الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف ميلة

معهد العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم: علوم التسيير

الميدان: العلوم الاقتصادية والتسيير والعلوم التجارية

فرع: العلوم الاقتصادية والتسيير والعلوم التجارية

التخصص: سنة أولى جذع مشترك

**مطبوعة علمية بعنوان:**

# محاضرات في الإحصاء 2

## مدعمة بأمثلة وتمارين محلولة

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى علوم اقتصادية، علوم تسيير وعلوم تجارية

إعداد الدكتور:

- **بن جدو سامي**

**السنة الجامعية: 2022- 2023**

# الفهرس

# الفهرس

## الفصل الأول: نظرية المجموعات وعلاقتها بمفهوم الاحتمالات

## الفصل الثاني: التحليل التوفيقي

## الفصل الثالث: نظرية الاحتمالات

## الفصل الرابع: المتغيرات العشوائية المتقطعة والمستمرة

## الفصل الخامس: التوزيعات الاحتمالية

# مقدمة

يعتبر الإحصاء علم من العلوم الرياضية وفرع من فروع الرياضيات التطبيقية لأنّ أسسه وقوانينه مستمدة في الأساس من القوانين الرياضية البحتة، إلاّ أنه يتميز بكونه علما تطبيقيا يتناول بالدراسة الناحية الكمية لمختلف العلوم التطبيقية مثل الطبيعة والكيمياء وتكنولوجيا المعلومات والاتصالات والطب وغيرها من العلوم.

ويعتبر الإحصاء ونظرية الاحتمالات (الإحصاء 2) على الخصوص أداة لا غنى عنها بالنسبة لطلبة جميع التخصصات وبدون استثناء، خاصة وأنّ استخدامها أصبح يتزايد في التجارب الميدانية وفي جميع البحوث العلمية وبالأخص في ميدان العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير. إنّ تطور البرامج المعلوماتية أيضا سهّل كثيرا تحليل وتفسير وفهم المواضيع المتعلقة بالاحتمالات، وأصبح المسؤولون وأصحاب القرار يستخدمون نتائجها كثيرا في اتخاذ القرارات التي يرونها مناسبة وخاصة عندما يواجهون حالات وظروف عدم التأكد.

وإيمانا مني بأهمية الإحصاء عموما ونظرية الاحتمالات خصوصا (الإحصاء 2)، ارتأيت تقديم هذه المطبوعة العلمية التي استقيتها من بعض الكتب والمطبوعات ومن تجربتي الخاصة التي اكتسبتها مع طلبة العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، وهي موجهة بالدرجة الأولى لطلبة السنة الأولى علوم اقتصادية، تجارية وعلوم التسيير، وقد راعيت فيها التبسيط في حدود الممكن واستعملت الرموز اللاتينية الأكثر تداولا في المراجع سواء باللغة العربية أو الأجنبية، بالإضافة إلى مجموعة من الأمثلة والتمارين المحلولة في كل فصل وهذا لغرض تبسيط وتسهيل فهم مادة الإحصاء 2.

إنّ الدروس الموجودة في هذه المطبوعة العلمية قد تم تبويبها وترتيبها وفق ما جاء في المقرر الوزاري وهي كالتالي:

- الفصل الأول: نظرية المجموعات وعلاقتها بمفهوم الاحتمالات.
- الفصل الثاني: التحليل التوفيقي.
- الفصل الثالث: نظرية الاحتمالات.
- الفصل الرابع: المتغيرات العشوائية المتقطعة والمستمرة.
- الفصل الخامس: التوزيعات الاحتمالات.

# الفصل الأول:

## نظرية المجموعات وعلاقتها بمفهوم الاحتمالات

## تمهيد

تعتبر المجموعة من أهم المفاهيم الأساسية في العلوم الرياضية، إذ بنيت على أساسها نظرية المجموعات (Set Theory) وأسس لها ولأول مرة في الرياضيات العالم الألماني George Cantor عام 1845، وواصل بعده كثير من العلماء الرياضيين، وتناول هذا الموضوع في فروع مختلفة من الرياضيات ومنها الجبر والمنطق الرياضي والتبولوجي... ومن ثم في نظرية الاحتمالات.

وترتبط نظرية المجموعات ارتباطا وثيقا بنظرية الاحتمالات، فالعلاقة بين الحوادث والمجموعات بالإضافة إلى بعض القوانين الخاصة بالمجموعات تستخدم بشكل واسع في حساب الاحتمالات. لذلك، من الضروري التطرق إلى المفاهيم المتعلقة بالجبر على المجموعات، مدعمين هذه المفاهيم في كل مرة بأمثلة وتمارين محلولة.

## أولا: مفهوم المجموعة، التجربة العشوائية والحادث

### 1- 1- تعريف المجموعة

عبارة عن قائمة من الأشياء تشترك في خاصية أو عدة خصائص محددة وهي بذلك معرّفة تماما، كعدد شهور السنة، مجموعة من الطلبة، مجموعة من المصابيح الكهربائية...، وكل عنصر ينتمي إلى المجموعة يسمى عنصر ونرمز له بالرمز a أو b أو c...

### 1- 2- التجربة العشوائية:

المقصود بها في نظرية الاحتمالات، كل عملية تعطينا مجموعة من النتائج المعروفة مسبقا، وإن كنا لا نستطيع أن نحدّد أي هذه النتائج سيتحقق في محاولة معينة، وهي تخضع لعامل المصادفة فقط.

**مثال (1- 1):**

- ✓ إلقاء قطعة نقود في الهواء وملاحظة أي نتيجة سوف تظهر، ومن الواضح أننا نعلم مسبقا جميع النتائج الممكنة وهي: صورة **(F)** وكتابة **(P)**.
- ✓ إلقاء زهرة نرد مرة واحدة في الهواء، وملاحظة العدد على الوجه الذي يظهر، وإن كنا نعلم مسبقا جميع النتائج الممكنة وهي 1 و2 و3 و4 و5 و6 ولكن لا يمكن تحديد أي هذه الأرقام سيظهر بالفعل من خلال رمية واحدة، وبالتالي فهي تجربة عشوائية.
- ✓ فصيلة الدم عند شخص ما، نحن نعلم مسبقا جميع النتائج الممكنة وهي $O^+$ ، $O^-$ ، $B^+$ ، $B^-$ ، $AB^+$ ، $A^+$ ، $A^-$ ، $AB^-$ ولكن لا يمكن تحديد أي فصيلة يمتلكها هذا الشخص قبل إجراء عملية تحليل الدم.

### 1- 3- فضاء العينة:

يعرّف فضاء العينة المرتبط بالتجربة العشوائية بأنه مجموعة جميع النتائج الممكنة لهذه التجربة، ويرمز لها غالبا بالرمز **Ω** أو ***S*** أو ℧.

**ملاحظة:***

إنّ عدد عناصر فضاء العينة **Ω** أو الحادث **A** أو **B** أو أي حادث آخر أو مجموعة يدعى بـ "**أصلي المجموعة**"، ويرمز له بالرمز "**Card** ".

**مثال (1- 2):**

**أ**- التجربة العشوائية "رمي قطعة نقود في الهواء"

- ✓ فضاء العينة: $\Omega = (P, F)$
- ✓ عدد عناصر فضاء العينة: $Card(\Omega) = 2$

**ب**- التجربة العشوائية " رمي قعة نقود مرتين في الهواء"

- ✓ فضاء العينة: $\Omega = (PP, PF, FP, FF)$
- ✓ عدد عناصر فضاء العينة: $Card(\Omega) = 4$

**ت**- التجربة العشوائية " رمي قطعة نقود وزهرة نرد معا"

- ✓ فضاء العينة: $\Omega = (P\,1, P\,2, P\,3, P\,4, P\,5, P\,6, F\,1, F\,2, F\,3, F\,4, F\,5, F\,6)$
- ✓ عدد عناصر فضاء العينة: $Card(\Omega) =12$

**ث**- التجربة العشوائية " مراقبة جنس المولود"

- ✓ فضاء العينة: (ذكر، أنثى) = Ω
- ✓ عدد عناصر فضاء العينة: $Card(\Omega) = 2$

**مثال (1- 3):**

أوجد فضاء العينة وعدد عناصره للتجارب التالية:

1. تجربة رمي قطعة النقود مرة واحدة وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي.
2. تجربة قذف قطعتي نقود معا وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي لكل قطعة.

**الحل:**

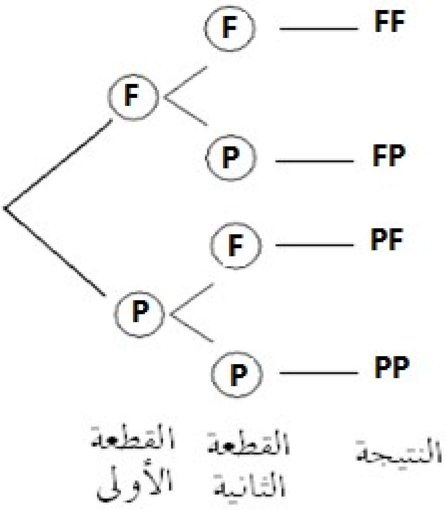
1- تجربة قذف قطعة النقود مرة واحدة:

لنرمز للصورة بالرمز $F$ وللكتابة بالرمز $P$:

إن النتائج الممكنة هي $F$ أو $P$ ولذلك فإن فضاء العينة هو : $\Omega = \{F , P\}$ وعدد عناصره يساوي: $Card(\Omega) = 2$.

2- تجربة قذف قطعتي النقود معا:

*الشكل التالي (1-1) والذي يسمى بمخطط الشجرة، يوضح النتائج الممكنة للتجربة.



إن النتائج الممكنة هي:

$$(F,F), (F,P), (P,F), (P,P)$$

ولذلك فإن فضاء العينة هو:

$$\Omega = \{(F,F), (F,P), (P,F), (P,P)\}$$

وعدد عناصره يساوي: $Card(\Omega) = 4$

* توجد طريقة أخرى لإيجاد النتائج الممكنة لعناصر التجربة العشوائية، تعتمد على الجدول وتسمى أيضا بالشبكة، النتائج الممكنة في الرمية الأولى تكون في السطر الأفقي والنتائج الممكنة في الرمية الثانية تكون في السطر العمودي، والتقاطع بين السطرين يعطينا عناصر النتائج الممكنة للتجربة ككل، كما يلي:

| | | **نتائج الرمية الأولى** | |
|---|---|---|---|
| | | **P** | **F** |
| **نتائج الرمية الثانية** | **F** | PF | FF |
| | **P** | PP | FP |

إن النتائج الممكنة هي:

$$(F,F), (F,P), (P,F), (P,P)$$

ولذلك فإن فضاء العينة هو:

$$\Omega = \{(F,F), (F,P), (P,F), (P,P)\}$$

وعدد عناصره يساوي: $Card(\Omega) = 4$

* توجد طريقة أخرى وهي طريقة الجداء (الضرب الديكارتي)، تشبه إلى حد كبير طريقة الجدول، وتقوم هذه الطريقة على ضرب نتائج الرمية الأولى في نتائج الرمية الثانية:

$$\Omega = \{F,P\} \times \{F,P\} = \{(F,F), (F,P), (P,F), (P,P)\}$$

وعدد عناصر فضاء العينة يساوي: $Card(\Omega) = 4$

**مثال (1-4):**

أوجد فضاء العينة وعدد عناصره للتجارب العشوائية التالية:

1- تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر.

2- تجربة رمي حجر النرد مرتين متتاليتين وتسجيل الرقم الظاهر.

**الحل:**

**1- تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة:**

إن النتائج الممكنة هي: 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6

ولذلك فإن فضاء العينة هو:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

وعدد عناصره يساوي: $Card(\Omega) = 6$.

**2- تجربة رمي حجر النرد مرتين:**

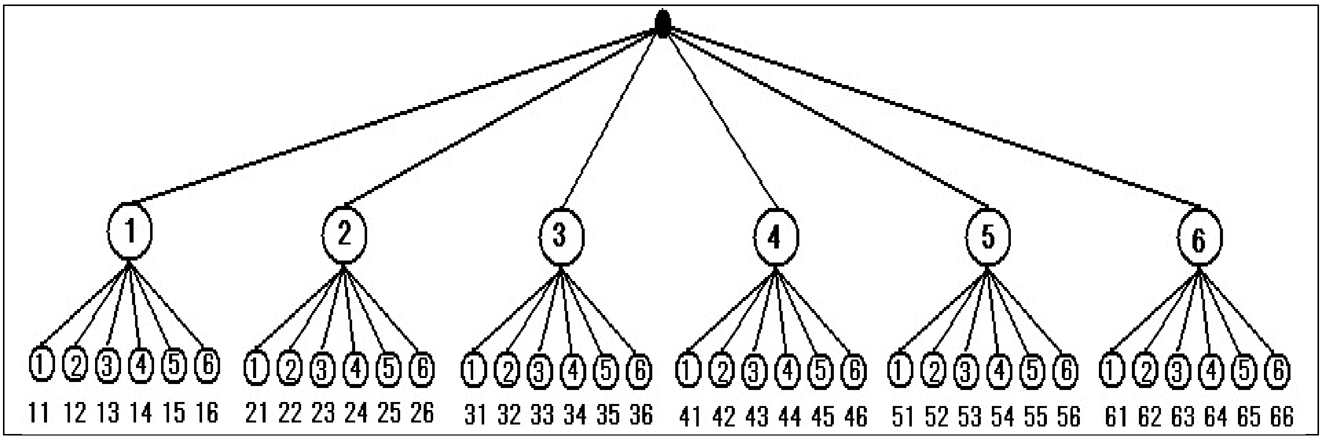
يمكن إيجاد فضاء العينة لتجربة رمي حجر النرد مرتين بعدة طرق. نذكر من هذه الطرق: (1) طريقة حاصل الضرب الديكارتي و(2) طريقة الشجرة و(3) طريقة الشبكة (أو الجدول):

**أولا:** إيجاد فضاء العينة باستخدام حاصل الضرب الديكارتي:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}\\ &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &\quad (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),\\ &\quad (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &\quad (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),\\ &\quad (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &\quad (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}\end{aligned}$$

وعدد عناصر فضاء العينة (باستخدام قاعدة الضرب) يساوي: $Card(\Omega) = 6\times6 = 36$

**ثانيا:** إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة الشجرة:



**ثالثا:** إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة الشبكة (أو الجدول):

**نتيجة الرمية الثانية**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **6** | (1,6) | (2,6) | (3,6) | (4,6) | (5,6) | (6,6) |
| **5** | (1,5) | (2,5) | (3,5) | (4,5) | (5,5) | (6,5) |
| **4** | (1,4) | (2,4) | (3,4) | (4,4) | (5,4) | (6,4) |
| **3** | (1,3) | (2,3) | (3,3) | (4,3) | (5,3) | (6,3) |
| **2** | (1,2) | (2,2) | (3,2) | (4,2) | (5,2) | (6,2) |
| **1** | (1,1) | (2,1) | (3,1) | (4,1) | (5,1) | (6,1) |
| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |

**نتيجة الرمية الأولى**

### 1- 4- الحادث (Event):

الحادث عبارة عن مجموعة جزئية من فضاء العينة Ω. ويرمز عادة للحوادث بالأحرف اللاتينية الكبيرة A، B، C، D...

**مثال (1- 5):**

أ- إذا كان الحادث A هو الحصول على رقم فردي عند رمي قطعة نرد فإن:

$$A = \{1 , 3 , 5\}$$

ب- إذا كان الحادث B هو الحصول على صورة ورقم زوجي عند رمي قطعة نقود وزهرة نرد معا:

$$B = \{F\ 2, F\ 4, F\ 6\}$$

### ثانيا- أنواع الحوادث (المجموعات):

من الضروري الإشارة إلى أن الحوادث تنقسم إلى الأنواع التالية:

- **الحادث البسيط:** وهو الحادث الذي يحتوي على عنصر واحد من عناصر فضاء العينة Ω.

- **الحادث المركب:** وهو الحادث الذي يحتوي على عنصرين أو أكثر من عناصر فضاء العينة Ω.
- **الحادث الأكيد:** وهو الحادث الذي يظهر دائما عند إجراء التجربة.
- **الحادث المستحيل:** وهو الحادث الذي لا يمكن أن يظهر أبدا، ويرمز له بالرمز $\emptyset$ (مجموعة خالية).
- **الحادث العشوائي:** وهو الحادث الذي لا نستطيع أن نؤكد حدوثه أو نفيه.
- **الحادثة الجزئية:** وهي الحادثة التي تكون جميع عناصرها محتواة في عناصر حادثة أخرى. ونعبّر عن الحادث A أنه يحتوي في الحادث B بالشكل $A \subset B$.

**مثال (1-6):**

نقوم برمي زهرة نرد في الهواء، فتكون النتائج الممكنة هي: **Ω = (1, 2, 3, 4, 5, 6)**

$\boldsymbol{A = \{2\}}$ حادث بسيط (عنصر واحد فقط)

$\boldsymbol{A = \{1, 2, 3..\}}$ حادث مركب (عنصرين فأكثر)

$\boldsymbol{A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$ حادثة ظهور رقم أقل من (7) عند رمي حجر النرد هي حادثة أكيدة

$\boldsymbol{A = \emptyset}$ حادثة الحصول على الرقم 7 عند رمي زهرة النرد

$\boldsymbol{A = \{1 , 3\} , B = \{1 , 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow A \subset B}$ (الحادثة $A$ حادثة جزئية)

## ثالثا– العمليات على المجموعات:

### 3-1- تساوي مجموعتين (التكافؤ):

نقول عن مجموعتين أنهما متساويتان، إذا تحققت العلاقة التالية:

$$A = B$$

بمعنى $B \subset A$ و $A \subset B$

### 3-2- تقاطع مجموعتين:

نقول عن المجموعتين A وB أنهما متقاطعتان، إذا كان هناك عناصر مشتركة بين المجموعتين:

$$A \cap B = \{x/x \in A \ \wedge x \in B\}$$

وتقرأ بالشكل التالي:

المجموعة A تقاطع المجموعة B تساوي العناصر المشتركة x حيث هذه العناصر المشتركة تنتمي إلى المجموعة A وتنتمي إلى المجموعة B.

**مثال (1-7):**

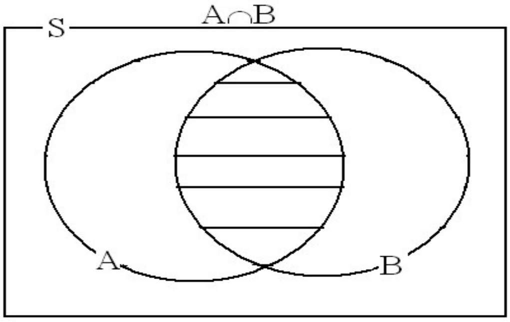
قمنا بتجربة اختيار طالب من طلبة إحدى الجامعات الجزائرية، وعرّفنا الحوادث التالية:

**A:** أن يكون الطالب من قسم المالية والمحاسبة.

**B:** أن يكون الطالب من طلبة السنة الثانية.

وبالتالي الحادث $(A \cap B)$ سوف يحدث إذا كان الطالب الذي تم اختياره من طلبة قسم المالية والمحاسبة ويدرس بالسنة الثانية.

ويوضح الشكل (1- 2) من أشكال فن (Venn) منطقة التقاطع بين الحادثين A و B (المنطقة المضللة).



### 3- 3- إتحاد حادثين (Union):

يرمز لاجتماع حادثين A و B أو إتحادهما بالرمز $(A \cup B)$ وهو الحادث الذي يتحقق إذا تحقق الحادث A أو B أو كلاهما معا.

**مثال (1- 8):**

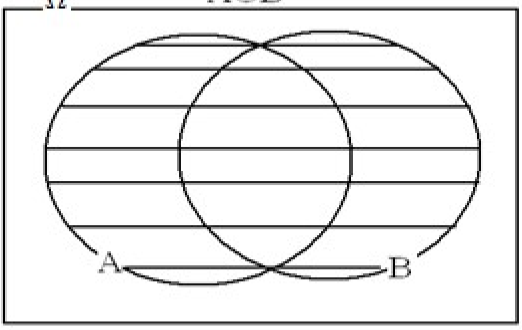
تم اختيار طالب من معهد العلوم الاقتصادية، نعرّف الحوادث الآتية:

A: أن يكون الطالب الذي تم اختياره من طلبة العلوم المالية والمحاسبة

B: أن يكون الطالب الذي تم اختياره من طلبة السنة الثانية.

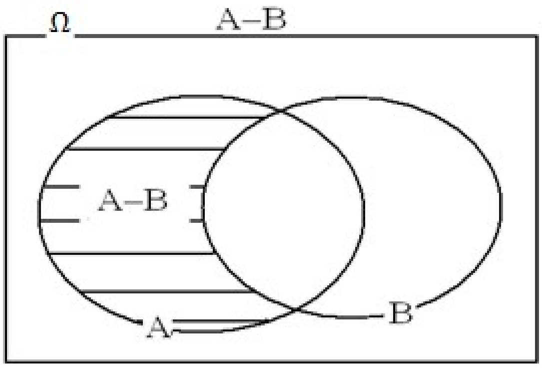
إذن الحادث $(A \cup B)$ يقع إذا كان الطالب الذي تم اختياره من طلبة العلوم المالية والمحاسبة أو من طلبة السنة الثانية، أو من طلبة العلوم المالية والمحاسبة ويدرس في السنة الثانية.

ويوضح الشكل (1- 3) منطقة الاتحاد بين الحادثين: (المنطقة المضللة).



### 3- 4- الفرق بين حادثين:

يرمز للفرق بين حادثين A وB بالرمز (A - B) أو (A / B) وهو الحادث الذي يتحقق إذا تحقق A ولم يتحقق B كما هو مبيّن في مخطط فن (الشكل (1- 4)) التالي:



حيث:

$$A/B = A - (A \cap B) = A \cap \bar{B}$$
$$B/A = B - (B \cap A) = B \cap \bar{A}$$

**➪ مثال (1- 9):**

إذا عرّفنا الحوادث التالية:

$$B = \{5\,,6\,,2\}$$

فإن الحادث $A/B$ :

$$A/B = A - (A \cap B) = A \cap \bar{B} = \{1\,,3\,,9\}$$

والحادث $B/A$:

$$B/A = B - (B \cap A) = B \cap \bar{A} = \{6\,,2\}$$

**➪ مثال (1- 10):**

إذا عرفنا الحوادث التالية عند اختيارنا لطالب من طلبة الجامعة:

$$A = \{\text{الطالب الذي تم اختياره من قسم المالية والمحاسبة}\}$$
$$B = \{\text{أن يكون الطالب الذي تم اختياره ذكرا}\}$$

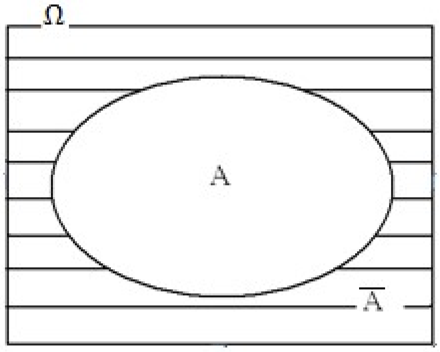
فإن الحادث $A/B$ يتحقق إذا كان الطالب الذي تم اختياره من قسم المالية والمحاسبة وأنثى.

