

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Mécanique et Electromécanique



N° Ref :.....

Projet de fin d'étude préparé en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

en Génie Mécanique

Spécialité : ÉNERGÉTIQUE

**Convection naturelle et génération d'entropie de
nanofluide dans une enceinte poreuse**

Réalisé par :

BOUGUEBINA Loqman

KEDDARI Charef

Soutenu devant le jury :

M. SAOULI Salah

Prof.

Président

M. ABDEDAIM Imene

M.C.B

Examineur

M. BERRAHIL Farid

M.C.A

Encadreur

Année universitaire : 2023/2024

Dédicace

Je dédie ce travail :

loqman

À mes chers parents, pour votre amour infini, votre soutien inconditionnel et vos sacrifices sans fin. Vous êtes mes piliers, ma source de force et d'inspiration.

À mes amis précieux, pour vos encouragements constants.

À mes professeurs et encadrants, pour votre expertise, vos conseils éclairés et votre patience.

À tous ceux qui croient en moi, pour votre confiance m'a porté et m'a donné la motivation nécessaire pour aller de l'avant.

Enfin, à moi-même, pour ma persévérance, mes efforts inlassables et ma détermination à atteindre mes objectifs.

Je dédie ce travail :

charef

À mes chers parents qui m'ont soutenu tout au long de mon parcours scolaire.

À tous mes frères : Mohamed Yahya, Bilal Siraj Eddine.

À mon frère et ami Luqman avec qui j'ai parcouru ce chemin ensemble.

À toute ma famille et mes amis.

À mes professeurs qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.

À tous ceux qui me sont chers et à tous ceux qui liront ce mémoire.

À tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce modeste travail.

Remerciement

Nous remercions tout d'abord Allah qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce travail.

Nous remercions notre encadreur Dr. Berrahil Farid pour ses encouragements, et sa présence totale et ses suggestions avisées qui nous ont conduits à terminer ce travail.

Mes remerciements vont également à monsieur Pr. Saouli Salah et madame Dr. Abdedaim Imene pour nous avoir fait l'honneur d'examiner ce travail et de participer au jury de soutenance.

Nous remercions nos amis, nos collègues de l'institut des Sciences et Technologie ainsi que l'ensemble des enseignants et responsables.

Enfin nous remercions nos parents pour nous avoir appris à toujours aller au bout de nos rêves, ainsi que nos frères et sœurs.

Résumé

Cette étude numérique explore la convection naturelle d'un nanofluide ($\text{Al}_2\text{O}_3/\text{eau}$) dans une cavité carrée poreuse avec deux blocs solides, soumise à l'influence d'un champ magnétique externe horizontal. Les équations de conservation sont modélisées par le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer et résolues numériquement en utilisant la méthode des volumes finis via un programme Fortran. L'algorithme SIMPLER est utilisé pour le couplage vitesse-pression. L'impact des paramètres comme les nombres de Rayleigh et de Darcy, la fraction volumique des nanoparticules et le champ magnétique est analysé. Les résultats montrent que l'augmentation de Ra , Da et ϕ stimule l'écoulement, favorisant la convection et améliorant significativement le transfert de chaleur grâce aux nanoparticules. En revanche, Ha diminue le transfert de chaleur en freinant le mouvement du fluide via l'effet de la force de Lorentz. La génération totale d'entropie est amplifiée avec des valeurs élevées de Ra , ϕ et Da , indiquant une augmentation des irréversibilités. A l'inverse, une augmentation de Ha réduit la production d'entropie.

Mots clés :

Convection naturelle, Milieu poreux, Nanofluide, Champ magnétique, Génération d'entropie.

ملخص

تستكشف هذه الدراسة العددية الحمل الحراري الطبيعي للموائع النانوية (ماء/ Al_2O_3) في تجويف مربع مسامي يحتوي على كتلتين صلبتين، خاضعة لتأثير مجال مغناطيسي أفقي خارجي. تم تصميم معادلات الحفظ بواسطة نموذج Darcy- Brinkman - Forchheimer وتم حلها عددياً باستخدام طريقة الحجم المحدود عبر برنامج فورتران. يتم استخدام خوارزمية SIMPLER لاقتزان السرعة والضغط. يتم تحليل تأثير المعلمات مثل أرقام رايلي ودارسي، والجزء الحجمي للجسيمات النانوية والمجال المغناطيسي. أظهرت النتائج أن الزيادة في Ra و Da و ϕ تحفز التدفق، وتعزز الحمل الحراري وتحسن بشكل كبير نقل الحرارة بفضل الجسيمات النانوية. من ناحية أخرى، يقلل Ha من انتقال الحرارة عن طريق إبطاء حركة السائل من خلال تأثير قوة لورنتز. يتم تضخيم إجمالي توليد الإنتروبيا بقيم عالية من Ra و ϕ و Da ، مما يشير إلى زيادة في اللارجعة. وعلى العكس من ذلك، فإن زيادة Ha تقلل من إنتاج الإنتروبيا.

الكلمات المفتاحية:

الحمل الحراري الطبيعي، الوسط المسامي، الموائع النانوية، المجال المغناطيسي، توليد الإنتروبيا.

Abstract

This numerical study explores natural convection of a nanofluid ($\text{Al}_2\text{O}_3/\text{water}$) within a porous square cavity containing two solid blocks, influenced by a horizontal external magnetic field. Conservation equations are modeled using the Darcy-Brinkman-Forchheimer formulation and solved numerically with the finite volume method implemented in a Fortran program. Velocity-pressure coupling is achieved using the SIMPLER algorithm. The study investigates the effects of parameters such as Rayleigh and Darcy numbers, nanoparticle volume fraction, and magnetic field strength. The results indicate that increasing Ra , Da , and ϕ enhances flow dynamics, thereby promoting convection and significantly improving heat transfer, particularly facilitated by nanoparticles. Conversely, Ha diminishes heat transfer by restraining fluid motion through the Lorentz force. Total entropy generation increases with higher Ra , ϕ , and Da values, indicating elevated irreversibilities. Conversely, higher Ha reduces entropy production.

Keywords:

Natural convection, Porous media, Nanofluid, Magnetic field, Entropy generation.

Table des matières

NOMENCLATURE	VIII
LETTRES GRECS	IX
TABLE DES FIGURES.....	XI
LISTE DES TABLEAUX	XIII
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I	3
RECHERCHES BIBLIOGRAPHIQUES.....	3
<i>I.1 Introduction :</i>	3
<i>I.2 Etude bibliographique :</i>	3
<i>I.3 Objectif du travail :</i>	10
CHAPITRE II.....	11
MODELISATION MATHEMATIQUE	11
<i>II.1 Introduction :</i>	11
<i>II.2 Hypothèses simplificatrices :</i>	11
<i>II.3 Equations de base :</i>	12
<i>II.4 Géométrie du problème :</i>	13
II.5 MODELISATION MATHEMATIQUE :	13
CHAPITRE III	21
METHODE NUMERIQUE	21
<i>III.1 Introduction :</i>	21
<i>III.2 Formulation générale de l'équation de transport :</i>	21
<i>III.3 Maillage :</i>	22
<i>III.4. Discretisation des équations mathématiques :</i>	24
III.4.1. Discretisation de l'équation générale de transport :	24
III.4.2. Equation de continuité :	26
III.4.3. Equation de quantité du mouvement suivant x :	26
III.4.4. Equation de quantité du mouvement suivant y :	28
III.4.5 Equation d'énergie :	30
<i>III.5. Méthode de résolution :</i>	31
III.5.1. Equation de pression :	31
III.5.2. Technique de balayage et l'algorithme de Thomas :	34
III.5.3 Algorithme de calcul SIMPLER :	37
III.5.4 Critère de convergence :	37
CHAPITRE IV	38
RESULTATS ET DISCUSSION	38
<i>IV.1 Introduction :</i>	38
<i>IV.2 Effet du maillage :</i>	38
<i>IV.3 Validation du code :</i>	38
<i>IV.4 Résultats et discussion :</i>	43

CONCLUSION GENERALE	58
RÉFÉRENCES	59

Nomenclature

Lettre latins

A	Rapport d'aspect
$A(P)$	Fonction d'un schéma numérique en fonction du nombre de Péclet
A_P, A_E, A_W, A_N, A_S	Coefficients de l'équation algébrique de transport discrétisée
B	Champ magnétique, [T]
C_F	Coefficient de Forchheimer
c_p	Chaleur spécifique à pression constante, [$J.Kg^{-1}.K^{-1}$]
F_e, F_w, F_n, F_s	Flux convectifs aux interfaces e, w, n, s des équations discrétisées
D_e, D_w, D_n, D_s	Flux diffusifs aux interfaces e, w, n, s des équations discrétisées
Da	Nombre de Darcy
g	Accélération de la pesanteur, [$m.s^{-2}$]
Ha	Nombre de Hartmann
h	Coefficient de transfert de chaleur local, [$W.m^{-2}.K^{-1}$]
K	Perméabilité, [m^2]
k	Conductivité thermique du fluide, [$W.m^{-1}.K^{-1}$]
L	Hauteur de la cavité, [m]
d	Diamètre, [m]
T	Température, [K]
Nu	Nombre de Nusselt local
$\overline{Nu}$	Nombre de Nusselt moyen
p	Pression, [$N.m^{-2}$]
P	Pression adimensionnelle
P_e, P_w, P_n, P_s	Nombre de Péclet aux interfaces e, w, n, s
Pr	Nombre de Prandtl
Ra	Nombre de Rayleigh
$S_\emptyset$	Terme source dans l'équation discrétisée
S_{gen}	Taux de production d'entropie local par unité de volume [$W.k^{-1}.m^{-3}$]
S_{gen}	Taux de production d'entropie local adimensionnel
t	Temps dimensionnel, [s]
x, y	Coordonnées dimensionnelles, [m]
X, Y	Coordonnées adimensionnelles

u, v	Vitesses dimensionnelles suivant les directions x, y, [$m \cdot s^{-1}$]
U, V	Vitesses adimensionnelles

Lettres grecs

α	Diffusivité thermique, [$m^2 \cdot s^{-1}$]
γ	Angle d'orientation du champ magnétique
β	Coefficient d'expansion thermique. [K^{-1}]
θ	Température adimensionnelle
μ	Viscosité dynamique
ρ	Masse volumique, [$kg \cdot m^{-3}$]
τ	Temps adimensionnel, [s]
ψ	Fonction de courant adimensionnelle
ε	Porosité
Γ	Coefficient de diffusion
φ	Fraction volumique des nanoparticules
κ	Constante de Boltzmann, [$J \cdot K^{-1}$]
$\emptyset$	Variable générale
$\Delta\tau$	Pas du temps adimensionnel

Indices et exposants

c	Froid
h	Chaud
m	Milieu poreux
e, w, n, s	Faces du volume de contrôle est, ouest, nord, sud
E, W, N, S	Nœuds des volumes de contrôle adjacents est, ouest, nord, sud
f	Fluide de base
nf	Nanofluide
max	Maximum
P	Point au centre du volume de contrôle considéré
p	Particule
s	Solide

u	Maillage décalé suivant la direction x
v	Maillage décalé suivant la direction y

Table des figures

Figure (I.1) : Géométrie et condition aux limites [1].	4
Figure (I.2) : Configuration étudiée [2].	4
Figure (I.3) : Configuration étudiée [3].	5
Figure (I.4) : Géométrie étudiée [4].	6
Figure (I.5) : Configuration analysée [5].	7
Figure (I.6) : Schéma et système de coordonnées [6].	8
Figure (I.7) : Configuration examinée [7].	9
Figure (I.8) : Configuration considérée [8].	9
Figure (II.1) : Géométrie du problème avec les conditions aux limites.	13
Figure (III.1) : Volume de contrôle typique dans le plan (x-y).	23
Figure (III.2) : Volume de contrôle décalé.	23
Figure (IV.1) : Comparaison des lignes de courant et des isothermes. (Nos résultats (a) et les résultats de Nguyen et al. [27] (b)).	41
Figure (IV.2) : Comparaison avec les résultats de Ilis et al. [31].	42
Figure (IV.3) : Fonctions de courant et isothermes pour $Da = 10^{-1}$ (a) et 10^{-5} (b) et pour différents nombres de Rayleigh Ra	46
Figure (IV.4) : Fonctions de courant et isothermes pour $Ra=10^6$, $Da = 10^{-1}$ (a) et 10^{-5} (b) et pour différents nombres de Hartmann Ha.	49
Figure (IV.5) : Contours de génération d'entropie : la génération d'entropie locale due au transfert de chaleur $S_{gen_{ht}}$, la génération d'entropie locale $S_{t_{gen}}$ et le nombre de Bejan local Be pour $Da = 10^{-1}$ (a) et 10^{-3} (b) et pour différents nombres de Rayleigh Ra.	52
Figure (IV.6) : Variation du nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu}$ en fonction de la fraction volumique ϕ pour différents nombres de Rayleigh Ra à : $Da= 10^{-1}$ et 10^{-5} .	53
Figure (IV.7) : Variation du nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu}$ en fonction du nombre de Darcy Da pour la fraction volumique $\phi=0$ et $\phi= 0.04$ et pour différents nombres de Rayleigh Ra.	54
Figure (IV.8) : Variation du nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu}$ en fonction du nombre de Hartmann Ha pour la fraction volumique $\phi =0$ et $\phi=0.04$ et différents nombres de Rayleigh Ra à : $Da= 10^{-1}$ (a) et 10^{-5} (b).	55
Figure (IV.9) : Variation $S_{t_{gen}}$ en fonction du nombres de Rayleigh Ra pour $\phi=0$ et 0.04 et pour $Ha= 0$, $Da=10^{-3}$.	56

Figure (IV.10) : Variation $\bar{S}_{\text{tgen}}$ en fonction du la fraction volumique φ pour $Ra=10^6$, $Ha=0$ et pour $Da=10^{-1}$ et 10^{-3}	56
Figure (IV.11) : Variation $\bar{S}_{\text{tgen}}$ en fonction du nombre de Darcy Da pour $Ra=10^6$, $Ha=0$ et pour $\varphi=0$ et 0.04	57
Figure (IV.12) : Variation $\bar{S}_{\text{tgen}}$ en fonction du le nombre de Hartmann Ha pour $Ra=10^6$, $Da=10^{-3}$ et pour $\varphi=0$ et 0.04	57

Liste des tableaux

Tableau (II.1) : Propriétés thermo-physiques de l'eau et de l'Alumine [10].	12
Tableau (II.2) : Valeurs des coefficients du nanofluide Al_2O_3 -eau [19]..	17
Tableau (III.1) : Différents termes de l'équation de transport	22
Tableau (III.2) : Fonction $A(P)$ pour différents schémas numériques [26].	26

Introduction générale

Au fil des dernières décennies, de nombreux chercheurs se sont concentrés sur l'amélioration de l'efficacité et de la performance du transfert thermique en explorant différentes méthodes. L'une des méthodes consiste à augmenter les propriétés conductrices du fluide afin d'accroître le taux de transfert de chaleur. Les nanofluides, composés d'un fluide de base tel que l'eau, l'huile ou le glycol d'éthylène, mélangé à des nanoparticules métalliques à haute conductivité thermique comme l'argent, le cuivre, l'aluminium, l'or, ainsi que des oxydes métalliques tels que l'oxyde de cuivre, le dioxyde de titane, l'alumine, et des nanotubes de carbone, représentent une avancée significative dans ce domaine. L'ajout de nanoparticules à un fluide de base améliore considérablement sa conductivité thermique et favorise le transfert de chaleur par convection.

Ces dernières années, l'utilisation conjointe de nanofluides et de matériaux poreux dans divers problèmes de transfert de chaleur est devenue un domaine de recherche émergent rapidement, offrant un potentiel unique dans de nombreuses applications pour l'avenir imprévisible. Les nanofluides traversant des milieux poreux offrent plusieurs avantages et applications significatifs : ils améliorent le transfert de chaleur grâce aux nanoparticules métalliques à haute conductivité thermique, ce qui est particulièrement utile dans les échangeurs de chaleur et les systèmes de refroidissement où une efficacité accrue de la convection et de la conductivité thermique est nécessaire. Ils peuvent aussi améliorer l'efficacité des processus de filtration en capturant les particules indésirables et les contaminants présents dans les fluides, augmentant ainsi l'efficacité de la purification de l'eau et des liquides industriels. En matière de stockage d'énergie thermique, les nanofluides permettent une meilleure efficacité dans le stockage et la récupération de chaleur grâce à leur haute conductivité thermique, améliorant la performance des systèmes de stockage d'énergie. De plus, ils sont utilisés dans des technologies environnementales pour la décontamination des sols et des eaux souterraines, facilitant l'extraction ou la neutralisation des contaminants spécifiques. Dans le domaine biomédical, les nanofluides traversant les matériaux poreux sont utilisés pour le transport ciblé de médicaments et de substances thérapeutiques, ainsi que pour la conception de dispositifs de diagnostic avancés basés sur la détection et la capture spécifique de biomolécules.

La génération d'entropie est un concept thermodynamique qui mesure le degré d'irréversibilité d'un processus. Elle représente la production d'entropie au cours de transformations où des dissipations d'énergie se produisent. En d'autres termes, plus la génération

d'entropie est élevée, plus le système s'éloigne de l'idéal thermodynamique où tous les processus seraient réversibles et sans pertes. La génération d'entropie est donc un indicateur clé de l'efficacité énergétique d'un système, car une réduction de l'entropie générée correspond à une diminution des pertes énergétiques et une amélioration de la performance globale du système. La réduction de la génération d'entropie présente plusieurs avantages significatifs dans le contexte des systèmes thermiques et énergétiques : tout d'abord, elle améliore l'efficacité énergétique en minimisant les pertes d'énergie dues aux processus irréversibles (amélioration de l'efficacité énergétique). Ensuite, en diminuant l'entropie générée, les processus thermodynamiques peuvent se rapprocher des conditions idéales de réversibilité, optimisant ainsi leurs performances globales (optimisation des performances thermodynamiques). Cette optimisation se traduit également par une réduction des coûts énergétiques à long terme, les systèmes nécessitant moins d'énergie pour fonctionner de manière optimale (réduction des coûts énergétiques). De plus, une génération d'entropie réduite contribue à accroître la durabilité et à prolonger la durée de vie des équipements en minimisant l'usure due à la chaleur et aux processus irréversibles (durabilité et durée de vie prolongée des équipements). Enfin, une meilleure gestion de l'entropie aide à réduire l'impact environnemental des systèmes thermiques en optimisant l'utilisation des ressources et en diminuant leur empreinte écologique, soutenant ainsi les objectifs de durabilité environnementale (impact environnemental réduit).

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres suivis d'une conclusion générale. Le premier chapitre passe en revue les travaux antérieurs concernant l'écoulement de la convection naturelle magnétohydrodynamique (MHD) de nanofluides dans un milieu poreux avec génération d'entropie. Le deuxième chapitre présente le modèle mathématique de la configuration étudiée ainsi que ses conditions aux limites appropriées. Dans le troisième chapitre, la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations régissant le phénomène physique est détaillée, avec l'application de la méthode des volumes finis pour la discrétisation du système d'équations. Le quatrième chapitre expose les résultats des simulations réalisées et propose une interprétation de ces résultats en prenant en compte divers paramètres. Enfin, la conclusion générale résume les principaux résultats obtenus au cours de cette étude et explore les perspectives futures envisagées.

Chapitre I

Recherches bibliographiques

I.1 Introduction :

L'étude du transfert de chaleur par convection dans les milieux poreux avec différentes configurations a attiré l'attention de nombreux chercheurs en raison de sa vaste gamme d'applications dans les domaines de l'ingénierie et de la nature. Ces applications incluent le stockage des grains, la filtration, la gestion des polluants souterrains, le stockage et le refroidissement des conteneurs de déchets radioactifs, le nettoyage des sols par injection de vapeur, l'isolation thermique des bâtiments, la technologie des capteurs solaires, le refroidissement électronique, le refroidissement des réacteurs nucléaires, l'optimisation des processus de cristallisation des métaux et des alliages, les échangeurs de chaleur, les puits de chaleur, les piles à combustible, les systèmes de stockage de l'énergie, l'administration de médicaments, la récupération assistée du pétrole, ainsi que bien d'autres domaines d'application. Par ailleurs, le champ magnétique joue un rôle crucial en tant que force externe dans les systèmes thermofluidiques et peut servir de mécanisme de contrôle pour les fluides purs et les nanofluides.

I.2 Etude bibliographique :

Ghasemi et Siavashi [1] ont analysé la convection naturelle MHD d'un nanofluide Cu-eau dans une enceinte poreuse carrée, utilisant un code LBM parallèle et en considérant la dépendance de la viscosité et la dissipation visqueuse par rapport à la température. Ils ont examiné l'effet de la concentration du nanofluide ϕ , des nombres de Rayleigh Ra , de Hartmann Ha et du rapport de conductivité thermique du milieu poreux- fluide k_m sur le transfert thermique et la production d'entropie. Les résultats montrent que le rapport k_m influence significativement les effets de conduction et de convection, tandis que le champ magnétique a un impact négatif sur le nombre de Nusselt Nu . Cependant, cet effet défavorable peut être considérablement modifié par k_m en fonction du nombre Ra . De plus, une instabilité magnétique et des variations sinusoïdales de Nu avec Ha sont observées. Enfin, les résultats concernant la génération d'entropie indiquent que pour des valeurs de Ra faibles et élevées, la génération d'entropie thermique et de friction est respectivement dominante, tandis que pour des valeurs de Ra modérées, elles sont du même ordre de grandeur.

