grilles non uniformes ont été utilisées pour la simulation dans le cas de sans champ magnétique ($Ha = 0$) et avec un champ magnétique ($Ha = 10$ à $Ha = 15$). Par conséquent, la grille de 20200 nœuds a été utilisée dans le cas $Ha = 0$ et 82400 pour les cas $Ha = 10$ à $Ha = 15$.

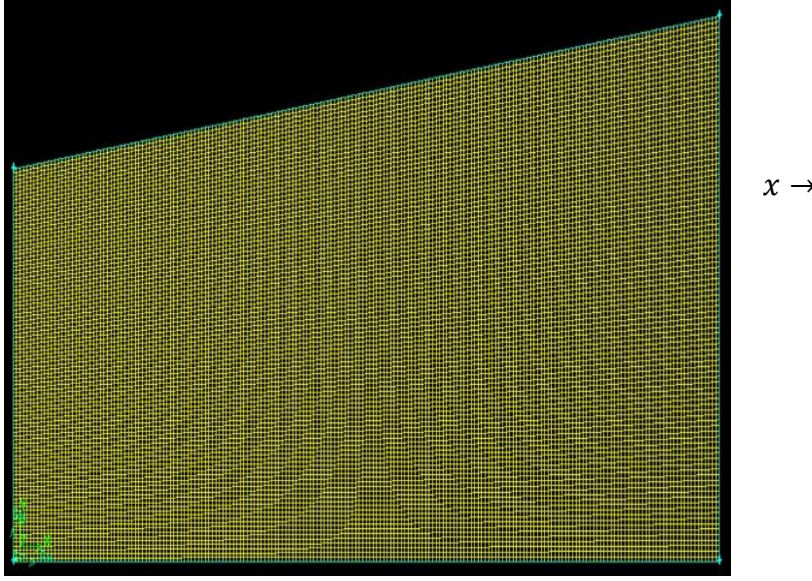


Figure II-7: Maillage utilisé pour le cas axisymétrique un nombre de nœuds 20200.

II.3.2 Discrétisation implicite de l'équation générale de transport à l'état axisymétrique

Les équations locales instantanées régissant l'écoulement en question peuvent s'écrire selon la suivante forme de l'équation généralisée de transport d'une variable dépendante ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial(u\phi)}{\partial r} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial z} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right) + S_{\phi} \quad (\text{II.31})$$

Où :

$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}$: représente le terme transitoire.

$\frac{\partial(u\phi)}{\partial r} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial z}$: représente le transport par convection de ϕ .

$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right)$: représente la diffusion de ϕ .

S_ϕ : représente le terme source.

Le tableau suivant rassemble les expressions de la variable dépendante ϕ , du coefficient de diffusion Γ_ϕ et du terme source S_ϕ concernant les équations adimensionnelles citées au précédent chapitre (Eqs. (II.15-II.19)). Toutefois, pour l'équation du potentiel électrique (Eq. II.20), elle est du type Poisson bien connu, et représente la loi de comportement pour la quantité Φ en régime stationnaire, et nous faisons abstraction des termes transitoire et de convection pour l'écrire sous la forme de transport générale (Eq. II.42).

Tableau II-1 : Différentes quantités transportées et leurs termes de transport.

Equation de	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
Continuité	1	0	$-u/r$
Quantité de mouvement radiale	u	$\frac{1}{\text{Re}}$	$-\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{u}{r^2} - \frac{Ha^2}{\text{Re}} u + \frac{w^2}{r}$
Quantité de mouvement axiale	v	$\frac{1}{\text{Re}}$	$-\frac{\partial P}{\partial z} + Ri \cdot \Theta$
Quantité de mouvement azimutale	w	$\frac{1}{\text{Re}}$	$-\frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{w}{r^2} + \frac{Ha^2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} - w \right) - \frac{uw}{r}$
L'énergie	Θ	$\frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}}$	0
Potentiel électrique	Φ	1	$-\frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r}$

Pour obtenir l'équation de discrétisation de la variable dépendante ϕ , on intègre l'équation générale de transport (II.31) suivant r et z après multiplication par r sur un volume fini de contrôle typique de dimensions $\Delta r \times \Delta z$ par unité de profondeur (pour plus de détail voir Liehard et al. (2005) on obtient la forme algébrique finale suivante :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{II.32})$$

Les coefficients multiplicatifs (a_P, a_E, a_W, a_N, a_S) de la variable dépendante ϕ ainsi que le terme b de l'équation (II.32) sont décrits en détail dans Patankar (1980) et sont rappelés ci-dessous:

$$a_E = D_e A(P_e) + \max[-F_e, 0] \quad (\text{II.33a})$$

$$a_W = D_w A(P_w) + \max[F_w, 0] \quad (\text{II.33b})$$

$$a_N = D_n A(P_n) + \max[-F_n, 0] \quad (\text{II.33c})$$

$$a_S = D_s A(P_s) + \max[F_s, 0] \quad (\text{II.33d})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_{P^\circ} \quad (\text{II.33e})$$

$$b = \left(\overline{S_\phi} + \frac{\phi^0}{\Delta \tau} \right) r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta z \quad (\text{II.33f})$$

Avec a_P, a_E, a_W, a_N et a_S sont respectivement les coefficients correspondants aux nœuds central (point P), Est, Ouest, Nord et Sud du volume fini de contrôle et A_{P° est le coefficient de la variable générale ϕ à calculer au point P en un instant précédent par :

$$a_{P^\circ} = \frac{r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta z}{\Delta \tau} \quad (\text{II.33g})$$

Et b : appelé terme source, qui englobe tous les termes supposés être constants dans le volume de contrôle. D_e, D_w, D_n, D_s et F_e, F_w, F_n, F_s sont respectivement les termes diffusifs et convectifs aux faces Est, Ouest, Nord et Sud. Leurs expressions sont :

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta r_e} r_e \cdot \Delta z \quad (\text{II.34a})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta r_w} r_w \cdot \Delta z \quad (\text{II.34b})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n}{\delta z_n} r_n \cdot \Delta r \quad (\text{II.34c})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s}{\delta z_s} r_s \cdot \Delta r \quad (\text{II.34d})$$

$$F_e = u_e \cdot r_e \cdot \Delta z \quad (\text{II.34e})$$

$$F_w = u_w \cdot r_w \cdot \Delta z \quad (\text{II.34f})$$

$$F_n = v_n \cdot r_p \cdot \Delta r \quad (\text{II.34g})$$

$$F_s = v_s \cdot r_p \cdot \Delta r \quad (\text{II.34h})$$

Et P_e, P_w, P_n, P_s sont :

$$P_i = F_i / D_i \quad ; i = e, w, n, s \quad (\text{II.35})$$

Ces nombres appelés nombres du Peclet, désignent les rapports des flux convectifs aux flux diffusifs aux différentes faces du volume fini de contrôle. Les coefficients a_p, a_E, a_W, a_N et a_S dépendent du schéma numérique choisi et du nombre de Peclet.

Dans tous nos calculs, on a utilisé le schéma numérique de différences centrées (Patankar ,1980)Ce choix est motivé par le fait que ce schéma soit le plus usuellement utilisé dans la littérature pour découvrir les instabilités physiques. Ce schéma est donné par la fonction suivante :

$$A(|P_i|) = 1 - 0.5|P_i| \quad ; i = e, w, n, s \quad (\text{II.36})$$

Cependant la résolution de l'équation (II.33) fait apparaître deux difficultés :

- les coefficients des équations discrètes dépendent des valeurs des variables, le système n'est donc pas linéaire.
- Les termes source des équations de quantité de mouvement font intervenir le gradient de pression.

II.3.3 Algorithmes de résolution

Pour résoudre les systèmes d'équations algébriques résultants des discrétisations des équations régissant le mouvement par la méthode VF, il faut remédier aux deux difficultés mentionnées à la fin de la section précédente. Pour cette raison, on a fait appelle à l'algorithme SIMPLER (**Patankar ,1980**) pour construire les coefficients formant les systèmes des équations algébriques. On les résoudra ensuite par l'algorithme TDMA (**Patankar ,1980**)qui est plus approprié à ce genre de systèmes algébriques.

- Algorithme SIMPLER :

La résolution des équations de quantité de mouvement et l'équation de continuité donne en principe le champ des vitesses et le champ de pression. La question est : comment peut-on obtenir les pressions de l'équation de continuité si les vitesses sont obtenues des équations de quantité de mouvement? L'algorithme SIMPLER (Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equation Revised) est une méthode itérative qui permet justement le calcul des vitesses et la pression. Après convergence de la solution, les champs de vitesse et de pression doivent satisfaire simultanément l'équation de continuité et l'équation de quantité de mouvement.

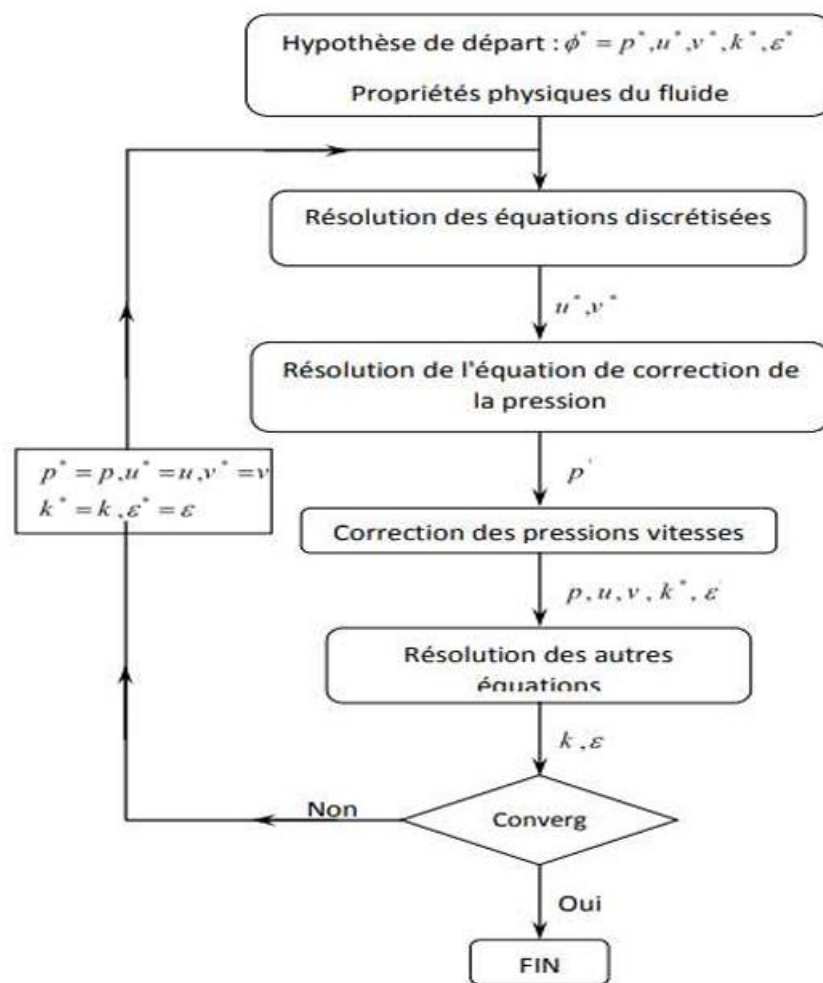


Figure II-8: Schéma représentatif de l'algorithme simple.

Après intégration sur un volume fini et discrétisation des différents termes on aboutit à la forme algébrique. On les résoudra ensuite des équations de quantité de mouvement :

$$\left. \begin{aligned} a_e u_e &= \sum_{i=E,W,N,S} a_i u_i + b_u + (P_P - P_E).A_e \\ a_n v_n &= \sum_{i=E,W,N,S} a_i v_i + b_v + (P_P - P_N).A_n \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-37})$$

Sur la base d'un champ de pression estimée P^* , ces équations donnent un champ de vitesses u^* et v^* qui ne satisfont pas l'équation de continuité. On a les relations :

$$\left. \begin{aligned} a_e u_e^* &= \sum_{i=E,W,N,S} a_i u_i^* + b_u + (P_P^* - P_E^*).A_e \\ a_n v_n^* &= \sum_{i=E,W,N,S} a_i v_i^* + b_v + (P_P^* - P_N^*).A_n \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-38})$$

Pour aboutir à des champs corrects de vitesse et de pression u , v et P il faut corriger u^* et v^* et P^* Comme suit :

$$\begin{aligned} u &= u^* + \tilde{u} \\ v &= v^* + \tilde{v} \\ P &= P^* + \tilde{P} \end{aligned}$$

Comment déterminer les corrections de vitesse $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ et la pression $\tilde{P}$?