### 3- 5- الحادث المتمم أو المكمل:

الحادث المتمم أو المكمل للحادث A هو الحادث الذي يتكون من عناصر المجموعة الكلية (Ω) والتي لا تنتمي إلى A، ونرمز لها بالرمز $\bar{A}$ أو $A^c$ أو À. بعبارة أخرى هو حادث عدم وقوع A المعرّفة على المجموعة الكلية (Ω):

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$
$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

ويمكن توضيح متممة الحادث A في مخطط فن (venn) كما في الشكل (1- 5) التالي:



**مثال (1- 11):**

في تجربة رمي زهرة النرد إذا كان الحادث A هو العناصر التي تفوق أو تساوي 3 فإن $\bar{A}$ هي العناصر التي تقل عن 3. بعبارة أخرى:

$$\boldsymbol{A} = \{X : X \geq 3\} = \{3, 4, 5, 6\}$$
$$\bar{\boldsymbol{A}} = \{X : X < 3\} = \{1 , 2\}$$

### 3- 6- الأحداث المتنافية:

نقول عن الحادثين A و B أنهما متنافيان، إذا كان احتمال وقوع أحدهما يؤدي إلى استحالة وقوع الآخر (لا يقعان معا):

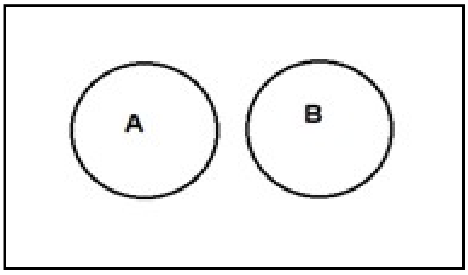
$$A \cap B = \emptyset$$

**مثال (1- 12):**

في تجربة رمي قطعة نقود في الهواء لمرة واحدة، فإذا كان الحادث A هو الحصول على الصورة والحادث B الحصول على الكتابة فإن ظهور الصورة يؤدي إلى استحالة ظهور الكتابة في رمية واحدة:

$$A \cap B = \emptyset$$

ويمكن توضيح تنافي الحادثين A و B في مخطط فن (venn) كما في الشكل (1- 6) التالي:



### 3- 7- الأحداث الشاملة:

نقول عن الأحداث A، B و C أنها أحداث شاملة إذا كان لابد من وقوع إحداها (واحده منها) على الأقل عند إجراء التجربة.

**مثال (1- 13):**

في تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة فإن:

1. الحادثتان $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{1, 3, 5\}$ حادثتان:
   - أ- متنافيتان لأن: $A \cap B = \phi$.
   - ب- شاملتان لأن: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.
2. الحوادث $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{2,3,4\}$ و $C = \{3,4,5,6\}$ أحداث شاملة ولكنها غير متنافية، لأنّ إتحادها يشكّل المجموعة الكلية $\Omega$.

### 3- 8- الحالات المتساوية بين الأحداث (أو متكافئة) الفرص:

إذا كانت فرصة ظهور أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية مساوية لفرصة ظهور أي نتيجة أخرى فإننا نقول بأن نتائج هذه التجربة متساوية (أو متكافئة) الفرصة.

**مثال (1- 14):**

- عند رمي قطعة نقود مرة واحدة فإن فرصة ظهور الصورة تكون مساوية لفرصة ظهور الكتابة.
- عند رمي زهرة النرد مرة واحدة فإن فرصة ظهور الرقم 1 مساوية لفرصة ظهور الرقم 2 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 3 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 4 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 5 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 6. وعليه فإن كلا التجربتين المذكرتين متساوية الفرص.

### 3- 9- الحالات المواتية للأحداث:

الحالات المواتية لحادثة معينة هي الحالات التي تؤدي إلى تحقق (أو وقوع) هذه الحادثة وبالتالي فإن الحالات المواتية لحادثة معينة هي نتائج التجربة الممكنة التي تؤدي إلى وقوع هذه الحادثة.

**رابعا– قوانين وخواص:**

إذا كانت **A** و**B** و**C** ثلاث مجموعات، والمجموعة **S** هي المجموعة الشاملة فإن:

- قانون الجمود أو تساوي القوى (**Idempotent law**):

- $\mathbf{A \cup A = A}$
- $\mathbf{A \cap A = A}$

- قانون التجميع (**Associative law**):

- $(\mathbf{A \cup B}) \cup \mathbf{C} = \mathbf{A} \cup (\mathbf{B \cup C})$
- $(\mathbf{A \cap B}) \cap \mathbf{C} = \mathbf{A} \cap (\mathbf{B \cap C})$

- قانون التبديل (**Commutative law**):

- $\mathbf{A \cup B = B \cup A}$
- $\mathbf{A \cap B = B \cap A}$

- قانون التوزيع (**Distributive Law**):

- $\mathbf{A} \cup (\mathbf{B \cap C}) = (\mathbf{A \cup B}) \cap (\mathbf{A \cup C})$
- $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B \cup C}) = (\mathbf{A \cap B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \mathbf{C})$

- قانون التطابق– المحايد والماص– (**Identity Law**):

- $\mathbf{A} \cap \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \cup \boldsymbol{\phi} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \cup \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}$
- $\mathbf{A} \cap \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}$

- قانون المكمل (**Complement Law**):

- $\mathbf{A} \cup \bar{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Omega}$
- $\mathbf{A} \cup \bar{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\phi}$
- $\bar{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\phi}$
- $\bar{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\Omega}$

- قانون الارتداد (**Involution Law**):

- $\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$

- قانون دومورغان (**De Morgan's Laws**):

    - $\overline{(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})} = \bar{\mathbf{A}} \cap \bar{\mathbf{B}}$
    - $\overline{(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})} = \bar{\mathbf{A}} \cup \bar{\mathbf{B}}$
    - $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathbf{A}_i}$
    - $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathbf{A}_i}$

- إذا كانت نتيجة اتحاد المجموعتين **A** و B هو المجموعة **A** وتقاطع المجموعتين **A** مع **B** هو المجموعة A فهذا يعني بأن المجموعة **A** هي مجموعة جزئية مساوية للمجموعة **B**.

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{A} \quad , \qquad \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$$

**جدول الرموز ومعانيها**

| **معنى الرمز** | ***Symbol*** | ***Symbol Name*** |
|---|---|---|
| مجموعة | **{….. }** | *set* |
| A اتحاد B | $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ | *A union B* |
| A تقاطع B | $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ | *A intersection B* |
| A هي مجموعة جزئية من B | $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ | *A is subset of B* |
| A هي ليست مجموعة جزئية من B | $\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}$ | *A is not subset B* |
| A هي مجموعة محتواة تماما في B | $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ | *proper subset / strict subset* |
| B مجموعة تحتوي (تشمل) تماما A | $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ | *proper superset / strict superset* |
| B مجموعة تحتوي (تشمل) A | $\mathbf{A} \supseteq \mathbf{B}$ | *superset* |
| B مجموعة لا تحتوي (لا تشمل) A | $\mathbf{A} \not\supset \mathbf{B}$ | *not superset* |
| مجموعة خالية | **Ø** | *empty set* |
| مجموعة متساوية | $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ | *Equal set* |
| مكمل A | $\bar{\mathbf{A}}, \mathbf{A}^c$ | *Complement of A* |
| *a* عنصر من *B* | $\mathbf{a} \in \mathbf{B}$ | *a element of B* |
| x ليس عنصرًا من A | $\mathbf{x} \notin \mathbf{A}$ | *x not element of A* |

## تمارين محلولة

**التمرين 1:**

في تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة، عبّر عن الأحداث التالية مع تحديد عدد عناصرها:

- A: ظهور عدد زوجي
- B: ظهور عدد فردي
- C: ظهور عدد أقل من 6.
- D: ظهور العدد 6.
- ∅: ظهور عدد سالب.
- S: ظهور عدد موجب.

**الحل:**

يمكن التعبير عن الأحداث وعدد عناصرها في الجدول التالي:

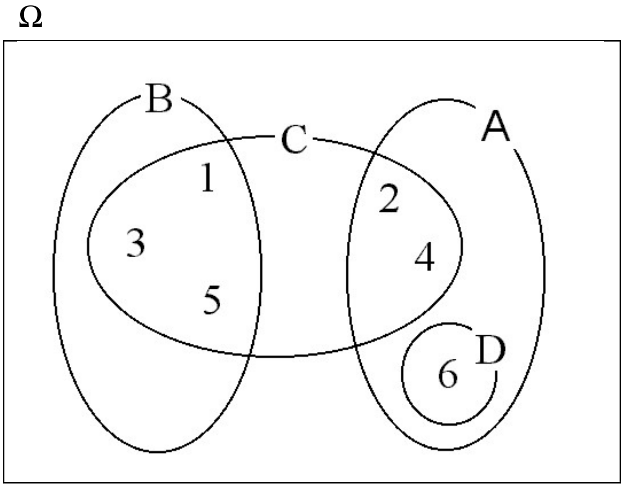
| عدد العناصر | الرمز | الحادث |
|---|---|---|
| $Card(A) = 3$ | $A \subseteq S$ | $A$ : {ظهور عدد زوجي} $= \{2,4,6\}$ |
| $Card(B) = 3$ | $B \subseteq S$ | $B$ : {ظهور عدد فردي} $= \{1,3,5\}$ |
| $Card(C) = 5$ | $C \subseteq S$ | $C$ : {ظهور عدد أقل من 6} $= \{1,2,3,4,5\}$ |
| $Card(D) = 1$ | $D \subseteq S$ | $D$ : {ظهور العدد 6} $= \{6\}$ |
| $Card(\emptyset) = 0$ | $\phi \subseteq S$ | $\emptyset$ : {ظهور عدد سالب} $= \{\ \}$ |
| $Card(S) = 6$ | $S \subseteq S$ | $S$ : {ظهور عدد موجب} $= \{1,2,3,4,5,6\}$ |

**التمرين 2:**

بأخذ معطيات التمرين **1**، مثّل الأحداث **A**، **B**، **C** و**D** على مخطط فن (**venn**).

**الحل:**

في هذا التمرين يمكن أن نمثل الحوادث بأشكال فن (venn). فالشكل التالي يمثل الحوادث ***A*** و ***B*** و ***C*** و ***D***:



نقول بأن حادثة ظهور العدد الزوجي $A = \{2,4,6\}$ وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد الأعداد الزوجية 2 أو 4 أو 6. ونقول بأن الحادثة $D = \{6\}$ وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي العدد 6، وهكذا.

**التمرين 3:**

في تجربة رمي قطعة نقود مرتين متتاليتين:

- أوجد الحوادث التالية مع تحديد عدد عناصرها.

**$A =$ { الحصول على صورة في الرمية الأولى }**

**$B =$ { الحصول على كتابة في الرمية الأولى }**

**$C =$ { الحصول على صورة واحدة على الأقل }**

- مثّل هذه الحوادث على مخطط فن.

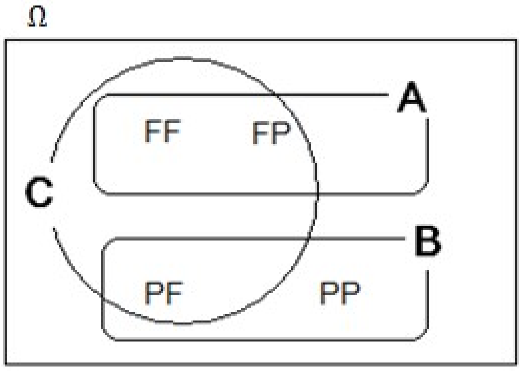
**الحل:**

فضاء العينة والحوادث والعدد العناصر:

نرمز لظهور الصورة بـ F وللكتابة بـ P.

$$\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\} \Rightarrow Card(\Omega) = 4$$
$$A = \{(F,P),(F,F)\} \Rightarrow Card(A) = 2$$
$$B = \{(P,P),(P,F)\} \Rightarrow Card(B) = 2$$
$$C = \{(P,F),(F,P),(F,F)\} \Rightarrow Card(C) = 3$$

وأما مخطط فن الذي يمثل هذه الحوادث فهو:



**التمرين 4:**

نقوم برمي زهرة نرد مرتين في الهواء، وليكن **x** نتيجة الرمية الأولى و**y** نتيجة الرمية الثانية. أوجد الحوادث التالية:

$$A = \{(x, y): x + y \ < 4\}$$
$$B = \{(x, y): x = y\}$$
$$C = \{(x, y): x = 5\}$$
$$D = \{(x, y): x + y = 1\}$$

**الحل:**

- يمكن تحديد فضاء العينة باستخدام طريقة الشبكة (أو الجدول)، كما يمكن تحديدها بالجداء الديكارتي، وأيضا يمكن تحديدها بطريقة الشجرة.
- فضاء العينة والحوادث تم تمثيلها بالشكل التالي (طريقة الجدول):

**نتيجة الرمية الثانية(y)**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (6,6) | **(5,6)** | (4,6) | (3,6) | (2,6) | (1,6) |
| (6,5) | **(5,5)** | (4,5) | (3,5) | (2,5) | (1,5) |
| (6,4) | **(5,4)** | (4,4) | (3,4) | (2,4) | (1,4) |
| (6,3) | **(5,3)** | (4,3) | (3,3) | (2,3) | (1,3) |
| (6,2) | **(5,2)** | (4,2) | (3,2) | (2,2) | **(1,2)** |
| (6,1) | **(5,1)** | (4,1) | (3,1) | **(2,1)** | **(1,1)** |
| | ⇑<br>**C** | | | | ⇑<br>**A** |

**نتيجة الرمية الأولى (x)**

ومن خلال هذا الجدول نوجد الحوادث وعدد عناصرها كمايلي:

$\boldsymbol{A} = \{(x, y): x + y \ < 4\} \ = \{(\mathbf{1.1}), (\mathbf{1.2}), (\mathbf{2.1})\} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{Card}(\boldsymbol{A}) = \ \mathbf{3}$

$\boldsymbol{B} = \{(x, y): x = y\} = \{(\mathbf{1.1}), (\mathbf{2.2}), (\mathbf{3.3}), (\mathbf{4.4}), (\mathbf{5.5}), (\mathbf{6.6})\} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{Card}(\boldsymbol{B}) = \ \mathbf{6}$

$\boldsymbol{C} = \{(x, y): x = 5\} = \ \{(\mathbf{5.1}), (\mathbf{5.2}), (\mathbf{5.3}), (\mathbf{5.4}), (\mathbf{5.5}), (\mathbf{5.6})\} \ \Longrightarrow \boldsymbol{Card}(\boldsymbol{C}) = \ \mathbf{6}$

$\boldsymbol{D} = \{(x, y): x + y = 1\} = \{\ \} \ = \ \Phi \ \Rightarrow \boldsymbol{Card}(\boldsymbol{D}) = \ \mathbf{0}$

# الفصل الثاني:

## التحليل التوفيقي

**تمهيد:**

إن إيجاد عدد عناصر فضاء العينة قد يكون سهلا في بعض الأحيان، وقد يصبح غير ذلك في أحيان أخرى. إذ أنّ فضاء العينة قد يحوي عددا كبيرا من العناصر. لذا سنستعرض في هذا الفصل بعض القواعد الرياضية المساعدة والمفيدة في حساب عدد عناصر فضاء العينة، وبالتالي في حساب احتمال حادث ما.

## أولا- المبدأ الأساسي للعد (Fundamental principle of counting):

### 1-1- قاعدة الـ $(m\ x\ n)$:

إذا كان لدينا عمل يحتاج إلى مرحلتين، المرحلة الأولى تتم بـ **m** طريقة والثانية تتم بـ **n** طريقة، فيكون عدد الطرق لإتمام هذا العمل هو **m x n**.

**مثال (2- 1):**

**1-** مدخل المركز الجامعي لميلة به **أربعة** أبواب. بكم طريقة مختلفة يمكن الدخول للمركز والخروج منه دون أن نستخدم نفس الباب؟

**2-** شخص يعمل في بلد معين، يمكن أن يصل إلى بلده الأصلي برا أو جوا أو بحرا، ومن بعد ذلك يمكن أن يكمل سفره لأهله برا أو جوا. بكم طريقة مختلفة يمكن أن يصل إلى أهله؟

**الحل:**

1- عدد الطرق المختلفة هو: الدخول بـ 4 طرق والخروج عندئذ يكون بـ 3 طرق:

**m x n** = 4 x 3 = **12 طريقة**

2- عدد الطرق المختلفة لهذا الشخص لكي يصل إلى أهله هو:

**m x n** = 3 x 2 = **06 طرق**

### 1- 2- تعميم قاعدة الـ $(m\ x\ n)$:

وإذا كان لدينا عمل يحتاج إلى $k$ مرحلة وكل مرحلة تحتاج إلى $n_i$ طريقة بحيث $1 \leq i \leq k$ فيكون عدد الطرق المختلفة لإتمام هذا العمل هو $n_1 \text{ x } n_2 \text{ x } n_3 \dots\dots\dots \text{x } n_k$.

**مثال (2- 2):**

كم عددا مكونا من ثلاثة أرقام يمكن تشكيلها من الأرقام $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ على ألا يتكرر الرقم في أي عدد أكثر من مرة؟

**الحل:**

رقم الآحاد يتم بـ **5** طرق، رقم العشرات يتم بـ **4** طرق ورقم المئات يتم بـ **3** طرق. فيكون عدد الطرق الكلية لاختيار عدد مكون من ثلاثة أرقام هو:

$$\boldsymbol{n_1} \text{ x } \boldsymbol{n_2} \text{ x } \boldsymbol{n_3} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{x } \boldsymbol{n_k} = 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 = 60$$

**مثال (2- 3):**

بكم طريقة يمكن تصنيف مجموعة من الأشخاص وذلك حسب حالتهم العائلية وعددهم (4) وحسب وظيفتهم وعددهم (10) وحسب مؤهلهم العلمي وعددهم (5) وحسب الجنس وعددهم (2).

**الحل:**

إنّ عدد الطرق المختلفة لتصنيف مجموعة هذه الأشخاص هو:

$$\boldsymbol{n_1} \text{ x } \boldsymbol{n_2} \text{ x } \boldsymbol{n_3} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{x } \boldsymbol{n_k} = 4 \text{ x } 10 \text{ x } 5\text{x } 2 = 400$$

*** حالة خاصة:**

إذا كان لدينا تجربة، مجموعة نتائجها Ω وعدد عناصر N، وكررنا هذه التجربة n مرة وبشكل مستقل في كل عن المرات الأخرى. عندئذ يكون:

$$\mathbf{m \text{ x } n} = |\Omega|^n = N^n$$

**مثال (2– 4):**

في تجربة لدراسة توزع الذكور لدى أسرة تملك ثلاثة أطفال.

لدينا هنا: $\mathbf{m \text{ x } n} = |\Omega|^n = N^n = 2^3 = 8$، ويكون فضاء العينة هو:

$$\Omega = \{BBB, BBG, BGB, GBB, GGB, GBG, BGG, GGG\}$$

**** ملاحظة:**

في تجربة لها ناتجان فقط (تجربة ثنائية) وكررنا بشكل مستقل هذه التجربة n مرة، ولنفرض أنّ Ω فضاء العينة لكل النتائج الممكنة. عندئذ يكون عدد عناصر فضاء العينة هو: $\mathbf{m \text{ x } n} = |\Omega| = 2^n$

**مثال (2– 5):**

في تجربة رمي قطعة نقود في الهواء 5 مرات، يكون لدينا:

$$|\Omega| = 2^n = 2^5 = 32$$

## ثانيا – التبديلات (Permutations):

يدعى ترتيب r من الأشياء المتمايزة (متبادلة). إذ نفرض أنه لدينا n شيء متمايز ونريد اختيار r شيئا منها $(r \leq n)$ ثم ترتيبها في متبادلة فعندئذ لإيجاد عدد الطرق المختلفة للقيام بهذا الترتيب، يجب أن نميز بين حالتين (+ حالة خاصة تعرف بالتبديلة الدائرية):

### 2-1- تبديلة بتكرار العناصر $(r \leq n)$:

$$P_n^r = \frac{n!}{r_1!\ r_2! \ldots r_k!}$$

**مثال (2- 6):**

بكم طريقة تكوين كلمات (لا يشترط أن يكون لها معنى) من الكلمات: **statistique, probabilité**

**الحل:**

- **statistique:**

لاحظ أنّ كلمة statistique تحتوي على 11 حرفا، كما توجد 3 أحرف مكررة هي:

$i$: مكرر 2 مرة ، $t$: مكرر 3 مرات ، $s$: مكرر 2 مرة

$$P_n^r = P_{11}^{2,3,2} = \frac{11!}{2!\,3!\,2!} = 1663200$$

- **probabilité:**

لاحظ أن كلمة probabilité تحتوي على 11 حرفا، ويوجد حرف b مكرر مرتين وأيضا حرف i مكرر مرتين:

$$P_n^r = P_{11}^{2,2} = \frac{11!}{2!\,2!} = 9979200$$

### 2-2- تبديلة بدون تكرار العناصر $(r = n)$:

$$P_r^n = P_n = n!$$

**مثال (2- 7):**

1- لنفرض أنه لدينا 4 كتب وأردنا ترتيبها في خزانة، بكم طريقة يمكن ترتيبها؟

2- صعد 25 شخص لحافلة بها 25 مقعد، بكم طريقة يمكن لهم الجلوس؟

**الحل:**

1- لدينا **n = 4**، وبذلك يكون عدد الطرق هو:

$$P_4^4 = P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

2- عدد الطرق لجلوس 25 شخص في حافلة بـ 25 مقعد هو:

**التبديلة الدائرية:**

إذا قمنا بتبديل عناصر **n** مجموعة لكن ضمن وضعية دائرية، فإن عدد الطرق الممكنة يكون وفق العلاقة التالية:

$$P_n = (n-1)!$$

**مثال (2- 8):**

بكم طريقة يمكن أن يجلس 6 أشخاص حول طاولة مستديرة تحتوي على 6 كراسي؟

**الحل:**

عدد الطرق لجلوس 6 أشخاص حول طاولة مستديرة تحتوي على 6 كراسي هو:

### ثالثا- التراتيب (Arrangements):

توجد قاعدة أخرى للعد تكون مفيدة أحيانا وهي طريقة حساب عدد الترتيبات، فهي تسمح لنا بحساب عدد النتائج الممكنة عند اختيار k عنصر من بين n عنصر $(k < n)$ مع الأخذ بعين الاعتبار ترتيب العناصر المسحوبة، وقد اخترنا فيها بعض وليس كل العناصر، ونرمز لها بالرمز A.

يجب أن نميز بين حالتين:

**3- 1- ترتيبة بدون تكرار:**

عدد الترتيبات لـ k عنصر مأخوذة من n عنصر $(A_n^k)$ وبدون تكرار يساوي:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-k-1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**مثال (2- 9):**

كم عدد الكلمات المختلفة والمكونة من حرفين (2) وبدون تكرار الحروف والتي يمكن تشكيلها من الحروف $A.\ B.\ C.\ D$.