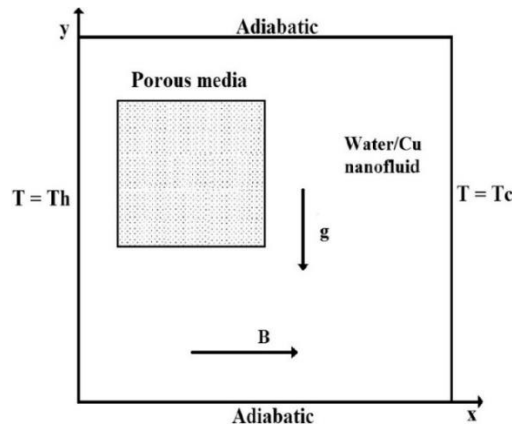


Figure (I.1) : géométrie et conditions aux limites [1].

Gibanov et al. [2] ont mené une étude numérique sur la convection naturelle accompagnée de la production d'entropie au sein d'une cavité ouverte supérieure avec deux blocs poreux différents sous l'effet d'un champ magnétique horizontal. Les blocs poreux formulé mathématiquement par le modèle de Brinkman-Darcy sont situés sous la couche de ferrofluide et chauffés à partir de la paroi inférieure, tandis que la limite supérieure est ouverte. Les équations gouvernantes et les conditions initiales et limites correspondantes ont été résolues par la méthode des différences finies. Les résultats indiquent que le champ magnétique et les blocs poreux peuvent être de très bons paramètres de contrôle pour l'amélioration du transfert de chaleur et l'intensification de l'écoulement du fluide. Parallèlement, le nombre de Nusselt moyen à la paroi chaude inférieure, le débit du ferrofluide et la génération d'entropie totale moyenne sont des fonctions décroissantes du nombre de Hartmann et de la fraction de volume des nanoparticules pour de faibles valeurs de Ha .

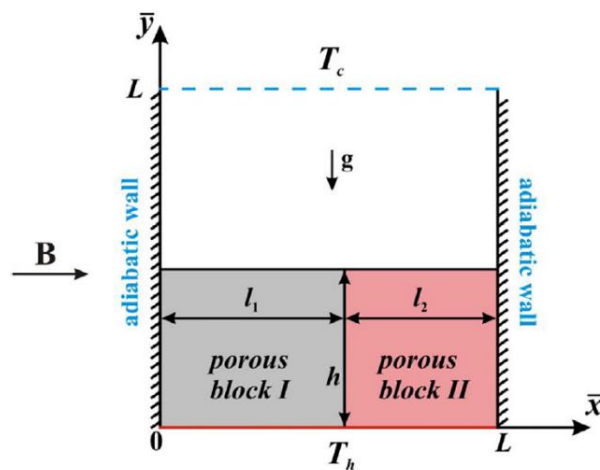


Figure (I.2) : Configuration étudiée [2].

Rashad et al. [3] ont étudié numériquement les effets de l'emplacement et de la taille du puits et de la source sur la génération d'entropie et l'écoulement de convection naturelle MHD

dans une enceinte poreuse inclinée remplie d'un nanofluid Cu-eau. Une source de chaleur uniforme est située sur une partie de la paroi inférieure, tandis qu'une partie de la paroi supérieure de l'enceinte est maintenue à une température froide, les parties restantes de ces deux parois étant thermiquement isolées. Les parois latérales sont considérées comme adiabatiques. La conductivité thermique et la viscosité dynamique du nanofluid sont représentées par différentes corrélations expérimentales vérifiées, adaptées à chaque type de nanoparticule. La méthode des différences finies est utilisée pour résoudre les équations différentielles partielles dimensionnelles régissant le problème. Les résultats révèlent que le nombre de Nusselt décroît à mesure que la fraction volumique de nanofluid et le nombre de Hartmann augmentent. La meilleure position et taille du puits de chaleur et de la source de chaleur, en tenant compte des critères de performance thermique et des effets magnétiques, sont déterminées.

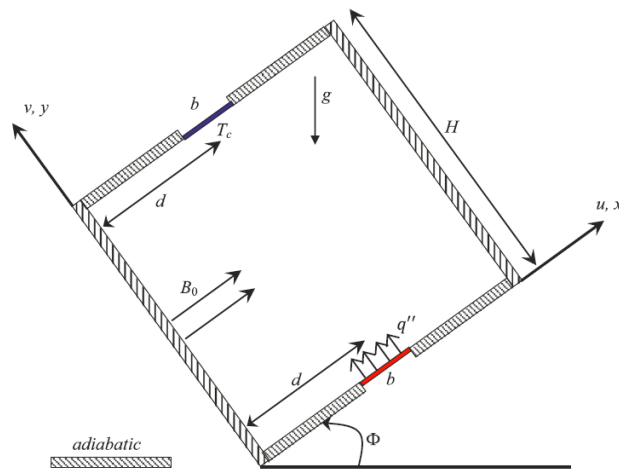


Figure (I.3) : Configuration étudiée [3].

Abdel-Nour et al. [4] ont réalisé une étude numérique, en utilisant la méthode des éléments finis de Galerkin, sur la production d'entropie et la convection MHD d'un nanofluid hybride ($\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Cu/eau}$) dans une enceinte poreuse. Cette enceinte, soumise à des conditions aux limites de température sinusoïdales, a été analysée pour divers paramètres : nombre de Rayleigh Ra , porosité ε , nombre de Darcy Da , nombre de Hartmann Ha et concentration en nanoparticules ϕ . Leurs résultats montrent que le transfert de chaleur par convection s'intensifie avec l'accroissement de Ra et réduit avec Ha . A des valeurs élevées de Ha , le mécanisme de transfert par conduction devient prédominant. La performance thermique augmente avec Ra , ε , ϕ et Da , et diminue avec Ha . Le chauffage non uniforme montre une réduction du transfert de chaleur aux bords chauffés et une valeur maximale au centre. La production d'entropie augmente avec Ra et diminue avec Ha . La perméabilité du milieu poreux joue un rôle crucial dans la génération d'entropie, en particulier avec une irréversibilité dominante causée par le transfert thermique dans les milieux à faible perméabilité.

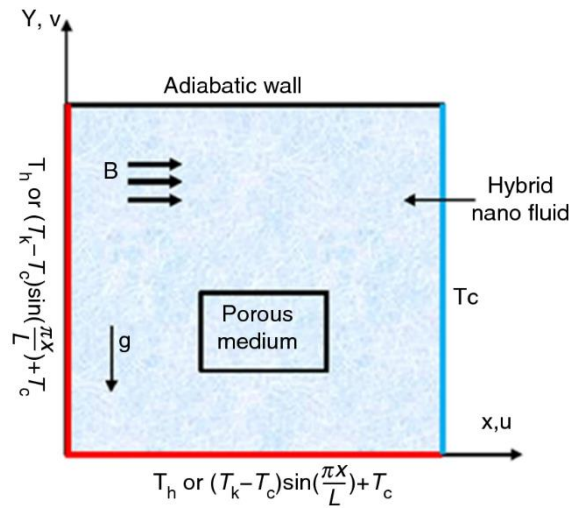


Figure (I.4) : Géométrie étudiée [4].

Al-Farhany et al. [5] ont examiné numériquement le transfert de chaleur et l'écoulement sous l'effet de la flottabilité dans une enceinte à chicanes en forme de U remplie d'un milieu poreux saturé en nanofluide, en présence d'un champ magnétique incliné, à l'aide de la méthode des éléments finis. La paroi inférieure est chauffée sinusoïdalement, les chicanes et parois intérieures sont maintenues froides, et les autres parois sont adiabatiques. Les paramètres étudiés sont le nombre de Hartmann Ha , la fraction volumique ϕ , le nombre de Darcy Da , le nombre de Rayleigh Ra , le rapport d'aspect AR et l'angle du champ magnétique appliqué γ . Les résultats montrent que l'augmentation de Ra , Da et ϕ améliore le transfert de chaleur, tandis que Ha le diminue. Le nombre de Nusselt moyen croît proportionnellement au rapport d'aspect. Ils ont également observé que l'accroissement du rapport d'aspect et de l'angle du champ magnétique améliore le transfert thermique.

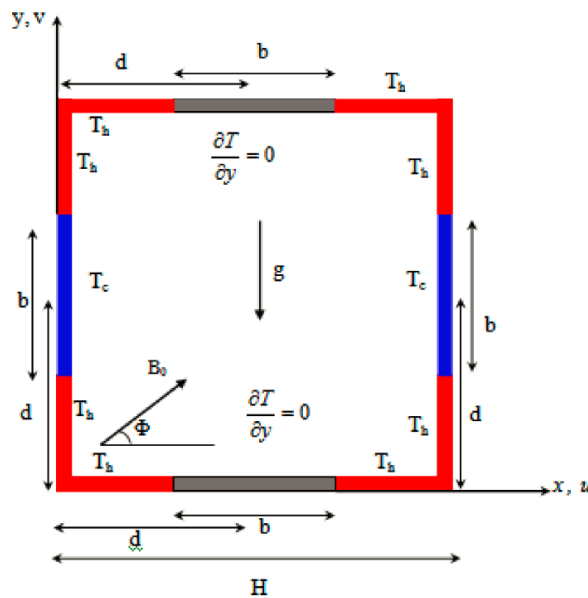


Figure (I.6) : Schéma et système de coordonnées [6].

Abderrahmane et al. [7] ont mené une étude numérique sur la convection naturelle MHD d'un nanofluide dans une géométrie complexe comportant plusieurs configurations de chicanes, en utilisant la méthode des éléments finis de Galerkin. L'objectif principal a été de mettre en évidence les effets des facteurs suivants : le nombre de Darcy (Da), le nombre de Hartmann (Ha), la fraction volumique (φ), et le nombre de Rayleigh (Ra). Les résultats ont suggéré qu'une augmentation de Ra améliore le transfert de chaleur, tandis qu'une augmentation de Ha et de Da le réduit. En termes de transmission de chaleur, le cas 1 (le cas avec un nombre d'ondes de 1 et le zigzag pointant vers l'extérieur) a été déterminé comme étant la structure de cavité optimale, obtenant le nombre de Nusselt moyen le plus élevé par rapport aux autres cas. Pour le nombre de Ra le plus élevé étudié, une augmentation de φ de 0 à 0.08 a amélioré $\overline{Nu}$ de 25 %, tandis qu'une augmentation de Da de 10^{-2} à 10^{-5} et de Ha de 0 à 100 a réduit $\overline{Nu}$ de 57 % et 48 %, respectivement. L'amélioration des valeurs de Nu est due à l'augmentation de la vitesse du mouvement du fluide dans le compartiment. De plus, la forme des ailettes joue un rôle majeur dans le renforcement et l'affaiblissement de l'activité thermique.

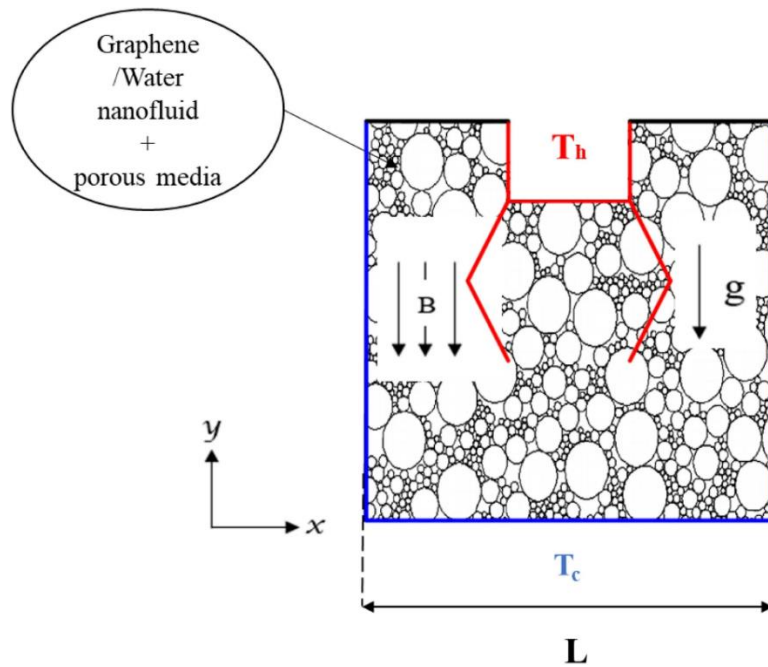


Figure (I.7) : Configuration examinée [7].

Mebarek-Oudina et al. [8] ont présenté une étude numérique de la convection naturelle d'un nanofluid hybride $MgO-Al_2O_3$ /eau dans une cavité elliptique poreuse dans un anneau entre une forme elliptique et une forme singulière. L'impact des propriétés des nanoparticules (concentration et facteur de forme), de la porosité, des nombres de Hartmann et de Darcy sur la production d'entropie et le transfert thermique sont examinés. Leurs résultats montrent que pour des concentrations plus élevées de nanoparticules et une taille de particule élevée exercent une influence significative sur le flux thermique des nanofluides hybrides. Le nombre de Hartmann influence fortement le transfert thermique. En effet, lorsque le nombre de Hartmann augmente, les forces de Lorentz se renforcent, ce qui limite l'activité des nanoparticules et entraîne une diminution des valeurs de Nusselt et du transfert de chaleur. Ainsi, le champ magnétique est essentiel pour réguler le transfert thermique et la production d'entropie.

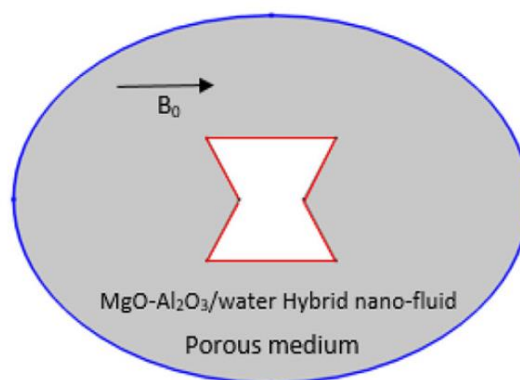


Figure (I.8) : Configuration considérée [8].

I.3 Objectif du travail :

L'objectif principal de cette étude est de simuler numériquement la génération d'entropie et la convection naturelle d'un nanofluide dans une cavité poreuse sous l'influence d'un champ magnétique. De plus, cette recherche examine les effets de divers paramètres sur la génération d'entropie, tels que le nombre de Rayleigh, le nombre de Darcy, le nombre de Hartmann et la fraction volumique.

Chapitre II

Modélisation mathématique

II.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous présenterons le modèle physique, les hypothèses simplificatrices, ainsi que les conditions initiales et aux limites appropriées. Les équations décrivant notre phénomène physique sont dérivées des principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, ainsi que de l'application de la deuxième loi de la thermodynamique et des équations de la magnétohydrodynamique.

II.2 Hypothèses simplificatrices :

Pour simplifier la formulation mathématique du problème, les hypothèses suivantes sont considérées :

- Le nanofluide est en équilibre thermique et se caractérise par son homogénéité, son comportement newtonien et son incompressibilité, tandis que l'écoulement est défini comme laminaire.
- Le rayonnement et le champ magnétique induit (le nombre de Reynolds magnétique $Re_m < 1$) sont négligeables, de même que l'effet Joule et la dissipation visqueuse.
- Les propriétés thermo-physiques du nanofluide sont considérées comme constantes et évaluées à la température de référence selon :

$$\rho_{nf} = (1 - \varphi)\rho_f + \varphi\rho_p \quad (\text{II.1})$$

$$(\rho\beta)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho\beta)_f + \varphi(\rho\beta)_p \quad (\text{II.2})$$

$$(\rho c_p)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho c_p)_f + \varphi(\rho c_p)_p \quad (\text{II.3})$$

$$\alpha_{nf} = k_{nf}/(\rho c_p)_{nf} \quad (\text{II.4})$$

- La conductivité électrique effective se formule comme suit [9] :

$$\sigma_{nf}/\sigma_f = 1 + \frac{3(\sigma_p/\sigma_f - 1)\varphi}{(\sigma_p/\sigma_f + 2) - (\sigma_p/\sigma_f - 1)\varphi} \quad (\text{II.5})$$

- La masse volumique du nanofluide est considérée constante, sauf dans le cas du terme de force de flottabilité, où elle varie linéairement avec la température T selon l'approximation de Boussinesq :

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)) \quad (\text{II.6})$$

Les caractéristiques thermo-physiques du nanofluide sont résumées dans le tableau (II.1) :

	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$c_p \text{ (J/kgK)}$	$k \text{ (W/mK)}$	$\beta \text{ (1/K)}$	$\sigma \text{ (}\Omega\text{m)}^{-1}$
Eau	997.1	4179	0.613	21×10^{-5}	0.05
Alumine(Al_2O_3)	3970	765	40	0.85×10^{-5}	10^{-10}

Tableau (II.1) : Propriétés thermo-physiques de l'eau et de l'Alumine [10].

II.3 Equations de base :

L'écoulement magnétohydrodynamique (MHD) d'un nanofluide visqueux-newtonien à travers un milieu poreux est représenté par le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer [11]. Ce modèle est exprimé mathématiquement par le bilan de quantité de mouvement, formulé de manière vectorielle comme suit :

$$\underbrace{\rho_{nf} \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{V}\mathbf{V}}{\varepsilon} \right) \right]}_{(a)} = \underbrace{-\frac{1}{\varepsilon} \nabla(\varepsilon p)}_{(b)} + \underbrace{\rho_{nf} \mathbf{g}}_{(c)} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \nabla^2(\mu_{nf} \mathbf{V})}_{(d)} - \underbrace{\left(\frac{\mu_{nf}}{K} \right) \mathbf{V}}_{(e)} - \underbrace{C_F \frac{\rho_{nf}}{\sqrt{K}} |\mathbf{V}| \mathbf{V}}_{(f)} + \underbrace{\mathbf{f}_{EM}}_{(g)} \quad (\text{II.7})$$

Où :

- (a) : Force inertielle macroscopique.
- (b) : Gradient de pression.
- (c) : Force de pesanteur.
- (d) : Terme visqueux de Brinkman.
- (e) : Terme de Darcy.
- (f) : Terme de Forchheimer (Force inertielle microscopique).
- (g) : Force électromagnétique.

Pour modéliser le transfert thermique dans un milieu poreux, nous appliquons la première loi de la thermodynamique dans un milieu isotrope. Nous excluons les effets radiatifs, la dissipation visqueuse et le travail d'échange de pression, tout en tenant compte d'un équilibre thermique local ($T_s = T_{nf} = T$).

L'équation de l'énergie pour le milieu poreux s'exprime comme suit :

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_{nf} \mathbf{V} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k_m \nabla T) \quad (\text{II.8})$$

Où : $(\rho c_p)_{nf}$ est k_m sont la capacité thermique du nanofluide et sa conductivité thermique globale du milieu poreux.

II.4 Géométrie du problème :

La géométrie étudiée consiste en une cavité carrée remplie d'un milieu poreux saturé de nanofluide (Al_2O_3 -eau). Les parois verticales sont isothermes et maintenues à des températures différentes ($T_h > T_c$), tandis que les parois horizontales sont adiabatiques (fig. II.1). Deux blocs solides de conductivité k_b avec un rapport $k_b/k_f = 100$ et de dimensions $w = 0.02L$ et $h = 0.2L$ sont installés à mi-hauteur des parois verticales, l'un sur la paroi chaude et l'autre sur la paroi froide. L'écoulement de convection naturelle engendré est affecté par un champ magnétique constant, dont l'orientation forme un angle γ par rapport au plan horizontal.

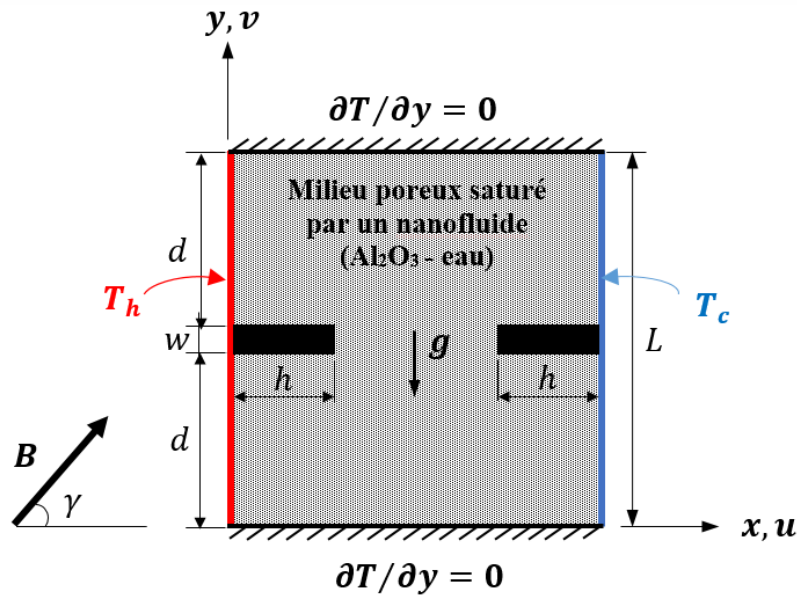


Figure (II.1) : Géométrie du problème avec les conditions aux limites.

II.5 Modélisation mathématique :

Avant d'aborder la modélisation mathématique de notre problème, définissons la magnétohydrodynamique (MHD). La magnétohydrodynamique étudie l'interaction du champ magnétique $\mathbf{B}$ avec l'écoulement. Dans notre situation, le champ magnétique induit $\mathbf{b}$ est négligé, ce qui établit une égalité entre le champ magnétique total ($\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$) et le champ appliqué $\mathbf{B}_0$.