Soustrayons (II-14) de (II-13) on obtient :

$$\left. \begin{aligned} a_e \tilde{u}_e &= \sum_{i=E,W,N,S} a_i \tilde{u}_i + (\tilde{P}_P - \tilde{P}_E).A_e \\ a_n \tilde{v}_n &= \sum_{i=E,W,N,S} a_i \tilde{v}_i + (\tilde{P}_P - \tilde{P}_N).A_n \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-39})$$

A ce stade les termes $\sum_{i=E,W,N,S} a_i \tilde{u}_i$ et $\sum_{i=E,W,N,S} a_i \tilde{v}_i$ sont omis. A noter que la solution finale des champs de vitesse et de pression ne contiendra pas d'erreur due à cette omission puisque tous les termes de ces équations tendent vers zéro. On obtient donc, pour les 4 faces e, w, n, s du volume central.

$$\left. \begin{aligned} u_e &= u_e^* + d_e(\tilde{P}_P - \tilde{P}_E) \text{ ou } d_e = A_e / a_e \\ u_w &= u_w^* + d_w(\tilde{P}_P - \tilde{P}_P) \text{ } d_w = A_w / a_w \\ v_n &= v_n^* + d_n(\tilde{P}_P - \tilde{P}_N) \text{ } d_n = A_n / a_n \\ v_s &= v_s^* + d_s(\tilde{P}_P - \tilde{P}_P) \text{ } d_s = A_s / a_s \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-40})$$

$A_e = A_w$: Surface ($\Delta z \times 1$)

$A_n = A_s$: Surface ($\Delta r \times 1$)

En effet les vitesses peuvent être corrigées à condition que l'on ait une estimation du champ des corrections des pressions. C'est l'équation de continuité qui va être transformée pour donner une équation des corrections de pression.

L'intégration et la discrétisation de l'équation de continuité par rapport à un volume de contrôle central (pour un fluide compressible) donne.

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^0)\Delta r \Delta z}{\Delta \tau} + [(\rho u)_e - (\rho u)_w]\Delta z + [(\rho v)_n - (\rho v)_s]\Delta r = 0 \quad (\text{II-41})$$

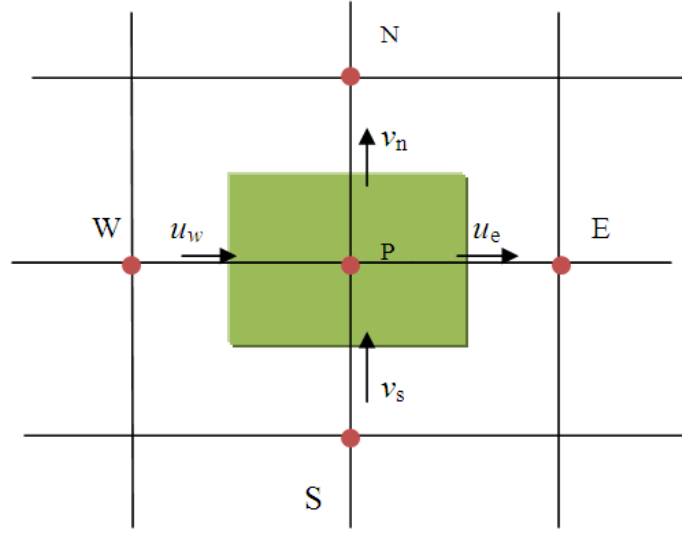


Figure II-9: Volume de contrôle de l'équation de continuité.

Substituons maintenant à la place des vitesses les expressions reliant les corrections de pression $\tilde{P}_P, \tilde{P}_E, \tilde{P}_W, \tilde{P}_N, \tilde{P}_S$:

$$\left. \begin{aligned} a_P \tilde{P}_P &= a_E \tilde{P}_E + a_W \tilde{P}_W + a_N \tilde{P}_N + a_S \tilde{P}_S + b_m \\ a_E &= \rho d_e \Delta z, a_W = \rho d_w \Delta z, a_N = \rho d_n \Delta r, a_S = \rho d_s \Delta r \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-42})$$

$$b_m = \frac{(\rho_P - \rho_P^0)\Delta r \Delta z}{\Delta \tau} + [(\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e]\Delta z + [(\rho v^*)_s - (\rho v^*)_n]\Delta r \quad (\text{II-43})$$

• Equation de la pression

L'équation utilisée pour obtenir le champ de pression et interprétée comme suite :

L'équation de mouvement (II-13) (pour le coté Est) peuvent s'écrire :

$$a_e = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(a_i u_i + b_e)}{a_e} + b_e (P_P - P_E) \quad (\text{II-44})$$

Où d_e donner par l'équation (II-50)

Maintenant nous définissons les pseudo-vitesses $\hat{u}$ et $\hat{v}$ donnée par les équations

$$\hat{u}_e = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(a_i u_i + b_e)}{a_e} \quad (\text{II-45a})$$

$$\hat{u}_w = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(a_i u_i + b_w)}{a_w} \quad (\text{II-45b})$$

$$\hat{v}_n = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(a_i v_i + b_n)}{a_n} \quad (\text{II-45c})$$

$$\hat{v}_s = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(a_i v_i + b_s)}{a_s} \quad (\text{II-45d})$$

Ici b_e , b_w , b_n et b_s sont les termes de source ne contenant pas les gradients de pression.

Ainsi les vitesses s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} u_e &= \hat{u}_e + d_e (P_P - P_E) \\ u_w &= \hat{u}_w + d_w (P_W - P_P) \\ v_n &= \hat{v}_n + d_n (P_P - P_N) \\ v_s &= \hat{v}_s + d_s (P_S - P_P) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-46})$$

Il est facile de voir la similitude entre ces équations et (II-50). Ici $\hat{u}$ et $\hat{v}$ apparaissent au lieu de u^* et v^* et la pression P lui-même remplace $\tilde{P}$, une équation pour la pression résulte :

$$a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b \quad (\text{II-47})$$

Avec a_E , a_W , a_N , a_S et a_P donner par Eq (II-48)

$$b = \frac{(\rho_P - \rho_P^0) \Delta r \Delta z}{\Delta \tau} + [(\rho \hat{u})_w - (\rho \hat{u})_e] \Delta z + [(\rho \hat{u})_s - (\rho \hat{u})_n] \Delta r \quad (\text{II-49})$$

La séquence des opérations essentielles constituant l'algorithme SIMPLER est la suivante :

- 1- Deviner un champ de vitesse

- 2- Calculer les coefficients de l'équation de quantité de mouvement et par conséquent calculer les pseudo-vitesses $\hat{u}$ et $\hat{v}$ donnée par les équations : (II-45a)-(II-45d)
- 3- calculer les coefficients de l'équation de pression (II-47), et on la résout pour obtenir le champ de pression
- 4- Considérer le champ de pression comme estimation P^* , et résoudre l'équation de mouvement pour obtenir u^* et v^* .
- 5- Calculer le terme source b_m (Eq. II-43) et par conséquent résoudre l'équation de correction de pression $\tilde{P}$.
- 6- Corriger le champ de vitesse en utilisant l'équation (II-49), mais ne pas corriger la pression.
- 7- Résoudre : - l'équation de swirl, et obtenir w .
- l'équation de l'énergie, pour obtenir Θ .
- l'équation de potentiel électrique Φ en utilisant les valeurs de w déjà obtenues.
- 8- Retourner à l'étape 2, avec le nouveau champ de vitesse jusqu'à convergence.

- **Algorithme TDMA :**

Dans le but de résoudre le système d'équations algébriques bidimensionnelles résultant on effectuera un double balayage qui consiste à déterminer les valeurs de la variable ϕ sur chaque ligne du domaine de calcul indépendamment des autres lignes, en conséquence, le système se transforme en un système unidimensionnel, et on considère les termes des autres dimensions comme des constantes en les ajoutant au terme source de la dimension dont-on veut résoudre son système. Le système d'équations en vertu du balayage est constitué d'une matrice tridiagonale qui peut être résolu par l'algorithme de TDMA, Patankar (1980).

Pour le nœud (i, j) du maillage, l'équation (II-42) peut être écrite sous la forme d'une équation unidimensionnelle.

$$a_i \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i \phi_{i-1} + d_i ; \quad i \text{ variant de } 1 \text{ à } N \quad (\text{II-50})$$

En réécrivant cette équation pour $i=i+1$ et en combinant les deux formes on peut écrire une relation liant uniquement ϕ_i et ϕ_{i+1}

$$\phi_i = G_i \phi_{i+1} + Q_i \quad (\text{II-51})$$

Où G et Q sont deux tableaux de forme :

$$G_i = \frac{b_i}{a_i - c_i G_{i-1}} ; \quad Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i G_{i-1}} \quad (\text{II-52})$$

L'équation (II-50) pour $i=1$ (bord gauche) donne :

$$a_1 \phi_1 = b_1 \phi_2 + d_1 \quad (\text{II-53})$$

Naturellement il n'y a pas de point en $(i-1)$ étant donné que l'on est au bord.

Maintenant pour $i=N$ (bord droit) on a :

$$a_N \phi_N = b_N \phi_{N-1} + d_N \quad (\text{II-54})$$

De même que précédemment, il n'y a pas cette fois de point à droite en $i+1$.

Le calcul de G et Q en ces deux points donne :

$$\left. \begin{array}{l} i=1 \quad G_1 = \frac{b_1}{a_1} ; \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \\ i=N \quad G_N = 0 ; \quad Q_N = \frac{d_N + c_N Q_{N-1}}{a_N - c_N G_{N-1}} \end{array} \right\} \quad (\text{II-55})$$

Étant donné les relations (II-52) liant G_i et Q_i à G_{i-1} et Q_{i-1} la séquence de calcul est la suivante

- a) calcul de G_1 et Q_1
- b) pour $i=2$ à N calcul des G_i et Q_i
- c) Au point N , la relation (II-51) donne directement : $\phi_N = Q_N$
- d) Le calcul des ϕ_i s'effectue en « redescendant » :

Pour $i=N-1$ à 1 calcul des ϕ_i par la relation (II-51). Cet algorithme permet donc la résolution d'un système de N équations à N inconnues, en évitant l'utilisation de matrices. Le surcoût de stockage est uniquement de deux tableaux de dimension N .

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé la mise en place des équations de conservation et des conditions aux limites correspondantes à notre étude. Pour résoudre ces équations aux dérivées partielles, nous avons opté pour la méthode des volumes finis en tant que méthode de modélisation numérique. Les considérations concernant le choix de la méthode numérique, le traitement des maillages et la technique de résolution sont examinées en détail dans ce chapitre. Nous avons également étudié le développement du code de calcul et son lien avec le maillage. Les prochains chapitres seront dédiés à la présentation des résultats et à leur interprétation, en se concentrant respectivement sur les cas d'écoulements bidimensionnels.

Chapitre III

Résultats et discussion

Chapitre III : Résultats et discussion

III.1 Introduction

Nous nous intéresserons dans ce chapitre aux présentations et discussion des résultats obtenus en simulant numériquement l'écoulement tournant bidimensionnelle axisymétrique engendré par la rotation du disque inférieur à l'intérieur d'une enceinte de forme conique tronquée de rayon $R_2(\text{haut})=1/2R_1(\text{bas})$ et l'angle d'inclinaison de la paroi incliné α , dont le rapport d'aspect $H/R=2$. Ce cône est rempli d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$), soumise à un champ magnétique orienté verticalement. Le disque inférieur tourne d'une vitesse angulaire Ω . Le code CFD Fluent basé sur la méthode des volumes finis a été utilisé pour résoudre numériquement les équations gouvernant le phénomène étudié. Ce chapitre se divise en deux parties: La première partie concerne la situation de la convection forcée avec différentes valeurs de l'angle d'inclinaison α tel que ($\alpha=0, 5, 7, 9$ et 11), puis l'application du champ magnétique axial. La deuxième partie présente la convection mixte dans les mêmes cas que la convection forcée sans champ magnétique et avec application de champ magnétique axial d'intensités diverses via la variation du nombre Ha de Hartmann.