**الحل:**

كل كلمة تتكون من حرفين (2) مأخوذتين من أربعة حروف (4) عبارة عن ترتيبة:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

**مثال (2- 10):**

نريد أن نأخذ مرشحين (2) حسب النقاط المحصل عليها في المسابقة من بين ثلاثة مترشحين (3)، فماهي عدد التراتيب الممكنة؟

**الحل:**

إن عدد الحالات الممكنة لاختيار مرشحين من بين ثلاثة مترشحين، مع الأخذ بعين الاعتبار الترتيب حسب النقاط المحصل عليها هو:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

### 3- 2- ترتيبة بالتكرار:

عدد الترتيبات لـ k عنصر مأخوذة من n عنصر $(A_n^k)$ مع التكرار يساوي:

**مثال (2- 11):**

في شفرة مورس (نظام ترميز للأحرف) ، تتم كتابة الكلمات بأبجدية من رمزين (− و؟). لنفترض أن k عددًا صحيحًا طبيعيًا غير صفري. الكلمة المكونة من k حرف هي k ترتيب مع تكرار المجموعة {− ،؟ }، لذلك هناك $2^k$ كلمة من k حرف.

### رابعا – التوافيق (Combinations):

في الكثير من الحالات في طرق العد لا نأخذ الترتيب بعين الاعتبار. فإذا كانت A تحتوي على n عنصر، ونريد سحب مجموعة جزئية حجمها k حيث $(k \leq n)$، فنقول عندئذ أنّ ذلك يدعى متوافقة حجمها k مأخوذة من A ونرمز لها بالرمز $C_n^k$. ويجب أن نميز بين حالتين:

### 4–1– التوفيقة بدون تكرار:

تعني سحب عنصر دون إرجاعه، ويكون عدد المجموعات الممكن سحبها هو:

$$\mathbf{C_n^k} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}!}$$

**مثال (2- 12):**

إذا أخذنا مرشحين إثنين (2) من بين ثلاثة مرشحين (3) لشغل منصب عمل، ولم نأخذ بعين الاعتبار الترتيب حسب معدلاتهم، فما هي عدد النتائج الممكنة؟

**الحل:**

عدد النتائج الممكنة هو:

$$\mathbf{C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)2!} = 3}$$

**مثال (2- 13):**

صندوق يحتوي على 6 كريات بيضاء و4 كريات سوداء، نقوم بسحب 3 كريات دفعة واحدة، ماهو عدد طرق سحب:

أ- 3 كريات؟

ب- 3 كريات بيضاء؟

ت- 1 بيضاء و2 سوداء؟

**الحل:**

أ- عدد الطرق لسحب 3 كريات هو: $\mathbf{C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!\,3!} = \frac{10\times9\times8\times7!}{7!3!} = 120}$

ب- عدد الطرق لسحب 3 كريات بيضاء هو: سحب 3 كريات بيضاء من بين 6 كريات بيضاء، أي:

$$C_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!\,3!} = 20$$

ت- عدد طرق سحب 1 كرة بيضاء و2 كرة سوداء هو:

$$C_6^1 \times C_4^2 = \frac{6!}{(6-1)!\,1!} \times \frac{4!}{(4-2)2!} = 6 \times 6 = 36$$

**4- 2- التوفيقة بالتكرار:**

إذا كان السحب بالإرجاع، فمن المحتمل أن يظهر العنصر المسحوب مرة ثانية ومرة ثالثة ...(أي يمكن أن يتكرر سحبه)، في هذه الحالة نكون أمام توفيقة مع التكرار، وبالتالي فإن عدد طرق سحب المجموعات الجزئية هو:

$$\mathbf{C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}}$$

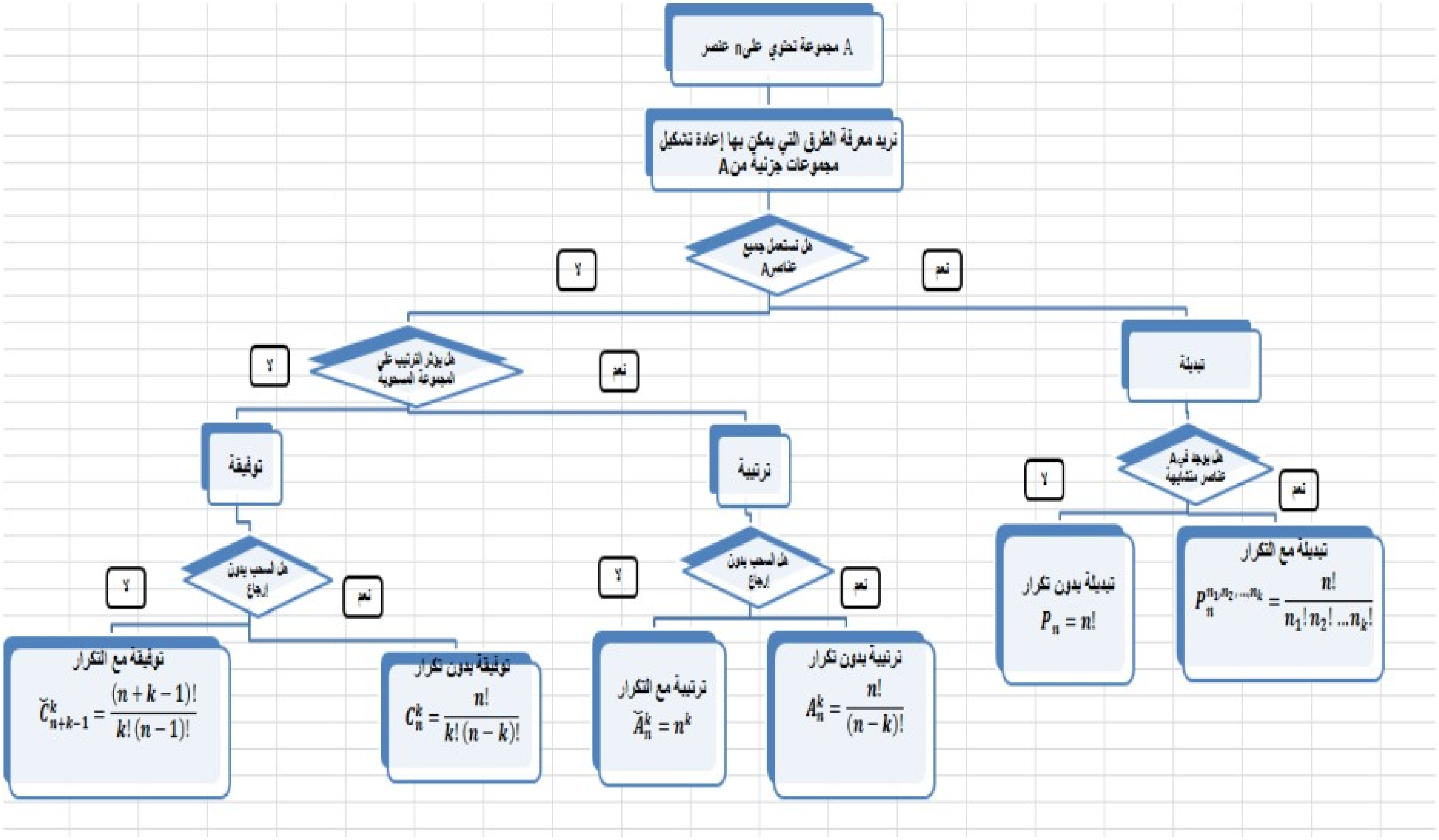
**مثال (2-14):**

نريد سحب عينة مكونة من 3 طلبة من بين 6 طلبة، مع العلم أنّ طريقة السحب بالإرجاع، كم عدد الطرق التي يمكن بها سحب هذه العينة؟

**الحل:**

عدد الطرق هو: $C_{6+3-1}^3 = \frac{(6+3-1)!}{(6-1)!3!} = \frac{8!}{5!3!} = 5$

## مخطط توضيحي لمكونات التحليل التوفيقي



## تمارين محلولة

**التمرين 01:**

أراد مدرب فريق كيد اليد تشكيل فريق من 7 لاعبين، يتم اختيارهم من بين 12 لاعب، فما هو عدد الفرق التي يمكن تشكيلها؟

**الحل:**

إن المدرب يختار 7 لاعبين من بين 12 لاعب، فكل فريق يختلف عن الآخر باختلاف اللاعبين، لذلك لا يأخذ الترتيب بعين الاعتبار. إذن عدد الفرق يساوي إلى عدد توفيقات 7 لاعبين من بين 12 لاعب:

إذن المدرب له 10560 إمكانية (له خيارات عديدة) لتشكيل الفريق.

**التمرين 02:**

كم عدد اللجان التي يمكن تكوينها من 3 رجال و2 نساء من بين 7 رجال و5 نساء.

الحل:

إن اللجنة تتكون من 5 أفراد، 3 رجال و2 نساء، نختار 3 رجال من بين 7 ويكون عدد إمكانيات اختيار الرجال يساوي عدد توفيقات 3 عناصر مختارة من بين 7 عناصر $(C_7^3)$ وعدد امكانيات اختيار امرأتان من بين 5 يساوي عدد توفيقات عنصرين مختارين من بين 5 عناصر $(C_5^2)$ ومنه فإن عدد اللجان الممكنة يساوي:

$$C_7^3 C_5^2 = 35 \times 10 = 350$$

**التمرين 03:**

ليكن لدينا 4 عناصر A. B. C. D، كم ثنائية مرتبة يمكن تشكيلها من هذه العناصر مع عدم تكرار العنصر الواحد في الثنائية الواحدة؟ ثم حدّدها.

الحل:

- لتحديد عدد الثنائيات المرتبة التي يمكن تشكيلها من العناصر A. B. C. D نستعمل الترتيبة، وبما أنّه لا يسمح بتكرار العنصر أكثر من مرة فإنه سوف نستخدم الترتيبة بدون تكرار:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

- الثنائيات هي:

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}).(A, C).(A, D).(B, A).(B, C).(B, D).(C, A).(C, B).(C, D).(D, A).(D, B).(D, C).$$

**التمرين 04:**

إذا ترشح 3 طلبة لمسابقة ما من أجل شغل منصب معين، فأحسب عدد التبديلات الممكنة لهؤلاء الطلبة إذا رتبناهم حسب علامات الامتحانات ؟

**الحل:**

– نستعمل التبديلة بدون تكرار، فلا يمكن للطالب الواحد أن يشغل أكثر من منصب:

$$P_{\mathrm{n}} = \mathrm{P}_6 = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

**التمرين 05:**

أوجد عدد الطرق الممكنة التي يمكن بها وضع خمس كرات في صندوقين بحيث أن كل صندوق يحتوي على كرة واحدة فقط.

**الحل:**

$$P_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20$$

أما في حالة وجود تكرارات في ظهور الكرات فإن عدد الطرق الممكنة يمكن أن تحسب من العلاقة الآتية:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2,\mathrm{k}_3\ldots} = \frac{n!}{\mathrm{k}_1!\,\mathrm{k}_2!\,\mathrm{k}_3!\ldots}$$

**تمرين 06:**

أوجد عدد الطرق الممكنة لترتيب 7 كرات 4 منها بيضاء و2 منها حمراء و 1 كرة لون آخر.

**الحل:**

بما أنّ هناك تكرارات في المجموعة أثناء عملية ترتيب الكرات فإننا نستخدم العلاقة التالية لايجاد عدد العينات الممكنة:

$$P_7^{4,2,1} = \frac{7!}{4!\,2!\,1!} = 105$$

**التمرين 07:**

كم كلمة يمكن تكوينها من كلمة "سمسار"؟

**الحل:**

إن حرق "س" يتكرر مرتين، وعليه فإنّ عدد التبديلات يساوي:

$$P_5^{2,1,1,1} = \frac{5!}{2! \times 1! \times 1! \times 1!} = 60$$

**التمرين 08:**

لدينا مرجع مؤلف من 6 أجزاء نريد ترتيبه على أحد رفوف مكتبة لدينا، ولكن لا يتوفر لنا سوى 4 أماكن. فبكم طريقة مختلفة يمكننا شغل هذه الأماكن الأربعة المتوفرة بأربعة أجزاء من الأجزاء الستة؟

الحل:

إن عدد الطرق المختلفة لشغل الأماكن الأربعة هو عدد ترتيبات لستة أشياء مأخوذ أربعة منها في وقت واحد أي $A_6^4$:

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$$

**التمرين 09:**

يحتوي حافظ للأرشيف على 10 شهادات للميلاد، تم سحب 3 شهادات للميلاد من بين المجموع الكلي، فما هو عدد العينات التي يمكن تشكيلها إذا كان:

- ✓ السحب بالإرجاع.
- ✓ السحب بدون إرجاع.

**الحل:**

- ✓ عدد العينات في حالة السحب بالإرجاع يساوي:

$$A_n^k = n^k \Rightarrow A_{10}^3 = 10^3 = 1000$$

- ✓ عدد العينات في حالة السحب بدون إرجاع يساوي:

$$A_{20}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

## تمارين مقترحة

**التمرين 01:** أجب عن مايلي:

- كم كلمة يمكن تشكيلها من جميع أحرف كلمة: finance, économétrie, actuariat

- كم عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها 5 أشخاص حول طاولة مستديرة حيث:

  - يجلسون كما يشاؤون.
  - أحمد لا يجلس بجانب محمد.

**التمرين 02:**

ما هو عدد لوحات السيارات التي يمكن الحصول عليها من استعمال حرفين من الأحرف الهجائية (28 حرف) وثلاثة أرقام إلى يسار الأحرف وذلك باستعمال المبدأ الأساسي للعد في الحالات التالية:

- عدم تكرار الحرف والرقم.
- تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم.
- تكرار الحرف والرقم.
- بدون تكرار الحرف وتكرار الرقم بشرط الرقم الأخير يختلف عن 0.

**التمرين 03:** ماهو عدد الإمكانيات:

- لاختيار 3 أسئلة من بين 5 أسئلة.
- لجلوس 6 أشخاص على مقعد يضم 3 أماكن.
- لتركيب كلمة من 4 حروف مع العلم بوجود حرفين متشابهين.

- لتركيب كلمة من 4 حروف مع العلم أن كل الحروف مختلفة.

**التمرين 04:**

ليكن لدينا الأرقام 1، 3، 4، 5، 6

- ما هو عدد الأعداد التي يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام بدون تكرار.
- ما هو عدد الأعداد التي يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام وتكون أصغر من 200.
- ما هو عدد الأعداد الزوجية.
- ما هو عدد الأعداد المضاعفة لـ 2.

**التمرين 05:**

ليكن لدينا الأرقام 0، 1، 2، 4، 5، 7، 8، 9

- ما هي الأعداد المختلفة التي يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام بدون تكرار.

- ما هي الأعداد التي يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام وتكون أصغر من 300.
- ما هو عدد الأعداد الزوجية.
- ما هو عدد الأعداد المضاعفة لـ 2.

**التمرين 06:**

كم عدد اللجان التي يمكن تشكيلها من ممثلي العمال المهنيين في الجامعة إذا تم اختيارهم عشوائيا حسب درجاتهم، بحيث يتم اختيار 3 عمال من المستوى الأول من بين 15 عامل و2 عمال من المستوى الثاني من بين 12 عامل و عامل واحد من المستوى الثالث من بين 8 عمال.

**التمرين 07:**

قطار مؤلف من 10 عربات وقاطرة. بكم طريقة يمكن أن نرتب هذه العربات خلف القاطرة.

# الفصل الثالث:

# نظرية الاحتمالات

## تمهيد:

تعد نظرية الاحتمال أو قوانين المصادفة (Law of chances) من النظريات الرياضية المهمة التي تتخصص في دراسة الحوادث، أو الظواهر التي تتميز بعدم تأكد حدوثها.

ولا تبرز أهمية نظرية الاحتمال لتطبيقاتها المهمة في شتى المجالات فحسب، بل إنّ هناك علوما ونظريات أصبحت ترتكز أساسا على نظرية الاحتمال، ومنها علم الإحصاء (Statistics) ونظرية القرار ( Decision theory) ونظرية الطوابير (Queuing theory) ونظرية المعلومات (Information theory). ولقد دخلت نظرية الاحتمال بتطبيقاتها المختلفة في شتى المجالات التقنية، والهندسية، والاجتماعية، والاقتصادية، والعسكرية.

## أولا: مفهوم الاحتمال وطرق قياسه

### 1-1- التعريف الكلاسيكي أو التقليدي للاحتمال:

عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات (أو رمي 3 قطع نقدية مرة واحدة)، فإنّ فضاء العينة هو:

$$\Omega = \{PPP, PFP, FPP, FFP, PPF, PFF, FPF, FFF\}$$

نلاحظ من خلال رمي قطعة النقود لثلاث مرات مايلي:

أ- إنّ فضاء العينة هو منته ومعروف مسبقا، ويساوي إلى 8 نتائج مختلفة الواحدة عن الأخرى.

ب- إنّ احتمال تحقق أي نتيجة أو حالة هو متساو بالنسبة لجميع الحالات ويساوي $\frac{1}{8}$ ، أي أنّ كل عنصر من عناصر فضاء العينة نفس احتمال الحدوث.

ت- إذا عرّفنا الحادث A بأنه حادثة حصولنا على وجه في الرميات الثلاث (الحالة المرغوبة أو الحالة الملائمة)، فإن إحتمال حدوث A ونرمز له بـ $P(A)$ حسب التعريف الكلاسيكي أو التقليدي يساوي إلى النسبة بين عدد الحالات الملائمة أو المرغوبة إلى عدد الحالات الممكنة، أو النسبة بين عدد عناصر الحادث A وعدد عناصر فضاء العينة Ω بشرط أن يكون (أ) و(ب) محققين، أي:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات المرغوبة أو الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{1}{8}$$

**✍ خواص الاحتمال النظري أو الكلاسيكي:**

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- احتمال تحقق الحادث A يسمى باحتمال النجاح ونرمز له بـ P(A).
- احتمال عدم تحقق الحادث المرغوب A يسمى باحتمال الفشل ونرمز له بـ $P(\bar{A})$ وأنّ:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$$

✍ **عيوب التعريف الكلاسيكي:**

- يشترط تطبيق التعريف الكلاسيكي للاحتمال أن يكون فضاء العينة منتهيا.
- يشترط أن يكون لجميع عناصر فضاء العينة احتمال الحدوث نفسه.

وقد يصادف أن لا يتحقق أحد هذين الشرطين أو كلاهما، فقد يكون فضاء العينة غير منته، كما في تجربة قياس عمر جهاز إلكتروني، أو لا يكون لجميع عناصر فضاء العينة احتمال الحدوث نفسه.

### 1- 2- التعريف الإحصائي أو التكرار النسبي للاحتمال:

إذا كانت $A$ حادثة معرفة على $\Omega$ المتعلق بتجربة عشوائية لمجتمع إحصائي فضاء عينة غير منته، أو أنّ حجم المجتمع كبير، أو إذا كانت عناصر فضاء العينة غير متساوية الاحتمال في الحدوث، ولحساب الاحتمال بحسب التعريف الإحصائي نقوم بإجراء التجربة $N$ من المرات. ولنفرض أنّ الحادثة المرغوبة A قد وقعت $n$ مرة، فإن الاحتمال التجريبي أو الإحصائي لحدوث الحادثة A يعرّف بأنه عدد مرات حدوث الحادثة A منسوبا إلى العدد الكلي من المرات التي أعيدت فيها التجربة، أي أنّ:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات التي تحققت فيه الحادثة المرغوبة}}{\text{عدد مرات إجراء التجربة}} = \frac{n}{N}$$

✍ **عيوب التعريف الإحصائي (التكرار النسبي):**

إنّ قيمة $P(A)$ هي قيمة تقريبية ومتغيرة ومرتبطة بعدد مرات إجراء التجربة N، وأنه لا توجد قيمة لـ N ($N_0$ مثلا) بحيث عندما تصلها N تكون النسبة $\frac{n}{\text{N}}$ ثابتة لجميع قيم N التي هي أكبر من $N_0$، وتجدر الإشارة إلى أنه لا يمكننا معرفة قيمة الاحتمال حسب هذا التعريف إلا بعد إجراء التجربة.

### 1- 3- الاحتمال حسب مسلمات كولموغوروف (Kolmogorov):

تعتبر مسلمات كولموغوروف من أكثر تعاريف الاحتمال أصالة ورصانة، وهي تنص على أنه يقابل كل حادثة A في فضاء العينة $\Omega$ عدد حقيقي R يسمى إحتمال حدوث A ويرمز له بـ $P(A)$ بحيث يحقق المسلمات التالية:

- المسلمة الأولى: $P(\Omega) = 1$

$$P(\phi) = 0$$

- المسلمة الثانية: من أجل كل حادث A ينتمي إلى $\Omega$ يكون لدينا:

$$0 \le P(A) \le 1$$

- المسلمة الثالثة: لأي حادثين $A$ و$B$ المتنافيين فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ويمكن تعميم المسلمة الثالثة لأكثر من حادثين، فإذا كانت لدينا الحوادث المتنافية: $\mathrm{A}_1, A_2, \dots \dots A_k \dots$

فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \dots . \cup A_k \cup \dots . = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k) + \cdots$$

## ثانيا: القوانين الأساسية في الاحتمالات

- **احتمال الحادثة المستحيلة:**

إن احتمال الحادثة المستحيلة هو الصفر (0):

$$P(\emptyset) = 0$$

نحن نعلم أنّ:

$$\Omega = \Omega \cup \phi$$

حيث $\phi$ و$\Omega$ حادثان متنافيان، وحسب مسلمة كولموغوروف الثالثة فإنّ:

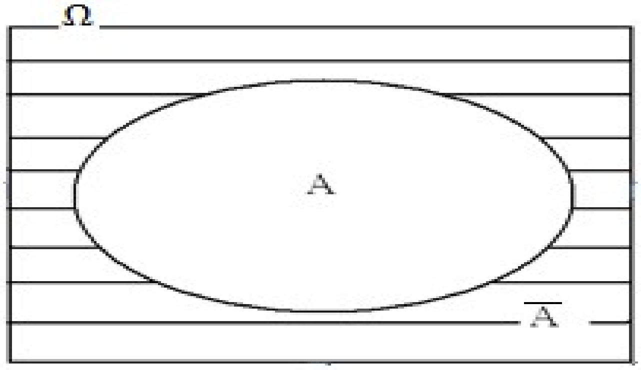
$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\phi)$$
$$P(\phi) = P(\Omega) - P(\Omega) = 0$$

- **احتمال متممة حادثة:**

احتمال متممة الحادثة A هو:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

ويمكن البرهان على ذلك من خلال مخطط فن، حيث:



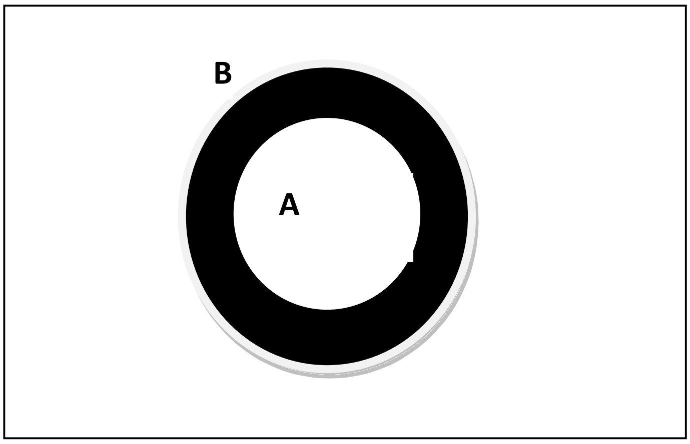
وحيث أنّ A و$\bar{A}$ حادثان متنافيان، وبحسب مسلمة كولموغوروف الثالثة نجد:

$$P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$$
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- **لأي حادثين A وB فإنّ:**

$$P(A) \leq P(B)$$

إذا كانت $A \subset B$



البرهان:

من الشكل السابق نجد أنّ:

$$B = A \cup (B - A)$$

وبما أنّ A و (B - A) حادثان متنافيان، وحسب المسلمة الثالثة لكولموغوروف فإنّ:

$$P(B) = P(A) + \; P(B - A)$$

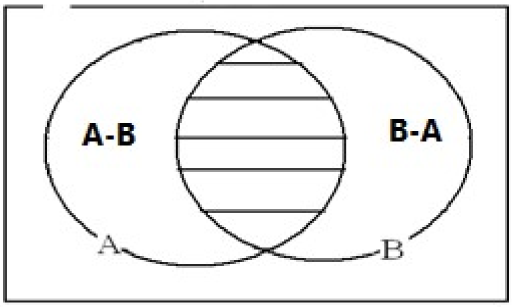
وبما أن:

$$P(B - A) \neq \emptyset$$

إذن:

- **قانون الجمع للحوادث غير المتنافية لأي حادثين A وB فإن:**

$$P(A \cup B) = P(A) + \; P(B) - \; P(A \cap B)$$



وبما أن A و (B – A) حادثتان متنافيتان، وحسب المسلمة الثالثة لكولموغوروف فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$$

كذلك فإنّ:

$$P(B) = P[(A \cap B) \cup (B - A)]$$

وبما أن (B − A) و $A \cap B$ حادثتان متنافيتان، وحسب المسلمة الثالثة فإن:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B - A) \ldots\ldots (1)$$
$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \ldots\ldots (2)$$

وبتعويض (2) في (1) نجد:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ويمكن تعميم قانون الجمع لثلاث حوادث A، B، C حيث:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

**مثال (3− 1):**

في تجربة رمي 3 قطع نقدية ثلاث مرات متتالية، وليكن:

- الحادث $A$ جميع الأوجه صور.
- الحادث $B$ جميع الأوجه متشابهة.
- الحادث $C$ ظهور صورة واحدة فقط.