L'application du champ magnétique à un nanofluide conducteur d'électricité en mouvement induit un courant électrique $\mathbf{j}$, qui interagit avec le champ magnétique pour produire une force de volume $\mathbf{f}_{EM}$ agissant dans le sens inverse du mouvement du nanofluide. L'équation du courant électrique $\mathbf{j}$ est obtenue dans notre cas en appliquant la loi d'Ohm :

$$\mathbf{j} = \sigma_{nf} [-\nabla\Phi + \mathbf{V} \times \mathbf{B}] \quad (\text{II.9})$$

où : Φ est le potentiel électrique.

La densité de courant électrique $\mathbf{j}$ est une grandeur conservative ce qui permet d'écrire :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{II.10})$$

La force de Lorentz $\mathbf{f}_{EM}$ est déduite de l'équation suivante :

$$\mathbf{f}_{EM} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (\text{II.11})$$

De plus, les frontières sont électriquement isolantes, ce qui signifie que le potentiel électrique Φ est constant. Cela permet en fin de compte d'exprimer les expressions de $\mathbf{j}$ et $\mathbf{f}_{EM}$ comme suit [12] :

$$\mathbf{j} = \sigma_{nf} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \quad (\text{II.12})$$

$$\mathbf{f}_{EM} = \sigma_{nf} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B} \quad (\text{II.13})$$

En considérant toutes les hypothèses énoncées, le système d'équations locales aux dérivées partielles décrivant le mouvement du fluide avec le transfert de chaleur et la génération d'entropie dans un milieu poreux est le suivant :

II.5.1 Equations sous forme dimensionnelle :

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.14})$$

- Equations de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \rho_{nf} \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{nf} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{nf} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - \left(\frac{\mu_{nf}}{K} \right) u \\ - \frac{\rho_{nf} C_F \sqrt{u^2 + v^2}}{\sqrt{K}} u + f_{EMx} \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

$$\begin{aligned} \rho_{nf} \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\ = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{nf} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{nf} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - \left(\frac{\mu_{nf}}{K} \right) v \\ - \frac{\rho_{nf} C_F \sqrt{u^2 + v^2}}{\sqrt{K}} v + (\rho\beta)_{nf} g(T - T_0) + f_{EMy} \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

- Equation d'énergie :

Pour le milieu poreux :

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_{nf} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_m \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_m \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (\text{II.17})$$

Avec :

$$(\rho c)_m = (1 - \varepsilon)(\rho c)_s + \varepsilon(\rho c_p)_{nf} \quad (\text{II.18})$$

Pour les blocs solides :

$$(\rho c)_b \frac{\partial T_b}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(k_b \frac{\partial T_b}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(k_b \frac{\partial T_b}{\partial Y} \right) \right] \quad (\text{II.19})$$

Pour un champ magnétique à une orientation γ par rapport au plan horizontal, les composantes de la force de Lorentz s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} f_{EM_x} = -\sigma_{nf}(B_0^2)(v \cdot \cos \gamma \sin \gamma - u \cdot \sin^2 \gamma) \\ f_{EM_y} = -\sigma_{nf}(B_0^2)(u \cdot \cos \gamma \sin \gamma - v \cdot \cos^2 \gamma) \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

Le système d'équations est résolu avec les conditions initiales et aux limites suivantes :

Pour $t = 0$: $u = v = T = 0$.

Pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} \text{à } x = 0, \quad 0 \leq y \leq H: \quad u = v = 0, \quad T &= T_h \\ \text{à } x = L, \quad 0 \leq y \leq H: \quad u = v = 0, \quad T &= T_c \\ \text{à } y = 0, \quad 0 \leq x \leq L: \quad u = v = 0, \quad \partial T / \partial y &= 0 \\ \text{à } y = H, \quad 0 \leq x \leq L: \quad u = v = 0, \quad \partial T / \partial y &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

aux parois des blocs solides : $u = v = 0$,

$$T = T_b, \quad k_m(\partial T / \partial x) = k_b(\partial T_b / \partial x) \quad \text{et} \quad k_m(\partial T / \partial y) = k_b(\partial T_b / \partial y)$$

(continuité thermique à l'interface des parois des blocs solides)

II.5.2 Equations sous forme adimensionnelle :

En définissant les variables adimensionnelles suivantes pour la longueur, la vitesse, la pression et la température :

$$\begin{aligned} \tau = t \frac{\alpha_f}{L}, \quad (X, Y) = (x, y) \frac{1}{L}, \quad (U, V) = (u, v) \frac{L}{\alpha_f}, \quad P = p \frac{L^2}{\rho_{nf} \alpha_f^2}, \\ \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \quad \theta_b = \frac{T_b - T_c}{T_h - T_c} \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

En substituant ces variables dans le système d'équations, les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie adimensionnelles, qui régissent notre problème, sont les suivantes :

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II.23})$$

- **Equations de quantité de mouvement :**

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \\ = -\frac{\partial P}{\partial X} + \left(\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \right) \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] - \left(\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \right) \mu \frac{\text{Pr}}{Da} U \\ - C_F \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{Da}} U + F_{EM_x} \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \\
= -\frac{\partial P}{\partial Y} + \left(\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \right) \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] - \left(\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \right) \mu \frac{\text{Pr}}{Da} V \\
- C_F \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{Da}} V + \left(\frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}\beta_f} \right) Ra \text{Pr} \theta + F_{EM_Y}
\end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

• **Equation d'énergie :**

Pour le milieu poreux :

$$\eta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{k_m}{k_f} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{k_m}{k_f} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right] \quad (\text{II.26})$$

Dans cette étude, les propriétés thermiques de la matrice solide et du nanofluide ont été considérées comme identiques, conformément aux hypothèses utilisées dans plusieurs études antérieures [13-17].

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right] \quad (\text{II.27})$$

Pour les blocs solides :

$$\Gamma_b \frac{\partial \theta_b}{\partial \tau} = \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(k^* \frac{\partial \theta_b}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(k^* \frac{\partial \theta_b}{\partial Y} \right) \right] \quad (\text{II.28})$$

Avec :

$$C_F = \frac{1.75}{\sqrt{150} \varepsilon^{3/2}} ; \quad \eta = \frac{(\rho c)_m}{(\rho c_p)_{nf}} ; \quad \Gamma_b = \frac{(\rho c)_b}{(\rho c_p)_f} ; \quad k^* = \frac{k_b}{k_f} \quad (\text{II.29})$$

et F_{EM_X} , F_{EM_Y} sont respectivement les composantes de la force de Lorentz adimensionnelles suivant x et y qui s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} F_{EM_X} = -\text{Pr} \left(\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \right) \left(\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \right) Ha^2 (V \cos \gamma \sin \gamma - U \sin^2 \gamma) \\ F_{EM_Y} = -\text{Pr} \left(\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \right) \left(\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \right) Ha^2 (U \cos \gamma \sin \gamma - V \cos^2 \gamma) \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

Les rapports de viscosité dynamique et de conductivité thermique du nanofluide (eau- Al_2O_3) dans les conditions de références sont exprimés en utilisant le modèle de Koo-Kleinstreuer-Li (KKL). Ce modèle, proposé par Koo et Kleinstreuer [18], a été révisé par Li [19] :

$$\mu = \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} ; \quad k = \frac{k_{nf}}{k_f} \quad (\text{II.31})$$

Où:

$$k_{nf} = k_{Static} + k_{Brownian} \quad \text{et} \quad \mu_{nf} = \mu_{static} + \mu_{Brownian} \quad (\text{II.32})$$

Il est important de noter que le modèle de Maxwell [20] est utilisé pour déterminer la composante statique de la conductivité thermique selon :

$$k_{Static} = k_f \left[1 + \frac{3 \left(\frac{k_p}{k_f} - 1 \right) \varphi}{\left(\frac{k_p}{k_f} + 2 \right) - \left(\frac{k_p}{k_f} - 1 \right) \varphi} \right] \quad (\text{II.33})$$

Selon le modèle KKL, la composante brownienne de la conductivité thermique est exprimée par :

$$k_{Brownian} = 5 \times 10^4 \varphi \rho_f (c_p)_f \sqrt{\frac{\kappa T}{\rho_p d_p}} g'(T, \varphi, d_p) \quad (\text{II.34})$$

La fonction représentée par g' pour le nanofluide (Al_2O_3 -eau) est basée sur une corrélation empirique et s'exprime comme suit :

$$g'(T, \varphi, d_p) = \left(a_1 + a_2 \ln(d_p) + a_3 \ln(\varphi) + a_4 \ln(\varphi) \ln(d_p) + a_5 \ln(d_p)^2 \right) \ln(T) \\ + \left(a_6 + a_7 \ln(d_p) + a_8 \ln(\varphi) + a_9 \ln(d_p) \ln(\varphi) + a_{10} \ln(d_p)^2 \right) \quad (\text{II.35})$$

Valide pour : $\varphi \leq 0.04$ et $300 \text{ K} \leq T \leq 325 \text{ K}$.

Où les facteurs de cette fonction pour le nanofluide (Al_2O_3 -eau) sont donnés dans le tableau (II.2) :

a_1	52.813488759
a_2	6.115637295
a_3	0.6955745084
a_4	0.041745555278
a_5	0.176919300241
a_6	-298.19819084
a_7	-34.532716906
a_8	-3.9225289283
a_9	-0.2354329626
a_{10}	-0.999063481

Tableau (II.2) : Valeurs des coefficients du nanofluide Al_2O_3 -eau [19].

La viscosité dynamique du nanofluide est définie par :

$$\mu_{nf} = \mu_{static} + \frac{k_{Brownian}}{k_f} \times \frac{\mu_f}{Pr_f} \quad (\text{II.36})$$

Le modèle de Brinkman [20] est utilisé pour évaluer la composante statique de la viscosité dynamique :

$$\mu_{static} = \frac{\mu_f}{(1 - \varphi)^{2.5}} \quad (\text{II.37})$$

Le modèle de Koo-Kleinstreuer-Li (KKL) a été largement utilisé par Sheikholeslami [21] dans ses travaux de recherche concernant l'écoulement MHD de nanofluides dans les milieux poreux.

Les équations adimensionnelles du système sont résolues en utilisant les conditions initiales et aux limites adimensionnelles suivantes :

Pour $\tau = 0$: $U = V = \theta = 0$.

Pour $\tau > 0$:

$$\begin{aligned} \text{à } X = 0, \quad 0 \leq Y \leq 1: \quad U = V = 0, \quad \theta = 1 \\ \text{à } X = A, \quad 0 \leq Y \leq 1: \quad U = V = 0, \quad \theta = 0 \\ \text{à } Y = 0, \quad 0 \leq X \leq A: \quad U = V = 0, \quad \partial\theta/\partial Y = 0 \\ \text{à } Y = 1, \quad 0 \leq X \leq A: \quad U = V = 0, \quad \partial\theta/\partial Y = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

aux surfaces extérieures des blocs solides :

$$U = V = 0, \quad \theta = \theta_b, \quad \partial\theta/\partial X = (k_b/k_m)(\partial\theta_b/\partial X) \text{ et } \partial\theta/\partial Y = (k_b/k_m)(\partial\theta_b/\partial Y)$$

Les paramètres adimensionnels qui caractérisent l'écoulement, à savoir les nombres de Rayleigh, de Prandtl et de Darcy, sont les suivants :

$$Ra = \frac{g\beta_{tf}\Delta TL^3}{\alpha_f \nu_f} \quad ; \quad Pr = \frac{\nu_f}{\alpha_f} \quad ; \quad Da = \frac{K}{L^2} \quad (\text{II.39})$$

Où : $\Delta T = T_h - T_c$.

Pour évaluer le taux total de transfert de chaleur à travers l'enceinte, nous définissons les nombres de Nusselt local et moyen aux parois isothermes de la manière suivante :

$$Nu = h \frac{L}{k_f} \quad (\text{II.40})$$

Ensuite, le nombre de Nusselt local peut être écrit sous la forme adimensionnelle suivante :

$$Nu = - \left(\frac{k_{nf}}{k_f} \right) \frac{\partial\theta}{\partial X} \quad (\text{II.41})$$

Donc, le nombre de Nusselt moyen est défini par :

$$\overline{Nu} = \int_0^1 - \left(\frac{k_{nf}}{k_f} \right) \frac{\partial\theta}{\partial X} dY \quad (\text{II.42})$$

La fonction de courant sans dimension ψ est définie par :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad , \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (\text{II.43})$$

II.5.3 Génération d'entropie :

La génération d'entropie est un concept thermodynamique qui mesure l'augmentation de l'entropie au sein d'un système en raison de processus irréversibles. Elle reflète les inefficacités inhérentes à ces processus, qui peuvent inclure la conduction thermique, le frottement, la diffusion de masse, les réactions chimiques, les flux de chaleur et de matière et toute forme de dissipation d'énergie. La génération d'entropie est un indicateur de la dégradation de l'énergie disponible et de l'augmentation du désordre.

Pour un volume de contrôle, la génération d'entropie peut être déterminée à partir de l'équation locale de production d'entropie, intégrant les contributions des divers mécanismes d'irréversibilité [9, 22-25]. L'expression générale de la génération d'entropie de notre problème est :

$$\dot{s}_{t_{gen}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} s_{t_{gen}} d\Omega \quad (\text{II.44})$$

Où : $s_{t_{gen}}$ représente le taux de production d'entropie par unité de volume et $\dot{s}_{t_{gen}}$ est la génération d'entropie totale moyennée sur le volume total Ω .

L'équation de l'entropie dimensionnelle locale est définie par :

$$\begin{aligned} s_{t_{gen}} = & \left[\frac{k_m}{T_0^2} \left(\left(\frac{\partial T_{nf}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_{nf}}{\partial y} \right)^2 \right) \right] + \\ & \frac{\mu_{nf}}{T_0} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\mu_{nf}}{KT_0} (u^2 + v^2) \\ & + \frac{\sigma_{nf} B_0^2}{T_0} (u \sin \gamma - v \cos \gamma)^2 \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

$$\begin{aligned} s_{t_{gen}} = & \left[\frac{k_{nf}}{T_0^2} \left(\left(\frac{\partial T_{nf}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_{nf}}{\partial y} \right)^2 \right) \right] + \\ & \frac{\mu_{nf}}{T_0} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\mu_{nf}}{KT_0} (u^2 + v^2) \\ & + \frac{\sigma_{nf} B_0^2}{T_0} (u \sin \gamma - v \cos \gamma)^2 \end{aligned}$$

Pour obtenir la forme adimensionnelle de la génération d'entropie, on utilise l'expression suivante :

$$S_{t_{gen}} = s_{t_{gen}} \left(\frac{T_0^2 L^2}{k_f (\Delta T)^2} \right) \quad (\text{II.46})$$

Ce qui donne :

$$S_{t_{gen}} = \underbrace{\left(\frac{k_{nf}}{k_f} \right) \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)^2 \right]}_{S_{gen_{ht}}} + \underbrace{\left(\frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \right) \chi_f \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right] + \frac{1}{Da} \left(\frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \right) \chi_f (U^2 + V^2)}_{S_{gen_{fr}}} + \underbrace{\left(\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \right) \chi_f Ha^2 (U \sin \gamma - V \cos \gamma)^2}_{S_{gen_{mf}}} \quad (\text{II.47})$$

Avec : $\chi_f = \frac{\mu_f T_0}{k_f} \left(\frac{\alpha_f}{L \Delta T} \right)^2$ est le facteur d'irréversibilité.

Les quantités $S_{gen_{ht}}$, $S_{gen_{fr}}$ et $S_{gen_{mf}}$ désignent respectivement la génération d'entropie causée par le transfert de chaleur, les frottements du fluide et le champ magnétique.

Le nombre de Bejan Be est un nombre sans dimension important lorsqu'on discute de l'entropie.

Il représente le rapport entre la génération d'entropie attribuée au transfert thermique et la génération totale d'entropie, selon la formule suivante :

$$Be = \frac{S_{gen_{ht}}}{S_{t_{gen}}} \quad (\text{II.48})$$

Chapitre III

Méthode numérique

III.1 Introduction :

Les équations gouvernant la convection naturelle MHD dans un milieu poreux sont des équations aux dérivées partielles, dont la résolution analytique est pratiquement impossible en raison de leur non-linéarité et du couplage vitesse-pression dans l'équation de la quantité de mouvement. Par conséquent, il est indispensable de recourir à des méthodes numériques pour résoudre notre problème. Parmi celles-ci, on retrouve les méthodes de discrétisation telles que la méthode des volumes finis, la méthode des différences finies, et la méthode des éléments finis.

Dans notre étude, nous avons opté pour la méthode des volumes finis. Cette approche consiste à intégrer les équations de conservation sur chaque volume de contrôle. A partir des valeurs connues aux centres des volumes, les flux aux surfaces des volumes sont évalués par interpolation. Cette méthode présente l'avantage de pouvoir être appliquée à des géométries complexes grâce à une grille a priori quelconque. De plus, elle assure la conservation des bilans massique et thermique sur l'ensemble du domaine étudié, ce qui conduit à des résultats très satisfaisants.

III.2 Formulation générale de l'équation de transport :

Les équations aux dérivées partielles adimensionnelles (II.16) à (II.17) présentées dans le chapitre II peuvent être réécrites sous une forme générale d'équation de transport (III.1). Les grandeurs physiques correspondant à chaque équation (II.16) à (II.17) sont détaillées dans le tableau (III.1).

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial \tau}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial(U\phi)}{\partial X} + \frac{\partial(V\phi)}{\partial Y}}_{(2)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)}_{(3)} + \underbrace{S_\phi}_{(4)} \quad (III.1)$$

(1) : désigne le terme transitoire.

(2) : représente le terme de transport convectif.

(3) : correspond au terme de diffusion.

(4) : fait référence au terme source.

Equation	ϕ	Γ	S_ϕ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant x	U	$\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon}$	$-\frac{\partial P}{\partial X} - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \mu \frac{\text{Pr}}{Da} U - \frac{C_F \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{Da}} U + F_{EM_X}$
Quantité de mouvement suivant y	V	$\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon}$	$-\frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \mu \frac{\text{Pr}}{Da} V - \frac{C_F \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{Da}} V + \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}\beta_f} Ra \text{Pr} \theta + F_{EM_Y}$
Energie	θ	$\frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}}$	0

Tableau (III.1) : Différents termes de l'équation de transport.

III.3 Maillage :

Les équations différentielles ponctuelles qui régissent notre phénomène sont formulées pour chaque point du domaine physique. Pour les appliquer à l'ensemble du domaine, nous utilisons une grille subdivisée en plusieurs volumes finis, avec des points considérés au milieu de chaque volume. Les faces d'un volume de contrôle typique sont situées aux points e, w, n et s (voir Figure III.1). P représente le centre du volume de contrôle étudié, tandis que E, W, N et S sont les centres des volumes de contrôle adjacents respectivement à l'est, à l'ouest, au nord et au sud de celui contenant P. Pour exprimer les grandeurs vectorielles, nous utilisons un volume de contrôle décalé (voir Figure III.2).

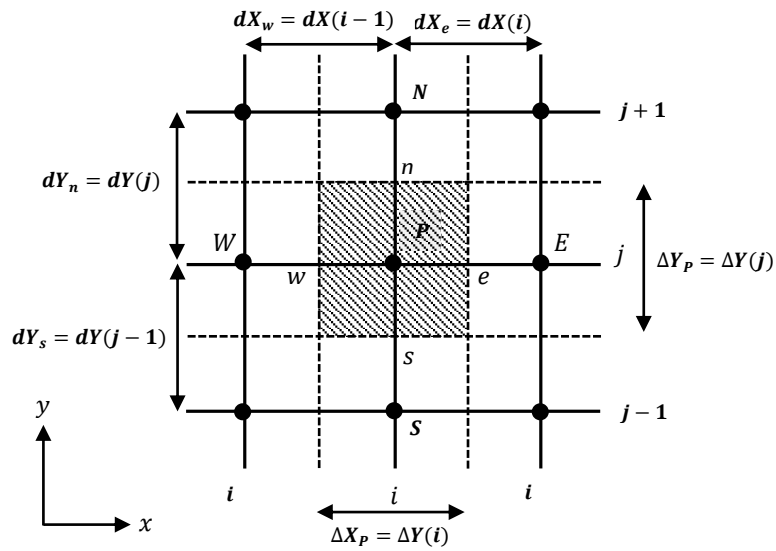


Figure (III.1) : Volume de contrôle typique dans le plan $(x-y)$.

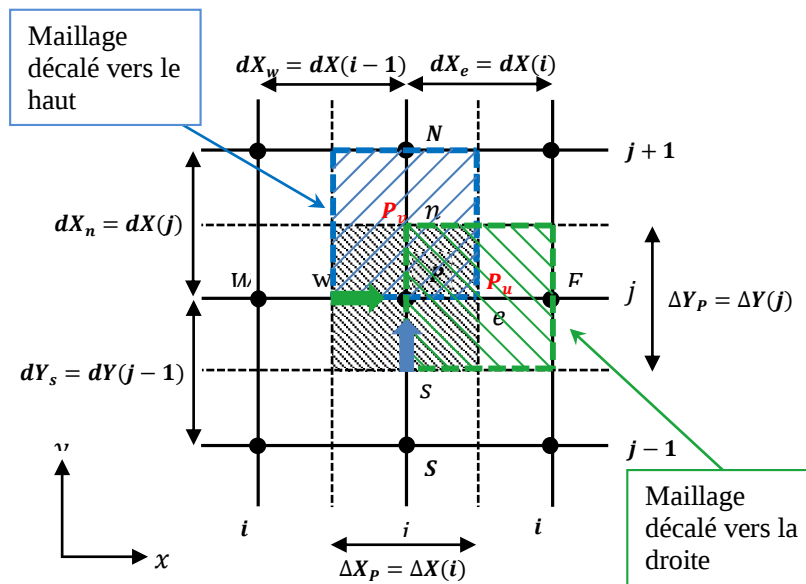


Figure (III.2) : Volume de contrôle décalé.