III.2 Modèle géométrique

La géométrie de la configuration considérée (**Fig. III-1**) est une enceinte conique de rayon R_{bas} pour le disque inférieur et R_{haut} pour le disque supérieur et de hauteur H , dont le rapport d'aspect ($\gamma = H/R = 2$) et un angle d'inclinaison de la paroi latérale α . L'enceinte contient de l'aluminium liquide caractérisé par un faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$). Le couvercle (disque inférieur) est en rotation à la vitesse angulaire constante Ω . La paroi latérale rigide est adiabatique. L'ensemble peut être soumis à un champ magnétique B de magnitude constante, uniforme et orienté verticalement vers le haut. Les parois de l'enceinte conique sont électriquement isolées.

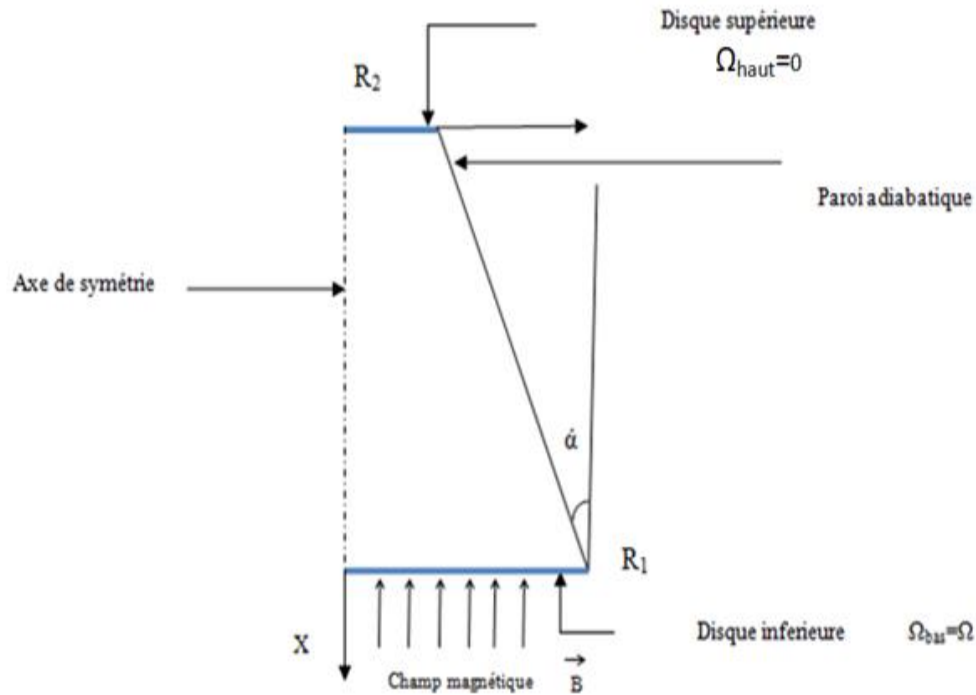


Figure Error! No text of specified style in document.-1: Géométrie de problème considéré.

III.3 Validation du code de calcul

Pour donner plus de poids aux résultats de nos simulations numériques, on a établi quelques comparaisons quantitatives et qualitatives avec d'autres investigations numériques présentées dans la littérature. La comparaison est faite avec les résultats numériques obtenus par Martins et al (2005) qui ont fait des simulations numériques d'un écoulement tournant engendré par deux disques dans des enceintes de forme cylindriques et coniques. Le disque inférieur tourne à une vitesse angulaire Ω , tandis que le disque supérieur et la paroi latérale sont fixés. Certains aspects du processus de rupture du vortex dans les géométries de formes coniques ont été observés comme étant différents de ceux des cylindres. Des lignes de courant sont reproduites dans le cas de $Re = 2800$, caractérisant le processus de formation de la dégradation par vortex, ont été tracées sur la **figure III-2**.

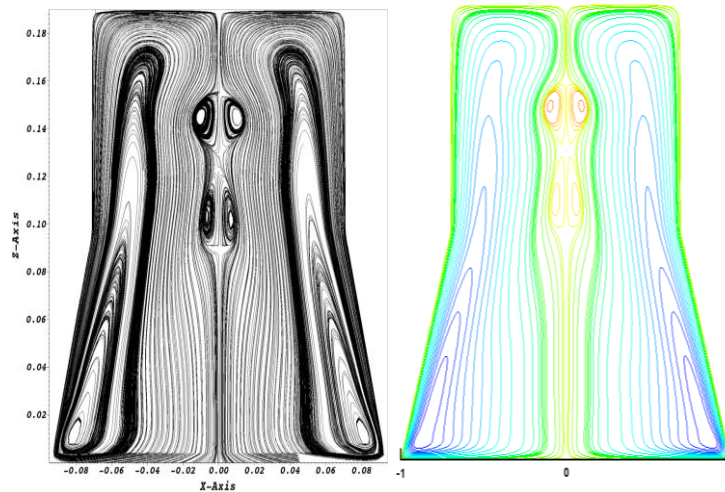


Figure III-2: Comparaison des lignes de courant obtenues avec celles de Martins et al.
(Nos résultats sont présentés à droite de chaque figure).

III.4 Convection forcée avec différentes valeurs de l'angle d'inclinaison(α)

Nous commençons de faire une simulation numérique d'un écoulement axisymétrique confiné visqueux bidimensionnel dans une enceinte conique tronqué pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison (α) tel que ($\alpha=0, 5, 7, 9$ et 11) sur l'apparition des phénomènes de rupture de vortex. D'abord, on prend $\alpha=0$ puis nous faisons augmenter la valeur du nombre de Reynolds progressivement jusqu'à la valeur où l'apparition de premier vortex.

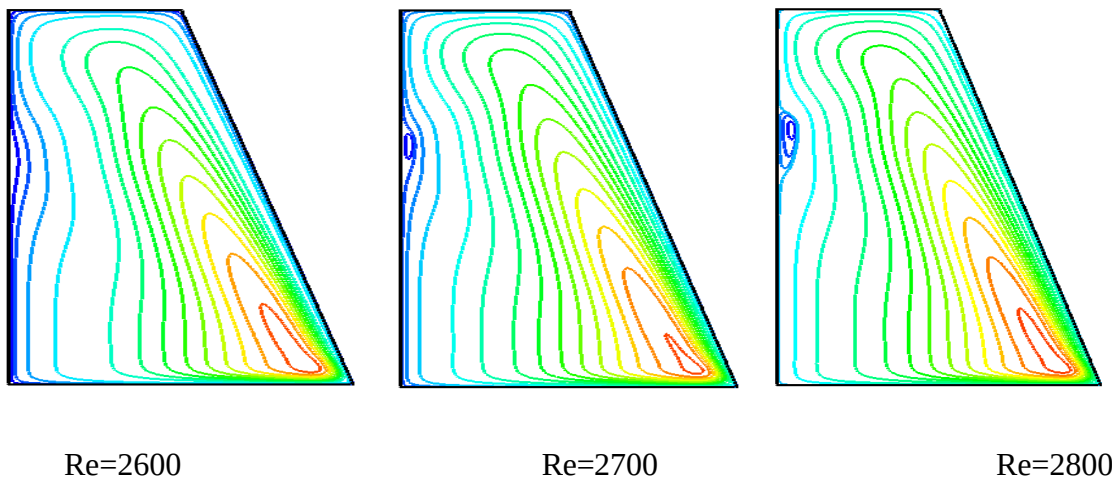


Figure III-3 : Contours de lignes de courant pour le cas de $Re_{cr}=2800$ avec $\alpha=0$

Nous observons qu'un vortex commence à se produire à partir de la valeur de $Re=2700$. Dans la valeur du nombre de Reynolds $Re=2800$, un tourbillon est apparu se situe juste à coté de l'axe de symétrie. Il ya une couche de cisaillement se trouve au voisinage de l'écoulement adjacent au disque inférieur. Cette couche est responsable de trouver le vortex voir la figure III-3.

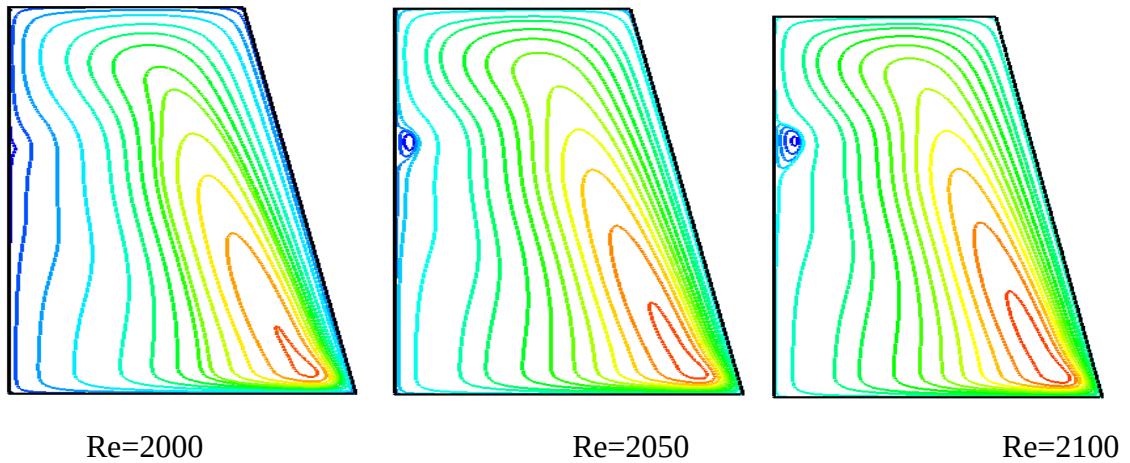


Figure III-4: Contours de lignes de courant pour le cas de $Re_{cr}=2100$ avec $\alpha=5$

La figure III-4 présente les lignes de courant pour le cas $\alpha=5$, où l'on remarque que les lignes de courant adjacentes au disque inférieur commencent à s'élever, ce qui explique l'apparition d'une couche d'Ekman. Quand est-ce que Re atteint à la valeur 2100, un vortex est clairement apparu. Ce vortex est situé au voisinage de l'axe de symétrie.

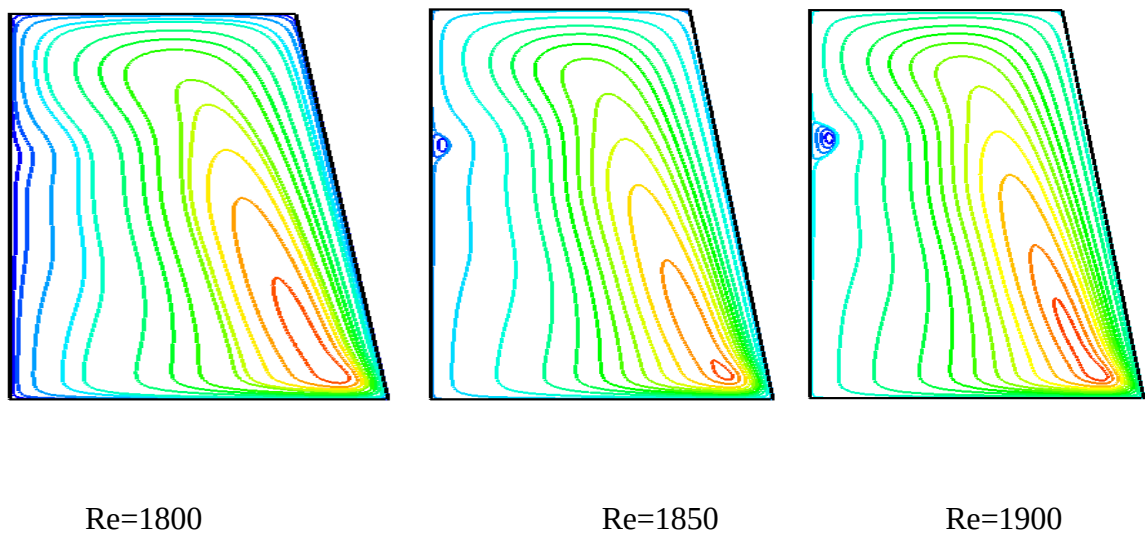


Figure III-5: Contours de lignes de courant pour le cas de $Re_{cr}=1900$ avec $\alpha=7$

Dans le cas de $\alpha=7$ figure I.5, nous remarquons le vortex apparaît à $Re=1900$. Il se situe toujours à côté de l'axe de symétrie. Sous l'effet de la force centrifuge les lignes de courants qui sont liées au disque inférieur se cisailent en donnant le vortex remarqué.