والمطلوب: أوجد مايلي:

$(A \cap B), (A \cap C), (B \cap C), (A \cap B \cap C), (A \cup B), (B \cup C), (A \cup B \cup C), (A \cup C$

**الحل:**

$$\boldsymbol{\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}}$$

$\boldsymbol{A} = \{FFF\}$

$\boldsymbol{B} = \{FFF, PPP\}$

$\boldsymbol{C} = \{FPP, PFP, PPF\}$

- $(\boldsymbol{A \cap B}) = \boldsymbol{A}$ $\quad (\boldsymbol{A \cap C}) = \emptyset$ $\quad (\boldsymbol{B \cap C}) = \emptyset$
- $(\boldsymbol{A \cap B \cap C}) = \emptyset$ $\quad (\boldsymbol{A \cup C}) = \boldsymbol{B}$ $\quad (\boldsymbol{A \cup C}) = \boldsymbol{A + C}$
- $(\boldsymbol{B \cup C}) = \boldsymbol{B + C}$ $\quad (\boldsymbol{A \cup B \cup C}) = \boldsymbol{B + C}$

ولحساب الاحتمالات للأحداث السابقة، يجب أن تحقق التجربة العشوائية الشرطين الآتيين:

1− عدد النتائج الممكنة للتجربة محدود أو منته وهو مساو لـ 8 في مثالنا هذا.

2− كل نتيجة ممكنة لها نفس الفرصة أو الاحتمال في التحقق.

وفي ظل تحقق هذين الشرطين، يمكن عندها حساب احتمال أيه حادثة $A$ معرفة على فضاء العينة $\Omega$ لهذه التجربة من العلاقة:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة أو المرغوبة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

وذلك حسب التعريف الكلاسيكي للاحتمال.

ولحساب الاحتمالات:

- $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{8}$ وذلك لأن $A \subset B$
- $P(A \cap C) = 0$ وذلك لأنّ $A$ و $C$ حوادث متنافية
- $P(B \cap C) = 0$ وذلك لأنّ الحوادث متنافية
- $P(A \cap B \cap C) = 0$ وذلك لأنّ الحوادث متنافية
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = P(B)$ لأنّ $A \subset B$
- $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$ الحوادث متنافية
- $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ الحوادث متنافية
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{8} - 0 - 0 + 0 = \frac{5}{8}$

**مثال** (3− 2):

عشرة ماكينات للحلاقة، 6 منها تعمل بالشاحن (chargeur) و3 منها تعمل بالبطارية و1 تعمل بالشاحن والبطارية. فإذا اختيرت إحدى هذه الماكينات بصورة عشوائية وكانت الحادثة C ترمز إلى أن الماكنة تعمل بالشاحن والحادثة P ترمز إلى أن الماكنة تعمل بالبطارية، المطلوب: أحسب الاحتمالات التالية:

$P(C)$, $P(P)$, $P(C \cap \bar{P})$, $\mathrm{P(C \cap P)}$, $\mathrm{P(\bar{C} \cap P)}$,
$P[(C \cap \bar{P}) \cup (C \cap P)]$, $P[(C \cap \bar{P}) \cup (C \cap P)]$, $P(C \cup P)$

الحل:

$\Omega = \{ CCCCCC,\ PPP,\ \ C \cap P \}$

- $C = \{\text{الماكنة تعمل بالشاحن}\}$
- $P = \{\text{الماكنة تعمل بالبطارية}\}$
- $P(C) = \frac{7}{10}$ الماكنة تعمل بالشاحن

- $P(P) = \frac{4}{10}$ الماكنة تعمل بالبطارية
- $P(C \cap \overline{P}) = \frac{6}{10}$ الماكنة بالشاحن ولا تعمل بالبطارية
- $P(C \cap P) = \frac{1}{10}$ الماكنة تعمل بالشاحن وتعمل بالبطارية
- $P(\bar{C} \cap P) = \frac{3}{10}$ الماكنة تعمل بالبطارية ولا تعمل بالشاحن
- $P[(C \cap \bar{P}) \cup (C \cap P]$

ومن خواص مورغان الآتية:

$$(C \cap \bar{P}) \cup (C \cap P) = C \cap (P \cup \bar{P}) = C \cap \Omega = C$$

أي أنّ:

$$P[(C \cap \bar{P}) \cup (C \cap P)] = P(C) = \frac{7}{10}$$ ومعناه أنّ الماكنة تعمل بالشاحن

- $P[(C \cap \bar{P}) \cup (\bar{C} \cap P)] = P(C \cap \bar{P}) + P(\bar{C} \cap P) = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$

ومعناه أنّ الماكنة إما تعمل بالشاحن فقط أو بالبطارية فقط.

- $P(C \cup P) = P(C) + P(P) - P(C \cap P) = \frac{7}{10} + \frac{4}{10} - \frac{1}{10} = 1$

ومعناه أنّ الماكنة تعمل بالشاحن أو بالبطارية أو بكلتيهما.

**مثال (3- 3):**

في قسم العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، تقدم 180 طالب لاجتياز امتحان في مادتي الرياضيات والإحصاء، فكانت النتائج كالتالي:

18 طالب رسبوا في الرياضيات.

24 طالب رسبوا في الإحصاء.

12 طالب رسبوا في المادتين معا.

تمّ اختيار طالب عشوائي من هذا القسم، والمطلوب أحسب الاحتمالات التالية:

1- رسوب الطالب في الرياضيات.

2- رسوب الطالب في الإحصاء.

3- رسوب الطالب في المادتين معا.

4- رسوب الطالب في مادة واحدة على الأقل.

5- نجاح الطالب في الرياضيات.

6- نجاح الطالب في الإحصاء.

7- رسوب الطالب في الرياضيات ونجاحه في الإحصاء.

8- رسوب الطالب في الإحصاء ونجاحه في الرياضيات.

**الحل:**

التعريف بالحوادث:

**A**: رسوب الطالب في الرياضيات.

**B**: رسوب الطالب في الإحصاء.

**C**: رسوب الطالب في كلتا المادتين.

$1- \quad P(A) = \frac{18}{180}$

$2- \quad P(B) = \frac{24}{180}$

$3- \quad P(A \cap B) = \frac{12}{180}$

$4- \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{18}{180} + \frac{24}{180} - \frac{12}{180} = \frac{30}{180}$

ومن تعريف العلاقات بين الحوادث يمكن التعبير عن الحوادث التي نريد إيجاد احتمالاتها باستخدام الرموز كمايلي:

$5- \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{18}{180} = \frac{162}{180}$

$6- \quad P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{24}{180} = \frac{156}{180}$

$7- \quad P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{18}{180} - \frac{12}{180} = \frac{6}{180}$

وهذه العلاقة الأخيرة تعني رسوب الطالب في الرياضيات ونجاحه في الإحصاء، أي أن المطلوب هو حساب احتمال $(A \cap \bar{B})$.

$8- P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A) = \frac{24}{180} - \frac{12}{180} = \frac{12}{180}$

### ثالثا: قانون الضرب للحوادث المستقلة والشرطية

#### أ- الحوادث المستقلة (Independents Events):

نقول عن حادثين **A** و **B** أنهما مستقلان، إذا كان حدوث أحدهما مستقلا عن حدوث الآخر، فالنتائج التي نحصل عليها عند رمي حجري نرد معا، تمثل حوادث مستقلة عن بعضها البعض، لأنّ حدوث أحدهما مستقل عن حدوث الآخر، وكذلك الأمر في سحب كرات من صندوق (مع الإعادة) تمثل حوادث مستقلة، وعلى العكس إذا كان السحب بدون إعادة.

وللتوضيح أكثر، نقول إذا كان A و B حادثين، وكان حدوث أو عدم حدوث A لا يتأثر بحدوث أو عدم حدوث B نقول عندها أنّ A وB حادثتان مستقلتان.

ونقول عن الحادثة A أنها مستقلة عن الحادثة B إذا تحقق الشرط التالي:

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{و} \quad P(B/A) = P(B)$$

إنّ الرمز $P(A/B)$ تعني احتمال حدوث A علما أنّ B قد حدثت، ويكون الحادثان A وB غير مستقلين إذا كان:

$$P(A/B) \neq P(A)$$

$$P(B/A) \neq P(B)$$

وأنّ قانون الضرب للحوادث المستقلة يعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)\, .\, P(B)}$$

ونشير هنا إلى أنّ الحوادث المستقلة هي ليست حوادث متنافية، وأنّ وقوع A لا يمنع وقوع B، وأنّ الحوادث غير المتنافية قد تكون مستقلة أو غير مستقلة.

وبالنسبة للحوادث المتنافية، فإنّ:

$$\boldsymbol{P(A\,/\,B) = \emptyset}$$

**مثال (3- 4):**

1- نجاح محمد في حل مشكلة اقتصادية (الحادث A) ونجاح سعيد في حل المشكلة نفسها (الحادثة B) بطريقة أخرى، هي حوادث مستقلة وغير متنافية، إذ من الممكن أن يتوصل محمد وسعيد إلى حل المشكلة الاقتصادية في الوقت نفسه.

2- إنّ نجاح محمد في شهادة البكالوريا (الحادث A) وسفره للدراسة بالخارج (الحادث B) هما حادثان غير متنافيان وفي الوقت نفسه غير مستقلين.

**مثال (3- 5):**

يحتوي صندوق على 20 كرة منها 12 كرة بيضاء و8 كرات حمراء. تم سحب 2 كرة من هذا الصندوق الواحدة تلو الأخرى، علما بأن الكرة المسحوبة الأولى قد أعيدت إلى الصندوق قبل سحب الكرة الثانية. والمطلوب حساب الاحتمالات التالية:

1- أن تكون الكرتان المسحوبتان بيضاويتان.

2- أن تكون الكرتان المسحوبتان حمراويتان.

3- أن تكون الكرة المسحوبة الأولى حمراء والثانية بيضاء.

**الحل:**

- نرمز إلى سحب كرة بيضاء بالرمز B (كرة بيضاء: B) وبالتالي: $P(B) = \frac{12}{20}$
- نرمز إلى سحب كرة حمراء بالرمز R (كرة بيضاء: R) وبالتالي: $P(R) = \frac{8}{20}$

وعلينا هنا أن نميز بين طرق السحب، فإذا أعيدت الكرة المسحوبة الأولى قبل سحب الكرة الثانية (السحب مع الإعادة) فإن الحوادث هنا مستقلة.

$$1-\ P(B \cap B) = P(B).P(B) = \frac{12}{20}.\frac{12}{20} = \frac{9}{25}$$

$$2-\ P(R \cap R) = P(R).P(R) = \frac{8}{20}.\frac{8}{20} = \frac{4}{25}$$

$$3-\ P(R \cap B) = P(R).P(B) + P(B).P(R) = \frac{8}{20}.\frac{12}{20} + \frac{12}{20}.\frac{8}{20} = \frac{12}{25}$$

**ب- الحوادث غير المستقلة (الاحتمال الشرطي):**

يعطى قانون الاحتمال الشرطي لحادثين A و B غير مستقلين ومعرفتين على فضاء العينة Ω بالعلاقة:

$$\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \qquad \text{حيث} \quad \boldsymbol{P(B)} > 0$$

$$\boldsymbol{P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}} \qquad \text{حيث} \quad \boldsymbol{P(A)} > 0$$

**مثال (3- 6):**

في تجربة رمي حجر نرد متوازن، وعلى فضاء العينة Ω عرّفنا الحوادث الآتية:

$A_1$: حادثة الحصول على الوجه الذي يحمل العدد 2

$A_2$: حادثة الحصول على الوجه الذي يحمل الرقم أقل من 4

$A_3$: حادثة الحصول على الوجه الذي يحمل الرقم أقل من 5

B: حادثة الحصول على عدد زوجي

والمطلوب: حساب الاحتمالات التالية:

1 – $P(A_1)$
2 – $P(A_2)$
3 – $P(A_3)$
4 – $P(B)$
5 – $P(A_1 \cap B)$
6 – $P(A_2 \cap B)$
7 – $P(A_3 \cap B)$
8 – $P(A_1/B)$
9 – $P(A_2/B)$
10 – $P(B/A_3)$

**الحل:**

$$\boldsymbol{1 -\ P(A_1) = \frac{1}{6}} \qquad \boldsymbol{2 -\ P(A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}} \qquad \boldsymbol{3 -\ P(A_3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}}$$

$\mathbf{4-}\ \boldsymbol{P(B)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\mathbf{5-}\ \boldsymbol{P(A_1 \cap B)} = \frac{1}{6}$ $\mathbf{6-}\ \boldsymbol{P(A_2 \cap B)} = \frac{1}{6}$

$\mathbf{7-}\ \boldsymbol{P(A_3 \cap B)} = \frac{2}{6}$ $\mathbf{8-}\ \boldsymbol{P(A_1/B)} = \frac{\boldsymbol{P(A_1 \cap B)}}{\boldsymbol{P(B)}} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$

$\mathbf{9-}\ \boldsymbol{P(A_2/B)} = \frac{\boldsymbol{P(A_2 \cap B)}}{\boldsymbol{P(B)}} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$ $\mathbf{10-}\ \boldsymbol{P(B/A_3)} = \frac{\boldsymbol{P(B \cap A_3)}}{\boldsymbol{P(A_3)}} = \frac{2/6}{2/3} = \frac{1}{2}$

$\mathbf{11-}\ \boldsymbol{P(B \cap A_3)} = \frac{2}{6}$

- **ملاحظات:**

– بصورة عامة، فإن الاحتمال الشرطي يقيس احتمال تحقق الحادث A، إذا علم أنّ الحادث B قد وقع (قد تحقق).

– عند التعامل مع الاحتمال الشرطي، فإننا لا نهتم من فضاء العينة Ω إلاّ بالفضاء المختزل للحادثة $B$، مما يعني أنه قد تم اختزال فضاء العينة Ω إلى الجزء الممثل للحادثة B فقط. ففي تجربة رمي حجرة نرد فإن فضاء العينة هو:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

فإذا عرّفنا على فضاء العينة الحادث B بأنه ظهور رقم زوجي، أي:

$$B = \{2, 4, 6\}$$

وعرّفنا أيضا على فراغ العينة الحادث A بأنه ظهور الوجه الذي يحمل الرقم 2، أي:

$$A = \{2\}$$

وعلمنا أن الحادث B قد وقع فإنّ:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{\mathrm{P(B)}} = \frac{1}{3}$$

وبالتالي وقوع الحادث B أدى إلى اختزال فضاء العينة Ω إلى B.

**مثال (3- 7):**

في تجربة إلقاء حجري نرد، عرّفنا الحوادث التالية على فضاء العينة Ω، الحادث A الحصول على المجموع (8) من النردين، والحادث B الحصول على مجموع زوجي. والمطلوب: أحسب الاحتمالات التالية:

1 – $P(A)$ , $P(B)$ , $P(A \cap B)$ , $P(A/B)$

2 – تحقق من أن $P(A/B) \neq P(A)$

**الحل:**

إنّ فراغ العينة Ω يكون على النحو التالي:

|  | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | (6.1) | (5.1) | (4.1) | (3.1) | (2.1) | (1.1) |
| **2** | (6.2) | (5.2) | (4.2) | (3.2) | (2.2) | (1.2) |
| **3** | (6.3) | (5.3) | (4.3) | (3.3) | (2.3) | (1.3) |
| **4** | (6.4) | (5.4) | (4.4) | (3.4) | (2.4) | (1.4) |
| **5** | (6.5) | (5.5) | (4.5) | (3.5) | (2.5) | (1.5) |
| **6** | (6.6) | (5.6) | (4.6) | (3.6) | (2.6) | (1.6) |

- الحادث A الحصول على المجموع (8) من النردين:

$$A = \{(6.2), (5.3), (4.4), (3.5), (2.6)\} \quad \Rightarrow \boldsymbol{P(A) = \frac{5}{36}}$$

- الحادث B الحصول على مجموع زوجي:

$$B = \begin{Bmatrix} (1.1), (1.3), (1.5), (2.2), (2.4), (2.6), (3.1), (3.3), (3.5), (4.2), (4.4), (4.6), (5.1), \\ (5.3), (5.5), (6.2), (6.4), (6.6) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(B) = \frac{18}{36}}$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{36}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{18}{36} = P(B) \qquad \text{لأنّ } A \subset B$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5}{18} \neq P(A)$$

- **نتائج:**

– **نتيجة 1**: إذا كانت الحادثتان A وB غير متنافيتين ومعرفتين على فضاء العينة Ω فإنّ:

$$\boxed{\mathbf{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]}}$$

وإذا كانت الحادثتان A وB متنافيتان فإنّ:

$$\boxed{\mathbf{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - [P(A) + P(B)]}}$$

وعندما تكون $A \subset B$، تصبح العلاقة على النحو التالي:

$$\boxed{\mathbf{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(B)}}$$

– **نتيجة 2:** لتكن لدينا الحوادث A و B غير متنافية ومعرفة على فضاء العينة Ω فإنّ:

$$\mathbf{P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - [P(A \cap B)]}$$

ويمكن التعميم على مجموعة حوادث $A_1, A_2 \dots A_n$:

$$P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \dots \overline{A_n}) = 1 - P(A_1 \cap A_2 \dots \dots \cap A_n)$$

وإذا كانت الحوادث A و B متنافية فإنّ:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$$

وإذا كانت $A \subset B$ فإنّ:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A)$$

**مثال (3− 8):**

إذا كان A و B حادثين في المجموعة الكلية Ω بحيث: $P(B) = 0.6$ و $P(A) = 0.5$ و $P(A \cup B) = 0.8$

فهل الحادثان A و B مستقلان؟

**الحل:**

إنّ شرط الاستقلال الثاني هو:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$= (0.5).(0.6) = 0.3$$

وللتحقق. بما أنّ $A$ و $B$ هما حادثان غير متنافيين فإنّ:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

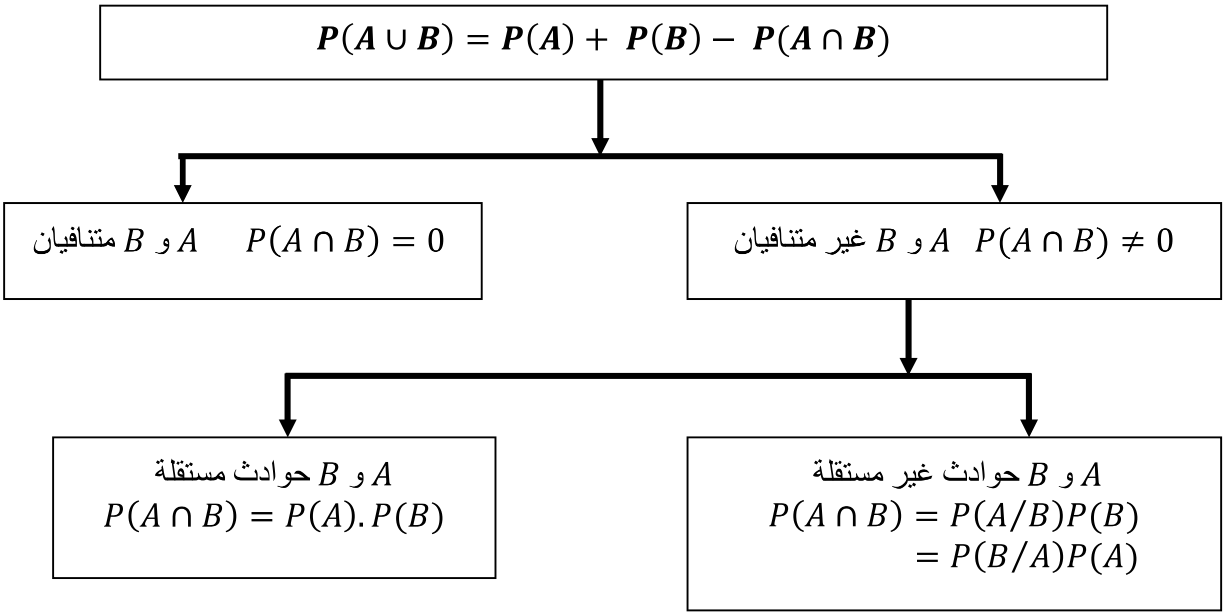
وبالتالي:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \cap B) = 0.5 + 0.6 - 0.8 = 0.3$$

إذن: A و B حادثان مستقلان.