III.4. Discrétisation des équations mathématiques :

III.4.1. Discrétisation de l'équation générale de transport :

La discrétisation de l'équation générale de transport (III.1) sur un volume de contrôle typique s'effectue comme illustré à la Figure (III.1) :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial\phi}{\partial\tau} dXdYdt + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(U\phi)}{\partial X} dXdYdt + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(V\phi)}{\partial Y} dXdYdt \\
 &= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^n \int_w^e \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X} \right) \right] dXdYdt + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(U\phi)}{\partial X} dXdYdt \\
 &+ \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^n \int_w^e S_{\phi} dXdY dt
 \end{aligned} \tag{III.2}$$

L'intégration des différents termes se déroule de la manière suivante :

Terme transitoire :

Un schéma d'Euler implicite de premier ordre est utilisé pour la discrétisation temporelle.

La division par $\Delta\tau$, nous donne :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{(\phi_P^{\tau+\Delta\tau} - \phi_P^{\tau})}{\Delta\tau} dXdY = \frac{(\phi_P^{\tau+\Delta\tau} - \phi_P^{\tau})}{\Delta\tau} \Delta X_p \Delta Y_p \tag{III.3}$$

Terme de transport convectif :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial(U\phi)}{\partial X} dXdY = [(U\phi)_e - (U\phi)_w] \Delta Y_p \tag{III.4}$$

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial(V\phi)}{\partial Y} dXdY = [(V\phi)_n - (V\phi)_s] \Delta X_p \tag{III.5}$$

Terme de transport diffusif :

$$\int_s^n \int_w^e \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X} \right) \right] dXdY = \left[\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X} \right)_w \right] \Delta Y_p \tag{III.6}$$

$$\int_s^n \int_w^e \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial Y} \right) \right] dXdY = \left[\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial Y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial Y} \right)_s \right] \Delta X_p \tag{III.7}$$

Terme source :

$$\int_s^n \int_w^e S_{\phi} dXdY = \bar{S}_{\phi} \Delta X_p \Delta Y_p \tag{III.8}$$

Après l'intégration, l'équation générale de transport se transforme en :

$$\begin{aligned}
& \frac{(\phi_P^{\tau+\Delta\tau} - \phi_P^{\Delta\tau})}{\Delta\tau} \Delta X_P \Delta Y_P + [(U\phi)_e - (U\phi)_w] \Delta Y_P + [(V\phi)_n - (V\phi)_s] \Delta X_P \\
& = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_w \right] \Delta Y_P + \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_s \right] \Delta X_P \\
& + \bar{S}_\phi \Delta X_P \Delta Y_P
\end{aligned} \tag{III.9}$$

Les résultats des intégrales sont réorganisés pour obtenir la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique :

$$A_P \phi_P^{\tau+\Delta\tau} = A_E \phi_E^{\tau+\Delta\tau} + A_W \phi_W^{\tau+\Delta\tau} + A_N \phi_N^{\tau+\Delta\tau} + A_S \phi_S^{\tau+\Delta\tau} + b \tag{III.10}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
A_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\
A_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\
A_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\
A_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)
\end{aligned} \tag{III.11}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^0 \tag{III.12}$$

$$b = \left(\bar{S}_\phi + \frac{\phi_P^0}{\Delta\tau} \right) \Delta X \Delta Y \tag{III.13}$$

Où : les flux convectifs.

$$\begin{aligned}
F_e &= U_e \Delta Y_P \\
F_w &= U_w \Delta Y_P \\
F_n &= V_n \Delta X_P \\
F_s &= V_s \Delta X_P
\end{aligned} \tag{III.14}$$

Où : les flux diffusifs.

$$\begin{aligned}
D_e &= \frac{\Gamma_e}{dX_e} \Delta Y_P \\
D_w &= \frac{\Gamma_w}{dX_w} \Delta Y_P \\
D_n &= \frac{\Gamma_n}{dY_n} \Delta X_P \\
D_s &= \frac{\Gamma_s}{dY_s} \Delta X_P
\end{aligned} \tag{III.15}$$

Où : les nombre de Péclet aux interfaces : e, w, n, s.

$$P_e = \frac{F_e}{D_e}, \quad P_w = \frac{F_w}{D_w}, \quad P_n = \frac{F_n}{D_n}, \quad P_s = \frac{F_s}{D_s} \tag{III.16}$$

A_E, A_W, A_N, A_S et A_P : sont les coefficients correspondants, respectivement, aux nœuds est, ouest, nord, sud et centre du volume.

b : est un terme de source supposé être constant dans le volume de contrôle.

F_e , F_w , F_n , F_s et D_e , D_w , D_n , D_s sont respectivement les termes convectifs et diffusifs aux faces est, ouest, nord, sud.

P_e , P_w , P_n et P_s sont les nombres du Péclet, qui désignent les rapports des flux convectifs aux flux diffusifs aux différentes faces du volume de contrôle.

En arrivant à ce stade, il faudra exprimer les termes des flux convectifs et diffusifs aux interfaces des volumes de contrôle. Afin de surmonter à ce problème, on fait appel aux schémas numérique de discrétisation (différences centrées, exponentiel, loi de puissance, hybrid,...). Ces schémas se différencient par la façon avec laquelle on prend en compte les termes de convection et de diffusion.

Le tableau ci-dessous donne les expressions de la fonction $A(P)$ pour différents schémas numériques.

Schéma	Formule de la fonction $A(P)$
Différences centrées	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Hybrid	$[0, 1 - 0.5 P]$
Loi de puissance	$[0, (1 - 0.5 P)^5]$
Exponentiel	$ P / [\exp(P) - 1]$

Tableau (III.2) : Fonction $A(|P|)$ pour différents schémas numériques [26].

III.4.2. Equation de continuité :

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial U}{\partial X} dX dY = [U_e - U_w] \Delta Y_p \quad (\text{III.17})$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial V}{\partial Y} dX dY = [V_n - V_s] \Delta X_p \quad (\text{III.18})$$

L'équation de continuité discrétisée s'exprime de la manière suivante :

$$[U_e - U_w] \Delta Y_p + [V_n - V_s] \Delta X_p = 0 \quad (\text{III.19})$$

III.4.3. Equation de quantité du mouvement suivant x :

Tous les termes de l'équation de la quantité de mouvement suivant x sont multipliés par $dX dY$ et double intégrés entre les limites du volume de contrôle décalé (vers la droite).

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} - U_{P_u}^{\tau}}{\Delta\tau} \right) dX dY = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} - U_{P_u}^{\tau}}{\Delta\tau} \right) dX_e \Delta Y_p \quad (\text{III.20})$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial(UU)}{\partial X} dXdY = \frac{1}{\varepsilon^2} [(U_{e_u}^2 - U_{w_u}^2)] \Delta Y_p \quad (\text{III.21})$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial(UV)}{\partial Y} dXdY = \frac{1}{\varepsilon^2} [(UV)_{n_u} - (UV)_{s_u}] dX_e \quad (\text{III.22})$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} -\frac{\partial P}{\partial X} dXdY = [P_P - P_E] \Delta Y_p \quad (\text{III.23})$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial X} \right) dXdY = \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \left[\left(\mu \frac{\partial U}{\partial X} \right)_{e_u} - \left(\mu \frac{\partial U}{\partial X} \right)_{w_u} \right] \Delta Y_p \quad (\text{III.24})$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial Y} \right) dXdY = \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \left[\left(\mu \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{n_u} - \left(\mu \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{s_u} \right] \Delta X_p \quad (\text{III.25})$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \mu \frac{\text{Pr}}{Da} U dXdY = -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \mu_{p_u} \frac{\text{Pr}}{Da} U_{p_u} dX_e \Delta Y_p \quad (\text{III.26})$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} -\frac{C_F \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{Da}} U dXdY = -\frac{C_F \sqrt{U_{p_u}^2 + V_{p_u}^2}}{\sqrt{Da}} U_{p_u} dX_e \Delta Y_p \quad (\text{III.27})$$

$$\begin{aligned} \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} -\text{Pr} \left(\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \right) \left(\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \right) Ha^2 (V \cdot \cos \gamma \sin \gamma - U \cdot \sin^2 \gamma) dXdY = \\ -\text{Pr} \left(\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \right) \left(\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \right) Ha^2 [V_{p_u} \cos \gamma \sin \gamma - U_{p_u} \sin^2 \gamma] dX_e \Delta Y_p \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Les résultats des intégrales sont réorganisés pour prendre la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique :

$$A_P U_{P_u} = A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + S_U \quad (\text{III.29})$$

Où les coefficients et le terme source de l'équation algébrique sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} A_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

Où :

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{(U_P + U_E)}{2} \Delta Y_p \\ F_w &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{(U_P + U_W)}{2} \Delta Y_p \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

$$F_n = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{(V_P + V_E)}{2} dX_e$$

$$F_s = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{(V_S + V_{ES})}{2} dX_e$$

et :

$$D_e = \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \mu_{e_u} \frac{\Delta Y_P}{\Delta X_E}$$

$$D_w = \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \mu_{w_u} \frac{\Delta Y_P}{\Delta X_P}$$

$$D_n = \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \mu_{n_u} \frac{dX_e}{dY_n}$$

$$D_s = \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \mu_{s_u} \frac{dX_e}{dY_s}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{1}{\varepsilon} \frac{dX_e \Delta Y_P}{\Delta \tau} + \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \mu_{P_u} \frac{\text{Pr}}{Da} dX_e \Delta Y_P$$

$$+ \text{Pr} \left(\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \right) \left(\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \right) Ha^2 (\sin^2 \gamma) dX_e \Delta Y_P$$

$$S_U = (P_P - P_E) \Delta Y_P + \text{Pr} \left(\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \right) \left(\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \right) Ha^2 (V_P \cdot \cos \gamma \sin \gamma) dX_e \Delta Y_P + \frac{1}{\varepsilon} \frac{U_{P_u}^0 dX_e \Delta Y_P}{\Delta \tau}$$

$$+ \frac{C_F \sqrt{U_{P_u}^0{}^2 + V_{P_u}^0{}^2}}{\sqrt{Da}} U_{P_u}^0 dX_e \Delta Y_P$$

III.4.4. Equation de quantité du mouvement suivant y :

Tous les termes de l'équation de la quantité de mouvement suivant y sont multipliés par $dXdY$ et double intégrés entre les limites du volume de contrôle décalé (vers le haut).

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau} - V_{P_v}^{\tau}}{\Delta\tau} \right) dXdY = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau} - V_{P_v}^{\tau}}{\Delta\tau} \right) \Delta X_P dY_n \quad (\text{III.35})$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial(UV)}{\partial X} dXdY = \frac{1}{\varepsilon^2} [(UV)_{e_v} - (UV)_{w_v}] dY_n \quad (\text{III.36})$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial(VV)}{\partial Y} dXdY = \frac{1}{\varepsilon^2} [(V^2)_{n_v} - (V^2)_{s_v}] \Delta X_P \quad (\text{III.37})$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} -\frac{\partial P}{\partial Y} dXdY = [P_P - P_N] \Delta X_P \quad (\text{III.38})$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial X} \right) dXdY = \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \left[\left(\mu \frac{\partial V}{\partial X} \right)_{e_v} - \left(\mu \frac{\partial V}{\partial X} \right)_{w_v} \right] dY_n \quad (\text{III.39})$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right) dXdY = \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \left[\left(\mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right)_{nv} - \left(\mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right)_{sv} \right] \Delta X_p \quad (\text{III.40})$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \mu \frac{\text{Pr}}{Da} V dXdY = -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \mu_{p_v} \frac{\text{Pr}}{Da} V_{p_v} \Delta X_p dY_n \quad (\text{III.41})$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} -\frac{C_F \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{Da}} V dXdY = -\frac{C_F \sqrt{U_{p_v}^2 + V_{p_v}^2}}{\sqrt{Da}} V_{p_v} \Delta X_p dY_n \quad (\text{III.42})$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}\beta_f} Ra \text{Pr} \theta dXdY = \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}\beta_f} Ra \text{Pr} \left(\frac{\theta_P + \theta_N}{2} \right) \Delta X_p dY_n \quad (\text{II.43})$$

$$\begin{aligned} \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} -\text{Pr} \left(\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \right) \left(\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \right) Ha^2 (U \cos \gamma \sin \gamma - V \cos^2 \gamma) \\ = -\text{Pr} \left(\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \right) \left(\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \right) Ha^2 [U_{p_v} \cos \gamma \sin \gamma - V_{p_v} \cos^2 \gamma] \Delta X_p dY_n \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique :

$$A_P V_{P_v} = A_E V_{E_v} + A_W V_{W_v} + A_N V_{N_v} + A_S V_{S_v} + S_V \quad (\text{III.45})$$

Où les coefficients et le terme source de l'équation algébrique sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} A_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

Où :

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{(U_P + U_N)}{2} dY_n \\ F_w &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{(U_{WN} + U_W)}{2} dY_n \\ F_n &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{(V_P + V_N)}{2} \Delta X_p \\ F_s &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{(V_P + V_S)}{2} \Delta X_p \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

et

$$\begin{aligned}
D_e &= \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \mu_{ev} \frac{dY_n}{dX_e} \\
D_w &= \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \mu_{wv} \frac{dY_n}{dX_w} \\
D_n &= \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \mu_{nv} \frac{\Delta X_P}{\Delta Y_N} \\
D_s &= \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\text{Pr}}{\varepsilon} \mu_{sv} \frac{\Delta X_P}{\Delta Y_P}
\end{aligned} \tag{III.48}$$

$$\begin{aligned}
A_P &= A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta X_P dY_n}{\Delta \tau} + \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \mu_{Pv} \frac{\text{Pr}}{Da} \Delta X_p dY_n \\
&\quad + \text{Pr} \left(\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \right) \left(\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \right) Ha^2 (\cos^2 \gamma) \Delta X_p dY_n
\end{aligned} \tag{III.49}$$

$$\begin{aligned}
S_v &= (P_P - P_N) \Delta X_p + \frac{(\rho \beta)_{nf}}{\rho_{nf} \beta_f} Ra \text{Pr} \left(\frac{\theta_P + \theta_N}{2} \right) \Delta X_p dY_n \\
&\quad + \text{Pr} \left(\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \right) \left(\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \right) Ha^2 (U_P \cdot \cos \gamma \sin \gamma) \Delta X_p dY_n + \frac{1}{\varepsilon} \frac{V_{Pu}^0 \Delta X_p dY_n}{\Delta \tau} \\
&\quad + \frac{C_F \sqrt{U_{Pv}^0{}^2 + V_{Pv}^0{}^2}}{\sqrt{Da}} V_{Pv}^0 \Delta X_p dY_n
\end{aligned} \tag{III.50}$$

III.4.5 Équation d'énergie :

$$\int_{w_v}^e \int_{s_v}^{n_v} \left(\frac{\theta_P^{\tau+\Delta\tau} - \theta_P^\tau}{\Delta\tau} \right) dXdY = \left(\frac{\theta_P^{\tau+\Delta\tau} - \theta_P^\tau}{\Delta\tau} \right) \Delta X_P \Delta Y_P \tag{III.51}$$

$$\int_w^e \int_s^n \left(U \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) dXdY = [U_e \theta_e - U_w \theta_w] \Delta Y_P \tag{III.52}$$

$$\int_w^e \int_s^n \left(V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) dXdY = [V_n \theta_n - V_s \theta_s] \Delta X_P \tag{III.53}$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \right] dXdY = \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \left[\left(k \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_e - \left(k \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_w \right] \Delta Y_P \tag{III.54}$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right] dXdY = \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \left[\left(k \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_n - \left(k \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_s \right] \Delta X_P \tag{III.55}$$

Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique :

$$A_P \theta_P = A_E \theta_E + A_W \theta_W + A_N \theta_N + A_S \theta_S + S_\theta \tag{III.56}$$

Où les coefficients et le terme source de l'équation algébrique sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 A_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\
 A_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\
 A_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\
 A_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)
 \end{aligned} \tag{III.57}$$

Où :

$$\begin{aligned}
 F_e &= U_e \Delta Y_p \\
 F_w &= U_w \Delta Y_p \\
 F_n &= V_n \Delta X_p \\
 F_s &= V_s \Delta X_p
 \end{aligned} \tag{III.58}$$

et :

$$\begin{aligned}
 D_e &= \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} k_e \frac{\Delta Y_p}{dX_e} \\
 D_w &= \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} k_w \frac{\Delta Y_p}{dX_w} \\
 D_n &= \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} k_n \frac{\Delta X_p}{dY_n} \\
 D_s &= \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} k_s \frac{\Delta X_p}{dY_s}
 \end{aligned} \tag{III.59}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \eta \frac{\Delta X_p \Delta Y_p}{\Delta \tau} \tag{III.60}$$

$$S_\theta = \theta_P^0 \Delta X_p \Delta Y_p \tag{III.61}$$

III.5. Méthode de résolution :

III.5.1. Equation de pression :

Pour résoudre le système d'équations de discrétisation pour U_{p_u} et V_{p_v} , il est essentiel de déterminer la pression qui intervient dans les termes sources de ces équations. Ainsi, nous avons besoin d'une équation de discrétisation de la pression pour chaque point interne du maillage typique. Cette équation peut être obtenue en utilisant les équations de discrétisation des vitesses et de continuité.

L'équation de discrétisation (III.36) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$A_P U_{P_u} = A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + b_U + (P_P - P_E) \Delta Y_p \tag{III.62}$$

Avec :

$$S_U = b_U + (P_P - P_E)\Delta Y_p \quad (\text{III.63})$$

On remarque que la position P_u du maillage décalé est confondue avec la position e du maillage typique. Donc, l'équation de discrétisation de U_{P_u} ($U_{P_u} = U_e$) devient :

$$A_P U_e = A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + b_U + (P_P - P_E)\Delta Y_p \quad (\text{III.64})$$

Cette équation est réécrite comme suit :

$$U_e = [A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + b_U + (P_P - P_E)\Delta Y_p] / A_P \quad (\text{III.65})$$

$$U_e = \hat{U}_e + d_e(P_P - P_E) \quad (\text{III.66})$$

Avec :

$$U_e = [A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + b_U] / A_P \quad (\text{III.67})$$

Cette variable est appelée le pseudo vitesse suivant la direction x .

$$d_e = \Delta Y_p / A_P \quad (\text{III.68})$$

Au point w , on peut obtenir une équation similaire :

$$U_w = \hat{U}_w + d_w(P_W - P_P) \quad (\text{III.69})$$

Où les pseudo-vitesses sont données par les expressions suivantes :

$$\hat{U}_e = [A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + b_U] / A_P \quad (\text{III.70})$$

Nous avons aussi obtenu l'équation de discrétisation de V_{P_v} :

$$A_P V_{P_v} = A_E V_{E_v} + A_W V_{W_v} + A_N V_{N_v} + A_S V_{S_v} + b_V + (P_P - P_N)\Delta X_P \quad (\text{III.71})$$

Avec :

$$S_V = b_V + (P_P - P_N)\Delta X_P \quad (\text{III.72})$$

Aussi, on remarque que la position P_v du maillage décalé vers le haut est confondue avec la position n du maillage typique. Donc, l'équation de discrétisation de V_{P_v} ($V_{P_v} = V_n$) devient :

$$A_P V_n = A_E V_{E_v} + A_W V_{W_v} + A_N V_{N_v} + A_S V_{S_v} + b_V + (P_P - P_N)\Delta X_P \quad (\text{III.73})$$

Cette équation est réécrite comme suit :

$$V_n = [A_E V_{E_v} + A_W V_{W_v} + A_N V_{N_v} + A_S V_{S_v} + b_V + (P_P - P_N)\Delta X_P] / A_P \quad (\text{III.74})$$

$$V_n = \hat{V}_n + d_n(P_P - P_N) \quad (\text{III.75})$$

Avec :

$$\hat{V}_n = [A_E V_{E_v} + A_W V_{W_v} + A_N V_{N_v} + A_S V_{S_v} + b_V] / A_P \quad (\text{III.76})$$

$$d_n = \Delta X_P / A_P \quad (\text{III.77})$$

Au point s , on peut obtenir une équation similaire :

$$V_s = \hat{V}_s + d_s(P_S - P_P) \quad (\text{III.78})$$

Maintenant, nous allons remplacer les quatre équations :

$$\begin{aligned} U_e &= \hat{U}_e + d_e(P_P - P_E) & , & & U_w &= \hat{U}_w + d_w(P_W - P_P) \\ V_n &= \hat{V}_n + d_n(P_P - P_N) & , & & V_s &= \hat{V}_s + d_s(P_S - P_P) \end{aligned} \quad (\text{III.79})$$

Dans l'équation de discrétisation de continuité :

$$(U_e - U_w)\Delta Y_P + (V_n - V_s)\Delta X_P = 0 \quad (\text{III.80})$$

Et on obtient alors l'équation de discrétisation de pression sous la forme :

$$A_P P_P = A_E P_E + A_W P + A_N P_N + A_S P_S + S_P \quad (\text{III.81})$$

Avec :

$$A_E = d_e \Delta Y_P, \quad A_W = d_w \Delta Y_P, \quad A_N = d_n \Delta X_P, \quad A_S = d_s \Delta X_P \quad (\text{III.82})$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S \quad (\text{III.83})$$

$$S_P = [(\hat{U}_w - \hat{U}_e)\Delta Z_P + (\hat{V}_s - \hat{V}_n)\Delta X_P] \quad (\text{III.84})$$

Les équations de discrétisation du champ de vitesse et du champ de pression obtenues sont intimement liées, engendrant un couplage significatif. Résoudre ce couplage requiert une approche simultanée et itérative des équations. La solution démarre avec des estimations qui sont ensuite corrigées successivement.