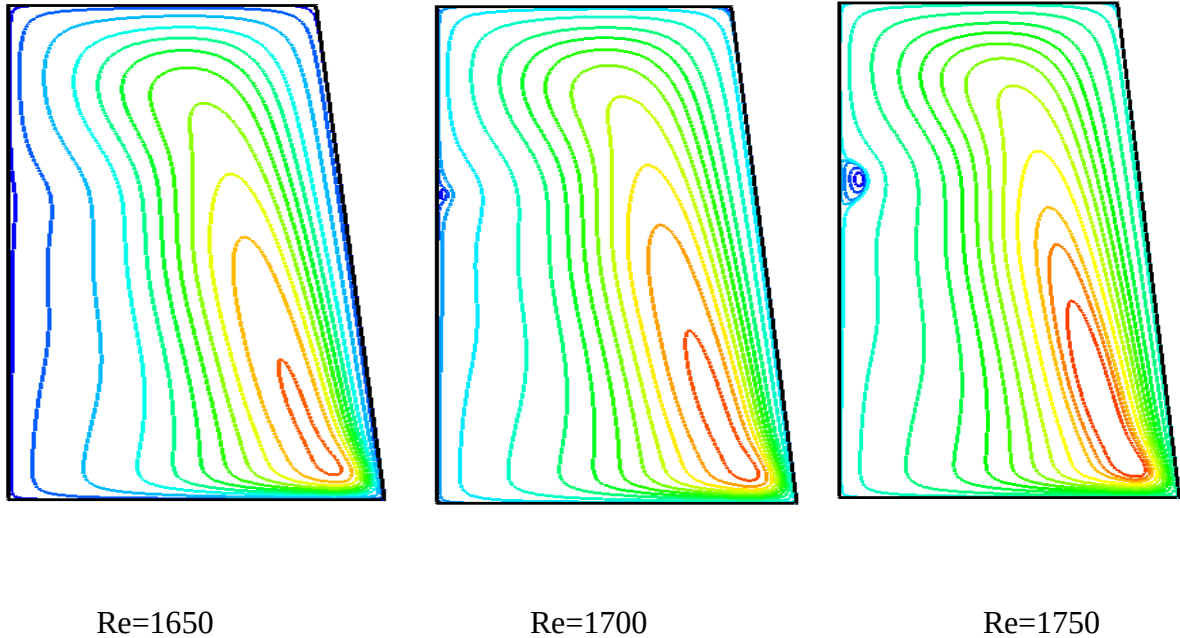


Figure III-6: Contours de lignes de courant pour le cas de $Re_{cr}=1750$ avec $\alpha=9$.

La figure III-6 montre les lignes de courants dans le cas de $\alpha=9$ où le vortex se met à apparaître partiellement à la valeur du nombre de Reynolds $Re=1700$. A la valeur de $Re=1700$ le vortex apparaît au voisinage de l'axe de symétrie.

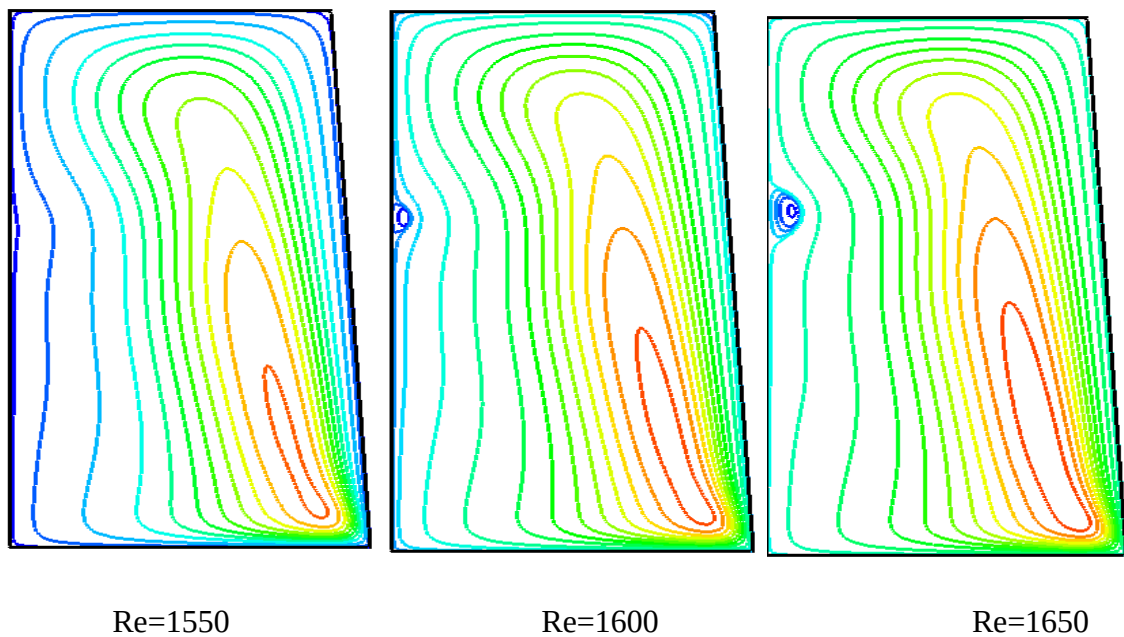


Figure III-7 : Contours de lignes de courant pour le cas de $Re_{cr}=1650$ avec $\alpha=11$

Quand l'angle d'inclinaison (α) augmente, les vortex s'apparaissent pour des valeurs de (Re) plus basse. Pour $\alpha=11$, sur **la figure III-7**, le vortex commence à apparaître à la valeur de $Re=1600$, juste pour $Re=1650$ le vortex est clairement apparu toujours au voisinage de l'axe de symétries.

Nous présentons dans **le tableau (III-1)** les différentes valeurs de Re_{cr} dans lesquelles les vortex sont apparus telles que $Re_{cr} = 2800, 2100, 1900, 1750$, et 1650 correspondant à la variation de l'angle d'inclinaison (α) qui prend les valeurs suivantes: 0, 5, 7, 9, et 11. Le diagramme de stabilité présenté à la figure (I-8) met en évidence la variation du nombre de Reynolds critique Re_{cr} en fonction de la variation de la valeur (α). Nous constatons que l'augmentation de l'angle d'inclinaison (α), les vortex apparaissent pour des valeurs de (Re) plus basse.

Tableau III-1: Paramètres numérique trouvés après la simulation pour une convection forcée

α	0	5	7	9	11
Re _{cri}	2800	2100	1900	1750	1650

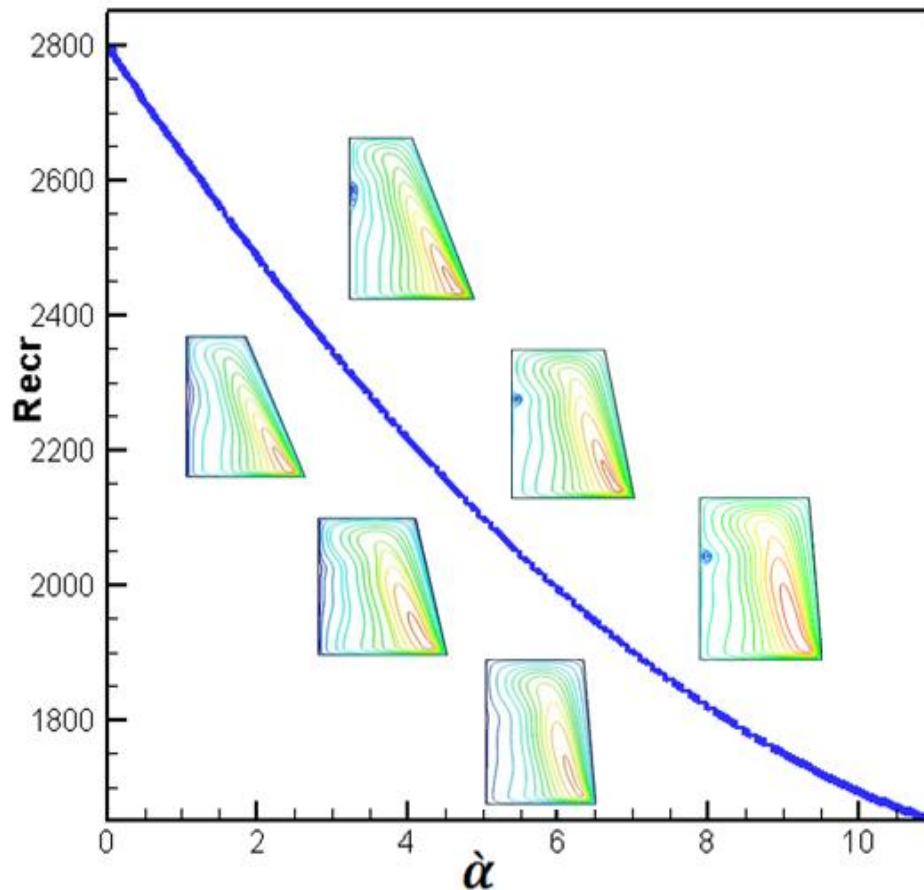


Figure III-8: La variation du nombre de Reynolds critique ($Recr$) en fonction de l'angle d'inclinaison (α) pour la disparition des vortex.

III.5 Convection mixte avec différentes valeurs de l'angle d'inclinaison(α)

couche de fluide au repos est chauffée par le bas, il se crée une stratification verticale de température. Cette dernière induit une stratification de densité telle que du fluide lourd surmonte le fluide le plus léger. Cette situation est potentiellement instable dans la mesure où une fluctuation de température au sein d'une particule fluide se verra amplifiée par la poussée d'Archimède résultant sur celle-ci. En effet toute augmentation (ou diminution) de température entraînera une diminution (ou une augmentation) de la densité de la particule et donc un mouvement ascendant (descendant) de celle-ci vers des zones froides (chaudes). Dans ces dernières, les contrastes de densité entre la particule et le milieu seront plus importants et intensifieront donc d'autant le déplacement de celle-ci.

La présence d'un gradient thermique dans le fluide induit un gradient de densité. Des particules se refroidissent au contact du disque froid, deviennent plus denses et ont donc tendance à couler. D'autres particules deviennent moins denses au contact du disque

chaud, elles se dilatent et ont donc tendance à monter. C'est cette différence de densité qui fait naître la poussée d'Archimède au sein du fluide, poussée qui croît avec l'augmentation de l'écart de température entre le haut et le bas du fluide.

Quand $\alpha = 0$ et on fixe $Re = 1000$, l'effet de l'écart de température entre le haut et le bas du fluide, la poussée d'Archimède devient suffisamment importante pour enclencher les mouvements ascendants et descendants de convection. Un vortex apparaît partiellement pour une valeur du nombre de Richardson $Ri=2.2$. Ce vortex apparaît clairement juste pour $Ri=2.5$ est situé au voisinage de la paroi latérale sous forme elliptique voir **la figure (III-9)**.