يمكن تصنيف عمليات الضرب على الحوادث وفق المخطط التالي، علما أنّ المخطط وضع لحادثين A و B فقط:



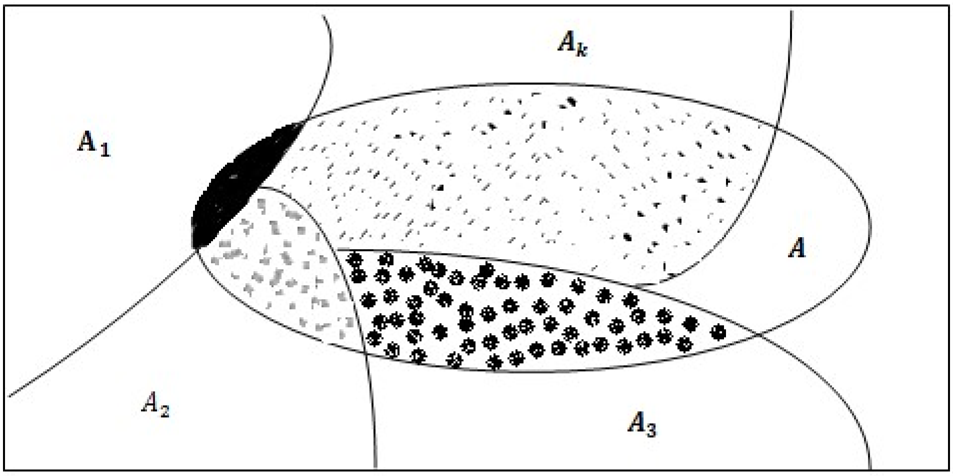
**رابعا: قانون الاحتمال الكلي (Law of total probability):**

إذا كان الحادث A نتيجة أحد الحوادث المتنافية $A_1, A_2 \dots\dots A_k$ فإن احتمال الحادث $A$ هو:

$$P(A) = P(A_1).P(A/A_1) + P(A_2).P(A/A_2) + \cdots + P(A_k).P(A/A_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap A)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P(A_i)\ .P(A/A_i)$$



**مثال (3- 9):**

يحتوي مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية على أربعة آلات (04)، تنتج كل منهم 40%، 30%، 20% و10% من مجموع الإنتاج، حيث أنّ النسب المئوية للوحدات الفاسدة للآلات الأربعة هي على التوالي: 2%، 4%، 1% و5%. نقوم عشوائيا باختيار مصباحا واحدا من مجموع المصابيح المنتجة. المطلوب حساب الاحتمالات التالية:

- أن يكون المصباح فاسدا.
- أن يكون المصباح صالحا.

**الحل:**

لكي نجد الاحتمال المطلوب، نعرّف الحوادث أولا:

$A_1$ : المصباح الذي تم إختياره تم إنتاجه من طرف الآلة التي تنتج 40%

$A_2$ : المصباح الذي تم إختياره تم إنتاجه من طرف الآلة التي تنتج 30%

$A_3$ : المصباح الذي تم إختياره تم إنتاجه من طرف الآلة التي تنتج 20%

$A_4$ : المصباح الذي تم إختياره تم إنتاجه من طرف الآلة التي تنتج 10%

**D** : المصباح الذي تم إختياره فاسد

**C** : المصباح الذي تم إختياره صالح

- **إيجاد إحتمال أن يكون المصباح المختار فاسدا:** المصباح الفاسد يمكن أن يكون قد أختير من طرف الآلة $A_1$ أو من الآلة $A_2$ أو من الآلة $A_3$ أو من الآلة $A_4$. وبالتالي الحادث D يساوي إلى:

$$D = (D \cap A_1) \cup (D \cap A_2) \cup (D \cap A_3) \cup (D \cap A_3)$$

المصباح فاسد ومن إنتاج الآلة 4 أو المصباح فاسد ومن إنتاج الآلة 3 أو المصباح فاسد ومن إنتاج الآلة 2 أو المصباح فاسد ومن إنتاج الآلة 1.

$$P(D) = P(A_1).P(D/A_1) + P(A_2).P(D/A_2) + P(A_3).P(D/A_3) + P(A_4).P(D/A_4)$$

$$P(D) = (0.4).(0.02) + (0.3).(0.04) + (0.2).(0.01) + (0.1).(0.05) = \mathbf{0.027}$$

- **احتمال أن يكون المصباح صحيحا (صالحا):** بنفس الطريقة

$$P(C) = P(A_1).P(C/A_1) + P(A_2).P(C/A_2) + P(A_3).P(C/A_3) + P(A_4).P(C/A_4)$$

$$P(C) = (0.4).(0.98) + (0.3).(0.96) + (0.2).(0.99) + (0.1).(0.95) = \mathbf{0.973}$$

**بطريقة أخرى:**

احتمال أن يكون المصباح صحيحا يساوي إلى الاحتمال الكلي ناقصا منه احتمال أن يكون المصباح فاسد:

$$\boldsymbol{P(C)} = 1 - P(\boldsymbol{D}) = \mathbf{0.973}$$

**مثال (3- 9):**

ثلاثة صناديق متشابهة تحتوي الكرات الآتية:

- الصندوق الأول: 10 كرات، منها 7 بيضاء و3 سوداء.
- الصندوق الثاني: 5 كرات، منها 4 بيضاء و 1 سوداء.
- الصندوق الثالث: 5 كرات، منها 2 بيضاء و3 سوداء.

نختار صندوق من الصناديق الثلاثة بشكل عشوائي، ثم نسحب منه كرة بشكل عشوائي.

المطلوب: أحسب احتمال سحب كرة بيضاء.

**الحل:**

نعرّف الحوادث أولا:

$\boldsymbol{A_1}$ : الكرة المسحوبة من الصندوق الأول

$\boldsymbol{A_2}$ : الكرة المسحوبة من الصندوق الثاني

$\boldsymbol{A_3}$ : الكرة المسحوبة من الصندوق الثالث

$\boldsymbol{B}$ : الكرة المسحوبة بيضاء

$$\boldsymbol{B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)}$$

$$\boldsymbol{P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + P(A_3).P(B/A_3)}$$

$$\boldsymbol{P(B)} = \left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{7}{10}\right) + \left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{2}{5}\right) = \boldsymbol{\frac{19}{30}}$$

**خامسا: قانون الاحتمال النسبي (نظرية بايز Bayes):**

لتكن $A_1, A_2 \dots \dots A_n$ أحداث متنافية فيما بينها، حيث إتحادها يشكل المجموعة الكلية **Ω**، و **A** حدث ما يتحقق عن طريق واحد أو أكثر من الأحداث $(\boldsymbol{A_k})$، إذا علمنا أنّ A تحقق، نحسب احتمال تحققه عن طريق الحدث $(A_k)$ كما يلي:

$$\boldsymbol{P(A_k/A) = \frac{P(A).P(A/A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k).P(A/A_k)}}$$

حيث:

$$\boldsymbol{P(A \cap A_k) = P(A).P(A/A_k)}$$

$$\boldsymbol{P(A) = \sum P(A_k).P(A/A_k)}$$

سميت هذه النظرية بنظرية الاحتمال النسبي لأنها تمكننا من حساب احتمال أن يكون حدث ما $(A_k)$ هو المسبب لوقوع حدث آخر $A$.

**مثال (3− 10):**

في مصنع لإنتاج نوع معين من المصبرات نجد أن:

- الآلة الأولى تنتج 40% من الإنتاج الكلي علما أنّ 1.5% من إنتاجها معيب.
- الآلة الثانية تنتج 25% من الإنتاج الكلي علما أنّ 1.2% من إنتاجها معيب.
- الآلة الثالثة تنتج 35% من الإنتاج الكلي علما أنّ 2% من إنتاجها معيب.

إذا اخترنا وحدة واحدة من المصبرات بشكل عشوائي، أحسب مايلي:

1− احتمال أن تكون معيبة.

2− احتمال أن تكون معيبة ومن إنتاج الآلة الأولى.

3− احتمال أن تكون معيبة ومن إنتاج الآلة الثانية.

4− احتمال أن تكون معيبة ومن إنتاج الآلة الثالثة.

**الحل:** نعين الأحداث أولا:

$\boldsymbol{D}$ : الوحدة معيبة .

$\boldsymbol{A_1}$ : الوحدة المختارة من انتاج الآلة الأولى .

$\boldsymbol{A_2}$ : الوحدة المختارة من انتاج الآلة الثانية .

$\boldsymbol{A_3}$ : الوحدة المختارة من انتاج الآلة الثالثة .

$$P(A_1) = 0.4 \quad , \quad P(A_2) = 0.25 \quad , \quad P(A_3) = 0.35$$

$$P(D/A_1) = 0.015 \quad , \quad P(D/A_2) = 0.012 \quad , \quad P(D/A_3) = 0.02$$

**1- حساب احتمال أن تكون الوحدة المختارة معيبة:**

$$\boldsymbol{P(D)} = \sum \boldsymbol{P(A_i)} \, . \, \boldsymbol{P(D/A_i)}$$

$$\boldsymbol{P(D)} = (0.4).(0.015) + (0.25).(0.012) + (0.35).(0.02) = \mathbf{0.016}$$

**2- حساب احتمال أن تكون هذه الوحدة معيبة ومن إنتاج الآلة الأولى:**

$$\boldsymbol{P(A_1/D)} = \frac{P(A_1).P(D/A_1)}{P(D)} = \frac{(0.4)(0.015)}{0.016} = \mathbf{0.375}$$

**3- حساب احتمال أن تكون هذه الوحدة معيبة ومن إنتاج الآلة الثانية:**

$$\boldsymbol{P(A_2/D)} = \frac{P(A_2).P(D/A_2)}{P(D)} = \frac{(0.25)(0.012)}{0.016} = \mathbf{0.1875}$$

**4- حساب احتمال أن تكون هذه الوحدة معيبة ومن إنتاج الآلة الثالثة:**

$$\boldsymbol{P(A_3/D)} = \frac{P(A_3).P(D/A_3)}{P(D)} = \frac{(0.35)(0.02)}{0.016} = \mathbf{0.4375}$$

**مثال (3- 11):**

يوجد في مؤسسة تعليمية 20% من الذكور و12% من الإناث يدرسون مادة الإحصاء، نقوم باختيار أحد التلاميذ من هذه المؤسسة بطريقة عشوائية فنجده يدرس مادة الإحصاء. فإذا علمت أن نسبة الذكور في المؤسسة هي نفسها نسبة الإناث وتساوي 50%، فأوجد مايلي:

1- احتمال أن يكون التلميذ ذكرا.

2- نفس السؤال 1، علما أنّ بعد الاختيار تبين أن التلميذ لا يدرس مادة الإحصاء.

3- نفس الأسئلة السابقة باستعمال طريقة الأشجار البيانية.

**الحل:** نعرف الأحداث أولا:

$\boldsymbol{A}$ : اختيار تلميذ يدرس مادة الاحصاء

$\overline{\boldsymbol{A}}$ : ألا يدرس مادة الاحصاء

$\boldsymbol{M}$ : التلميذ ذكرا

$\boldsymbol{F}$ : التلميذ أنثى

ولدينا من معطيات هذا المثال:

$$P(M) = 0.5 \quad , \quad P(F) = 0.5 \quad , \quad P(A/M) = 0.2 \quad , \quad P(A/F) = 0.12$$

1- احتمال أن يكون ذكرا:

$$P(M/A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)}$$

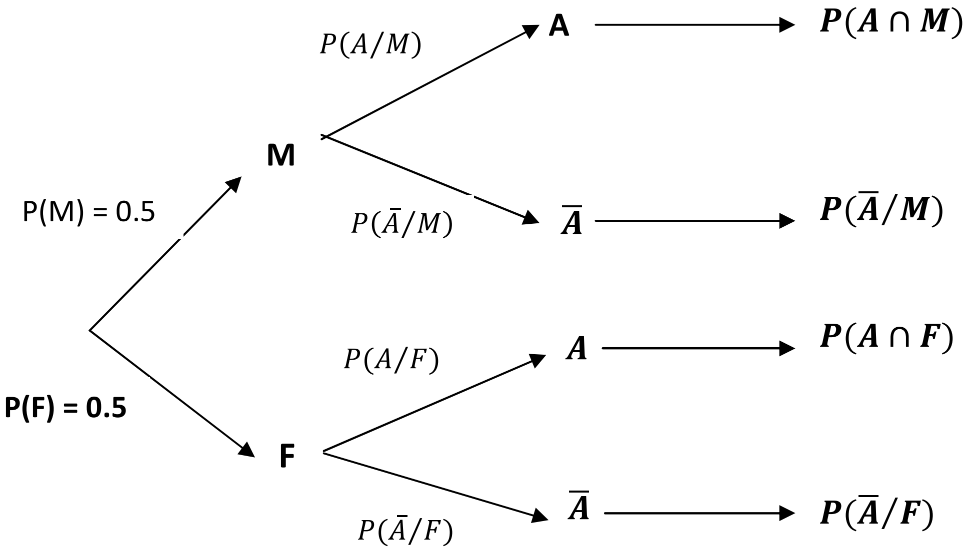
$$= \frac{P(M).P(A/M)}{P(M).P(A/M) + P(F).P(A/F)} = \frac{(0.5)(0.2)}{(0.5)(0.2) + (0.5)(0.12)} = 0.625$$

2- بعد الاختيار تبين أن التلميذ لا يدرس الإحصاء (احتمال أن يكون ذكرا): بنفس الطريقة السابقة:

$$P(M/\bar{A}) = \frac{P(M \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$

$$= \frac{P(M).P(\bar{A}/M)}{P(M).P(\bar{A}/M) + P(F).P(\bar{A}/F)} = \frac{(0.5)(0.8)}{(0.5)(0.8) + (0.5)(0.88)} = 0.476$$

3- طريقة الأشجار البيانية:



## تمارين محلولة

### التمرين 01:

نقوم برمي قطعة نرد في الهواء.

- ما هو احتمال الحصول على عدد أكبر أو يساوي 4؟
- ما هو احتمال الحصول على عدد أكبر أو يساوي 4 علما أنّ النتيجة المتحصل عليها عدد زوجي؟

**الحل:** نعرّف الحوادث أولا:

**A:** جميع النتائج التي تكون أكبر من أو تساوي 4.

**B:** تشمل الأعداد الزوجية.

* مجموعة النتائج الكلية Ω هي:

$$\boldsymbol{\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}}$$

**1-** احتمال الحصول على عدد أكبر أو يساوي 4 أي حساب: ($P(A)$):

$$\mathbf{A} = \{4,5,6\} \quad \Rightarrow \boldsymbol{P(A)} = \frac{3}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

**2-** احتمال الحصول على عدد أكبر أو يساوي 4 علما أنّ النتيجة المتحصل عليها عدد زوجي ($\boldsymbol{P(A/B)}$**:**

$$\mathbf{B} = \{2,4,6\} \quad \Rightarrow \boldsymbol{P(B)} = \frac{3}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{A \cap B} = \boldsymbol{\{4,6\}} \quad \Rightarrow \boldsymbol{P(A \cap B)} = \boldsymbol{\frac{2}{6}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

وبالتالي:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3}$$

### التمرين 02:

في تجربة رمي قطعة نقود 3 مرات. ولتكن المجموعة Ω تمثل عدد الأوجه (Faces) التي تظهر.

- هل المجموعة Ω مجموعة احتمالية منتهية؟
- أوجد احتمال الحادث A إذا كان يمثل الحصول على الوجه في الرمية الأخيرة.

- أوجد احتمال الحادث B إذا كان يمثل الحصول على ظهرين.

**الحل:**

إن المجموعة الكلية (فضاء العينة) عند رمي 3 قطع نقدية يحتوي على العناصر التالية:

$$\boldsymbol{\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}}$$

لكن فضاء العينة في هذه الحالة لا يمثل النتائج الممكنة في حد ذاتها وإنما يمثل عدد الأوجه التي تظهر، وبالتالي فإن $\Omega$ يحتوي على 0 وجه أو وجه واحد أو وجهين أو ثلاثة أوجه.

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$$

نحسب احتمالات كل عنصر من عناصر $\Omega$:

$$P(0) = P(\{PPP\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(1) = P(\{PPF, FPP, PFP\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(2) = P(\{FFP, FPF, PFF\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(3) = P(\{FFF\}) = \frac{1}{8}$$

وبما أن جميع الاحتمالات المعرّفة على $\Omega$ تحقق الشرطين:

1) $P_i \geq 0$

2) $\sum P_i = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 1$

إذن المجموعة $\Omega$ هي مجموعة احتمالية منتهية.

**2- إيجاد احتمال الحادث A:** إن الحادث A يحوي كل النتائج الممكنة التي يظهر فيها الوجه في الرمية الأخيرة.

$$A = \{PPF, PFF, FPF, FFF\}$$

ومنه:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

3- **إيجاد احتمال الحادث B:** إنّ الحادث B يحوي كل النتائج الممكنة التي يظهر فيها ظهرين:

$$B = \{PPF, PFP, FPP\}$$

ومنه:

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

**التمرين 03:**

شركة جزائرية لإنتاج وبيع الأنابيب البلاستيكية، لهذه الشركة فرعين للإنتاج أحدهما في ولاية سطيف والآخر في ولاية بومرداس. تصنع الشركة نفس النوع في الفرعين (المشروعين). يصنع في سطيف 60% من الإنتاج و40% في بومرداس ثم يجمع الإنتاج من كلا المصدرين في مستودع مركزي. وبعد دراسة موسعة صرّح مدير الجودة أنّ 5% من الأنابيب المنتجة في ولاية سطيف و10% في بومرداس لا تصلح للاستعمال لوجود مشاكل تتعلق بالجودة، وبالتالي عندما تبيع الشركة الإنتاج الفاسد (المعيب) فهي لا تتحمل فقط تكاليف استبدالها وإنما تخسر جزءا من سمعتها. بعد هذا التصريح يريد مدير الشركة المكلّف بشؤون الإنتاج أن يوزع التكاليف بشكل عادل على الفرعين. لفعل ذلك يجب أولا حساب احتمال أن يكون المنتج المعيب قد أنتج في أحد الفرعين. أي يجب الإجابة عن السؤالين التاليين:

- ما احتمال أن يكون المنتوج من إنتاج فرع سطيف (S) علما أنه معيب (D)؟ يعني حساب $P(S/D)$.
- ما احتمال أن يكون المنتوج من إنتاج فرع بومرداس (B) علما أنه معيب (D)؟ يعني حساب $P(B/D)$.

**الحل:**

لحساب الاحتمالين، نستخدم نظرية بايز (الاحتمال النسبي):

$$P(S/D) = \frac{P(S).P(D/S)}{P(D)}$$

$$P(B/D) = \frac{P(B).P(D/B)}{P(D)}$$

حيث:

$$\boldsymbol{P(D)} = P(S).P(D/S) + P(B).P(D/B)$$

$$= (0.6).(0.05) + (0.4).(0.10)$$

$$= 0.03 + 0.04 = \mathbf{0.07}$$

وبالتالي نسبة المعيب في كلا الفرعين هو 0.07، وبذلك بتطبيق قاعدة بايز نجد:

$$\boldsymbol{P(S/D)} = \frac{P(S).P(D/S)}{P(D)} = \frac{(0.6)(0.05)}{0.07} = \boldsymbol{0.4286}$$

$$\boldsymbol{P(B/D)} = \frac{P(B).P(D/B)}{P(D)} = \frac{(0.4).(0.10)}{0.07} = \boldsymbol{0.5714}$$

**التمرين 04:**

يتسابق في الجري 3 أشخاص A, B, C. فإذا كان احتمال فوز C هو ضعف احتمال فوز A، واحتمال فوز A هو ثلاثة أضعاف احتمال فوز B. المطلوب:

- عيّن احتمال فوز كل منهم.
- عين احتمال فوز B أو C علما بأنّ هناك فائزا واحدا.

**الحل:**

ليكن احتمال فوز B يمثل K وبالتالي احتمال فوز A هو 3K واحتمال فوز C هو $2(3K)$ أي 6K.

وبما أنّ A وB وC هي مجموعات جزئية تشكل المجموعة الكلية Ω فإنّ:

$$\boldsymbol{P(A)} + \boldsymbol{P(B)} + \boldsymbol{P(C)} = \boldsymbol{P(\Omega)} \Rightarrow 3K + K + 6K = 1 \ \Rightarrow \boldsymbol{K} = \boldsymbol{\frac{1}{10}}$$

ومنه:

$$\boldsymbol{P(A) = 3K = \frac{3}{10}} \quad , \quad \boldsymbol{P(B) = K = \frac{1}{10}} \quad , \quad \boldsymbol{P(C) = 6K = \frac{6}{10}}$$

ويكون احتمال فوز B أو C:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{1}{10} + \frac{6}{10} = \frac{7}{10}$$

لأنّ B وC متنافيان، لأنه لدينا في الأخير فائز واحد.

**التمرين 05:**

يرغب طالب في دراسة تخصص الطيران المدني، فبعد أن رفض طلبه في جميع الكليات في بلده، لجأ للمراسلة مع جامعات خارجية، وذلك بمساعدة مؤسستين للمراسلة، بقصد تحصيل قبول في إحدى الجامعات من خلالها، وهي X و Y فإذا كان احتمال أن يحصل على قبول عن طريق X هو (0.7)، واحتمال أن يحصل على قبول عن طريق Y هو (0.4)، وباحتمال 0.75 بأنّ إحدى المؤسستين سوف لا تحصل له عن القبول، عيّن احتمال حصوله على قبول من إحدى المؤسستين.

**الحل:**

- لتكن الحادثة A حادثة حصول الطالب على قبول عن طريق المؤسسة x.
- ولتكن الحادثة B حادثة حصول الطالب على قبول عن طريق المؤسسة y.

ومن معطيات التمرين لدينا:

$$\boldsymbol{P(A)=0.7 \quad , \quad P(B)=0.4 \quad , \quad P(\bar{A}\cup\bar{B})=0.75}$$

وحيث A و B حادثتين غير متنافيتين، فيكون احتمال الحادث المطلوب $(A\cup B)$ يساوي إلى:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=P(A)+P(B)-[1-P(\overline{A\cap B})]$$

$$=P(A)+P(B)-1+P(\bar{A}\cup\bar{B})$$

$$=(0.7)+(0.4)-1+0.75=\mathbf{0.85}$$

**التمرين 06:**

صندوق به 20 مصباح كهربائي، 5 منها تالفة (فاسدة). سحبنا عشوائيا مصباحين على التوالي. ما هو احتمال أن يكون كلا المصباحين تالفين إذا كان السحب:

1- بدون إعادة.

2- السحب بالإعادة

**الحل:**

- نفرض أنّ **A** الحادث الذي يقع إذا وفقط إذا كان المصباح الأول تالفا.
- نفرض أنّ B الحادث الذي يقع إذا وفقط إذا كان المصباح الثاني تالفا.

**1- إذا كان السحب بدون إعادة:**

وبذلك يكون:

$P(A/B)=P(A)$ لأنه لا علاقة بين تلف المصباح الأول وتلف المصباح الثاني (A وB حادثتان مستقلتان عن بعضهما البعض).

إذن: $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

ومن معطيات التمرين لدينا:

$$\boldsymbol{P(A)}=\frac{5}{20}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

$$\boldsymbol{P(B) = \frac{4}{19}}$$

إذن: $\boldsymbol{P(A\cap B) = \left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{4}{19}\right) = \frac{4}{76}}$

**2- إذا كان السحب بالإعادة:**

تصبح: $\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{4}}$ و $\boldsymbol{P(B) = \frac{1}{4}}$

وبالتالي:

$$\boldsymbol{P(A\cap B)} = \left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} = \boldsymbol{0.06}$$

**التمرين 07:**

كيس به 4 كرات بيضاء و3 سوداء، وكيس آخر به 3 كرات بيضاء و5 كرات سوداء. أختيرت كرة عشوائيا من الكيس الأول ووضعت في الكيس الثاني. سحبت بعد ذلك كرة من الكيس الثاني. ما احتمال أن تكون هذه الكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء؟

**الحل:**

لنفرض أنّ:

$\boldsymbol{N_1}$ : الحادث الذي يقع إذا وفقط إذا كانت الكرة المسحوبة من الكيس الأول سوداء .

$\boldsymbol{N_2}$ : الحادث الذي يقع إذا وفقط إذا كانت الكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء .

$\boldsymbol{B_1}$ : الحادث الذي يقع إذا وفقط إذا كانت الكرة المسحوبة من الكيس الأول بيضاء .

$\boldsymbol{B_2}$ : الحادث الذي يقع إذا وفقط إذا كانت الكرة المسحوبة من الكيس الثاني بيضاء .