On définit les variables correctes comme des sommes des variables estimées plus des corrections :

$$U = U^* + U'$$

$$V = V^* + V' \quad (\text{III.85})$$

$$P = P^* + P'$$

Où :

U^*, V^*, P^* Sont les estimations et U', V', P' sont les corrections.

En substituant ces définitions dans les équations de discrétisation des vitesses, nous obtenons les équations de discrétisation des estimations :

$$A_P U_{P_u}^* = A_E U_{E_u}^* + A_W U_{W_u}^* + A_N U_{N_u}^* + A_S U_{S_u}^* + b_U + (P_P^* - P_E^*)\Delta Y_P \quad (\text{III.86})$$

$$A_P V_{P_v}^* = A_E V_{E_v}^* + A_W V_{W_v}^* + A_N V_{N_v}^* + A_S V_{S_v}^* + b_V + (P_P^* - P_N^*)\Delta X_P \quad (\text{III.87})$$

Ces équations démontrent qu'avec une estimation de la pression, on ne peut obtenir qu'une estimation des vitesses.

Les équations de discrétisation des corrections sont :

$$A_P U_{P_u}' = A_E U_{E_u}' + A_W U_{W_u}' + A_N U_{N_u}' + A_S U_{S_u}' + (P_P' - P_E')\Delta Y_P \quad (\text{III.88})$$

$$A_P V_{P_v}' = A_E V_{E_v}' + A_W V_{W_v}' + A_N V_{N_v}' + A_S V_{S_v}' + (P_P' - P_N')\Delta X_P \quad (\text{III.89})$$

Comme approximation, nous pouvons éliminer les corrections des vitesses aux points voisins et redéfinir les corrections des vitesses uniquement en fonction de la correction de la pression :

$$U_{P_u}' = d_e (P_P' - P_E') \quad (\text{III.90})$$

$$V_{P_v}' = d_n (P_P' - P_N')$$

Donc le champ de vitesses s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
U_e &= U_e^* + d_e(P'_P - P'_E) \\
U_w &= U_w^* + d_w(P'_W - P'_P) \\
V_n &= V_n^* + d_n(P'_P - P'_N) \\
V_s &= V_s^* + d_s(P'_S - P'_P)
\end{aligned} \tag{III.91}$$

Pour la détermination de la correction de pression, on utilise les définitions (III.90) dans l'équation de discrétisation de continuité (III.19) et on obtient :

$$\begin{aligned}
[U_e^* + d_e(P'_P - P'_E)]\Delta Y_P - [U_w^* + d_w(P'_W - P'_P)]\Delta Y_P + [V_n^* + d_n(P'_P - P'_N)]\Delta X_P \\
- [V_s^* + d_s(P'_S - P'_P)]\Delta X_P = 0
\end{aligned} \tag{III.92}$$

Cette équation est réécrite sous la forme d'une équation de discrétisation de correction de pression :

$$A_P P'_P = A_E P'_E + A_W P'_W + A_N P'_N + A_S P'_S + S_{P'} \tag{III.93}$$

Avec :

Les coefficients $A_E, A_W, A_N, A_S, A_F, A_B$ et A_P sont les mêmes que ceux de l'équation de pression:

Et :

$$S_{P'} = [U_w^* - U_e^*]\Delta Y_P + [V_s^* - V_n^*]\Delta X_P = 0 \tag{III.94}$$

III.5.2. Technique de balayage et l'algorithme de Thomas :

La résolution directe du système d'équations algébriques est complexe, d'où l'utilisation de la technique de balayage, une méthode semi-itérative. Elle implique de déterminer les valeurs de la variable $\emptyset$ sur chaque ligne du domaine d'étude indépendamment des autres lignes, transformant ainsi le système d'équations algébriques multidimensionnelles en un système unidimensionnel. On ajoute à la source de la dimension choisie des termes provenant des autres dimensions. Le système d'équations obtenu est représenté par une matrice tri-diagonale et peut être résolu efficacement à l'aide de l'algorithme de Thomas.

L'équation algébrique s'écrit pour le nœud P du maillage comme suit :

$$A_P \emptyset_P = A_E \emptyset_E + A_W \emptyset_W + A_N \emptyset_N + A_S \emptyset_S + S \tag{III.95}$$

Le système d'équations obtenu peut se mettre sous la forme suivante :

$$[A] \cdot [\emptyset] = [S_\emptyset] \tag{III.96}$$

$[A]$: est une matrice de $(IL - 2) \times (JL - 2)$ éléments.

$[\emptyset]$: Vecteur des inconnues

$i = 2 ; IL - 1$ et $j = 2 ; JL - 1$

Pour déterminer les valeurs de $\emptyset$ sur une colonne « i » on suppose que les valeurs de cette dernière sont connues sur les colonnes « i » et « $i + 1$ ». L'équation algébrique (III.94) écrite pour chaque nœud de la colonne « i » est alors réduite à une équation qui contient seulement trois inconnues ($\emptyset_P, \emptyset_N, \emptyset_S$).

Dans sa forme générale indicielle, l'équation discrétisée s'écrit comme suit :

$$A_P(i,j)\phi_{i,j} = A_E(i,j)\phi_{i+1,j} + A_W(i,j)\phi_{i-1,j} + A_N(i,j)\phi_{i,j+1} + A_S(i,j)\phi_{i,j-1} + S(i,j) \quad (\text{III.97})$$

Pour le nœud (i, j) du maillage, l'équation (III.96) peut être exprimée sous forme d'une équation unidimensionnelle :

$$a_j\phi_j = b_j\phi_{j+1} + c_j\phi_{j-1} + d_j \quad (\text{III.98})$$

Où :

$$\left. \begin{aligned} a_j &= A_P(i,j) \\ b_j &= A_N(i,j) \\ c_j &= A_S(i,j) \\ d_j &= A_E(i,j)\phi_{i+1,j} + A_W(i,j)\phi_{i-1,j} + S(i,j) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.99})$$

Donc, nous obtenons l'équation sous la forme suivante :

$$-c_j\phi_{j-1} + a_j\phi_j - b_j\phi_{j+1} = d_j \quad (\text{III.100})$$

Avec : $c_1 = 0$ et $b_{JL} = 0$

Pour tous les nœuds ($j = 2, JL - 1$) de la colonne i , l'équation donne un système de la forme :

$$\begin{aligned} -c_2\phi_1 + a_2\phi_2 - b_2\phi_3 &= d_2 \\ \dots\dots\dots \\ -c_j\phi_{j-1} + a_j\phi_j - b_j\phi_{j+1} &= d_j \\ \dots\dots\dots \\ -c_{JL}\phi_{JL-1} + a_{JL}\phi_{JL} - b_{JL}\phi_{JL+1} &= d_{JL} \end{aligned} \quad (\text{III.101})$$

Les valeurs de ϕ_1 et ϕ_{JL} sont connues (conditions aux limites).

La matrice liée au système est tri-diagonale. On applique l'algorithme TDMA (Thomas) en réorganisant toutes les équations du système (III.101) comme suit :

$$\phi_j = \frac{c_j}{a_j}\phi_{j-1} + \frac{b_j}{a_j}\phi_{j+1} + \frac{d_j}{a_j} \quad (\text{III.102})$$

On obtient :

$$\phi_2 = \frac{c_2}{a_2}\phi_1 + \frac{b_2}{a_2}\phi_3 + \frac{d_2}{a_2} \quad (\text{III.103})$$

$$\phi_3 = \frac{c_3}{a_3}\phi_2 + \frac{b_3}{a_3}\phi_4 + \frac{d_3}{a_3} \quad (\text{III.104})$$

$$\phi_{JL} = \frac{c_{JL}}{a_{JL}}\phi_{JL-1} + \frac{b_{JL}}{a_{JL}}\phi_{JL+1} + \frac{d_{JL}}{a_{JL}} \quad (\text{III.105})$$

Et puisque ϕ_1 est connue, on élimine ϕ_2 de (III.103) et ϕ_3 de (III.104) et ainsi de suite ; on obtient une relation de récurrence pour ϕ_j telle que :

$$\phi_j = P_j\phi_{j+1} + Q_j \quad (\text{III.106})$$

Détermination de P_j et Q_j , Pour le nœud $(i, j - 1)$, on a :

$$\phi_{j-1} = P_{j-1}\phi_j + Q_{j-1} \quad (\text{III.107})$$

En remplaçant (III.106) dans (III.99), on trouve :

$$-c_j(P_{j-1}\phi_j + Q_{j-1}) + a_j\phi_j - b_j\phi_{j+1} = d_j \quad (\text{III.108})$$

On a :

$$(a_j - c_j P_{j-1})\phi_j = d_j + c_j\phi_{j-1} + b_j\phi_{j+1} \quad (\text{III.109})$$

$$\phi_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}}\phi_{j+1} + \frac{d_j - c_j\phi_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (\text{III.110})$$

De (III.106) et (III.110), on a :

$$P_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (\text{III.111})$$

$$Q_j = \frac{d_j - c_j\phi_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (\text{III.112})$$

Remarquons que pour $j = 1$ on a : $c_j = 0$; l'équation (III.110) pour $j = 1$ se réduit à :

$$c = \frac{b_1}{a_1}\phi_2 + \frac{d_1}{a_1} \quad (\text{III.113})$$

Ce qui correspond à la forme de l'équation (III.102)

On a :

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (\text{III.114})$$

Aussi, pour $j = JL$ On a : $b_{JL} = 0$, donc $P_{JL} = 0$

Et de l'équation (III.107) on a :

$$P_{JL} = Q_{JL} \quad (\text{III.115})$$

Algorithme de THOMAS se résume comme suit :

- Trianguler la matrice (la matrice tri-diagonale devient bi-diagonale)
- 1. Calculer les quantités P_1 et Q_1 de (III.102) par $P_1 = \frac{b_1}{a_1}$, $Q_1 = \frac{d_1}{a_1}$.
- 2. Calculer à partir de (III.111) et (III.112) les coefficients P_j et Q_j pour $j = 1, 2, \dots, JL$.
- Résoudre le système à matrice bi-diagonale :
- 3. On pose : $\phi_{JL} = Q_{JL}$

On utilise l'équation (III.106) pour $j = JL - 1, j = JL - 2, \dots, 1$ pour obtenir les valeurs

$\phi_{JL-1}, \phi_{JL-2}, \dots, \phi_2, \phi_1$.

III.5.3 Algorithme de calcul SIMPLER :

La solution séquentielle de l'ensemble des systèmes d'équations de discrétisation des vitesses, de la pression, de la température et du potentiel électrique, est assurée par l'algorithme SIMPLER (Semi-Implicit-Pressure-Equation-Revised) [27]. Les étapes de cet algorithme sont :

1. Nous commençons par initialiser le champ des vitesses.
2. Avec le champ de vitesse initial, nous calculons les pseudos : $\hat{U}$ et $\hat{V}$.
3. Avec les pseudo-vitesses, nous pouvons résoudre (par la méthode itérative de balayage) le système d'équations de discrétisation de la pression et obtenir une estimation de celle-ci : P^*
4. L'estimation de la pression est ensuite utilisée dans les équations de discrétisation des vitesses. En conséquence, les systèmes d'équations de discrétisation des vitesses sont résolus (par la méthode itérative de balayage), fournissant ainsi les estimations des vitesses. : U^* et V^* .
5. Avec les estimations des vitesses, nous pouvons résoudre (par la méthode itérative de balayage) le système d'équations de discrétisation de la correction de pression, aboutissant ainsi à une estimation de celle-ci. : P' .
6. En utilisant la correction de la pression, nous calculons les corrections des vitesses pour ensuite corriger le champ de vitesse.
7. Nous résolvons ensuite le système d'équations de discrétisation de la vitesse azimutale (par la méthode itérative de balayage), nous obtenons ainsi sa distribution.
8. Nous résolvons ensuite le système d'équations de discrétisation de la température (par la méthode itérative de balayage), nous obtenons ainsi le champ de température.
9. Nous résolvons ensuite le système d'équations de discrétisation du potentiel électrique (par la méthode itérative de balayage), aboutissant ainsi au champ du potentiel électrique.
10. Nous vérifions ensuite la convergence des calculs : si le régime stationnaire est atteint, nous arrêtons le calcul. Sinon, nous augmentons le temps d'un pas et avec le champ de vitesse corrigé comme nouvelle initialisation, nous retournons à l'étape 2.

III.5.4 Critère de convergence :

La convergence est établie lorsque le bilan de conservation de masse et d'énergie est satisfait, en vérifiant que l'évolution des valeurs des variables de l'écoulement (U, V, θ) entre deux itérations consécutives est négligeable.

$$(\phi^{n+1} - \phi^n) / \phi^n \leq \varepsilon = 10^{-4} \quad (\text{III.116})$$

Où : ϕ est la variable dépendante qui représente U, V ou θ .

n est le nombre d'itération.

Chapitre IV

Résultats et discussion

IV.1 Introduction :

Dans cette section, nous présentons les simulations numériques de la convection naturelle bidimensionnelle dans une cavité différentiellement chauffée, remplie d'un nanofluide, en présence d'un champ magnétique externe horizontal ($\gamma = 0$). L'influence du champ magnétique ($0 \leq Ha \leq 100$) sera examinée sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur dans la cavité pour différents nombres de Rayleigh ($10^3 \leq Ra \leq 10^6$). Les effets du nombre de Darcy ($10^{-5} \leq Da \leq 10^{-1}$) et de la fraction volumique ($0 \leq \varphi \leq 0.04$) seront déterminés pour une valeur fixe de la porosité $\varepsilon = 0.5$. L'application du concept de la génération d'entropie permettra d'évaluer l'efficacité du système énergétique en mesurant les pertes d'énergie pour différents paramètres cités au-dessus, sachant le facteur d'irréversibilité est fixe et égale $\chi_f = 10^{-4}$.

IV.2 Effet du maillage :

Le choix du maillage dépend de deux paramètres essentiels : la précision des résultats et le temps de calcul. Pour analyser l'effet du maillage sur les solutions numériques, plusieurs grilles uniformes ont été étudiées, à savoir : 52×52 , 102×102 et 162×162 nœuds. En élevant la taille de la grille de 102×102 nœuds à 162×162 nœuds, une différence de moins de 0.6% a été observée dans les valeurs calculées (voir tableau IV.1). Après avoir testé l'indépendance de la solution numérique par rapport au maillage, un maillage de 102×102 nœuds a été sélectionné pour tous les calculs. Ce maillage représente également le meilleur compromis entre la précision des résultats et le temps de calcul.

Grille	U_{max}	V_{max}	$ \psi_{max} $	$\overline{Nu}$
52×52	10.9661	12.1310	1.86768	1.78361
102×102	10.8494	12.4973	1.85772	1.76446
162×162	10.8201	12.6363	1.85535	1.75391

Tableau (IV.1) : Caractéristiques de l'écoulement et du transfert thermique pour différentes grilles : $Ra = 10^5$, $Da = 10^{-3}$, $Ha = 50$, $\varepsilon = 0.5$ et $\varphi = 0.02$.

IV.3 Validation du code :

La validation de notre code de calcul a été effectuée par des comparaisons quantitative et qualitative avec des résultats des références disponibles dans la littérature. Le tableau (IV.2) et la figure (IV.2) présentent les comparaisons avec les résultats de Nguyen et al. [27] pour un écoulement laminaire de la convection naturelle d'un nanofluide (Cu - eau) dans une cavité poreuse, où les parois verticales sont chauffées différentiellement. Les modèles de Brinkman [28] et de Maxwell-Garnett [29] sont utilisés respectivement pour déterminer la viscosité dynamique et la conductivité thermique du nanofluide. Les comparaisons ont été réalisées pour des valeurs fixes du nombre de Rayleigh $Ra = 10^7$, de la porosité $\varepsilon = 0.4$ et de la fraction volumique $\varphi = 0.025$, ainsi que pour différentes valeurs du nombre de Darcy $Da = 10^{-2}$, 10^{-4} et 10^{-6} .

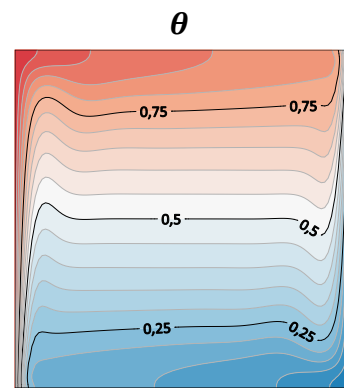
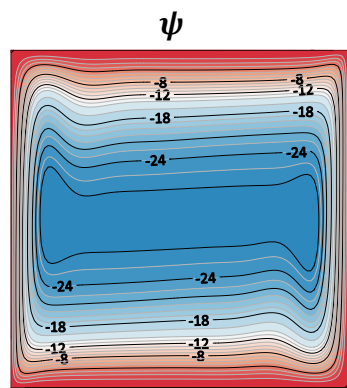
D'après le tableau (IV.2) et la figure (IV.1), il est également notable de constater un accord quasiment parfait entre nos résultats et ceux rapportés dans la littérature.

	Ra	Da	ε	ψ_{max}
Nguyen et al. [27]	10^7	10^{-2}	0.4	27.515
Nos résultats				27.038
Nguyen et al. [27]	10^7	10^{-4}	0.4	14.975
Nos résultats				14.711
Nguyen et al. [27]	10^7	10^{-6}	0.4	0.665
Nos résultats				0.676

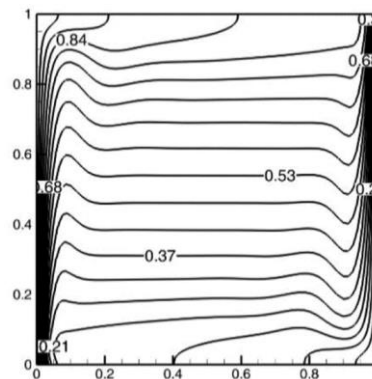
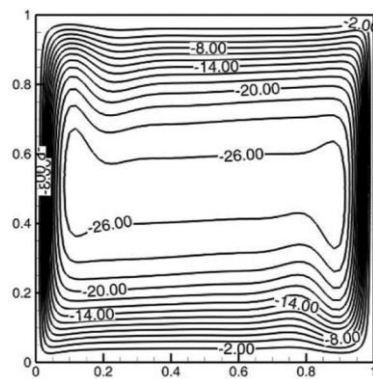
Tableau (IV.2) : Comparaison des résultats présents avec ceux de Nguyen et al. [27].

La performance du modèle de génération d'entropie a été évaluée en le comparant aux résultats de Kefayati [30] et d'Ilis et al. [31] pour la convection naturelle stationnaire dans une cavité carrée chauffée différentiellement et remplie de fluide avec un nombre de Prandtl de 0.7. La figures (IV.3) montre une bonne concordance entre les champs de génération d'entropie locale dus au transfert de chaleur et au frottement du fluide et le nombre de Bejan, avec $Ra = 10^5$ et $\chi = 10^{-4}$, et les données numériques de Kefayati [30] et d'Ilis [31].