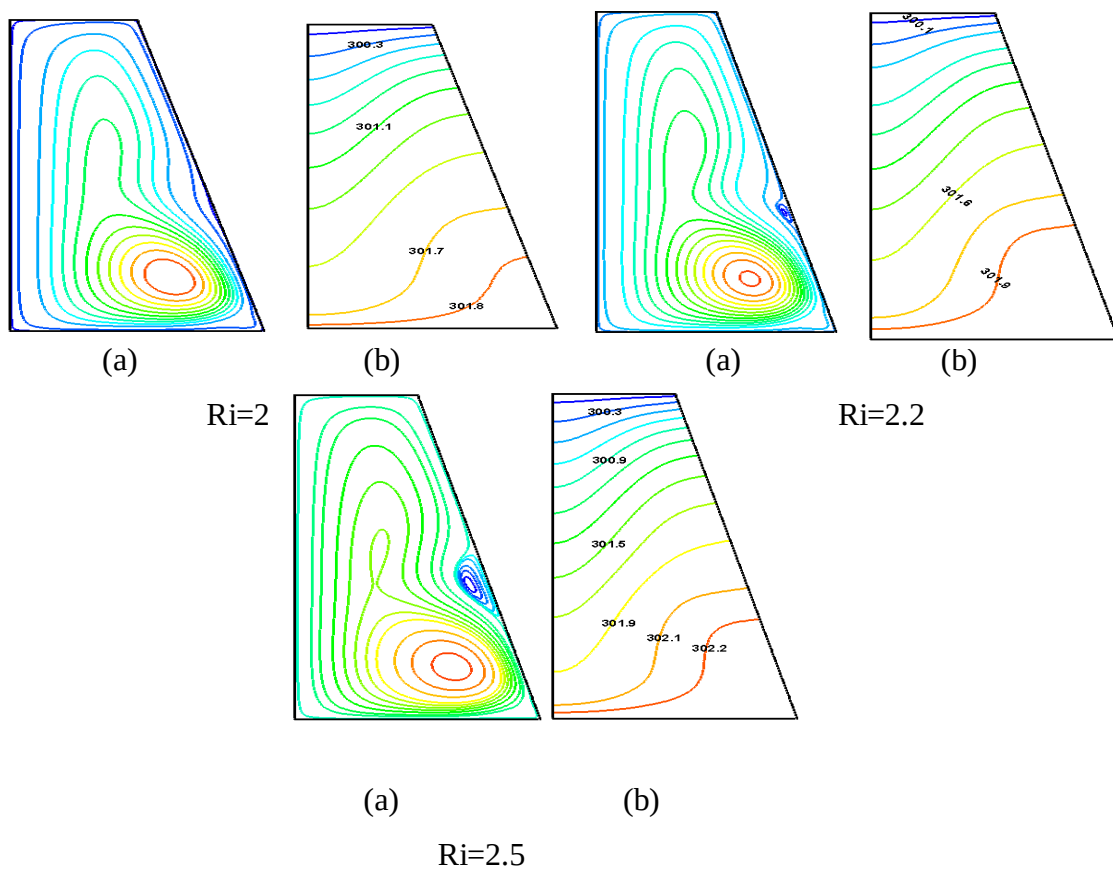


Figure III-9 : Contours de lignes de courant (a), et contours des isothermes (b) pour le cas de $Re=1000$ avec $\alpha=0$

Pour $\alpha=5$, nous remarquons que l'effet de gradient de la température est très important ce qui permet de créer une zone de tourbillon sur le côté de la paroi latérale à la valeur du nombre de Richardson $Ri=1$ voir **la figure III-10**.

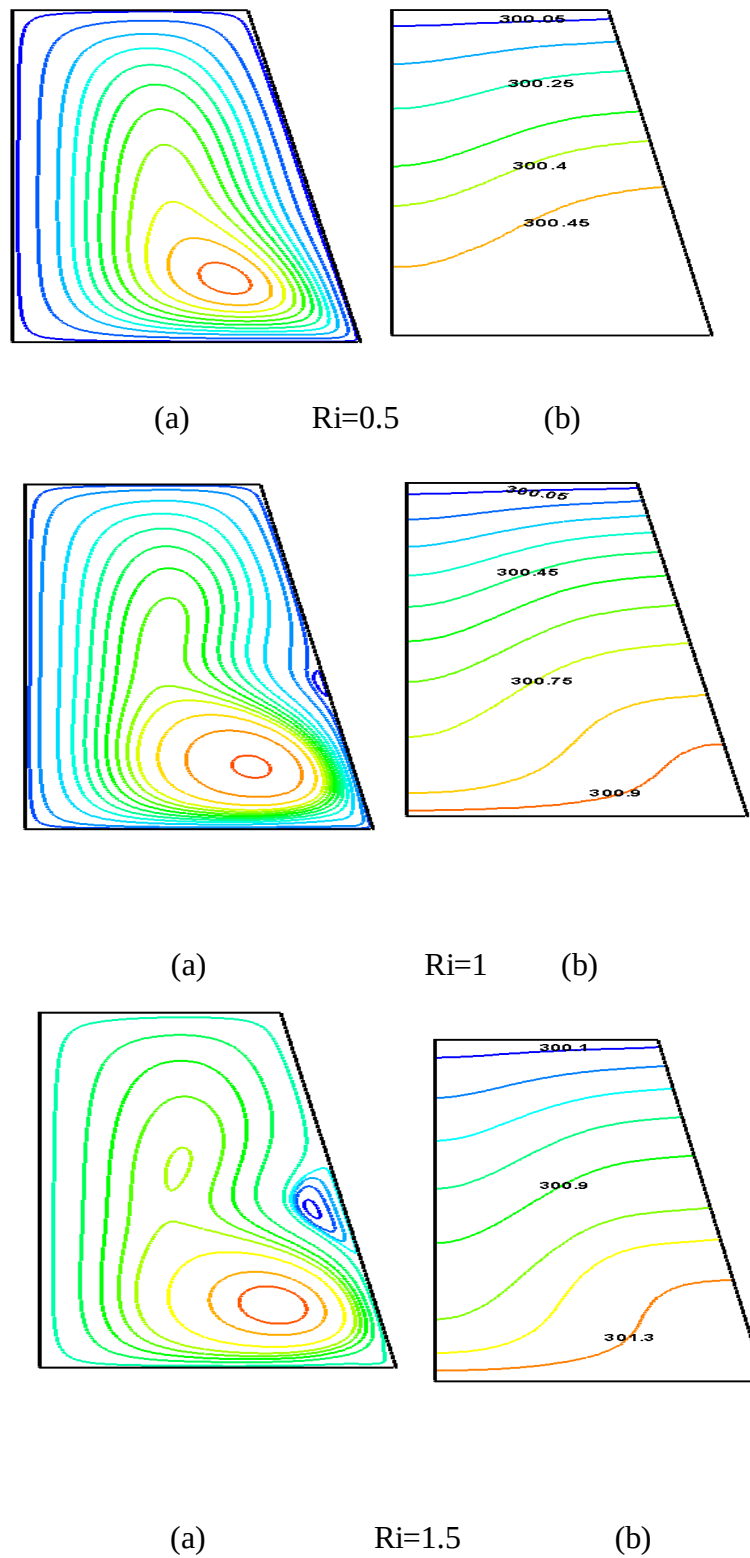


Figure III-9 : Contours de lignes de courant (a),et contours des isothermes (b) pour le cas de $Re=1000$ avec $\alpha=0$

Concernant le cas $\alpha=7$ le gradient de la température est capable de provoquer le mouvement des particules du fluide, le transfert de chaleur s'effectue alors avec convection forcée c'est pourquoi on observe une des isothermes plus ou moins courbées au fur et à mesure qu'on s'approche à la paroi latérale. Cette remarque est observée pour tous les cas. Le vortex est apparu à la valeur du nombre de Richardson $Ri=0.8$ près de la paroi latérale, comme le montre la figure III-11.

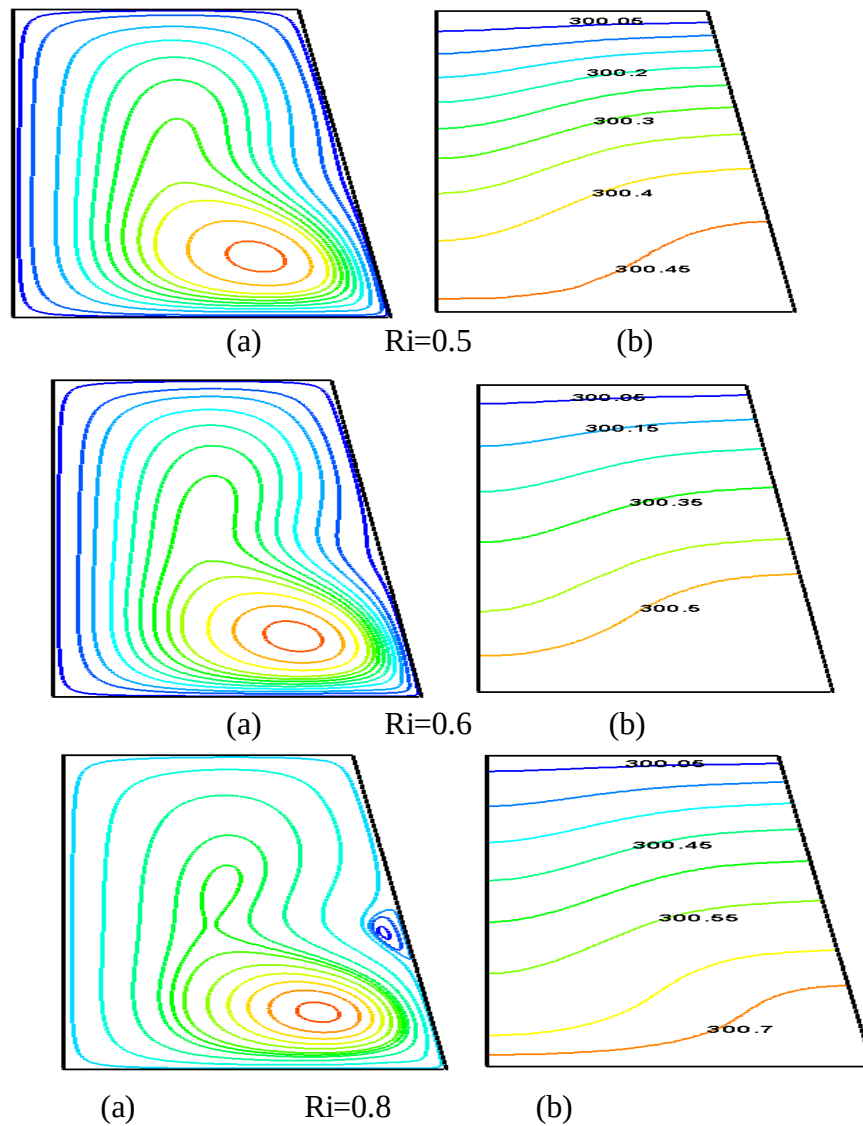


Figure III-11: Contours de lignes de courant (a), et contours des isothermes (b) pour le cas de $Re=1000$ avec $\alpha=7$

On remarque pour $\alpha=9$ un gradient de température avec la convection forcée de la rotation de disque inférieur déclenche un écoulement thermique vertical qui soulève le jet et le force à faire une recirculation dans le cœur du cône ce qui provoque la formation d'une cellule principale dans la partie inférieure du cône (**figure III-12**), ce qui traduit la convection mixte. ce qui prédit la formation d'une tourbillon à une valeur du nombre de Richardson plus supérieure. Ce comportement continue jusqu'à $Ri=0.7$ où l'apparition d'un vortex qui se forme juste au milieu de la paroi latérale avec des déformations des lignes de courants.