إنّ الاحتمال المطلوب هو حساب احتمال الحادث:

$$\boldsymbol{E = N_2 \cap (B_1 \cup N_1) = (N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap N_2)}$$

لكن $B_1 \cap \mathrm{N}_2$ و $N_1 \cap \mathrm{N}_2$ حادثان متنافيان (يستحيل حدوثهما معا).

إذن:

$$P(E) = P(N_1 \cap N_2) + P(B_1 \cap N_2)$$

$$= P(N_1).P(N_2/N_1) + P(B_1).P(N_2/B_1)$$

$$= \left(\frac{3}{7}\right).\left(\frac{6}{9}\right) + \left(\frac{4}{7}\right).\left(\frac{5}{9}\right)$$

$$= \frac{38}{63} = \mathbf{0.6}$$

**التمرين 08:**

معطيات الجدول التالي تمثل توزع 900 شخص في قرية صغيرة تبعا للجنس والحالة الوظيفية:

| | **موظف** | **غير موظف** |
|---|---|---|
| **ذكر** | 460 | 40 |
| **أنثى** | 140 | 260 |

اختير شخص عشوائيا من هذه القرية. ما احتمال أن يكون رجلا علما بأنه موظف؟

**الحل:**

نفرض أن:

- الحادث **A**: الشخص رجلا.
- الحادث **B**: الشخص موظفا.

وبذلك يكون:

$$P(B) = \frac{460 + 140}{900} = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{460}{900} = \frac{23}{45}$$

$$\boldsymbol{P(A/B)} = \frac{\boldsymbol{P(A \cap B)}}{\boldsymbol{P(B)}} = \frac{23}{45} \div \frac{2}{3} = \frac{23}{30} = \mathbf{0.77}$$

## تمارين مقترحة

**التمرين 01:**

كيس يحتوي على 6 كرات حمراء، 4 بيضاء، 5 زرقاء. نستخرج كرة عشوائيا، فما هو احتمال أن تكون الكرة المستخرجة:

أ- حمراء. **ب**- بيضاء. **ت**- ليست حمراء. **ث**- حمراء أو بيضاء.

**التمرين 02:**

ليكن لديك 52 بطاقة ملونة بأربعة ألوان: الأحمر، الأزرق، الأبيض، الأصفر، بحيث كل لون مرقم من 1 إلى 13. نستخرج بطاقة بشكل عشوائي من بين هذه البطاقات. ولتكن لديك الأحداث التالية:

$A$ : البطاقة المستخرجة حمراء تحمل رقم 12 .

$B$ : البطاقة المستخرجة حمراء .

$C$ : البطاقة المستخرجة زرقاء تحمل رقم 1 أو حمراء .

$D$ : البطاقة المستخرجة زرقاء أو حمراء .

أوجد احتمال:

أ- $P(A)\ ,\ P(B)\ ,\ P(C)\ ,\ P(D)$

ب- $P(A \cap B)\ ,\ P(A \cap C)\ ,\ P(A \cap D)$

ت- $P(A \cup B)\ ,\ P(A \cup C)\ ,\ P(A \cup D)$

**التمرين 03:**

قمنا بإلقاء قطعة نقود في الهواء، فإذا كان الناتج "**صورة**" أعدنا إلقاءها مرة ثانية. أما إذا كانت " **كتابة** " فإننا نلقي حجر النرد.

**المطلوب:**

1- أكتب فضاء العينة $\Omega$.

2- أحسب احتمال الحادث A الذي يقع إذا ظهر رقم أقل من 4 على الحجر.

3- أحسب احتمال الحادث B الذي يقع إذا ظهرت الصورة مرتان.

### التمرين 04:

سألنا 3 نساء عن رأيهم في الاستمرار في عرض برنامج تلفزيوني خاص بالمرأة.

**المطلوب:** أكتب فضاء العينة مستخدما Y للدلالة على نعم و N للدلالة على كلا أو لا.

### التمرين 05:

في مؤسسة توجد وظيفتان شاغرتان، وقد تم رجلان وامرأتان لشغلهما. اختار المدير عشوائيا شخص للوظيفة الأولى وآخر للوظيفة الثانية.

**المطلوب:**

1- أكتب فضاء العينة $\Omega$.

2- أحسب احتمال الحادث A الذي يعني أنّ الوظيفة الأولى قد شغلها رجلا.

3- أحسب احتمال الحادث B الذي يعني أنّ وظيفة واحدة فقط شغلها رجل.

4- أحسب احتمال الحادث C الذي يعني أنّ الوظيفتان قد شغلتهما امرأتان.

### التمرين 06:

سحبت عشوائيا كرة من كيس به 3 كرات حمراء و4 خضراء و5 صفراء.

**المطلوب:**

1- ما احتمال أن لا تكون الكرة المسحوبة صفراء اللون.

2- ما احتمال كون الكرة المسحوبة صفراء أو حمراء.

### التمرين 07:

في حالة لنقل المسافرين يوجد 6 أزواج (رجل وامرأة). نختار شخصين عشوائيا:

**المطلوب:**

1- أوجد احتمال أن يكون هذين الشخصين متزوجين.

2- أوجد احتمال أن تكون إحداهم امرأة والآخر رجل.

* نختار الآن 4 أشخاص. أوجد احتمال:

1- أن نكون قد اخترنا زوجين من الأشخاص المتزوجين.

2- لا يوجد أي زوج بين الأربعة أشخاص.

3- يوجد زوج واحد بين الأربعة.

**التمرين 08:**

ثلاثة باحثين في الاقتصاد A, B, C يقوم كل منهم وبشكل مستقل بدراسة مشكلة في الاقتصاد بغرض الوصول إلى حل لها، فإذا كان احتمال أن يصل الباحث A إلى حل هو $\frac{2}{3}$ واحتمال أن يصل الباحث B إلى حل هو $\frac{3}{4}$ واحتمال أن يصل الباحث C إلى حل هو $\frac{4}{5}$.

**المطلوب:** احسب احتمال الحوادث التالية:

1- التوصل إلى حل من قبل باحث واحد على الأقل.

2- عدم التوصل إلى حل.

3- توصل باحث واحد فقط للحل.

**التمرين 09:**

ليكن لدينا ثلاثة أكياس A, B, C تحتوي على كرات. يحتوي الكيس A على 2 كرة بيضاء، 3 سوداء والكيس B يحتوي على 4 كرات بيضاء و1 سوداء. أما الكيس C فيحتوي على 3 كرات بيضاء و4 سوداء. نختار كيسا عشوائيا ونختار منه كرة.

**المطلوب:**

1- ما احتمال أن يكون A هو المختار مع العلم أنّ الكرة المسحوبة بيضاء.

2- ما احتمال أن يكون C هو المختار مع العلم أنّ الكرة المسحوبة سوداء.

# الفصل الرابع:

# المتغيرات العشوائية المتقطعة والمستمرة

### تمهيد:

سبق لنا وأن ذكرنا أن التجربة العشوائية تقودنا إلى مجموعة من النتائج (البيانات). نتائج هذه التجربة قد تكون كمية وقد تكون كيفية (نوعية). فمثلا عند رمي قطعة نقود في الهواء ثلاث مرات (أو رمي 3 قطع نقدية مرة واحدة) فإن فضاء العينة Ω هو $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$.

إنّ الباحث الإحصائي يهتم بالبيانات سواء كانت كمية أو كيفية، كما أن تغيير (تحويل) المعلومات الكيفية إلى رقمية قد يساعد الباحث أكثر على تسهيل الدراسة ومن ثم استقراء النتائج. فيمكن أن نمثل كل نتيجة بعدد كيفي، فمثلا يمكن أن نربط كل عنصر من فضاء العينة بعدد، فعلى سبيل المثال يمكن أن نربط كل عنصر من عناصر Ω بعدد مرات ظهور الصورة.

### أولا: تعريف المتغير العشوائي (Random Variable)

المتغير العشوائي هو تطبيق من فضاء العينة Ω إلى مجموعة الأعداد الحقيقية. ويرمز للمتغير العشوائي عادة بحرف كبير مثل **X** أو **Y** أو **Z**... بينما ترمز **x** أو **y** أو **z**... لإحدى قيم هذا التابع.

مثلا في تجربة رمي قطعة نقود مرتين متتاليتين، لتكن المتغيرة العشوائية X هي عدد مرات ظهور الصورة:

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$$

إنّ قيم المتغيرة العشوائية تكون كالتالي:

$$PP \to 0 \quad , \quad PF \to 1 \quad , \quad FP \to 1 \quad , \quad FF \to 2$$

نقوم بتلخيص قيم المتغيرة العشوائية في الجدول الآتي:

| **FF** | **FP** | **PF** | **PP** | **فضاء العينة Ω** |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 0 | **المتغيرة العشوائية (X)** |

إن المتغيرة العشوائية X التي عرفناها على فضاء العينة Ω تأخذ ثلاث قيم هي: 0، 1 و2.

### ثانيا: أنواع المتغيرات العشوائية

**2-1- المتغيرات العشوائية المتقطعة:** إذا كان فضاء العينة Ω منتهيا أو غير منته لكنه قابل للعد، فنقول عن هذا الفضاء بأنه فضاء منقطعا (منفصلا)، والمتغير العشوائي المولد عن هذا الفضاء يدعى متغير عشوائي متقطع (منفصل).

**✍ مثال (4- 1):**

- إذا كان المتغير العشوائي X يدل على الرقم الظاهر على حجر النرد أي: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فإنّ X متغير عشوائي متقطع.
- إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد مرات رمي حجر النرد حتى يظهر الرقم 6 $X = \{1, 2, 3 \ldots\}$ فإنّ X متغير عشوائي متقطع.
- إذا كان المتغير X يدل على عدد الوافدين على مركز البريد في يوم ما فإنّ X متغير عشوائي متقطع.
- إذا كان المتغير X يدل على جنس الشخص الذي يتبرع بالدم لأحد المستشفيات، فإن هذا الشخص يمكن أن يكون ذكر أو أنثى وبذلك المتغيرة العشوائية X سوف تتحول من متغيرة كيفية إلى متغيرة رقمية وتصبح تمثل أرقام وليست صفات، وهي متغيرة متقطعة لأنها قابلة للعد.

**2- 2- المتغيرات العشوائية المستمرة:** إذا كان فضاء العينة Ω غير منته وغير قابل للعد، فنقول عن هذا الفضاء بأنه فضاء مستمرا (متصلا)، والمتغير العشوائي المولد عن هذا الفضاء يدعى متغير عشوائي مستمر (متصل).

**✍ مثال (4- 2):**

- إذا كان المتغير X يدل على عمر الإنسان، فإن المتغير X متغير عشوائي مستمر (لأنّ عمر الإنسان غير قابل للعد). ونفس الشيء مثلا لعمر المصباح.
- إذا كان المتغير X يدل على عدد قطرات المطر في فصول السنة، فإن المتغير X متغير عشوائي مستمر (لأنه غير منته وغير قابل للعد).

## ثالثا: قانون توزيع الاحتمالات للمتغيرة العشوائية

### 3-1- التوزيعات المتقطعة للاحتمالات:

إن قانون توزيع الاحتمالات لمتغيرة عشوائية يبين لنا كيفية توزيع الاحتمالات بدلالة قيم المتغيرة العشوائية. والتوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع يعرّف بواسطة دالة الاحتمال التي نرمز لها بـ $f(x)$ ، وهو صيغة أو جدول يعرض القيم الممكنة والاحتمال المرافق لكل قيمة.

**أ- دالة توزيع الاحتمالات $f(x)$ (أو دالة الكثافة الاحتمالية) للمتغير العشوائي المتقطع:** لتكن X متغيرة عشوائية متقطعة ولتكن $x_1, x_2, x_3, \dots\dots x_n$ قيمها الممكنة والمرتبة ترتيبا تصاعديا، ولتكن الدالة المعرّفة كالتالي:

$$\mathbf{f(x_k) = P(X = x_k) \quad , \quad k = 1, 2, 3 \dots\dots n}$$

تسمى الدالة $f$ دالة توزيع الاحتمالات إذا حققت الشرطين التاليين:

$$\begin{cases} \mathbf{1.} \quad \mathbf{f(x_k) \geq 0} \\ \mathbf{2.} \quad \sum \mathbf{f(x_k) = 1} \end{cases}$$

ويسمى التمثيل البياني للدالة f **ببيان الاحتمالات**، ويمثل إما بالأعمدة أو المدرج التكراري.

**مثال (4- 3):**

نقوم برمي قطعة نقود 3 مرات، وليكن X عدد الأوجه التي نحصل عليها. أوجد التوزيع الاحتمالي لـ X، ثم مثّل هذا التوزيع بيانيا.

**الحل:**

يكون فضاء العينة Ω هو:

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$

إن التوزيع الاحتمالي للمتغير **X** هو:

| 3 | 2 | 1 | 0 | $X$ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\mathbf{f(x) = P(X = x)}$ |

حيث:

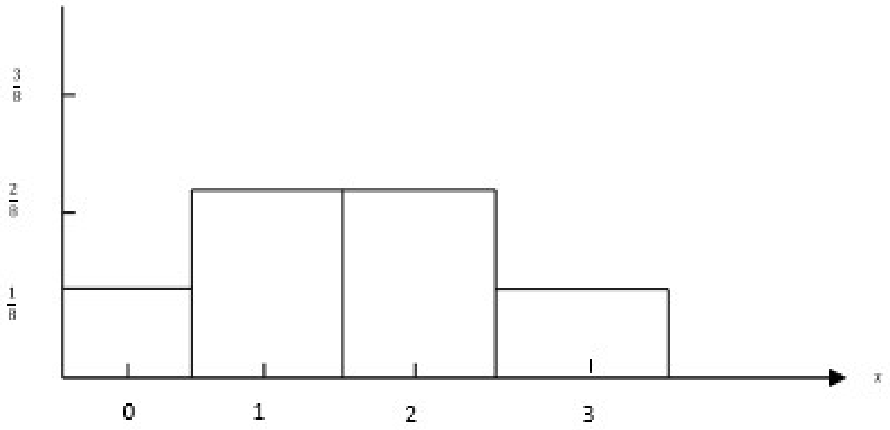
$$\mathbf{f(0) = P(X = 0) = \{PPP\} = \frac{1}{8}}$$

$$\mathbf{f(1) = P(X = 1) = \{PPF, PFP, FPP\} = \frac{3}{8}}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \{PFF, FPF, FFP\} = \frac{3}{8}$$

$$f(3) = P(X = 3) = \{FFF\} = \frac{1}{8}$$

ويكون التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالي (بيان الاحتمالات) هو:



**ب- دالة التوزيع التراكمي (التكاملي) المتقطع للاحتمالات $F(x)$:** لتكن X متغيرة عشوائية متقطعة ولتكن $x_1, x_2, x_3 \dots . x_n$ قيمها الممكنة والمرتبة ترتيبا تصاعديا، ولتكن الدالة المعرّفة كالتالي:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

إنّ الدالة المعرّفة أعلاه تسمى دالة التوزيع التراكمي (التكاملي) للاحتمالات أو تابع الاحتمالات.

**مثال (4- 4):**

نرمي قطعتي نقد في الهواء، ولتكن المتغيرة العشوائية X تمثل عدد الوجوه التي تظهر.

1- عين فضاء العينة.

2- أوجد التوزيع الاحتمالي لـ X.

3- أوجد قيم F(0)، F(1)، F(2)، F(2.5)، F(0.5) للمتغيرة العشوائية X.

4- أوجد التوزيع التكاملي للمتغيرة العشوائية $X$.

5- أرسم بيان الدالة.

**الحل:**

**1- فضاء العينة Ω:**

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$$

**2- التوزيع الاحتمالي:**

$$f(0) = P(X = 0) = P\{PP\} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{f(1) = P(X = 1) = P\{PF, FP\} = \frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{f(2) = P(X = 2) = P\{FF\} = \frac{1}{4}}$$

| x | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P(x) | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

**3- إيجاد قيم F(0)، F(1)، F(2)، F(2.5)، F(0.5):**

$$\boldsymbol{F(0)} = P(X \leq 0) = P(x = 0) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{F(1)} = P(X \leq 1) = P(x = 0) + \boldsymbol{P(x = 1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

$$\boldsymbol{F(2)} = P(X \leq 2) = P(X \leq 1) + \boldsymbol{P(x = 2)} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{F(2.5)} = P(X \leq 2.5) = P(X \leq 2) = \mathbf{1}$$

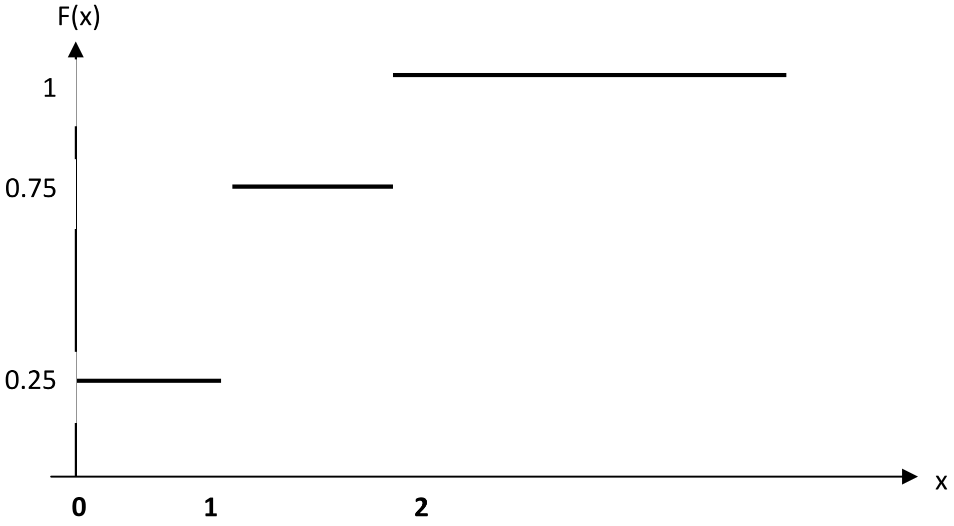
$$\boldsymbol{F(0)} = P(X \leq 0.5) = P(x = 0) = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

4- يمكن استنتاج دالة التوزيع التراكمي المتقطع للاحتمالات F(x) إذا كان لـ X عدد منته من القيم على الشكل التالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ \quad \cdot & \\ \quad \vdots & \\ f(x_1) + f(x_2) + \cdots f(x_n) & x_n \leq x < \infty \end{cases}$$

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

5- **بيان الدالة:** يكون بيان الدالة على الشكل التالي:



### 3-2- التوزيعات المستمرة للاحتمالات:

تشكل الكميات التي تستخدم للحصول على مقاديرها لأجهزة قياس، أو أدوات قياس متغيرات عشوائية مستمرة. فمثلا الوزن والطول والقوة ومعدل سقوط الأمطار ودرجة حرارة الجسم تعتبر متغيرات عشوائية مستمرة. وقياسات مثل هذه المتغيرات هي نقاط على خط اتخذنا عليه سلما للقياس، أي أنها نقاط على محور الأعداد الحقيقية أو على مجالات من هذا المحور، ولا يمكننا في حالة متغير عشوائي مستمر، تخصيص احتمال مهما كان صغيرا لأي قيمة من قيم المتغير نظرا لكثرة القيم المختلفة، إذ توجد لانهاية من النقاط وغير قابلة للعدّ في أي مجال مهما كانت صغيرة.

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن:

**هل يمكن تحديد احتمال لكل قيمة $x$ من قيم المتغير العشوائي $X$ بحيث يكون مجموع هذه القيم على كثرتها مساويا تماما للواحد الصحيح؟**

واضح أنّ الإجابة عن هذا السؤال سوف تكون بالنفي، لأنه لا يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي مستمر بجدول. وبالتالي لا يمكن تمثيله بيانيا بمدرج أو أعمدة بيانية، بل إنه في حالة المتغير العشوائي المستمر سيمثل التوزيع الاحتمالي بمنحنى مستمر، وهذا المنحنى قد يمكن التعبير عنه بمعادلة. ومثل هذه المعادلة يجب أن تكون تابعة بالضرورة للقيم العددية التي يأخذها المتغير العشوائي المستمر، ولتكن معادلة هذا المنحنى $f(x)$. إنّ $f(x)$ تسمى بـ " **دالة التوزيع أو دالة الكثافة الاحتمالية**".

**أ- دالة التوزيع الاحتمالي $f(x)$ (دالة الكثافة الاحتمالية) للمتغير العشوائي المستمر:** إذا كانت X متغيرة عشوائية مستمرة تأخذ قيما في المجال $[a , b]$، فإنّ عدد قيمها يكون لانهائيا، لذلك فإنّ قانون توزيع الاحتمالات كما سبق وقلنا لا يمكن أن يكون في جدول كما في المتغيرة العشوائية المتقطعة ولكنه يعطى في شكل دالة رياضية على الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a , b] \\ 0 & x \notin [a , b] \end{cases}$$

وحتى تسمى الدالة **$f(x)$** دالة احتمال أو دالة الكثافة الاحتمالية يجب أن يتحقق الشرطان التاليان:

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

**ملاحظة:**

لقد جعلنا الحدود بين $\infty -$ و $\infty +$ لأنّ المتغيرة العشوائية بالتأكيد تأخذ قيمة أو عدة قيم داخل هذا المجال.

ونعرّف احتمال أن تكون X محصورة في المجال $[a , b]$ كالآتي:

$$P( a < X < b ) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

**مثال (4- 5):**

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرّفة بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} c . x & : 0 < x < 4 \quad , c \in R \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- أوجد c حتى تكون الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمالية.

2- أوجد الاحتمال $P(1 < x < 3)$.

**الحل:**

**1-** حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية لابد التحقق من توفر الشرطين السابقين:

- الشرط الأول $f(x) \geq 0$ محقق.

- الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{0}^{4} (c . x)dx = 1 \Rightarrow \left[\frac{c . x^2}{2}\right]_0^4 = 1 \Rightarrow 8\,c - 0 = 1 \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{\frac{1}{8}}$$

**2**- حساب الاحتمال $P(1 < x < 3)$:

$$P(1 < x < 3) = \int_{1}^{3} f(x)\,dx = \int_{1}^{3} (\frac{1}{8} x)\,.\,dx = \left[\frac{\frac{1}{8}\,.\,x^2}{2}\right]_{1}^{3} = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

**مثال (4- 6):**

لتكن الدالة f(x) معرّفة بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{27}\,(1 + x) & : 2 \leq x \leq 5 \\ 0 & 2 > x \ \text{أو}\ x > 5 \end{cases}$$

تأكد من أنّ f(x) هي دالة كثافة احتمالية.