$Da = 10^{-2}$

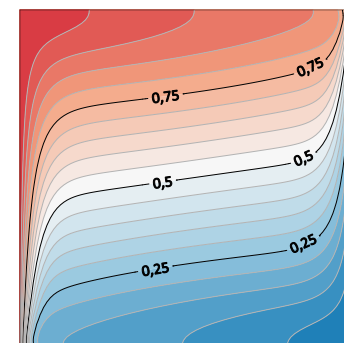
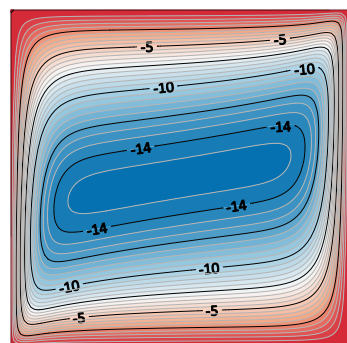


(a)

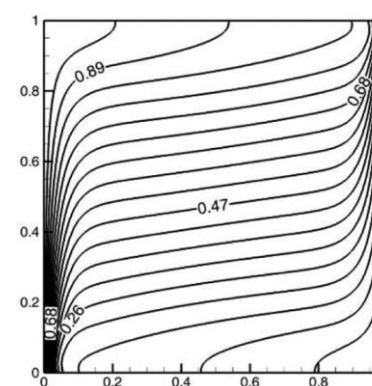
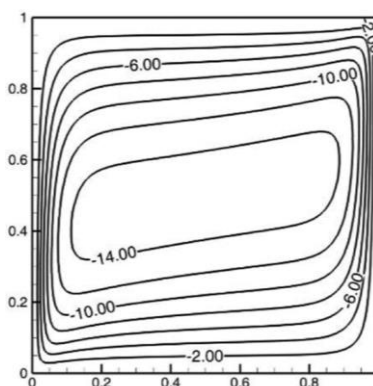


(b)

$Da = 10^{-4}$



(a)



(b)

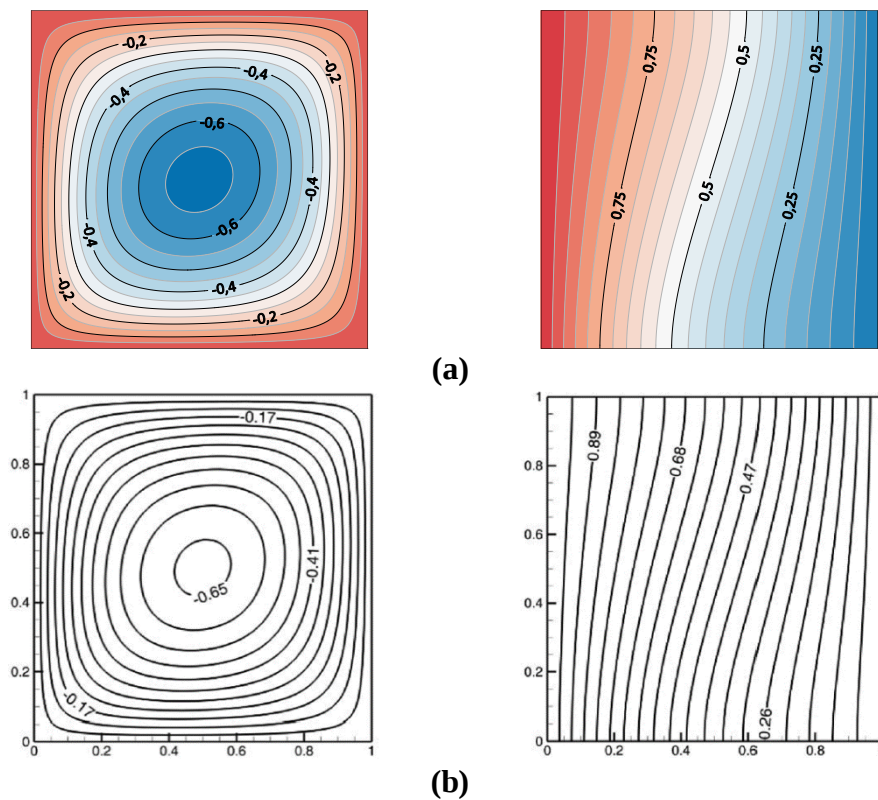
$Da = 10^{-6}$


Figure (IV.1) : Comparaison des lignes de courant et des isothermes.
(Nos résultats (a) et les résultats de Nguyen et al. [27] (b))

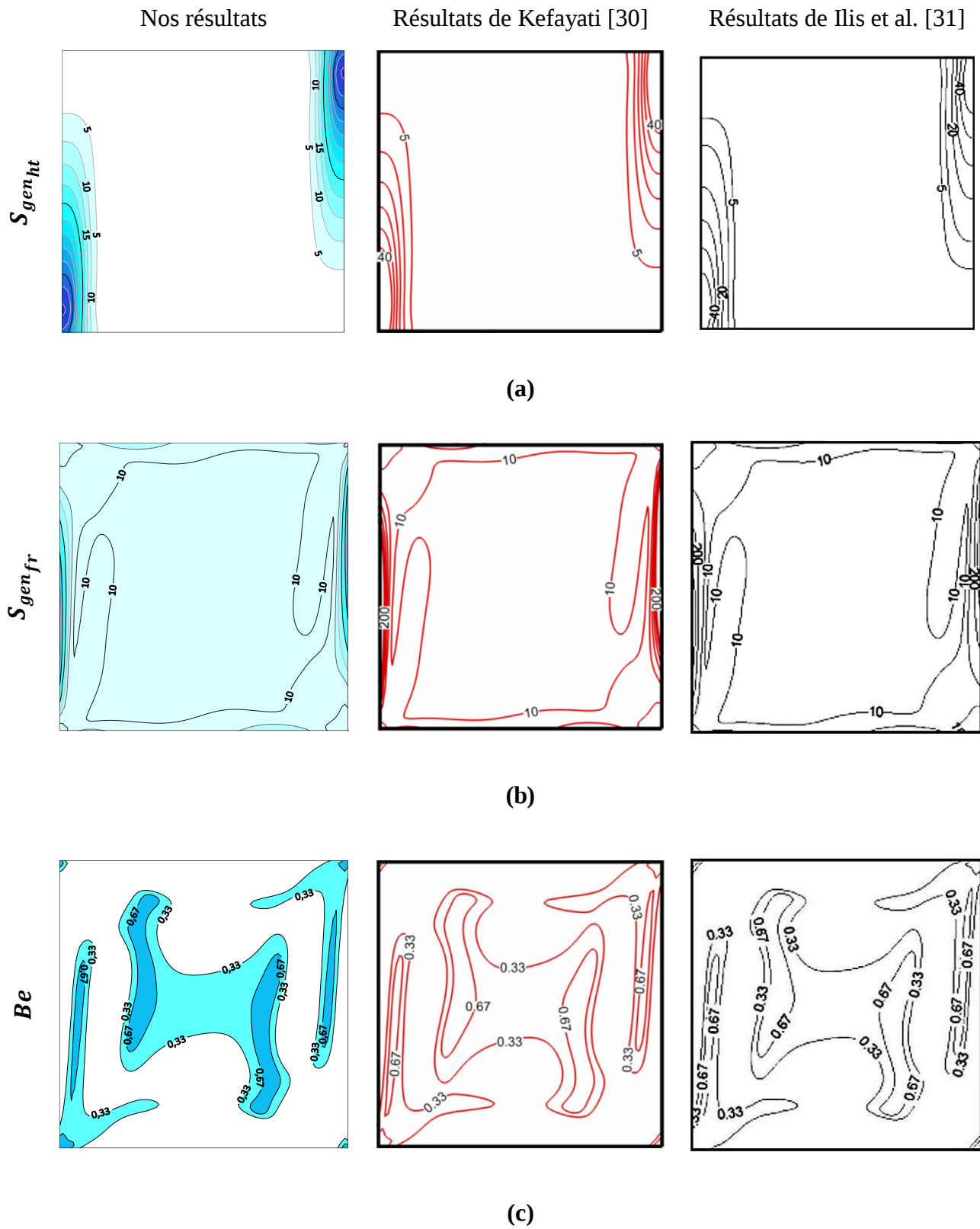


Figure (IV.2) : Comparaison avec les résultats de Kefayati [30] et d'Ilis et al. [31].

IV.4 Résultats et discussion :

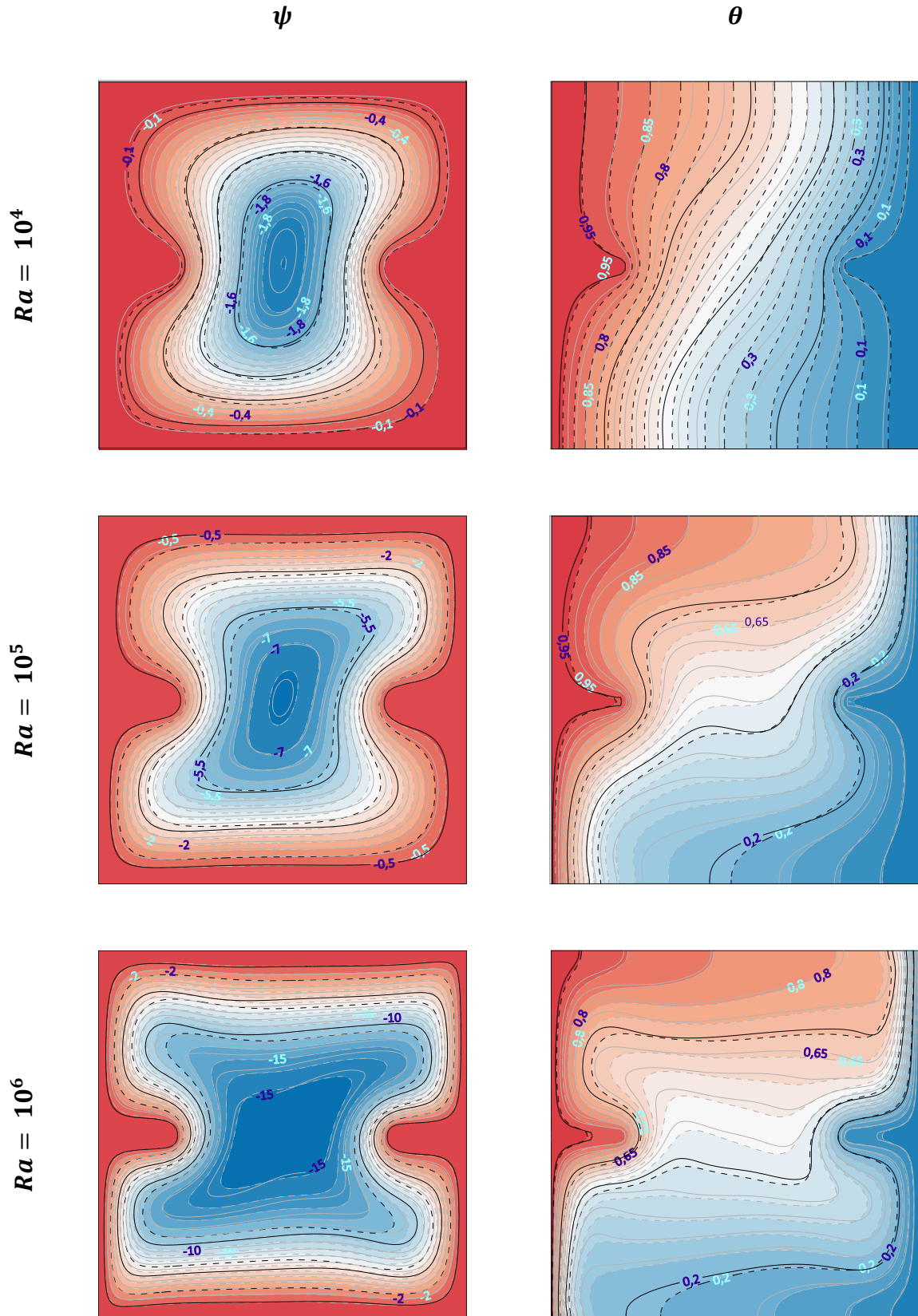
Cette étude examine la convection naturelle MHD d'un nanofluide (Al_2O_3 - eau) dans une cavité carrée remplie d'un milieu poreux, avec deux obstacles rectangulaires placés à mi-hauteur des parois isothermes. Différentes valeurs de paramètres de contrôle sont analysées, à savoir : Ra , Da , Ha et ϕ . Les résultats sont présentés sous forme de lignes de courant, d'isothermes, de lignes isentropiques, de nombre de Bejan local ainsi que des variations de nombres de Nusselt moyens et de l'entropie totale moyenne en fonction des paramètres étudiés.

La figure (IV.3) présente la structure de l'écoulement et le champ thermique pour $Da = 10^{-1}$ (a) et 10^{-5} (b), ainsi que pour différents nombres de Rayleigh, en comparant les résultats pour le fluide pur ($\phi=0$) et pour le nanofluide ($\phi=0.04$). Qu'il s'agisse d'un fluide pur ou d'un nanofluide à l'intérieur du domaine, leur mouvement est induit par la force de flottabilité thermique. En pratique, les couches de liquide près des parois froides se condensent et deviennent plus denses, ce qui les fait descendre. A l'inverse, les couches de nanofluide près des parois chaudes s'élèvent. En définitive, cet arrangement favorise la formation d'un écoulement circulaire dans le sens des aiguilles d'une montre à l'intérieur de l'espace étudié. Pour de faibles nombres de Rayleigh, la présence des blocs solides à mi-hauteur de l'enceinte de longueur L confine l'écoulement davantage dans le sens horizontal et modifie la circulation, créant une forme d'ellipse verticale au centre et une forme en huit à la périphérie. En augmentant le nombre de Ra , la convection s'accroît, mettant en évidence une déformation angulaire de la cellule de circulation verticale pour des nombres de Darcy élevés. L'influence de la valeur du nombre de Darcy Da sur le mouvement du fluide est illustrée dans cette figure. L'augmentation du nombre Da se traduit par une augmentation de la perméabilité du milieu, réduisant ainsi la résistance au mouvement des particules de fluide. En conséquence, nous observons une augmentation de la vitesse de l'écoulement en fonction du nombre de Da , ce qui correspond également au développement de la cellule de circulation dans l'espace. Pour des valeurs faibles de Da , malgré l'augmentation du nombre de Rayleigh, les changements de la structure de l'écoulement sont insignifiants en raison des faibles vitesses du fluide.

En ce qui concerne le champ thermique, nous constatons que les gradients de température à proximité des surfaces isothermes augmentent avec l'augmentation de Ra et de Da , ce qui indique une dominance de la convection. L'augmentation de Ra accentue la convection naturelle, résultant en des écoulements plus intenses et des échanges thermiques plus efficaces. Cela est dû à la force de flottabilité qui devient plus significative à des valeurs de Ra et de Da élevées, entraînant une circulation plus vigoureuse du fluide. Cependant, pour un nombre de Da plus faible ($Da = 10^{-5}$), la perméabilité est réduite, limitant ainsi le mouvement du fluide. Dans ce scénario, la conduction devient le mécanisme de transfert de chaleur prédominant. Par

conséquent, même pour des valeurs élevées de Ra , il n'y a pas de différence significative dans le comportement du fluide. Cela est particulièrement observable par la parallélisation des isothermes, indiquant une distribution uniforme de la température sans influence notable de la convection. Il est important de noter que la déformation des profils des isothermes près des blocs solides est principalement due à la différence de conductivité thermique, laquelle est 100 fois supérieure à celle du fluide environnant. Cette disparité de conductivité entraîne une redistribution significative des lignes de température, provoquant une courbure marquée et un réalignement des isothermes autour des blocs solides.

L'ajout de nanoparticules au fluide de base modifie de manière significative les propriétés thermiques et fluides du système, notamment la conductivité thermique, la capacité thermique et la viscosité. En incorporant des nanoparticules métalliques telles que l'alumine, la conductivité thermique du fluide de base augmente considérablement. Le nanofluide résultant affecte également la dynamique d'écoulement et le champ thermique, se traduisant par une intensification de l'écoulement et une déformation des lignes de courant et des isothermes par rapport au fluide de base. En augmentant le nombre de Rayleigh et de Darcy, l'effet bénéfique des nanoparticules devient encore plus apparent. La convection, déjà améliorée par l'augmentation de Ra , est encore plus efficace avec des nanofluides.

(a) $Da = 10^{-1}$

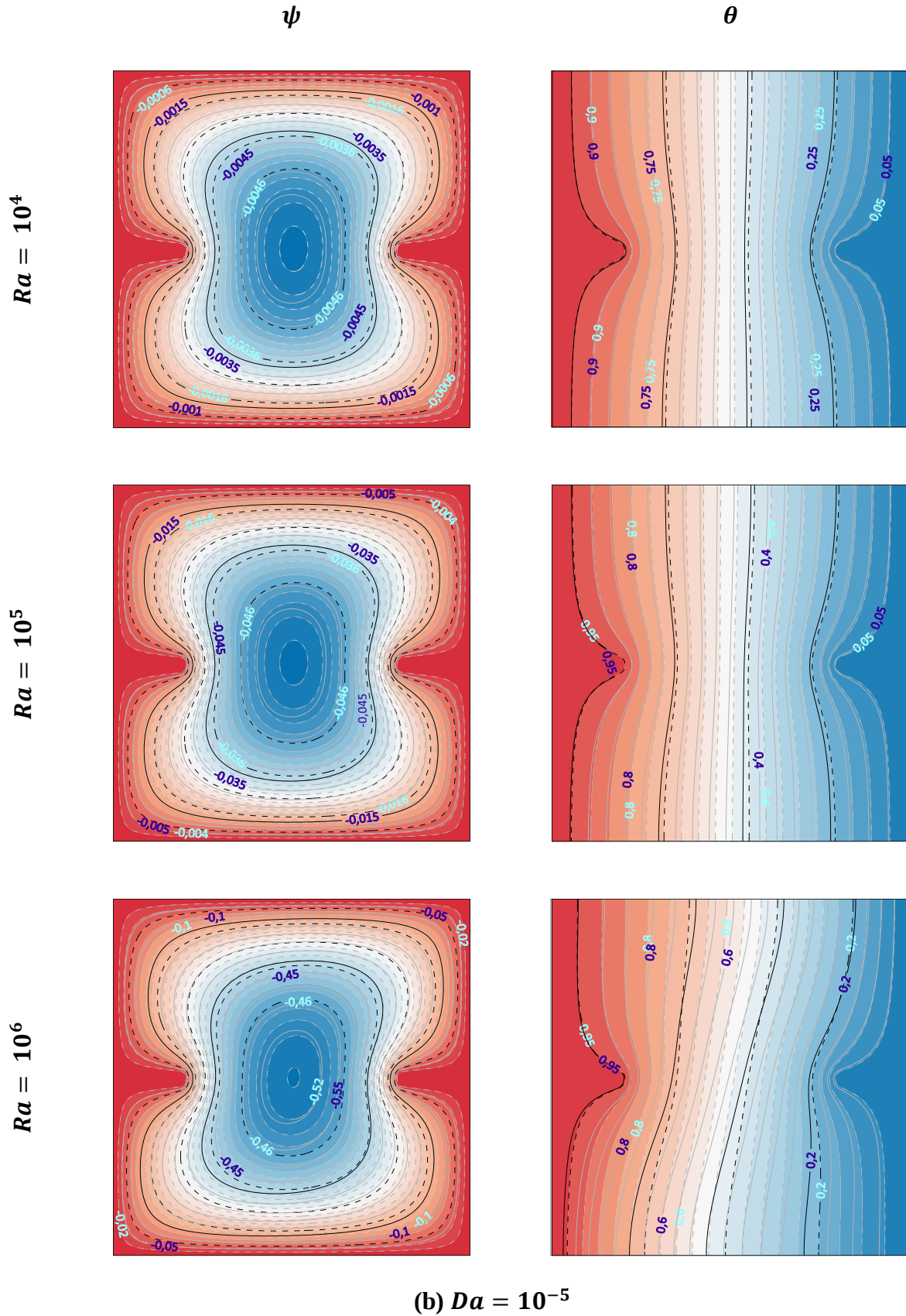
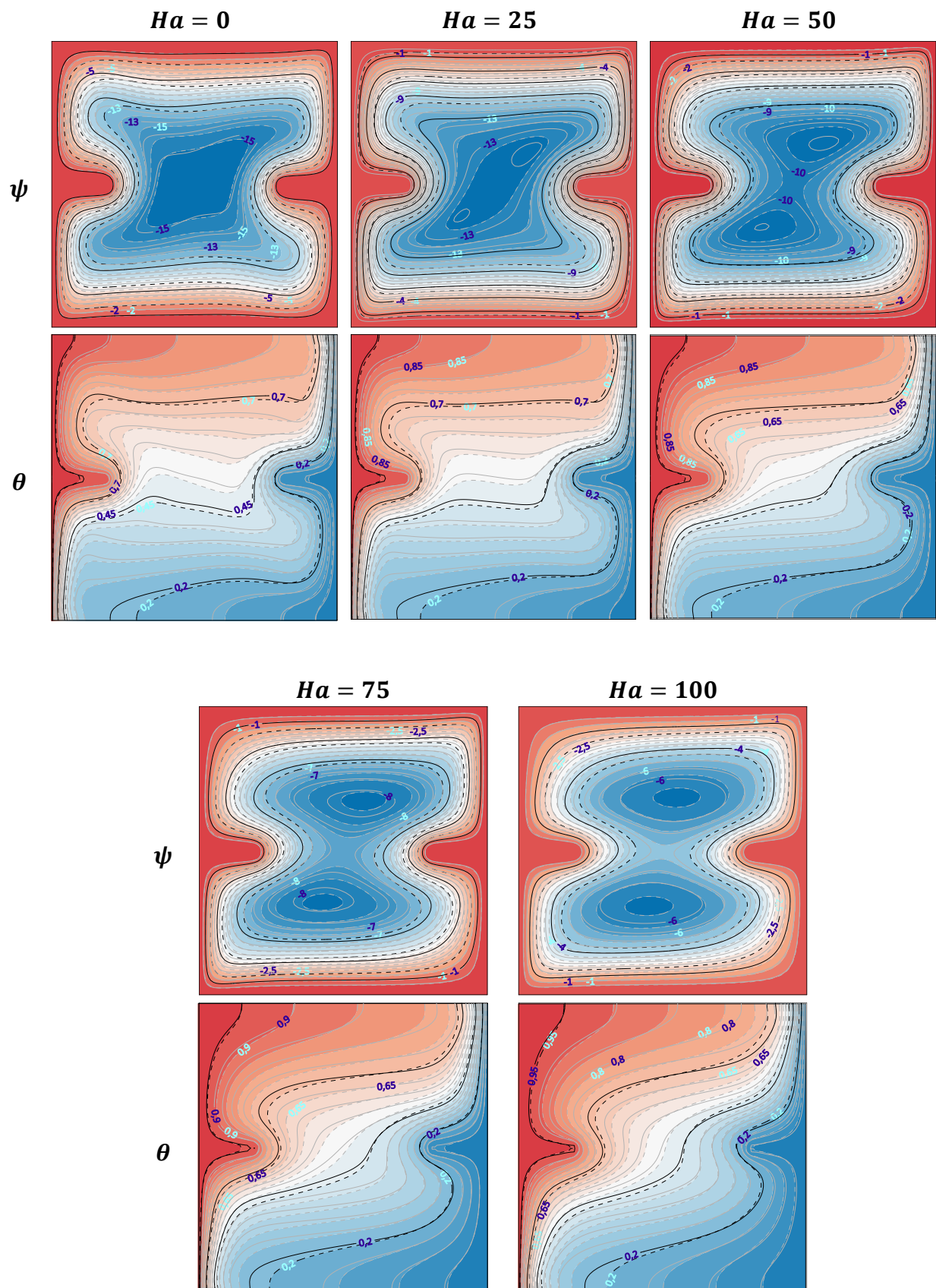


Figure (IV.3) : Fonctions de courant et isothermes pour $Da = 10^{-1}$ (a) et 10^{-5} (b) et différents nombres de Rayleigh Ra .