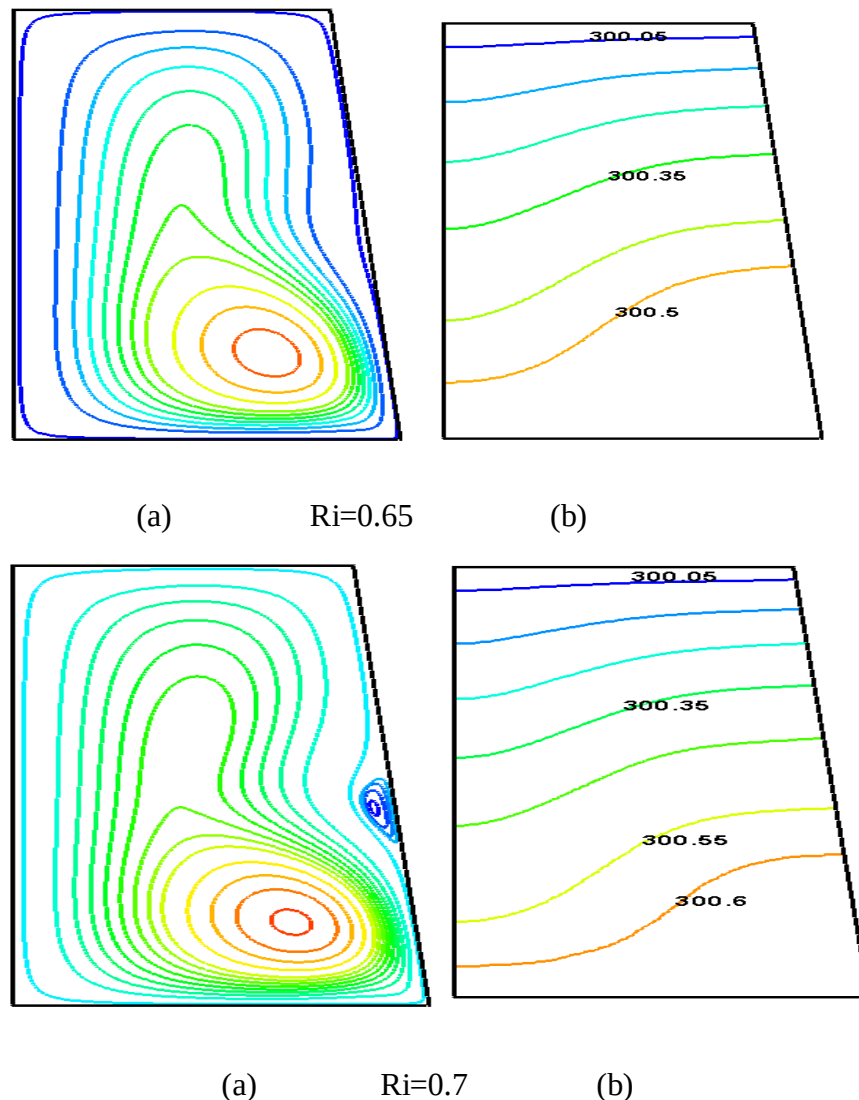


Figure III-12: Contours de lignes de courant (a), et contours des isothermes (b) pour le cas de $Re=1000$ avec $\alpha=9$

La **figure III-13** montre les contours de lignes de courant et les contours des isothermes pour $\alpha=11$. On remarque que le vortex est apparu juste à la paroi latérale à la valeur du nombre de Richardson $Ri=0.6$. Ce que nous concluons lorsque la valeur de l'angle

d'inclinaison (α) augmente, le vortex apparaît à la valeur du nombre de Richardson Ri plus basse.

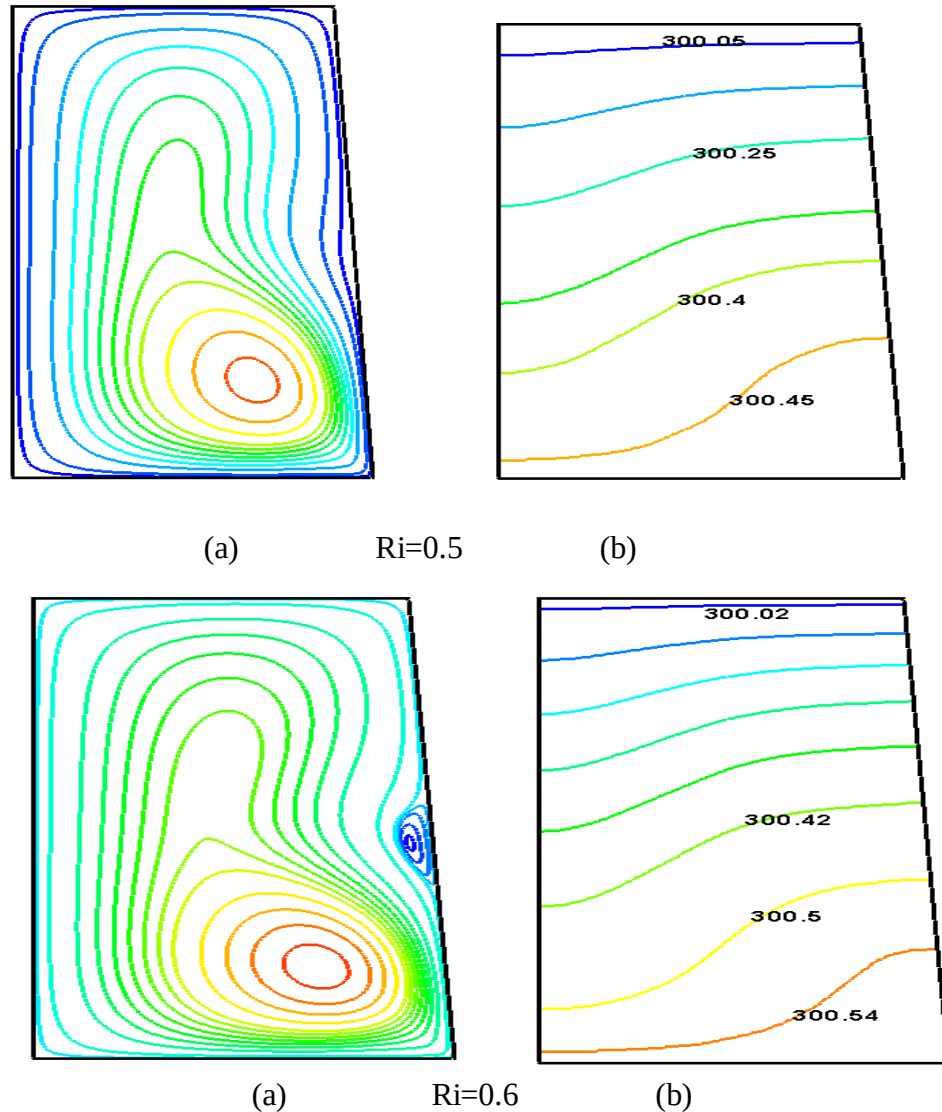


Figure III-13: Contours de lignes de courant (a), et contours des isothermes (b) pour le cas de $Re=1000$ avec $\alpha=11$

Nous présentons dans **le tableau (III-2)** les différentes valeurs du nombre de Richardson Ri dans lesquelles les vortex sont apparus telles que $Ri = 0.6, 0.7, 0.8, 1.5$, et 2.5 correspondant à la variation de l'angle d'inclinaison (α) qui prend les valeurs suivantes: $0, 5, 7, 9$ et 11 . Le diagramme de stabilité présenté à **la figure (III-14)** met en évidence la variation du nombre de Richardson critique (Ri_{cr}) en fonction de l'angle d'inclinaison (α). Nous constatons que l'augmentation de l'angle d'inclinaison (α), les vortex apparaissent pour des valeurs de (Ri) plus basse.

Tableau III-2: Paramètres numérique trouvés après la simulation pour une convection mixte.

α	0	5	7	9	11
Ricri	2.5	1.5	0.8	0.7	0.6

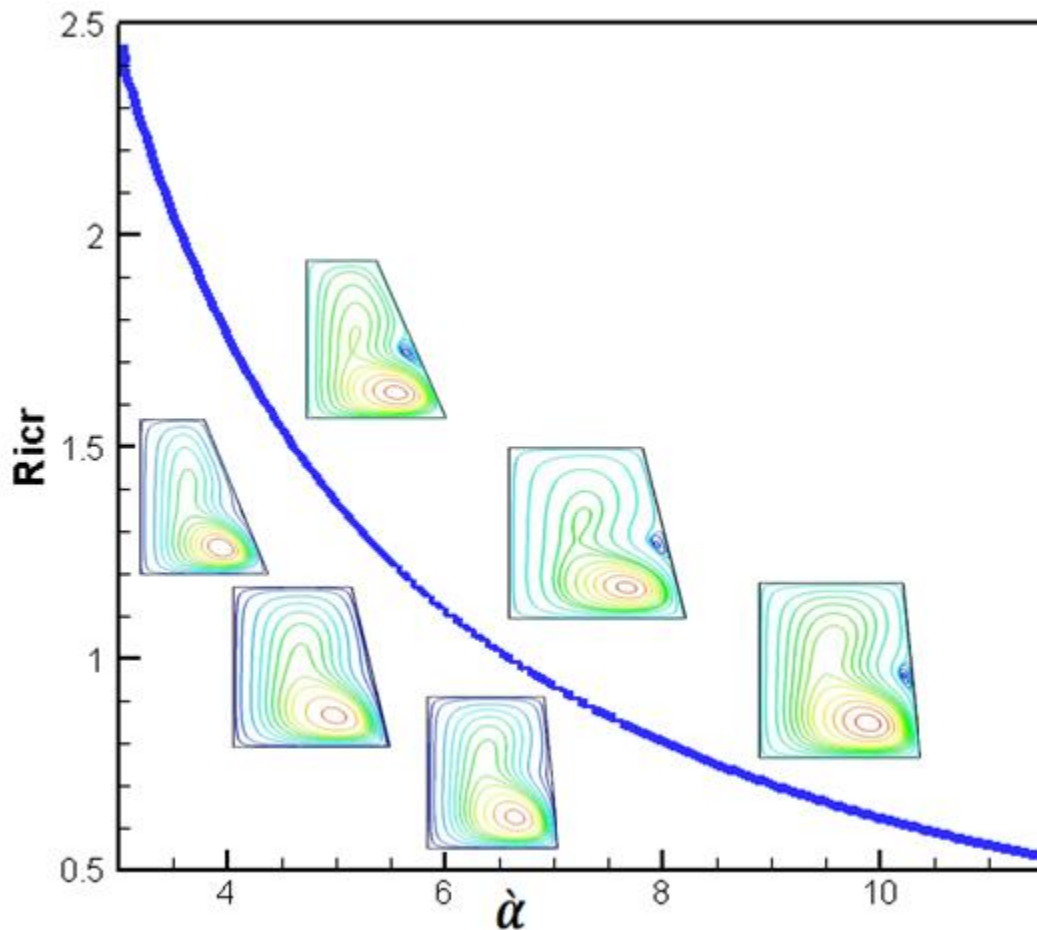


Figure III-14: La variation du nombre de Richardson critique (Ricr) en fonction de l'angle d'inclinaison (α) pour la disparition des vortex.

III.6 L'effet de champ magnétique

Si on applique un champ magnétique l'écoulement se stabilise et redevient stationnaire et retrouve la symétrie de réflexion. Quand un champ magnétique (axial) vertical est imposé, on observe quelques changements intéressants sur le mouvement du fluide et sur le transfert thermique, l'écoulement se stabilise sous l'effet du champ magnétique, et le seuil de transition décale au Reynolds plus élevé par rapport à l'état sans champ magnétique Mahfoud (2013).

Avec des parois isolantes les lignes de courants électriques doivent nécessairement se refermer au sein du fluide. La couche d'Ekman est remplacée par la couche d'Hartmann, le long des parois latérales des couches limites parallèles se développent. Le gradient de vitesse à la paroi est alors de l'ordre du nombre de Hartmann $Ha = BR_1(\sigma/\nu)^{1/2}$. On peut montrer que pour des situations asymptotiques, le cœur de l'écoulement est en rotation solide à une vitesse moitié de celle du disque **Bessaih et al (1999)**.

Nous avons appliqué un champ magnétique vertical pour voir la stabilité des écoulements convectifs. Nous prenons le cas du nombre de Reynolds $Re=1000$ et $\alpha=0$ avec $Ri=2.5$. Le but de l'application du champ magnétique afin de déterminer le nombre de Hartmann Ha pour lequel les vortex disparaissent et l'écoulement devient stable.

Sous l'effet du champ magnétique, les tourbillons disparaissent complètement. La **figure III-15** montre les lignes de courants pour les cas étudiés avec les valeurs du nombre de Hartmann dans lequel les vortex sont disparus.