**الحل:**

حتى تكون f(x) دالة كثافة احتمالية يجب أن تحقق الشرطين المذكورين أعلاه:

- الشرط الأول $f(x) \geq 0$ محقق.
- الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_{2}^{5} \left(\frac{2}{27}\,(1 + x)\right) dx = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{27}\left[x + \frac{1}{2}\,x^2\right]_{2}^{5} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{27}\left[\left(5 + \frac{25}{2}\right) - (2 + \frac{4}{2})\right] = 1$$

**ب - دالة التوزيع التراكمي (التكاملي) للمتغيرة العشوائية المستمرة $F(x)$**: نعرّف دالة التوزيع التراكمي (تسمى أيضا بتابع الاحتمالات) لمتغيرة عشوائية مستمرة X كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

**مثال (4- 7):**

**1**- أوجد تابع الاحتمالات للمتغيرة العشوائية في المثال (4- 5)، ثم أوجد احتمال أن تكون X محصورة بين 2 و3.

**2**- أوجد تابع الاحتمالات للمتغيرة العشوائية في المثال (4- 6). ثم أوجد كل من $P(X < 4)$ و $P(3 \leq X < 4)$ .

**الحل:**

**1**- من المثال (4-5):

أ- إيجاد تابع الاحتمالات للمتغيرة العشوائية:

- إذا كانت x أقل من 0 فإن تابع الاحتمالات يكون على الشكل:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{x} 0\ dx = \mathbf{0}$$

- إذا كانت $x$ محصورة بين 0 و4 فإن تابع الاحتمالات يكون على الشكل:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X < 0) + P(0 < X < x)$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{x} \left(\frac{1}{8}x\right) dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}\mathbf{x^2}$$

- إذا كانت $x$ أكبر من 4 فإن تابع الاحتمالات يكون على الشكل:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X < 0) + P(0 < X < 4) + P(4 < X < x)$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{4} \left(\frac{1}{8}x\right) dx + \int_{4}^{x} 0\ dx = \mathbf{1}$$

يمكن تلخيص النتائج السابقة كالآتي:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & -\infty < \mathbf{x} < \mathbf{0} \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}\mathbf{x^2} & \mathbf{0} < \mathbf{x} < \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} < \mathbf{x} < +\infty \end{cases}$$

**ب**- إيجاد قيمة احتمال أن تكون x محصورة بين 2 و3:

$$\boldsymbol{P(2 \leq X \leq 3)} = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = F(3) - F(2) = \int_{0}^{3} \left(\frac{1}{8}x\right) dx - \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{8}x\right) dx$$

$$= \left[\frac{\frac{1}{8}.x^2}{2}\right]_0^3 - \left[\frac{\frac{1}{8}.x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{9}{16} - \frac{4}{16} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}}$$

**2**- من المثال (4- 6):

أ- إيجاد تابع الاحتمالات للمتغيرة العشوائية:

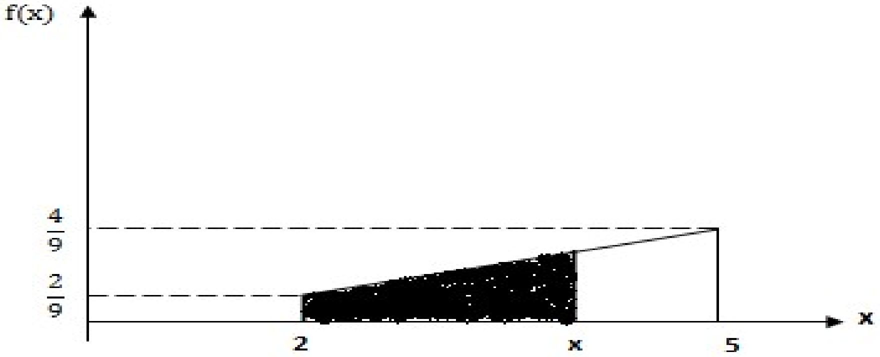
$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\ dx =$$

$$\frac{2}{27}\int_{2}^{x}(1+x)\ dx$$

$$=\frac{2}{27}\left[x+\frac{1}{2}x^2\right]_2^x=$$

$$\frac{2}{27}\left[x+\frac{1}{2}x^2-4\right].$$

وبذلك يكون بيان الاحتمال هو:



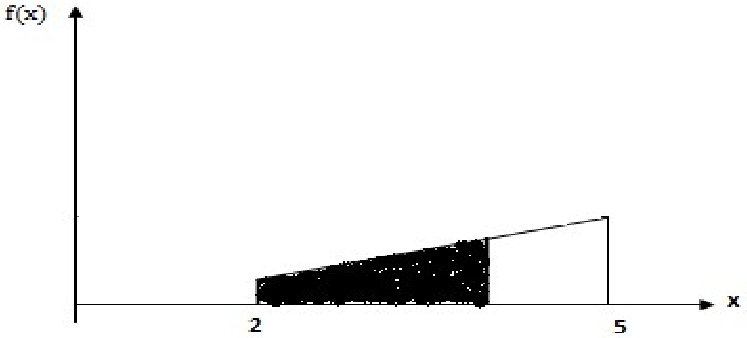
**ب-** إيجاد الاحتمال $P(X\leq 4)$:

$$P(X\leq 4)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\ dx$$

$$=\frac{2}{27}\int_{2}^{4}(1+x)\ dx$$

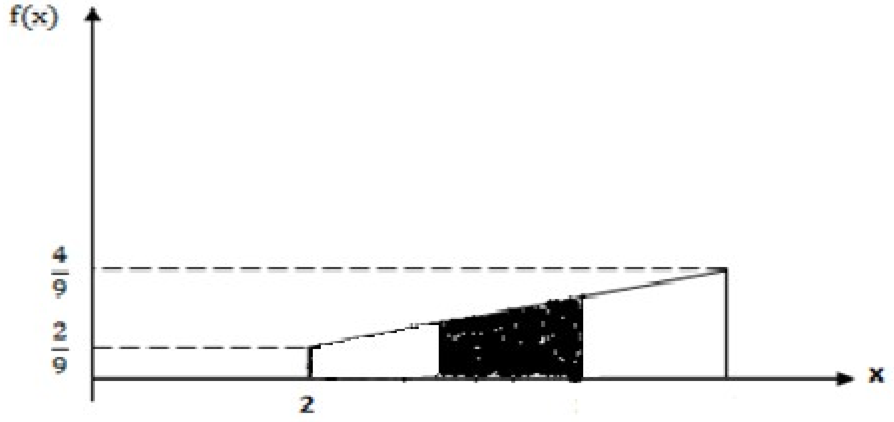
$$=\frac{16}{27}$$

$$=0.59$$



**ت-** إيجاد الاحتمال $P( 3 \leq X < 4 )$:

$$\mathbf{P( 3 \leq X < 4 )} = \int_{3}^{4} \mathrm{f(x)\ dx} = \frac{2}{27}\left[\mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}^2}{2}\right]_3^4 = \mathbf{0.33}$$



إنّ منحنى تابع الاحتمال في مثالنا هذا (المثال 4- 6) هو القطعة المستقيمة التي معادلتها:

$$\mathrm{y} = \frac{2}{27}(1 + \mathrm{x}) \qquad\qquad 2 \leq \mathrm{x} \leq 5$$

وبالتالي يمكن حساب الاحتمالات $P(X < 4)$ ، $P(3 \leq X < 4)$ مباشرة من حساب المساحات المظللة في الشكل، غير أنّ المنحنى البياني لتابع الاحتمال ليس دوما عبارة عن مستقيم بل هو في الغالب يكون ذو شكل أكثر تعقيدا، ولذلك فالمساحة يجب حسابها بالتكامل المحدد.

## رابعا: التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي المتقطع والمستمر

كما رأينا سابقا عند تطرقنا لمفهوم المتغيرة العشوائية ورأينا بأنها عبارة عن دالة معرفة على مجموعة الحوادث ولها قيم في R، وبواسطة هذه الدالة قمنا بتحويل جميع النتائج الممكنة لتجربة عشوائية إلى أرقام تعكس قيم المتغيرة العشوائية. لقد كان الهدف من هذا التحويل هو تبسيط التحليل ودراسة خصائص هذه المتغيرة العشوائية مثل المتوسط (التوقع الرياضي)، التباين، الانحراف المعياري...

### 4- 1- التوقع الرياضي (المتوسط) للمتغير العشوائي المتقطع (المنفصل).

التوقع الرياضي هو مقياس من مقاييس النزعة المركزية، يمثل القيمة التي تتركز حولها قيم المتغيرة العشوائية، ولذلك سمي بالقيمة المتوسط أو المتوسط.

إذا كانت X متغيرة عشوائية متقطعة ودالة احتمالها f(x). ولنرمز لتوقع $X$ بـ $E(X)$ أو $\mu_x$ أو μ، فعندئذ يكون:

$$E(X) = \sum \mathbf{x}\,.\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{x}\,.\,P(X = \mathbf{x}_i)$$

**مثال (4- 8):**

أوجد التوقع الرياضي $E(X)$ في المثال (4- 3).

**الحل:**

$$E(X) = \sum \mathbf{x}\,.\,P(X = \mathbf{x}_i) = 0\,.\left(\frac{1}{8}\right) + 1\,.\left(\frac{3}{8}\right) + 2\,.\left(\frac{3}{8}\right) + 3.\left(\frac{1}{8}\right) = 1.5$$

ويمكن القول عن هذه القيمة:

- المقدار 1.5 هي القيمة المتوقعة رياضيا لعدد أوجه P.
- يتمركز التوزيع الاحتمالي لعدد أوجه الـ P حول النقطة 1.5. ولو نظرنا إلى صورة المدرج الاحتمالي في المثال (4- 3) لوجدنا أنه يتمركز حول النقطة 1.5 على المحو ox. فالقيمة 1.5 هي متوسط التوزيع الاحتمالي.
- القيمة 1.5 أيضا تمثل القيمة المتوسطة لعدد أوجه الـ P على المدى الطويل، فلو كررنا قذف قطع النقود الثلاث عددا كبيرا من المرات وسجلنا عدد أوجه الـ P التي حصلنا عليها ثم حسبنا متوسطها لحصلنا على القيمة 1.5.

### 4- 2- التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر:

التوقع الرياضي لمتغيرة عشوائية مستمرة دالة احتمالها f(x) يعطى بالصيغة التالية:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}\,.\,\mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathbf{dx}$$

**مثال (4- 9):**

إذا كانت $f(x)$ دالة كثافة احتمالية للمتغيرة العشوائية X المعطاة بالصيغة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,.\,x & : 0 < x < 2 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد المتوسط (التوقع الرياضي لهذه المتغيرة).

**الحل:**

إن التوقع الرياضي لهذه المتغيرة يعطى بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x\,f(x)dx} = \int_{0}^{2} \mathrm{x}\left(\frac{1}{2}.\mathrm{x}\right)\mathrm{dx} = \int_{0}^{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{x}^2\right)\mathrm{dx} = \left[\frac{\mathrm{x}^3}{6}\right]_0^2 = \boldsymbol{\frac{8}{6}}$$

## 4- 3- التباين والانحراف المعياري للمتغيرة العشوائية المتقطعة

إنّ الفائدة من دراسة وحساب التباين هو معرفة مدى تباعد قيم المتغيرة العشوائية عن المتوسط الحسابي، فكلما كان التباين صغيرا دلّ ذلك على أنّ قيم المتغيرة متقاربة وكلما كان كبيرا دلّ ذلك على تباعدها. ويرمز للتباين بالرمز $V(X)$ وأيضا بـ $\sigma_x^2$. أما الانحراف فهو الجذر التربيعي للتباين ويرمز له بالرمز $\sigma_x$.

إنّ تباين المتغيرة العشوائية X معرّف كما يلي:

$$\boldsymbol{V(X) = \sigma_x^2 = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2}$$

بصيغة أخرى:

$$\boldsymbol{V(X) = \sigma_x^2} = \sum(\mathbf{x_i} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{2}}\,.\,\mathrm{f(x)}$$

**مثال (4- 10):**

أوجد التوقع والانحراف المعياري للمتغيرة العشوائية X التي تمثل مربع عدد الوجوه التي تظهر عند رمي قطعتين من النقود في الهواء.

**الحل:**

يمثل الجدول التالي دالة الاحتمالات للمتغيرة العشوائية X:

| 4 | 1 | 0 | **x** |
|---|---|---|---|
| | | $\frac{1}{4}$ | **P(x)** |

- $\mathbf{E(X)} = 0\,.\,\mathrm{P(X=0)} + 1\,.\,\mathrm{P(X=1)} + 4\,.\,\mathrm{P(X=4)} = 0.\left(\frac{1}{4}\right) + 1.\left(\frac{2}{4}\right) + 4.\left(\frac{1}{4}\right) = \mathbf{1.5}$
- $\mathbf{V(X)} = \boldsymbol{\sigma_x^2} = \sum(\mathbf{x_i} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{2}}\,.\,\mathrm{f(x)} = (0-1.5)^2\,.\left(\frac{1}{4}\right) + (1-1.5)^2\,.\left(\frac{2}{4}\right) + (4 - 1.5)^2\,.\left(\frac{1}{4}\right) = \mathbf{2.25}$
- $\boldsymbol{\sigma_x} = \sqrt{\mathbf{V(X)}} = \sqrt{2.25} = \mathbf{1.5}$

## 4- 4- التباين والانحراف المعياري للمتغيرة العشوائية المستمرة:

يعطى التباين في حالة كانت المتغيرة العشوائية مستمرة بالصيغة التالية:

$$\boldsymbol{\sigma_{\mathrm{x}}^2} = \boldsymbol{E[(X-\ \mu)^2]} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{x}-\mu)^2\ \mathrm{f(x)dx}$$

**مثال (4- 11):**

بأخذ المثال (4- 9)، أوجد التوقع، التباين والانحراف المعياري للمتغيرة العشوائية X.

**الحل:**

- $\boldsymbol{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x\,f(x)\,dx} = \int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x\right)dx = \int_0^2 (\frac{1}{2}x^2)\ dx = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$
- $\boldsymbol{\sigma_{\mathrm{x}}^2} = E[(X-\ \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{x}-\mu)^2\ \mathrm{f(x)dx}$

$$= \int_0^2 \left(\mathrm{x}-\frac{4}{3}\right).\ \frac{1}{2}\mathrm{x\,dx}$$

$$= \int_0^2 (\frac{1}{2}\mathrm{x}^3 - \frac{4}{3}\mathrm{x}^2 + \frac{8}{9}\mathrm{x})^2\ \mathrm{dx}$$

$$= \left[\frac{1}{8}\mathrm{x}^4 - \frac{4}{9}\mathrm{x}^3 + \frac{8}{18}\mathrm{x}^2\right]_3^2 = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

- $\boldsymbol{\sigma_x} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma_x^2}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{2}{2}}} = \boldsymbol{0.47}$

## 4- 5- خواص التوقع والتباين:

- إذا كانت X متغيرة عشوائية و c عدد ثابت فإنّ:

$$\boldsymbol{E(cX) = c\,E(X)}$$

- إذا كان $X_1$ و $X_2$ متغيرين عشوائيين فإنّ:

$$\boldsymbol{E(X_1 +\ X_2) = E(X_1) + E(X_2)}$$

- تباين العدد الثابت هو الصفر:

$$\boldsymbol{V(c) = E[\ (c^2) - E(c)\ ]^2\ = c^2 - c^2 = 0}$$

- إذا كان X متغير عشوائي و c عدد ثابت فإنّ:

$$\boldsymbol{V(cX) = c^2\ V(X)}$$

- إذا كان $X_1$ و $X_2$ متغيرين عشوائيين **مستقلين** فإنّ:

$$\boldsymbol{V(X_1 +\ X_2) = V(X_1) + V(X_2)}$$

وأيضا:

$$\boldsymbol{V(X_1 -\ X_2) = V(X_1) + V(X_2)}$$

## تمارين محلولة

### التمرين 01:

في تجربة عشوائية، نقوم برمي حجر نرد مرتين، وليكن المتغير X المتغير الذي يدل على الحصول على أكبر الوجهين والمتغير Z المتغير الدال على أصغر الوجهين. المطلوب:

1- إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية لكل من X وZ .

2- إيجاد دالة التوزيع التراكمي (تابع الاحتمالات) لكل من X وZ.

**الحل:**

نوجد أولا فضاء العينة Ω الذي يمثل نتائج رمي حجر النرد مرتين:

| **6** | **5** | **4** | **3** | **2** | **1** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1.6) | (1.5) | (1.4) | (1.3) | (1.2) | (1.1) | **1** |
| (2.6) | (2.5) | (2.4) | (2.3) | (2.2) | (2.1) | **2** |
| (3.6) | (3.5) | (3.4) | (3.3) | (3.2) | (3.1) | **3** |
| (4.6) | (4.5) | (4.4) | (4.3) | (4.2) | (4.1) | **4** |
| (5.6) | (5.5) | (5.4) | (5.3) | (5.2) | (5.1) | **5** |
| (6.6) | (6.5) | (6.4) | (6.3) | (6.2) | (6.1) | **6** |

**1- دالة الكثافة الاحتمالية لـ X و Z:** (تكون في شكل جدول لأنّ المتغيرين العشوائيين متقطعين).

| **المجموع** | **6** | **5** | **4** | **3** | **2** | **1** | X |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $\frac{11}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | f(x) |

| **المجموع** | **6** | **5** | **4** | **3** | **2** | **1** | $Z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{11}{36}$ | f(z) |

**2- دالة التوزيع التراكمي (تابع الاحتمالات):**

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{36} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{4}{36} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{9}{36} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{16}{36} & 4 \leq x < 5 \\ \frac{25}{36} & 5 \leq x < 6 \\ 1 & 6 \leq x \end{cases} \quad , \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} 0 & z < 1 \\ \frac{11}{36} & 1 \leq z < 2 \\ \frac{20}{36} & 2 \leq z < 3 \\ \frac{27}{36} & 3 \leq z < 4 \\ \frac{32}{36} & 4 \leq z < 5 \\ \frac{35}{36} & 5 \leq z < 6 \\ 1 & 6 \leq z \end{cases}$$

**التمرين 02:**

ليكن X متغيرا عشوائيا منقطعا (منفصلا) دالة كثافته الاحتمالية جاءت كالتالي:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{15}} \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{x}} & ,\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب: عيّن **جدول** الكثافة الاحتمالية لـ X، والدالة التراكمية $\boldsymbol{F}(\mathbf{x})$ ثم أحسب $\boldsymbol{F}(\mathbf{2.5})$.

**الحل:**

جدول الكثافة لـ X:

| **المجموع** | $\mathbf{x_4 = 3}$ | $\mathbf{x_3 = 2}$ | $\mathbf{x_2 = 1}$ | $\mathbf{x_1 = 0}$ | $\boldsymbol{X}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{15}}$ | $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{15}}$ | $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{15}}$ | $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{15}}$ | $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ |

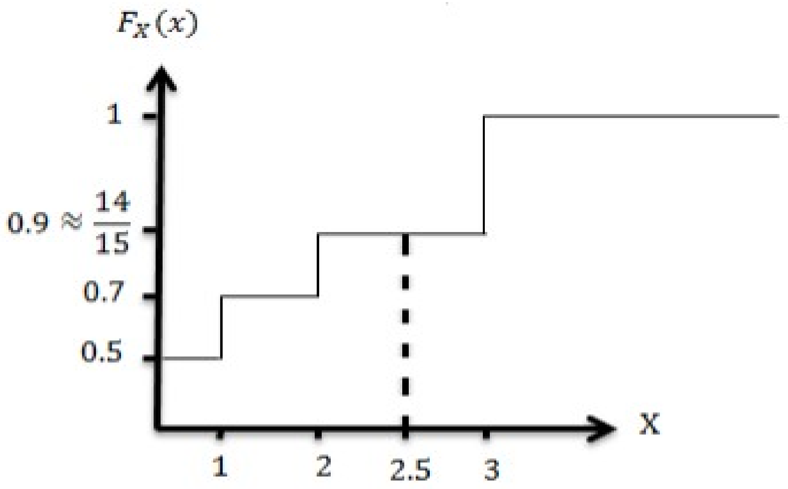
أما الدالة التراكمية $\boldsymbol{F}(\mathbf{x})$ فتكون بالشكل:

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & x < 0 \\ f(x_1) = f(0) = \mathbf{\dfrac{8}{15}} & 0 \leq x < 1 \\ f(0) + f(1) = \dfrac{8}{15} + \dfrac{4}{15} = \mathbf{\dfrac{12}{15}} & 1 \leq x < 2 \\ f(0) + f(1) + f(2) = \mathbf{\dfrac{14}{15}} & 2 \leq x < 3 \\ f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \mathbf{1} & 3 \leq x \end{cases}$$

- $F(2.5) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= f(0) + f(1) + f(2) = \mathbf{\frac{14}{15}}$$

أما بيان الدالة فيكون بالشكل:



**التمرين 03:**

ليكن X متغيرا عشوائيا له دالة الكثافة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

حيث $\lambda$ ثابت حقيقي موجب.

1- عيّن $\lambda$ لكي تكون f(x) دالة كثافة احتمالية فعلية لـ X.

2- عيّن دالة التوزيع التراكمية $\mathbf{F(x)}$، ثم أحسب $\mathbf{F(2.5)}$.

**الحل:**

لدينا الشرط الأول محقق وهو أنه لدينا فرضا: $f(x) = \lambda e^{-x} \geq 0$

نتحقق من توفر الشرط الثاني: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0}(0)dx + \int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-x}dx = 1$

$$\Rightarrow \lambda[-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1 \Rightarrow \lambda\,[0-(-1)] = 1 \Rightarrow \lambda(1) = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

تصبح دالة الكثافة الاحتمالية لـ X على الشكل:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

**2- حساب دالة التوزيع التراكمي:**

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

- من أجل $x < 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^{0}(0)\,dx = 0$
- من أجل $x \geq 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^{0}(0)\,dx + \int_{0}^{x} e^{-x} = [-e^{-x}]_0^x = (-e^{-x}) - (-1) = 1 - e^{-x}$

وبذلك تصبح دالة التوزيع التراكمي هي:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

**3- حساب $F(2.5)$:**

$$F(2.5) = 1 - e^{-2.5} = 0.92$$

**التمرين 04:**

لتكن لديك الدالة التالية:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{x} < 0 \\ \mathbf{x} & \mathbf{0} \leq \mathbf{x} < 1 \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{1} \leq \mathbf{x} < 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \leq \mathbf{x} \end{cases}$$

**1-** برهن أنّ $\mathbf{f(x)}$ دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي X.

**2-** أوجد F(x) لـ X، ثم أحسب $F(0.2)$ و $F(1.5)$.

**الحل:**

**1- إثبات أنّ $f(x)$ دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي X:**

لدينا الشرط الأول $f(x) \geq 0$ محقق.

نتحقق من توفر الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(x).dx} = \int_{-\infty}^{0} (0).\mathrm{dx} + \int_{0}^{1} \mathrm{x.dx} + \int_{1}^{2} \frac{1}{2}.\mathrm{dx} + \int_{2}^{+\infty} (0).\mathrm{dx} = 0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x}{2}\right]_1^2 + 0$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \mathbf{1}$$

إذن f(x) دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي X.