Fluide pure $\varphi = 0$ (ligne continue) et nanofluide $\varphi = 0.04$ (ligne discontinue).

La figure (IV.4) présente la structure de l'écoulement et le champ thermique $Ra=10^6$, $Da = 10^{-1}$ (a) et 10^{-5} (b), ainsi que pour différents nombres de Hartmann Ha , en comparant les résultats pour le fluide pur ($\phi=0$) et pour le nanofluide ($\phi=0.04$). L'application d'un champ magnétique sur l'écoulement de la convection naturelle a une influence significative sur les caractéristiques du transfert de chaleur et la dynamique d'écoulement. Lorsqu'un champ magnétique est appliqué, il agit sur les particules du fluide en générant une force de Lorentz. Dans notre cas, cette force de Lorentz, orientée verticalement par le champ magnétique horizontal, agit comme une force de freinage sur le mouvement du fluide, réduisant ainsi la vitesse d'écoulement. Cette réduction de vitesse entraîne une diminution de l'intensité de la convection naturelle et une réorganisation des isothermes, souvent les rendant plus uniformes. Pour des valeurs élevées de Ha , généralement le régime conductif devient prédominant par rapport au régime convectif, ce qui signifie que le transfert de chaleur par conduction surpasse celui par convection. Pour $Ra=10^6$ et $Da=10^{-1}$, en l'absence de champ magnétique, l'écoulement se caractérise par une cellule principale déformée. A mesure que l'intensité du champ magnétique (Ha) augmente, l'écoulement se réorganise en deux cellules secondaires à l'intérieur de la cellule principale, avec une concentration marquée des lignes de courant observée en haut et en bas de l'enceinte. Ceci est attribué à l'effet de la force de Lorentz verticale induite par le champ magnétique. En ce qui concerne le champ thermique, les isothermes deviennent de moins en moins déformées à mesure que le nombre de Ha augmente. Pour le cas $Da = 10^{-5}$, le mouvement du fluide est fortement restreint, et la conduction thermique devient le mécanisme dominant pour le transfert de chaleur. Cela conduit à des vitesses d'écoulement très faibles et à une convection minimale. L'application d'un champ magnétique a un effet minime car la conduction est déjà dominante. Les isothermes montrent peu de changements significatifs avec l'augmentation de l'intensité du champ magnétique, et l'alignement des isothermes est observé dans l'enceinte, avec une inclinaison prononcée.

(a) $Da = 10^{-1}$

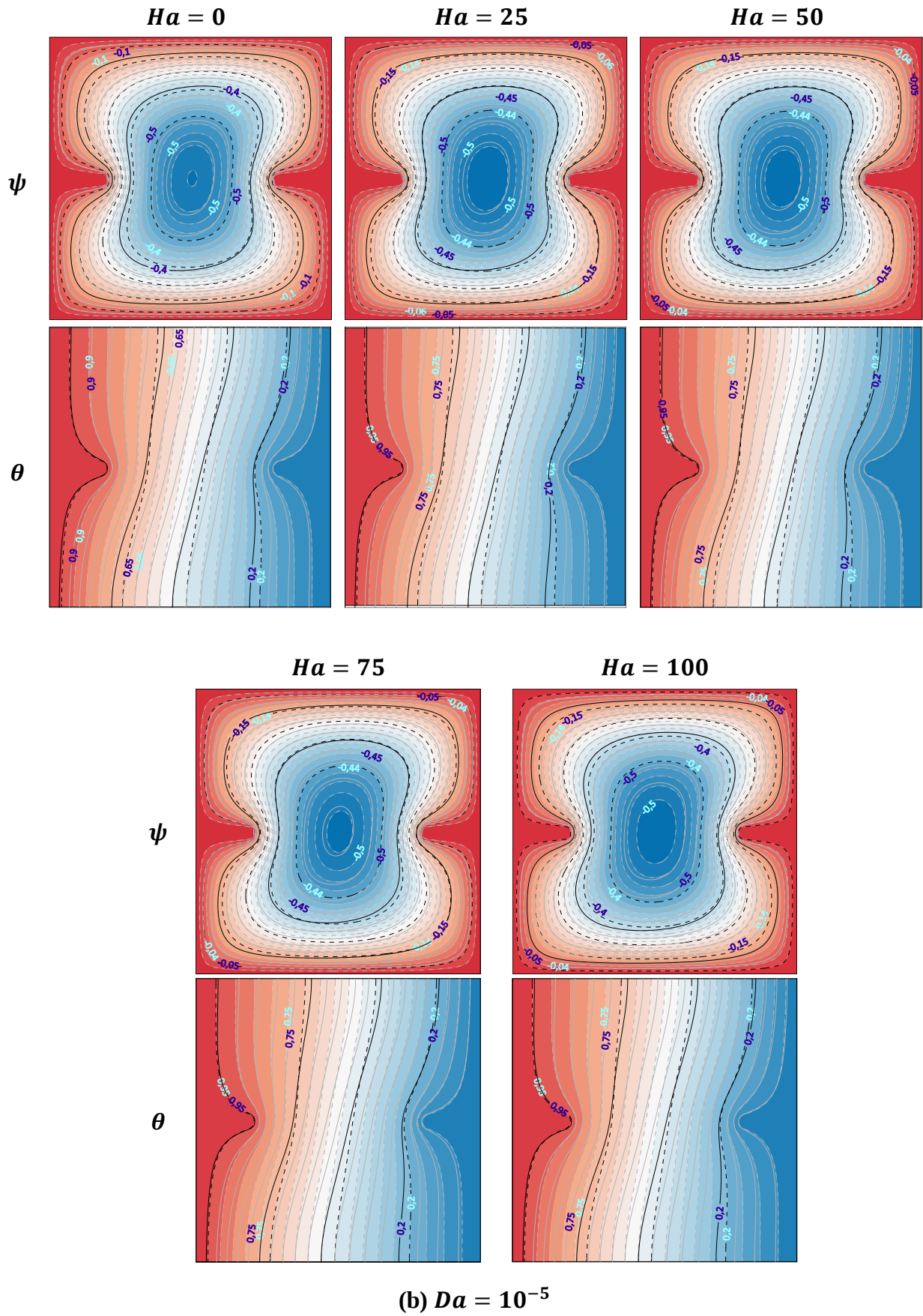
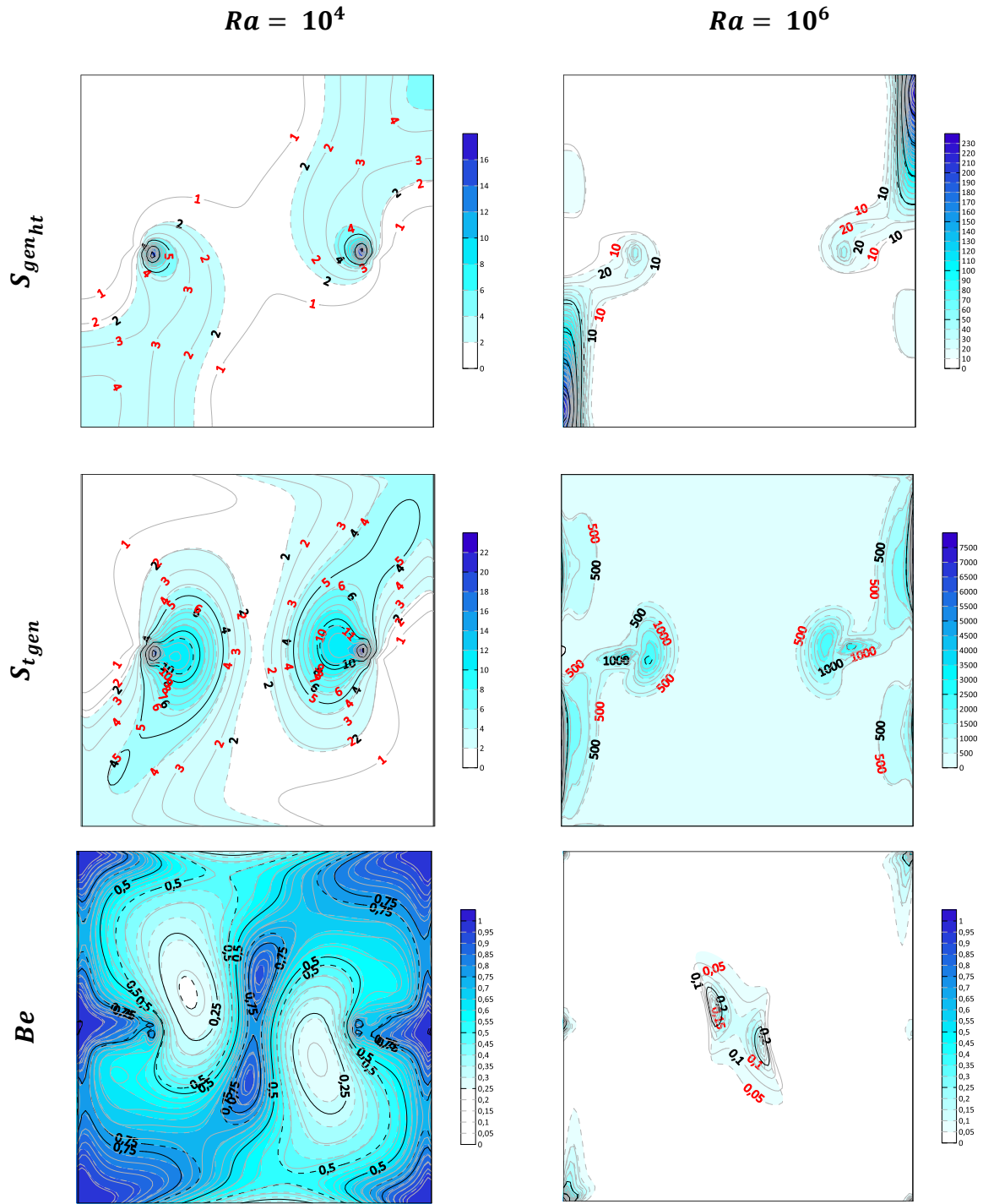


Figure (IV.4) : Fonctions de courant et isothermes pour $Ra=10^6$, $Da = 10^{-1}$ (a) et 10^{-5} (b) et différents nombres de Hartmann Ha .
 Fluide pure $\varphi = 0$ (ligne continue) et nanofluide $\varphi = 0.04$ (ligne discontinue).

Figure (IV.5) illustre les distributions de la génération locale d'entropie due au transfert thermique $S_{gen_{ht}}$, la génération totale d'entropie locale $S_{t_{gen}}$, ainsi que le nombre de Bejan local Be pour $Da = 10^{-1}$ (a) et $Da = 10^{-3}$ (b) à $Ra = 10^4$ et 10^6 . La génération d'entropie locale causée par le transfert thermique permet de localiser les zones où les pertes d'énergie due à l'irréversibilité thermique sont maximales, souvent liées à des gradients de température élevés. D'après la figure, nous observons que, pour la production d'entropie locale due au transfert thermique, les lignes isentropiques se concentrent principalement près des parois isothermes, en particulier en haut de la paroi froide, en bas de la paroi chaude, et autour des blocs solides, où le gradient de température est prononcé. Avec l'ajout de nanoparticules, les lignes isentropiques deviennent encore plus denses dans ces régions, indiquant un transfert thermique intensifié. L'augmentation du nombre de Rayleigh accentue les gradients de température, ce qui tend à resserrer davantage ces lignes isentropiques dans ces zones. Concernant la génération d'entropie totale, pour un faible nombre de Rayleigh ($Ra = 10^4$), les lignes isentropiques se concentrent dans les mêmes zones que celles associées à la génération d'entropie locale liée au transfert thermique, à savoir en haut de la paroi froide, en bas de la paroi chaude, et autour des blocs solides. Cela indique que la génération d'entropie est principalement due au transfert de chaleur, soulignant la dominance du régime de conduction. Cela se traduit par l'ordre de grandeur des valeurs d'entropie dans ces zones.

Lorsque $Ra = 10^6$, ces lignes se resserrent près des parois isothermes et autour des blocs solides, mais avec un ordre de grandeur supérieur en raison de la localisation des forces de viscosité. De plus, l'ajout de nanoparticules entraîne la formation de nouvelles lignes isentropiques, créant des nœuds en raison de l'augmentation de la viscosité dynamique effective.

En ce qui concerne le nombre de Bejan local, qui indique la source dominante de la génération d'entropie, il prend des valeurs supérieures à 0.5 lorsque les irréversibilités dues au transfert de chaleur sont dominantes, ce qui est le cas pour un faible nombre de Rayleigh et de Darcy. Pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh, la convection devient dominante, augmentant les irréversibilités dues au frottement du fluide et entraînant une distribution des valeurs inférieures à 0,5 dans l'ensemble de l'enceinte.



(a) $Da = 10^{-1}$

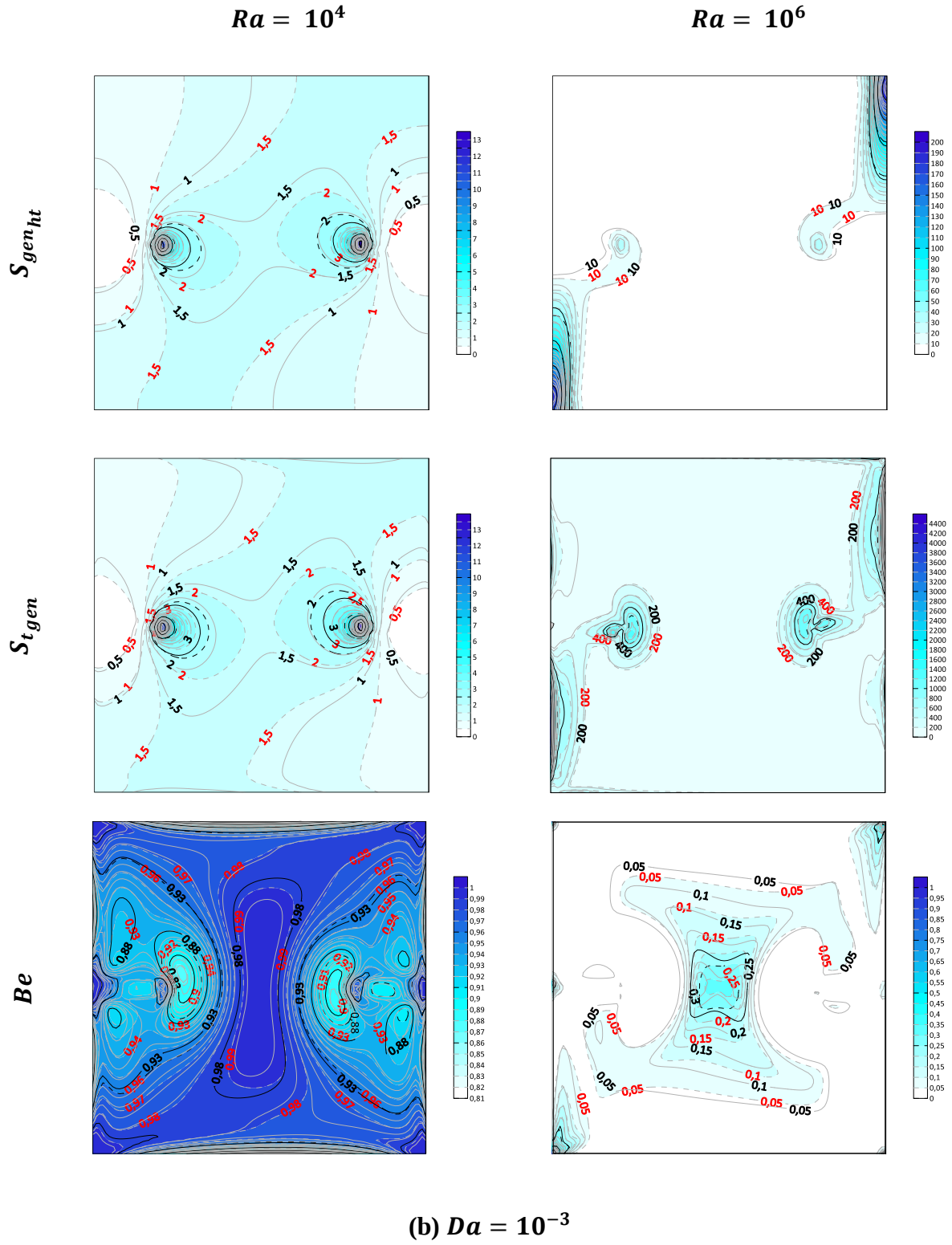


Figure (IV.5) : Distribution de génération d'entropie : production d'entropie locale par transfert thermique $S_{gen_{ht}}$, production d'entropie locale $S_{t_{gen}}$ et nombre de Bejan local Be pour $Ha=25$, $Da = 10^{-1}$ (a) et 10^{-3} (b) et divers nombres de Ra .
Fluide pure $\varphi = 0$ (ligne continue) et nanofluide $\varphi = 0.04$ (ligne discontinue).

Afin d'obtenir une meilleure compréhension de l'influence de la fraction volumique sur le taux de transfert de chaleur dans l'enceinte, la figure (IV.6) illustre la variation du nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu}$ en fonction de la fraction volumique φ pour différents nombres de Rayleigh Ra à $Da=10^{-1}$ et 10^{-5} . Nous observons que les taux de transfert de chaleur augmentent en fonction de φ et de Ra , indiquant que l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules et du nombre de Rayleigh améliore significativement le transfert de chaleur dans l'enceinte.

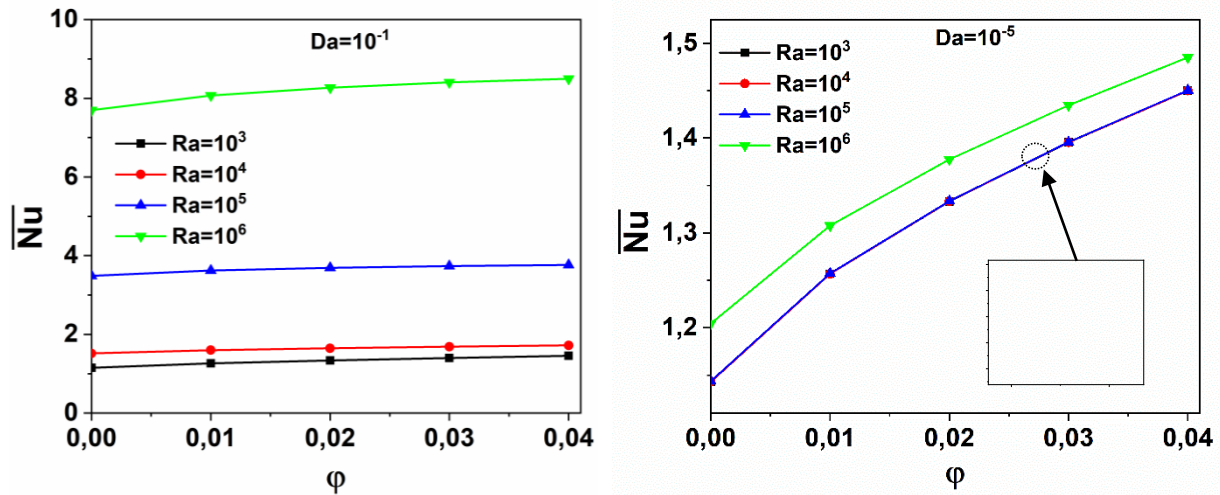


Figure (IV.6) : Variation de $\overline{Nu}$ par rapport à φ pour divers nombres de Ra à : $Da=10^{-1}$ et 10^{-5} .

Les figures (IV.7 et 8) mettent en évidence l'impact significatif des paramètres Ra , Da et Ha sur les performances thermiques de l'enceinte. Pour les valeurs élevées de Ra , nous observons une performance thermique très améliorée, attribuée à une intensification accrue de l'écoulement dans l'enceinte. Par exemple, à $Ra=10^6$, le régime convectif prédomine, tandis que pour des valeurs plus faibles comme $Ra=10^3$, la conduction domine. L'augmentation de Da augmente la perméabilité du milieu, favorisant ainsi un meilleur transfert de chaleur par convection. Par conséquent, le taux de transfert de chaleur augmente avec Da croissant. Lorsque l'intensité du champ magnétique augmente, la force de Lorentz résultante freine le mouvement du fluide, réduisant ainsi le transfert de chaleur. Cette réduction de la vitesse de l'écoulement tend à augmenter l'épaisseur de la couche limite thermique. La croissance de cette couche est responsable de l'affaiblissement des gradients de température à la surface chauffée, ce qui diminue le nombre de Nusselt en conséquence.