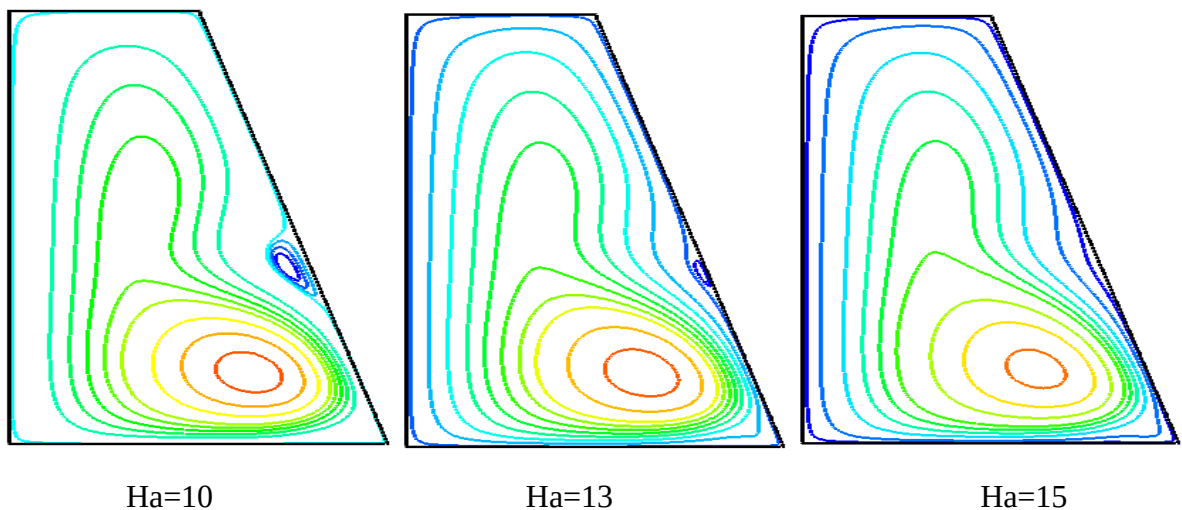


Figure III-15: Contours de lignes de courant dans le cas de $Re=1000$ et $Ri=2.5$ pour différentes valeurs de Ha avec $\alpha=0$

On commence augmenter la valeur du nombre de Hartmann progressivement jusqu'à la première solution de l'état axisymétrique est apparu. Quant la valeur du nombre de Hartmann $Ha=15$ le vortex est disparu et l'écoulement devient stable.

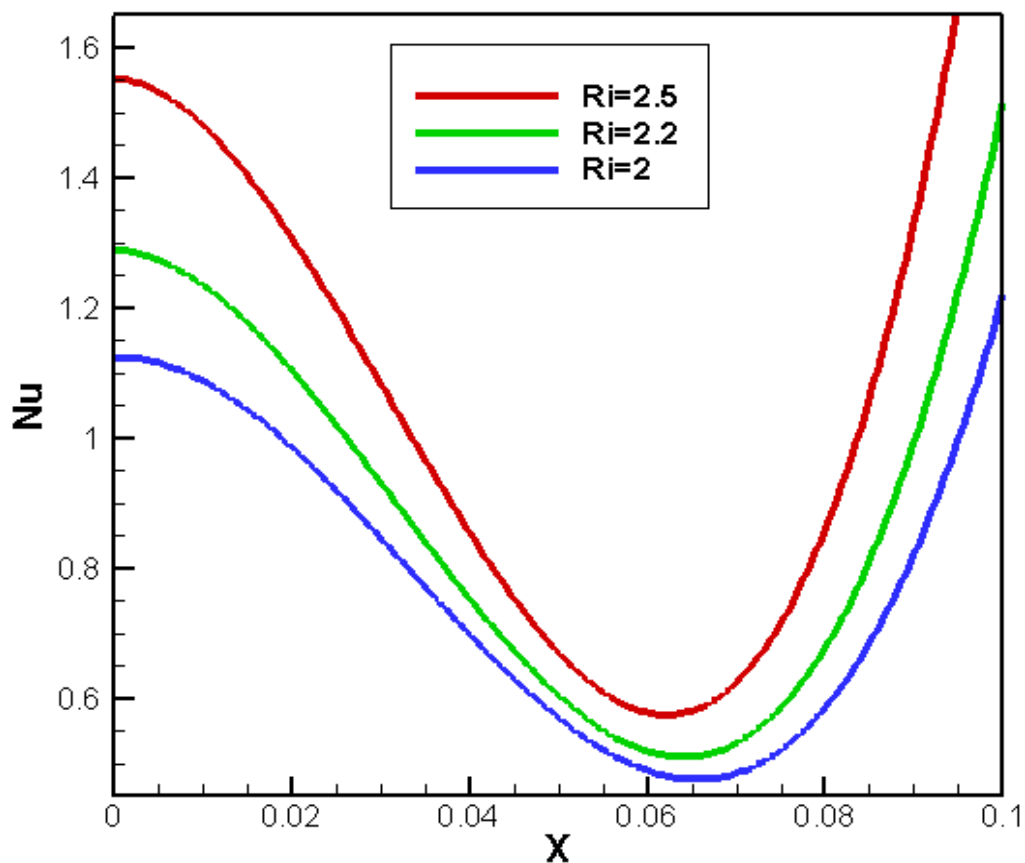


Figure. III.16 : le nombre de Nusselt moyen au disque inférieur, dans le cas de $\alpha=0$ avec $Re = 1000$ pour différentes valeurs de Ri .

La figure I.16 est tracée pour montrer la variation du nombre de Nusselt moyen au disque inférieur dans le cas du nombre de Reynolds pour $Re = 1000$ pour différentes valeurs du nombre de Richardson Ri .

Cependant, le nombre moyen de Nusselt est plus élevé lorsque le nombre de Richardson est plus élevé. Il semble bien que dans le cas de $Ri = 2.5$, le nombre de Nusselt prends la valeur la plus haute par rapport les autres valeurs.

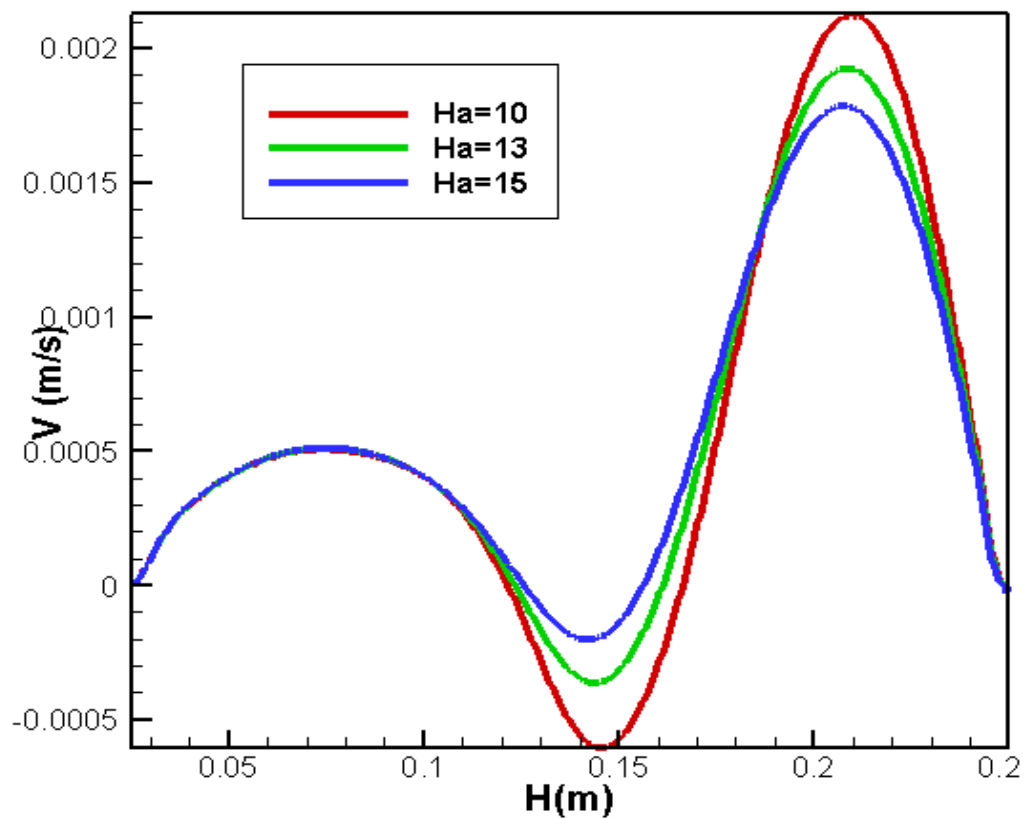


Figure III.17 : la vitesse axiale le long du cône, dans le cas de $\alpha=0$ avec $Re = 1000$ et $Ri=2.5$ pour différentes valeurs de Ha .

La figure III.17. montre les effets du champ magnétique sur les vitesses axiales pour différentes valeurs de Ha à $Re = 1000$ et $Ri = 2.5$ et $\alpha=0$. La première figure montre que lorsque le champ magnétique appliqué dépasse la valeur $Ha=15$, l'écoulement asymétrique devient axisymétrique. La force de l'écoulement diminue avec l'augmentation du nombre de Hartmann en raison de la diminution de la vitesse d'écoulement.

Conclusion générale

Cette étude présente les résultats numériques de l'écoulement bidimensionnel dans une enceinte conique tronqué remplie d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$), soumise à un champ magnétique orienté verticalement, a été faite. Le code CFD Fluent a été utilisé basé sur la méthode des volumes finis pour résoudre numériquement les équations de transports gouvernants le phénomène étudié. Dans le but de confronter nos résultats produite par notre code de calcul, une validation de celui-ci a été faite, par comparaisons de ses résultat avec d'autres travaux numériques présentes dans la littérature. De même, un excellent accord est trouvé entre leurs résultats numériques et nos résultats du code de calcul. D'une part, nos simulations numériques ont été présentées pour la convection forcée et la convection mixte avec les valeurs de l'angle d'inclinaison α tel que $\alpha=0, 5, 7, 9$, et 11 dans lesquels les vortex sont apparus. Après, on a appliqué un champ magnétique vertical représenté par le nombre du Hartmann Ha (10, 13 et 15) afin de voir ses effet sur la stabilité de l'écoulement. Les observations tirées de cette étude sont les suivantes:

- L'augmentation de l'angle d'inclinaison (α) les vortex apparaissent pour des valeurs de (Re) plus bases.
- L'augmentation de l'angle d'inclinaison (α) les vortex apparaissent pour des valeurs de (Ri) plus basse.
- Lorsque le gradient de température augmente caractérisé par le nombre de Richardson le nombre du Nusselt augmente en parallèle.
- En présence d'un champ magnétique vertical, l'écoulement garde sa stabilité axisymétrique (Il n'ya pas des vortex) jusqu'à des valeurs du nombre de Richardson plus grande.
- En présence d'un champ magnétique vertical, l'écoulement garde sa stabilité axisymétrique (Il n'ya pas des vortex) jusqu'à des valeurs du nombre de Reynolds plus grande.
- Quand le nombre de Hartmann augmente la vitesse axiale diminue, l'écoulement prend son état de stabilité.

Bibliographie

Balci, A., Brøns, M., Herrada, M., Shtern, V. N., “Bifurcations of a creeping air–water flow in a conical container”, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* , Vol.30, No.5, 2016, pp.485-496.doi:10.1007/s00162-016-0391-z

BATCHELOR G.K.,1952: Note on a class of solutions of theNavier-stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow

Ben Hadid. H, Henry. D et Touihri. R., (1997): Unsteady three-dimensional buoyancy-driven convection in a circular cylindrical cavity and its damping by agnetic field, *Journal of Crystal Growth*, vol. 180, pp. 433-441.

Bessaïh .R, Kadja .M, Eckert. K.et Marty. Ph., (2003): Numerical and analytical study of rotating flow in an enclosed cylinder under an axial magnetic field, *Acta Mechanica*, vol. 164, pp. 175-188.

Bessaïh. R, Marty .Ph et Kadja .M., (1999): Numerical study of disk driven rotating MHD flow of a liquid metal in a cylindrical enclosure, *Acta Mechanica*, vol. 135, pp. 153-167, 999.

Brahim Mahfoud, Ali Bendjaghoulouli & Rachid Bessaïh., 2016,

Magnetohydrodynamic co-rotating flow in a vertical cylindrical container, *Numerical And Heat Transfer*, DOI: 10.1080/10407782.2015.1109383

Brahim Mahfoud and Rachid Bessaïh.,2012, Stability Of Swirling Flows With Heat Transfer In A Cylindrical Enclosure With Co/Counter-Rotating End Disks Under An Axial Magnetic Field, *Numerical And Heat Transfer, Part A*, 61: 463–482 Transfer, Part A, Vol.61,No.6, 2012,pp.463–482.doi:10.1080/10407782.2012.654461

Chamkha , A.J., “Coupled heat and mass transfer by natural convection about a truncated cone in the presence of magnetic field and radiation effects,” *Numerical Heat Transfer, Part A*, vol. 39, No. 5, 2001, pp. 511–530 .doi:10.1080/10407780120202

Chamkha, A.J, Al-Mudhaf, A., “Unsteady heat and mass transfer from a rotating vertical cone with a magnetic field and heat generation or absorption effects,” *International journal thermal sciences.*, Vol.44, No.3, 2005, pp. 267–276.

doi:10.1016/j.ijthermalsci.2004.06.005

Cramer, K.R., Pai, S.I., “ *Magnetofluid Dynamics for Engineers and Applied Physicists,*” Scripta Publishing Company, 1973.

Davidson. P.A.,:An Introduction to Magneto hydrodynamics Cambridge Texts in Applied Mathematics

- Dijkstra, D. & Heijst G. J. F. van.,** “The flow between two finite rotating disks enclosed by a cylinder”, *Journal of Fluid Mech.*, 128, 123 (1983).
- Escudier, M.P., O’Leary, J., Poole, R.J.,** Flow produced in a conical container by a rotating endwall,” *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 28, No.6, 2007, pp. 1418–1428 .
doi :10.1016/j.ijheatfluidflow.2007.04.018
- Escudier .M. P.(1984)** :Observations of the flow produced in a cylindrical container by a rotating end wall, *Experiments in Fluids*, vol. 2, pp. 189-196.
- Gauthier, G., Gondret, P. and Rabaud, M.,** 1999 Axisymmetric propagating vortices in the flow between a stationary and a rotating disk enclosed by a cylinder, *J. Fluid Mech.* 386, 105–126,
- Gauthiery G., P. Gondret, F. Moisy And M. Rabaud.,** (2002), Instabilities in the flow between co- and counter-rotating disks, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 473, pp. 1.21.
- Gelfgat .A. Yu, Bar-Yoseph. P. Z et Solan. A.,** (1996) :Steady states and oscillatory instability of swirling flow in a cylinder with rotating top and bottom, *Physics of Fluids*, vol. 8, n°10, pp. 2614-2625.
- Hasanuzzaman M., Öztö, H. F., Rahman, M.M., Rahim, N.A., Saidur, R., Varol,Y.,** “Magnetohydrodynamic natural convection in trapezoidal cavities,” *International communication heat mass transfer*, Vol. 39, No.9, 2012, pp. 1384–1394.
doi:10.1016/j.icheatmasstransfer.2012.08.009
- Hide, R. and Titman, C.W.,** Detached shear layers in a rotating fluid, *J. Fluid. Mech.* 29,39–60, 1967.
- Iwatsu. R.,**”Flow pattern and heat transfer of swirling flows in cylindrical container with rotating top and stable temperature gradient”, *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol. 47, pp. 2755–2767, 2004.
- Iwatsu R.,** “Numerical Study of Flows in a Cylindrical Container with Rotating Bottom and Top Flat Free Surface “, *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 74, N° 1, pp. 333-344, 2005
- KARMAN T. V.,** *Zeits.f. angew. Math. u. Mech.* 1 (1921), 244.
- KHARICH A.et al.,**2001,Influence du champ magnetique sur l’écoulement produit par un disque tournant dans une cavité cylindrique.**LEGI, BP53, 38041 Grenoble Cedex 9, France*
- Kharicha. A, Alemany .A, and Bornas. D.,** ”Influence of the magnetic field and the conductance ratio on the mass transfer rotating lid driven flow”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 47, pp. 1997–2014, 2004.

- Kharicha, A., Alemany, A., Bornas, D.,** "Hydrodynamic study of a rotating MHD flow in a cylindrical cavity by ultrasound shift method", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 43, No. 7, 2005, pp. 589-615. doi: 10.1016/j.ijengsci.2004.09.010
- KILICT. M, X. GAN AND OWEN J. M. ,**1994, Transitional flow between contra-rotating disks, *Journal of fluid mechanics*, vol. 281, pp. 119-135
- Leibovich, s.,**1978" The structure of vortex breakdown" *Annual Review of fluid Mechanics* volume 10,1978, pp221-246 ,<https://doi.org/10.1146/annurev.fl.10.010178.001253>
- Lienhard IV. J. H et Lienhard V. J. H.,** (2005): *A Heat Transfer Textbook*, 3rd Ed., Cambridge,
- Lopez, J. M.,** 1990: Axisymmetric vortex breakdown Part 1. Confined swirling flow, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 221, p p . 533-552
- Lopez .J. M, Marques .F et Jie Shen.,**(2002): An Efficient Spectral-Projection Method for the Navier–Stokes Equations in Cylindrical Geometries, *Journal of Computational Physics*, vol.176, pp.384-401.
- Mahfoud, B., Bessaïh, R.,** “Magnetohydrodynamic counter-rotating flow in a cylindrical cavity,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol.93, Feb. 2016, pp.175–185 . doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.10.009
- Mahfouz F. M. and Badr H. M.,** “Heat convection from a cylinder performing steady rotation or rotary oscillation - Part II: Rotary oscillation”, *Heat and Mass Transfer*, vol.34, N° 5, pp. 375 - 380, 1999.
- Marty. Ph, Witkowski. L. M, Trombetta. P et Tomasino.T.,** (1999): On The Stability of Rotating MHD Flows , *Transfer Phenomena in Magnetohydrodynamic and Electroconducting Flows*, pp. 327-343, 1999.
- Martins, D. A., Souza, F. J., Salvo, R.V.,** “Formation of vortex breakdown in conical–cylindrical cavities,”. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol.48, Aug. 2014, pp.52–68 .doi:10.1016/j.ijheatfluidflow.2014.05.001
- MELLOR G. L, CHAPPLE P. J, and STOKES. V. K.,** 1968: On the flow between a rotating and a stationary disk, *Journal of Fluid Mechanics*, vol,31, p p . 95-112
- Michelson. J. A.,** (1986): Modeling of laminar incompressible rotating fluid flow, AFM 86-05, Ph. D. Dissertation. Dept of Fluid Mechanics, Tech. Univ. of Denmark.
- Mittal V., M. F. Baig and Kant Khan. B.,** “Buoyancy-driven convection in liquid metals subjected to transverse magnetic fields”, *Journal of Indian Institut of Science*, vol. 85, pp. 119–129, 2005

- Mohiddin, S.G., Anwar Bég, O., Kumar S.V. Varma.,** “Numerical study of free convective MHD flow past a vertical cone in non-darcian porous media,” *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.41, No.2, 2014, pp.119-140.doi:10.2298/TAM1402119G
- Moisy.F, et Pasutto.T.,** Laboratoire FAST, Bat. 502, F-91405 Orsay Cedex; Etude des instabilités de l’écoulement entre disques contra-rotatifs par PIV
- Nore, C., Tuckerman, L. S., Daube, O., Xin, S.,** "The 1:2 mode interaction in exactly counter-rotating von Kármán swirling flow", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.477, 2003,pp. 51–88 .doi:10.1017/S0022112002003075
- NGUYEN N. D, RIBAUT J. P, and FLORENT. P.,** 1975:Multiple solutions for flow between coaxial disks, *J. Fluid Mech*vol. 68, part 2, pp. 369-388
- Nouri- Borujerdi, A., Nakhchi, M.E.,** “Heat Transfer Enhancement in Annular Flow with Outer Grooved Cylinder and Rotating Inner Cylinder: Review and Experiments,” *Applied Thermal Engineering*, Vol.120,2017, pp.257–268.doi: 10.1016/j.applthermaeng.2017.03.095
- Nouri- Borujerdi, A., Nakhchi, M.E.,** “Optimization of the heat transfer coefficient and pressure drop of Taylor-Couette-Poiseuille flows between an inner rotating cylinder and an outer grooved stationary cylinder,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.108,2017,pp.1449–1459.doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.014
- Nouri- Borujerdi, A., Nakhchi, M.E.,** “Experimental Study of Convective Heat Transfer in the Entrance Region of an Annulus with an External Grooved Surface,” *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol.98,2018, pp. 557–562.
doi:10.1016/j.expthermflusci.2018.06.025
- Patankar, S.V.,** “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow,” McGraw-Hill, New-York, 1980.
- Rabaud, M. and Couder, Y., Instability of an annular shear layer, *J. Fluid. Mech.* 136, 291–319,1983.
- Rashidi,S., Esfahani, J.A.,** “The effect of magnetic field on instabilities of heat transfer from an obstacle in a channel, ” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 391,2015,pp. 5–11.doi:10.1016/j.jmmm.2015.04.095
- Rashidi,S.,Bovand,M.Abolfazli Esfahania,J.,**“Application of magnetohydrodynamics for suppressing the fluctuations in the unsteady flow around two side-by-side circular obstacles, ” *The European Physical Journal Plus*, Vol. (2016) 131: 423.doi: 10.1140/epjp/i2016-16423-9
- Rashidi,S.,Esfahani,J.A., Maskaniyan, M.,**“Applications of magnetohydrodynamics in biological systems-A review on the numerical studies,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 439,2017, pp.358–372doi: 10.1016/j.jmmm.2017.05.014.
- Sarpkaya,T.,**1995 "Vortex breakdown and turbulence" doi: 10.2514/6.1995-433

- Sébastien Poncet, Roland Schiestel, Romain Monchaux.**,2007 :Turbulent Von Kármán flow between two counter-rotating disks, Proceedings of the 8th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows, Paper reference: ISAI8-0013
- Serre, E., Crespo del arco, E. & Bontoux, P.**, Annular and spiral patterns in flows between rotating and stationary discs, *J. Fluid Mech.* 434, 65-100, 2001.
- Schouveiler, L., Le Gal, P. and Chauve , M.-P.**, Stability of a travelling roll system in a rotating disk flow, *Phys. Fluids* 10, 2695–2697, 1998.
- Sotiropoulos,F Y. Ventikos & T. C. Lacky.**(2001) “ Chaotic advection in three- dimensional stationary vortex-breakdown bubbles: Šil'nikov's chaos and the devil's staircase ”, *J. Fluid Mech.* 444, 257-297.
- Spohn,A, Mory, M. & Hopfinger, E. J.** (1998) “ Experiments on vortex breakdown in a confined flow generated by a rotating disc ”, *J. Fluid Mech.* 370 (1998), 73-99.
- Stewartson. K.**, 1953: On the flow between two rotating coaxial disks
- Takhar, H. S., Chamkha, A. J., Nath, G.**, “Unsteady mixed convection flow from a rotating vertical cone with a magnetic field,” *Heat Mass Transfer*, Vol.39, No. 4, 2003, pp. 297–304 .doi: 10.1007/s00231-002-0400-1
- Vogel H. U.** ,“Experimentelle Ergebnisse über die laminare Strömung in einem zylindrischen Gehäuse mit darin rotierender Scheibe”, *MPI Bericht* 6, 1968.
- Vogel H. U.** ,“Rückströmungsblasen in Drallströmungen. Festschrift 50 Jahre Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, 1975.
- Yuka Omi, Reima Iwatsu.**, 2005, Numerical study of swirling flows in a cylindrical container with co-/counter-rotating end disks under stable temperature difference, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 48 (2005) 4854–4866