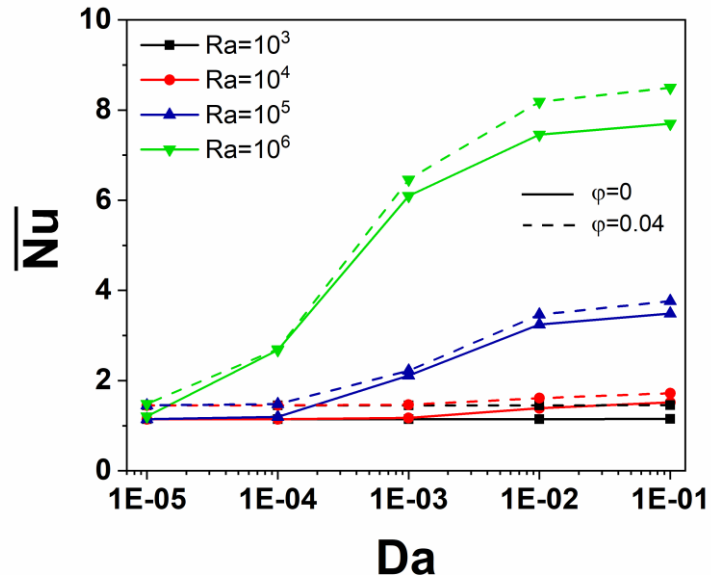
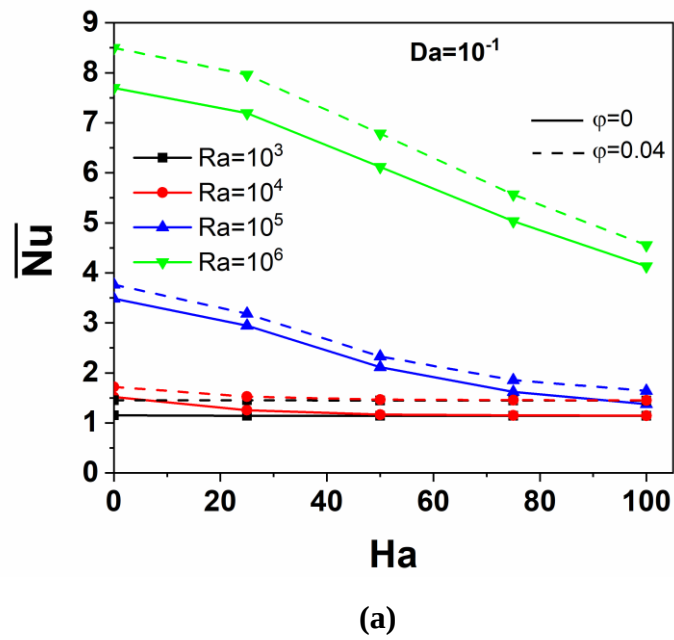


Figure (IV.7) : Variation de $\overline{Nu}$ par rapport à Da pour divers nombres de Ra pour divers nombres de Ra , pour $\phi=0$ et $\phi=0.04$.



(a)

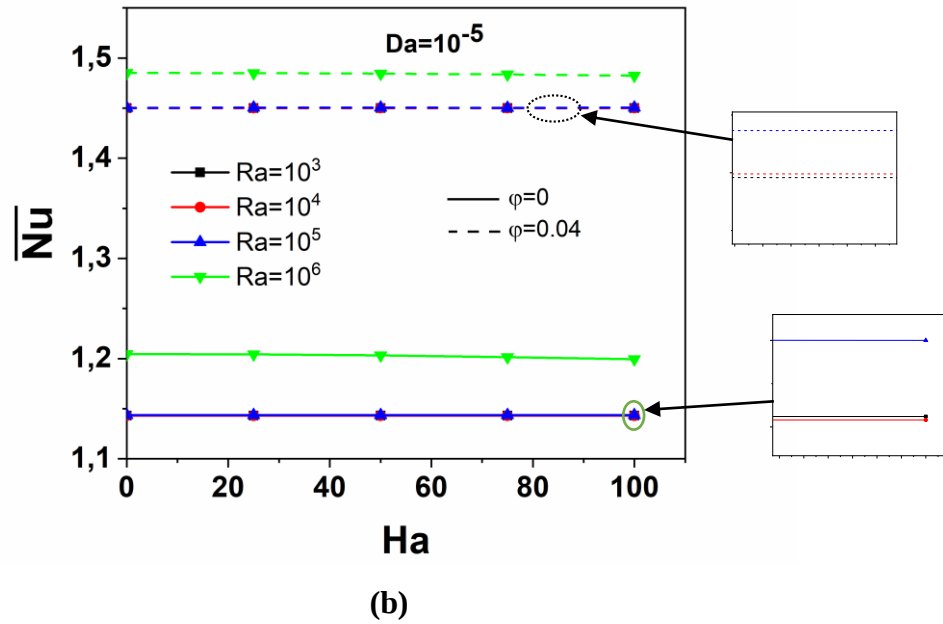


Figure (IV.8): Variation de $\overline{Nu}$ par rapport à Ha pour divers nombres de Ra , pour $\phi = 0$ et $\phi = 0.04$ à : $Da = 10^{-1}$ (a) et 10^{-5} (b).

Les figures (IV.9, 10, 11 et 12) illustrent de manière significative l'influence des paramètres Ra , ϕ , Da et Ha sur la production totale d'entropie dans l'enceinte. La génération totale d'entropie augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Cela est dû au fait qu'un Ra plus élevé intensifie la convection, augmentant ainsi les gradients de température et les vitesses d'écoulement, ce qui conduit à une plus grande production d'entropie. En conséquence, plus Ra est élevé, plus les irréversibilités associées à la convection sont importantes. L'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules entraîne également une augmentation de la génération totale d'entropie. Les nanoparticules améliorent la conductivité thermique du fluide, augmentant ainsi le transfert de chaleur. Cependant, cette amélioration vient avec une augmentation de la viscosité du fluide, ce qui accroît les irréversibilités liées à l'écoulement et, par conséquent, la production totale d'entropie. Un comportement similaire est observé avec l'augmentation du nombre de Darcy. Lorsque Da augmente, la perméabilité du milieu poreux s'accroît, facilitant le flux de fluide à travers le milieu. Cela favorise le transfert de chaleur par convection, augmentant ainsi les gradients de température et les vitesses d'écoulement, ce qui conduit à une augmentation de la génération totale d'entropie. En revanche, un comportement inverse est remarqué par rapport au nombre de Hartmann. L'augmentation de Ha , qui représente l'intensité du champ magnétique, tend à réduire la production totale d'entropie. Le champ magnétique génère une force de Lorentz qui agit comme une force de freinage sur le

mouvement du fluide, diminuant les vitesses d'écoulement et les gradients de température. Cela réduit les irréversibilités associées à la convection et, par conséquent, la production totale d'entropie.

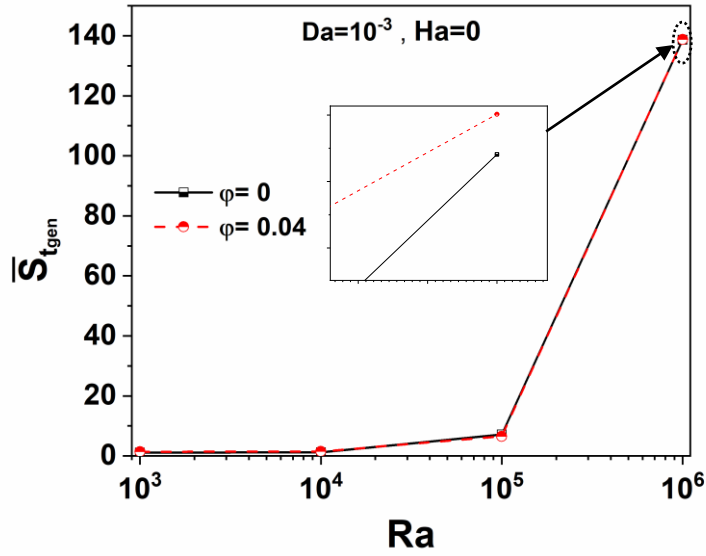


Figure (IV.9) : Variation de $\bar{S}_{t_{gen}}$ par rapport à Ra pour $Ha=0$, $Da=10^{-3}$ et pour $\phi=0$ et 0.04 .

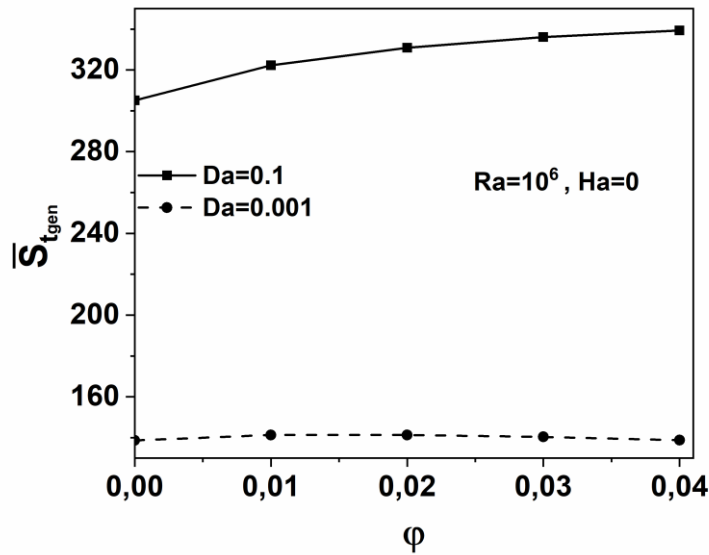


Figure (IV.10) : Variation de $\bar{S}_{t_{gen}}$ par rapport à ϕ pour $Ra=10^6$, $Ha=0$ et pour $Da=10^{-1}$ et 10^{-3} .

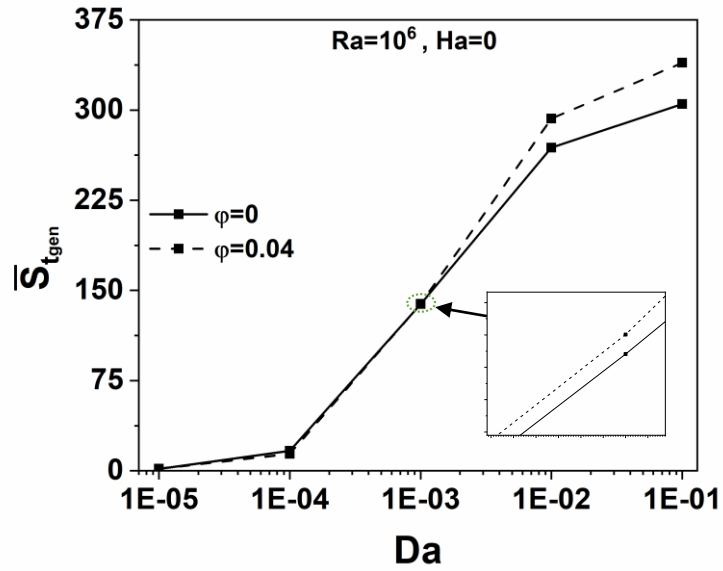


Figure (IV.11): Variation de $\bar{S}_{t_{gen}}$ par rapport à Da pour $Ra=10^6$, $Ha=0$ et pour $\phi=0$ et 0.04 .

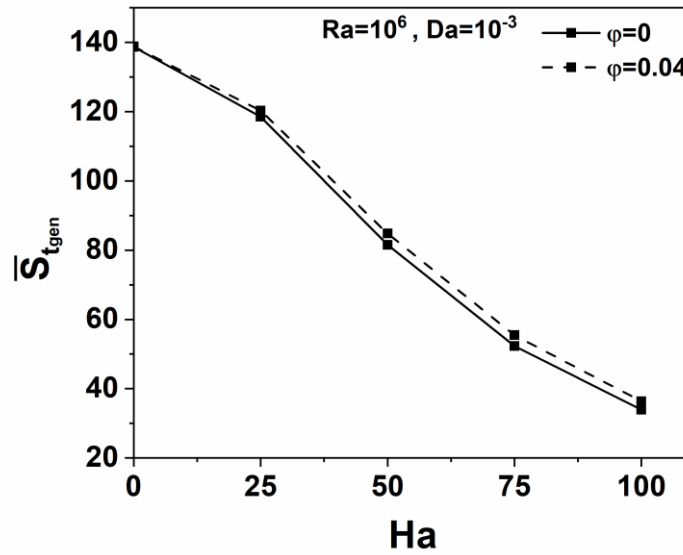


Figure (IV.12): Variation de $\bar{S}_{t_{gen}}$ par rapport à Ha pour $Ra=10^6$, $Da=10^{-3}$ et pour $\phi=0$ et 0.04 .

Conclusion générale

Cette étude présente une analyse numérique approfondie de la convection naturelle d'un nanofluide ($\text{Al}_2\text{O}_3/\text{eau}$) dans une cavité carrée poreuse avec deux blocs solides, sous l'influence d'un champ magnétique externe orienté horizontalement. Les équations gouvernantes sont modélisées à l'aide du modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer et résolues numériquement en utilisant un programme en langage Fortran basé sur la méthode des volumes finis. Le couplage entre la vitesse et la pression est assuré par l'utilisation de l'algorithme SIMPLER (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations Revised). Les effets des paramètres tels que les nombres de Rayleigh et de Darcy, la fraction volumique des nanoparticules et le champ magnétique sur l'écoulement, le transfert thermique et la production d'entropie ont été étudiés et discutés en détail. Les principaux résultats obtenus conduisent aux conclusions suivantes :

- L'intensité de l'écoulement augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, de Darcy et de la fraction volumique des nanoparticules, ce qui favorise une convection plus dynamique dans la cavité.
- L'augmentation du nombre de Rayleigh, de Darcy et de la fraction volumique améliore significativement le taux de transfert de chaleur, mettant en évidence l'efficacité des nanoparticules pour renforcer les performances thermiques.
- A l'inverse, l'augmentation du nombre de Hartmann réduit le taux de transfert de chaleur, en raison de l'effet de freinage de la force de Lorentz sur le mouvement du fluide.
- La génération totale d'entropie est amplifiée par des valeurs élevées de Ra , ϕ et Da , en raison de l'intensification des processus convectifs et des gradients thermiques, indiquant une augmentation des irréversibilités thermodynamiques dans ces conditions.
- En revanche, une augmentation de Ha tend à diminuer la production d'entropie, en réduisant les vitesses d'écoulement et les gradients de température grâce à l'effet modérateur du champ magnétique, qui stabilise l'écoulement et atténue les fluctuations thermiques.

Ces conclusions soulignent l'importance de la gestion des paramètres de contrôle pour optimiser les performances thermiques et minimiser la production d'entropie dans les systèmes utilisant des nanofluides dans des cavités poreuses.

Références

- [1] K. Ghasemi, M. Siavashi, MHD nanofluid free convection and entropy generation in porous enclosures with different conductivity ratios, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Volume 442, Pages 474-490, 2017.
<https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2017.07.028>
- [2] N. S. Gibanov, M. A. Sheremet, H. F. Oztop, K. Al-Salem, MHD natural convection and entropy generation in an open cavity having different horizontal porous blocks saturated with a ferrofluid, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Volume 452, Pages 193-204, 2018.
<https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2017.12.075>
- [3] A.M. Rashad, T. Armaghani, A.J. Chamkha, M.A. Mansour, Entropy generation and MHD natural convection of a nanofluid in an inclined square porous cavity: Effects of a heat sink and source size and location, *Chinese Journal of Physics*, Volume 56, Issue 1, Pages 193-211, 2018.
<https://doi.org/10.1016/j.cjph.2017.11.026>
- [4] Z. Abdel-Nour, A. Aissa, F. M. Oudina, A. M. Rashad, H. M. Ali, M. Sahnoun, M. El Ganaoui, Magnetohydrodynamic natural convection of hybrid nanofluid in a porous enclosure: numerical analysis of the entropy generation. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, Volume 141, Pages 1981–1992, 2020.
<https://doi.org/10.1007/s10973-020-09690-z>
- [5] K. Al-Farhany, A. Abdulkadhim, H. K. Hamzah, F. H. Ali, A. Chamkha, MHD effects on natural convection in a U-shaped enclosure filled with nanofluid-saturated porous media with two baffles, *Progress in Nuclear Energy*, Volume 145, 104136, 2022.
<https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2022.104136>
- [6] P. B. A. Reddy, T. Salah, S. Jakeer, M.A. Mansour, A.M. Rashad, Entropy generation due to magneto-natural convection in a square enclosure with heated corners saturated porous medium using Cu/water nanofluid, *Chinese Journal of Physics*, Volume 77, 2022, Pages 1863-1884.
<https://doi.org/10.1016/j.cjph.2022.01.012>.
- [7] A. Abderrahmane, , O. Younis, , A. Mourad, H. Laidoudi, M. Oreijah, K. Guedri, S. M. Tag, The baffle shape effects on natural convection flow and entropy generation in a nanofluid-filled permeable container with a magnetic field. *Scientific Reports*, Volume 14, 2550, 2024.
<https://doi.org/10.1038/s41598-024-53001-7>
- [8] F. Mebarek-Oudina, I. Chabani, H. Vaidya, A.A.I. Ismail, Hybrid-nanofluid magneto-convective flow and porous media contribution to entropy generation, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, Volume 34, Issue 2, Pages 809-836, 2024.
<https://doi.org/10.1108/HFF-06-2023-0326>

- [9] J.C. Maxwell-Garnett, Colours in metal glasses and in metallic films, *Philos. Trans. Roy. Soc. A* 203, Pages 385–420, 1904.
- [10] Y.Y. Yan, Y.Q. Zu, Numerical simulation of heat transfer and fluid flow past a rotating isothermal cylinder – a LBM approach, *Int. J. Heat Mass Transfer* 51 (2008) 2519–2536.
- [11] D.A. Nield, A. Bejan, *Convection in Porous Media*, 3rd edn. Springer, New York, 2006.
- [12] A. Yu. Gelfgat; P. Z. Bar-Yoseph, The effect of an external magnetic field on oscillatory instability of convective flows in a rectangular cavity, *Physics of Fluids*, 13, Pages 2269–2278, 2001.
<https://doi.org/10.1063/1.1383789>
- [13] G. Lauriat, V. Prasad, Non-Darcian effects on natural convection in a vertical porous enclosure, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 32, Issue 11, Pages 2135–2148, 1989.
[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(89\)90120-8](https://doi.org/10.1016/0017-9310(89)90120-8)
- [14] P. Nithiarasu, K.N. Seetharamu, T. Sundararajan, Natural convective heat transfer in a fluid saturated variable porosity medium, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 40, Issue 16, 1997, Pages 3955–3967.
[https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(97\)00008-2](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(97)00008-2)
- [15] X.B. Chen, P. Yu, S.H. Winoto, H.T. Low, Free convection in a porous wavy cavity based on the Darcy–Brinkman–Forchheimer extended model, *Numerical Heat Transfer, Part A* 52, Pages 377–397, 2007.
<https://doi.org/10.1080/10407780701301595>
- [16] M. Kumari, G. Nath, Unsteady natural convection from a horizontal annulus filled with a porous medium, *Volume 51, Issues 19–20*, Pages 5001–5007, 2008.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2008.01.030>
- [17] G.H.R. Kefayati, Heat transfer and entropy generation of natural convection on non-Newtonian nanofluids in a porous cavity, *Powder Technology*, Volume 299, Pages 127–149, 2016.
<https://doi.org/10.1016/j.powtec.2016.05.032>
- [18] J. Koo, C. Kleinstreuer, Viscous dissipation effects in micro tubes and microchannels, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 47, Issues 14–16, Pages 3159–3169, 2004.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2004.02.017>
- [19] J. Li, Computational analysis of nanofluid flow in micro channels with applications to micro-heat sinks and bio-MEMS (Ph.D. thesis), NC State University, Raleigh, NC, USA, 2008.

- [20] H.C. Brinkman, The viscosity of concentrated suspensions and solution, J. Chem. Phys. 20, Pages 571–581, 1952.
- [21] M. K. Sheikholeslami, KKL correlation for simulation of nanofluid flow and heat transfer in a permeable channel, Physics Letters A, Volume 378, Issue 45, Pages 3331-3339, 2014.
<https://doi.org/10.1016/j.physleta.2014.09.046>
- [22] A. Bejan, Second law analysis in heat transfer, Energy Int. J. 5, 721–732, 1980.
- [23] A. Bejan, Entropy Generation Through Heat and Fluid Flow, John Wiley & Sons Inc, Hoboken, 1982.
- [24] A. Bejan, Entropy Generation Minimization: The Method of Thermodynamic Optimization of Finite-Size Systems and Finite-Time Processes, CRC Press, New York, 1995.
- [25] L.C. Woods, The thermodynamics of fluid systems, Oxford , 1975.
- [26] S. V. Patankar, Numerical heat transfer and fluid flow, Hemisphere, New York, 1980.
- [27] M. T. Nguyen, A. M. Aly, S.-W. Lee, Natural convection in a non-Darcy porous cavity filled with Cu–Water nanofluid using the characteristic-based split procedure in finite-element method, Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, 67(2), Pages 224–247, 2014.
<https://doi.org/10.1080/10407782.2014.923225>.
- [28] H.C. Brinkman, The viscosity of concentrated suspensions and solutions, Journal of Chemical Physics 20 (4), Pages 571–581, 1952.
- [29] J. Maxwell, A treatise on electricity and magnetism, second ed., Oxford University Press, Cambridge, UK, 1904.
- [30] G.G. Ilis, M. Mobedi, B. Sunden, Effect of aspect ratio on entropy generation in a rectangular cavity with differentially heated vertical walls, International Communications in Heat and Mass Transfer ,Volume 35, Issue 6, Pages 696-703, 2008.
<https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.02.002>
- [31] G.H.R. Kefayati, Simulation of natural convection and entropy generation of non-Newtonian nanofluid in a porous cavity using Buongiorno’s mathematical model, International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 112, Pages 709-744, 2017.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.04.121>