**2- إيجاد F(x) لـ X، ثم حساب $F(0.2)$ و $F(1.5)$.**

$$\mathrm{F(x)} = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{f(x)dx}$$

- من أجل $x < 0$: $\mathrm{F(x)} = \int_{-\infty}^{0}(0)\,\mathrm{dx} = 0$

- من أجل $0 \leq x < 1$ فإنّ: $\mathrm{F(x)} = \int_{-\infty}^{0} (0).\mathrm{dx} + \int_0^x \mathrm{x.dx} = 0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$

- من أجل $1 \leq x < 2$ فإنّ: $\mathbf{F(x)} = \int_{-\infty}^{x} \mathbf{f(x).dx} = \int_{-\infty}^{0}(0).\mathrm{dx} + \int_0^1 \mathrm{x.dx} + \int_1^x \frac{1}{2}.\mathrm{dx}$

$$= 0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x}{2}\right]_1^x = \frac{1}{2} + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{x}{2}}$$

- من أجل $2 \leq x$ فإنّ: $\mathbf{F(x)} = \int_{-\infty}^{x} \mathbf{f(x).dx} = \int_{-\infty}^{0}(0).\mathrm{dx} + \int_0^1 \mathrm{x.dx} + \int_1^2 \frac{1}{2}.dx + \int_2^x (0).\mathrm{dx}$

$$= 0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 0 = \mathbf{1}$$

ومنه تصبح دالة التوزيع التراكمي على الشكل:

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{x} < 0 \\ \dfrac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \leq \mathbf{x} < 1 \\ \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} & \mathbf{1} \leq \mathbf{x} < 2 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \leq \mathbf{x} \end{cases}$$

ومن خلال هذه الدالة نجد:

$F(0.2) = \frac{(0.20)^2}{2} = \frac{0.04}{2} = 0.02$ حيث: $0 \leq 0.02 \leq 1$

$F(1.5) = \frac{1.5}{2} = 0.75$ حيث: $0 \leq 0.75 \leq 1$

**التمرين 05:**

ليكن X متغيرا عشوائيا، دالة توزيعه الاحتمالية التراكمية:

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{1+x}} & \mathbf{x} > 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{x \leq 0} \end{cases}$$

عيّن دالة الكثافة الاحتمالية لـ X وتحقق من ذلك، ثم عين C من أجل $P(X \leq C) = \frac{1}{2}$.

**الحل:**

$$\mathrm{f(x)} = \left(\mathrm{F(x)}\right)' = \left(\frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}}\right)' = \frac{(1+\mathrm{x})-\mathrm{x}}{(1+\mathrm{x})^2} = \frac{1}{(1+\mathrm{x})^2}\ ; \mathrm{x} > 0$$

ومنه تكون دالة الكثافة الاحتمالية لـ X هي:

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+\mathrm{x})^2} & \mathrm{x} > 0 \\ 0 & \mathrm{x} \leq 0 \end{cases}$$

وللتحقق من أنها فعلا دالة كثافة احتمالية، لدينا:

- الشرط الأول محقق $\mathrm{f(x)} \geq 0$.
- الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(x).dx} = \int_{-\infty}^{0} (0)\,.\,\mathrm{dx} + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+\mathrm{x})^2}.\,\mathrm{dx} = 0 + \left[-\left(\frac{1}{1+\mathrm{x}}\right)\right]_0^{+\infty} = \left(0-(-1)\right) = \mathbf{1}$$

- **إيجاد قيمة C:**

$$P(X \leq C) = \frac{1}{2} \Rightarrow F(C) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{C}{1+C} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2C = 1 + C \Rightarrow \boldsymbol{C = 1}$$

**أي أنّ:** $P(X \leq 1) = \frac{1}{2}$

**التمرين 06:**

ليكن X متغيرا عشوائيا له الكثافة الاحتمالية:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{(x-2)^2}}{\mathbf{9}} & \mathbf{x = 0, 1, 2, 3, 4, 5} \\ \mathbf{0} & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

هل f(x) دالة كثافة احتمالية فعلية؟

**الحل:**

نتحقق من شروط دالة الاحتمال:

- الشرط الأول محقق: $\mathrm{f(x)} \geq 0$

– الشرط الثاني: $\sum f(x) = 1$ نتحقق من توفره:

$$\sum f(x) = \sum_{x=0}^{5} \frac{(x-2)^2}{9} = \frac{(-2)^2}{9} = \frac{(-1)^2}{9} + 0 + \frac{(1)^2}{9} + \frac{(2)^2}{9} + \frac{(3)^2}{9} = \frac{19}{9} \neq 1$$

إذن: f(x) ليست دالة كثافة احتمالية لـ X.

**التمرين 07:**

ليكن X متغيرا عشوائيا له الكثافة الاحتمالية:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{K}\mathbf{x^2} & \mathbf{x \in [0\,,3]} \\ \mathbf{0} & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- عيّن الثابت K حتى تكون $\mathbf{f(x)}$ دالة كثافة احتمالية فعلية لـ X.

2- عيّن دالة التوزيع الاحتمالية التراكمية لـ X ثم أحسب $P(1 < X < 2)$.

**الحل:**

– الشرط الأول $f(x) \geq 0$ محقق من أجل $K > 0$.

– الشرط الثاني $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(x).dx = 1}$ نتحقق من توفره:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(x).dx} = \int_{-\infty}^{0} \mathbf{(0).dx} + \int_{0}^{3} \mathbf{Kx^2.dx} + \int_{3}^{+\infty} \mathbf{(0)\,dx} = 0 + K\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + 0 = 1 \Rightarrow K(9) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{K} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$$

فتصبح دالة الكثافة الاحتمالية الفعلية لـ X هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} & x \in [0,3] \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

2– دالة التوزيع الاحتمالية التراكمية تعطى بالعلاقة:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x).dx$$

ومنه:

– من أجل $x < 0$ فإنّ $F(x) = \int_{-\infty}^{0} (0).dx$.

– من أجل $0 \leq x \leq 3$ فإنّ: $F(x) = \int_{-\infty}^{0} (0).dx + \int_{0}^{x} \frac{x^2}{9}.dx = \frac{x^3}{27}$

– من أجل $x < 3$ فإنّ:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} (0).\,dx + \int_{0}^{3} \frac{x^2}{9}.\,dx + \int_{3}^{x} (0).\,dx = 0 + \left[\frac{x^3}{27}\right]_0^3 + 0 = (1-0) = 1$$

فتصبح دالة التوزيع الاحتمالي التراكمية لـ X هي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x^3}{27} & 0 \le x \\ 1 & 3 \le x \end{cases}$$

ويكون:

$$P(1 < X < 2) = \int_{1}^{2} f(x).\,dx = \int_{1}^{2} \frac{x^2}{2}.\,dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_1^2 = \frac{7}{27}$$

**التمرين 08:**

مجموعة مكونة من 6 طلبة من المركز الجامعي ميلة من بينهم طالبان من معهد العلوم الاقتصادية. اخترنا اثنين من المجموعة بصورة عشوائية. المتغير العشوائي X يدل على عدد طلبة معهد العلوم الاقتصادية في المجموعة المختارة. والمطلوب:

1- أكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

2- أحسب توقع (متوسط) المتغير العشوائي X.

3- أحسب التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

**الحل:**

**1-** جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

| 2 | 1 | 0 | $X$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{\frac{1}{15}}$ | $\mathbf{\frac{8}{15}}$ | $\mathbf{\frac{2}{5}}$ | **P(X)** |

2- التوقع للمتغير العشوائي X:

$$\boldsymbol{E(X)} = \mu = \sum x\,.P(X = x) = 0.\left(\frac{2}{5}\right) + (1).\left(\frac{8}{15}\right) + (2).\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{10}{15} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

3- التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X:

$$\boldsymbol{\sigma_X^2} = \sum (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^2\,.\ \boldsymbol{P(X = x)} = \frac{8}{45} + \frac{8}{135} + \frac{16}{135} = \frac{48}{135} = \frac{16}{45} = \mathbf{0.36}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_X} = \sqrt{0.36} = \mathbf{0.60}$$

**التمرين 09:**

أوجد التوقع الرياضي والانحراف المعياري للمتغيرة العشوائية X ذات الكثافة الاحتمالية التالية:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{3e^{-3x}} & \mathbf{x} > 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{x \leq 0} \end{cases}$$

**الحل:**

$$\mathbf{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x.f(x).\ dx} = \int_{0}^{\infty} (3x.e^{-3x}).dx = \left[-x.e^{-3x} - \frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^{\infty} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_X^2} = \mathbf{E[(X-\mu)^2]} = \mathbf{E(X^2)} - \boldsymbol{\mu^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x^2f(x).dx} - \boldsymbol{\mu_X^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (3x^2.e^{-3x}).dx - \frac{1}{9}$$

$$= \left[-x^2.e^{-3x} - \frac{2}{3}xe^{-3x} - \frac{2}{9}e^{-3x}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \mathbf{\frac{1}{9}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_X} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

## تمارين مقترحة

### التمرين 01:

اخترنا بشكل عشوائي ثلاثة أشخاص من مجموعة مكونة من 3 رجال و4 نساء. لنفترض أنّ المتغير العشوائي X يدل على عدد النساء في المجموعة المختارة:

1- أوجد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

2- أوجد دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X. ثم أرسم بيان الاحتمال.

3- أحسب التوقع الرياضي (المتوسط) للمتغير العشوائي X.

4- أوجد التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

### التمرين 02:

إذا كان X متغيرا عشوائيا يدل على عدد البنات في العائلات المكونة من أربع أطفال. فالمطلوب:

1- أوجد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

2- - أوجد دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X.

3- أحسب التوقع الرياضي (المتوسط) للمتغير العشوائي X، ثم التباين والانحراف المعياري.

### التمرين 03:

لتكن لديك الدالة التالية للمتغير العشوائي المتقطع:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{55}.x & x = 1, 2, 3 \ldots..10 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- أوجد دالة التوزيع التراكمية.

2- أرسم بيان دالة الاحتمال.

3- أحسب كل من $P(2 \leq x \leq 4)$، $P(x \leq 3)$، $P(x > 2)$.

### التمرين 04:

إذا كان X يمثل متغيرا عشوائيا متقطعا له الدالة الاحتمالية التالية:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{2kx} & \mathbf{x = 1, 2, 3} \\ \mathbf{k(1 + 2x)} & \mathbf{x = 4, 5, 6, 7} \\ \mathbf{0} & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- أوجد قيمة الثابت $k$.

2- أحسب الاحتمال $P(2 < X < 5)$ ثم $P(X = 6)$.

**التمرين 05:**

لتكن لديك الدالة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & x = 1, 2, \dots \dots \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

أثبت أنّ هذه الدالة ذات كثافة احتمالية.

**التمرين 06:**

ليكن X متغيرا عشوائيا متقطعا له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- أوجد دالة التوزيع التراكمية.

2- أحسب الاحتمالات التالية: $P(1 \le X < 3)$، $P(X \le 2)$.

**التمرين 07:**

إذا كان X متغير عشوائي متقطع، له دالة كثافة احتمالية معرفة في الجدول التالي:

| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | $X$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4C | 3C | 2C | C | 0 | $P(X = x)$ |

المطلوب:

1- أوجد قيمة C.

2- أوجد التوقع الرياضي (المتوسط)، التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

**التمرين 08:**

إذا كان X متغير عشوائي مستمر، دالة كثافته الاحتمالية معرفة على الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} 3\,x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

أوجد التوقع الرياضي (المتوسط)، التباين والانحراف المعياري لهذا المتغير.

# الفصل الخامس:

# التوزيعات الاحتمالية

## تمهيد:

تلعب التوزيعات الاحتمالية دورا كبيرا في التطبيقات الإحصائية وبشكل خاص في نظرية العينات. ويمكن تقسيم التوزيعات الإحصائية إلى مجموعتين:

- التوزيعات الاحتمالية المتقطعة.
- التوزيعات الاحتمالية المستمرة.

ويمكن الرجوع إلى كتب الإحصاء للتعرف على هذه التوزيعات وخصائصها، وسوف نكتفي هنا بالإشارة إلى بعض التوزيعات الهامة التي لها أهمية خاصة في نظرية الاحتمالات وأيضا نظريات المعاينة وهي: التوزيع المنتظم، توزيع ذي الحدين، التوزيع البواسوني، التوزيع الأسي، التوزيع الطبيعي، توزيع ستودنت، توزيع مربع كاي وتوزيع فيشر.

## أولا- بعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

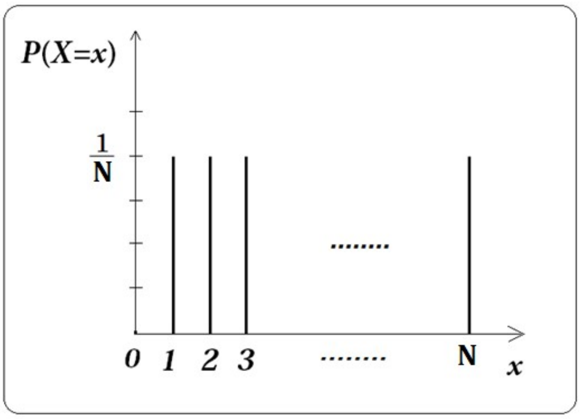
### 1-1- التوزيع المنتظم (Uniform Distribution):

يعتبر التوزيع المنتظم من أبسط التوزيعات الاحتمالية المتقطعة، حيث يستخدم هذا التوزيع في التجارب التي تكون نتائجها لها نفس الفرصة في الظهور أو الحدوث. فمثلا عند رمي حجرة نرد مرة واحدة وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد النقاط التي تظهر على وجه حجرة النرد، فإن هذا المتغير العشوائي يتوزع وفق التوزيع المنتظم المتقطع (المنفصل).

بصفة عامة، إذا كان X متغير عشوائي متقطع بدالة احتمال معرفة بالشكل التالي:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & x = 1, 2, 3 \ldots N \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

فإن المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع المتقطع بمعلمة N. ويكون التمثيل البياني للتوزيع المنتظم كمايلي:



**نظرية (5− 1):**

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع المنتظم المنفصل بمعلمة N فإنّ:

$\mu_X = E(X) = \frac{N+1}{2}$ التوقع الرياضي

$\sigma_X^2 = V(X) = \frac{N^2 - 1}{12}$ التباين

$\mathrm{m_x(t)} = \frac{\mathrm{e^t(e^{Nt} - 1)}}{\mathrm{N(e^t - 1)}} \quad ; t > 0$ الدالة المولدة للعزوم

**البرهان:**

$$\mathbf{E(X)} = \sum_{x=1}^{N} x.\frac{1}{N} = \frac{1}{N}.\sum_{x=1}^{N} x = \frac{1}{N}.\frac{N(N+1)}{2} = \frac{\mathbf{N+1}}{\mathbf{2}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E(X^2)} = \sum_{x=1}^{N} x^2.\frac{1}{N} = \frac{1}{N}.\sum_{x=1}^{N} x^2 = \frac{1}{N}.\left[\frac{N(N+1)(2N-1)}{6}\right] = \frac{\mathbf{(N+1)(2N+1)}}{\mathbf{6}}$$

$$\mathbf{V(X)} = \mathbf{E}(\boldsymbol{X^2}) - [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})]^2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left[\frac{N+1}{2}\right]^2 = \frac{(N+1)(N-1)}{12}$$

$$= \frac{\boldsymbol{N^2 - 1}}{\mathbf{12}}$$

$$\mathbf{m_x(t)} = \mathbf{E(e^{itx})} = \sum_{x=1}^{N} e^{itx}.\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} e^{itx}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} y^x \qquad ; y = e^{it}$$

$$= \frac{1}{N}[y + y^2 + \cdots + y^N]$$

$$= \frac{y}{N}[1 + y + \cdots + y^{N-1}]$$

وحيث أنّ المجموع داخل القوس يمثل حدود متتالية هندسية منتهية، أساسها $y$ وأنّ مجموعها يساوي:

$$\sum_{x=0}^{N-1} y^x = \frac{1 - y^N}{1 - y}$$

$$m_x(t) = \frac{y}{N}\left(\frac{1-y^N}{1-y}\right) = \frac{e^t(1-e^{Nt})}{N(1-e^t)} = \frac{e^t(e^{Nt}-1)}{N(e^t-1)} \qquad ; t > 0$$

**مثال (5- 1):**

أوجد التوزيع المنتظم لمجموعة جزئية حجمها 3 طلبة من بين 20 طالب، ثم أحسب التوقع الرياضي والتباين.

**الحل:**

إنّ عدد الطرق لاختيار 3 طلبة من أصل 20 طالب بشكل عشوائي هو:

$$\boldsymbol{C_{20}^{3} = \frac{20!}{(20-3)!\,3!} = \frac{20!}{17!\,3!} = 1140} \quad \text{طريقة}$$

وبترقيم هذه المجموعات الجزئية من 1 إلى 1140، فإنّ التوزيع الاحتمالي يكون على الشكل التالي:

$$P(X=x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1140} & ; x = 1,2,\dots 1140 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ E(X) = \frac{N+1}{2} = \frac{1140+1}{2} = 570.5$$

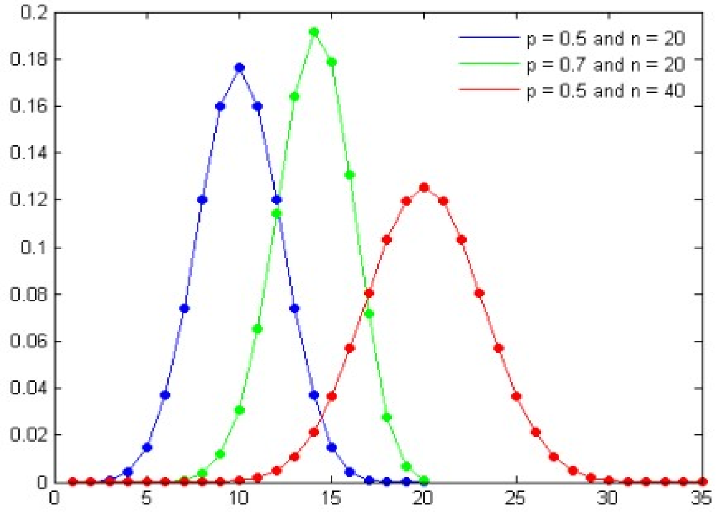
$$V(X) = \frac{N^2-1}{12} = 1299600$$

### 1- 2- توزيع ذي الحدين (Binomial Distribution):

تم اكتشاف هذا التوزيع في نهاية القرن السابع عشر من طرف العالم الرياضي الشهير برنولي **(Bernouli)**. تقوم فكرة هذا التوزيع على كيفية حساب الاحتمالات الخاصة بالتجارب التي تكون نتيجتها إما النجاح أو الفشل. فإذا قمنا بإجراء تجربة معينة وكانت نتيجتها هي النجاح أو وقوع الحادث المعين باحتمال قدره **P** أو الفشل أو عدم وقوع الحادث باحتمال **(1-P = q)**، فإن هذه التجربة تسمى بتجربة أو توزيع برنولي. وإذا قمنا بتكرار هذه التجربة **n** مرة فإننا نحصل على ما يعرف بتوزيع تجارب برنولي المتكررة أو توزيع ذي الحدين **(Binomial)**. وفي هذه الحالة إذا كان المتغير العشوائي **X** يمثل عدد مرات النجاح عند إجراء **n** مرة من التجارب فإن المتغير العشوائي **X** يأخذ القيمة **x**، حيث عدد مرات النجاح **x** تأخذ القيم **x = 1, 2, 3…, n** (أما عدد مرات الفشل فيأخذ القيم **(x-n)** باحتمال قدره **P(X = x)** حيث:

$$\mathbf{f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x!\,(n-x)!} P^x (1-P)^{n-x} & ; x = 1, 2, 3 \ldots, n \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}}$$

ويكون التمثيل البياني لتوزيع ذي الحدين عند قيم مختلفة بالشكل التالي:



ويظهر من الشكل مايلي:

- إذا كانت $p = q = \frac{1}{2}$ فإنّ التوزيع متماثل.
- إذا كانت $p < q$ فإنّ التوزيع ملتو إلى اليمين (التواء موجب).
- إذا كانت $p > q$ فإنّ التوزيع ملتو إلى اليسار (التواء سالب).

وتعتمد دالة الاحتمال لتوزيع ذي الحدين على معلمتين هما **n** و **P** ويرمز لها اختصارا بـ $\boldsymbol{X \sim b(n, P)}$. ويمكن حساب القيمة المتوقعة والتباين وأيضا الدالة المولدة للعزوم لهذا التوزيع بحيث:

القيمة المتوقعة $\boldsymbol{E(\mathrm{X}) = \mathrm{m_x} = n.P}$

التباين $\boldsymbol{\sigma_x^2 = n.P.(1-P) = npq}$

الدالة المولدة للعزوم $\boldsymbol{m_x(t) = (q + qe^t)^n}$

**البرهان:**

$$\mathbf{E(X)} = \sum_{x=0}^{n} x.P(X = x) = np \sum_{x=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}.p^{x-1}q^{n-x}$$

$$= np(p+q)^{n-1}$$

$$= \mathbf{np}$$

ومن تعريف التباين نجد:

$$\boldsymbol{\sigma_x^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

ويمكن كتابة $\boldsymbol{E(X^2)}$ على الشكل التالي:

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X)$$

ولكن:

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)] = \sum_{x=0}^{n} x.(x-1).C_n^x p^x q^{x-n}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} C_{n-2}^{x-2} p^{x-2} q^{n-x}$$

$$= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}$$

$$= n(n-1)p^2$$

إذن:

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X) = n(n-1)p^2 + np$$

وبذلك يكون:

$$\boldsymbol{\sigma_x^2} = \boldsymbol{V(X)} = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = \boldsymbol{npq}$$

وأيضا من تعريف الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي منفصل نجد:

$$\mathbf{m_x(t) = E(e^{tx})} = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}.P(X=x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} C_n^x p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} C_n^x (pe^t)^x q^{n-x} = \boldsymbol{(q+pe^t)^n}$$

وتجدر الإشارة إلى أن توزيع ذي الحدين له استخدامات عديدة في الحياة العملية مما يجعله من أكثر التوزيعات الإحصائية أهمية ومن أكثرها شيوعا، ومن هذه التجارب نجد على سبيل المثال نسبة البطالة في المجتمع، نسبة الأمية في المجتمع، نسبة الإنتاج المعيب في مصنع، نجاح أو فشل الطلبة في الامتحانات...الخ.

**مثال (5- 2):**

إذا كان معدل نجاح دواء جديد لمعالجة داء السكري يساوي **0.7**، وقد تم تجريبه على **20** شخص مريض بداء السكري، المطلوب حساب احتمال:

- شفاء **17** مريضا منهم.
- شفاء **17** مريضا منهم على الأقل.

**الحل:**

نحن أمام تجربة ثنائية تتمثل في شفاء المريض أو عدم شفائه، وتم تكرار هذه التجربة تكرارا مستقلا بـ **20** مرة، وبالتالي الظاهرة المدروسة تتوزع وفق توزيع ثنائي الحدين (أو توزيع Bernouli مكرر بـ **20** مرة) بالمعالم **n = 20** و**P = 0.7** أي:

$$\boldsymbol{X \sim b(n,\ P)}$$
$$\boldsymbol{X \sim b(20,\ 0.7)}$$

- احتمال شفاء **17** مريضا من بين **20** مريض يعني:

$$\boldsymbol{P(X=17)=\frac{20!}{17!\,3!}(0.7)^{17}(0.3)^{3}}=\frac{20.19.18.17!}{17!\,3!}(0.7)^{17}(0.3)^{3}=\boldsymbol{0.0716}$$

- احتمال شفاء **17** مريضا منهم على الأقل يعني:

$$\boldsymbol{P(X\geq 17)\ =\ P(X=17)\ +\ P(X+18)\ +\ P(X=19)\ +\ P(X=20)}$$
$$=\frac{20!}{17!\,3!}(0.7)^{17}(0.3)^{3}+\frac{20!}{18!\,2!}(0.7)^{18}(0.3)^{2}+\frac{20!}{19!\,1!}(0.7)^{19}(0.3)^{1}$$
$$+\frac{20!}{20!\,0!}(0.7)^{20}(0.3)^{0}=\boldsymbol{0.107}$$

### 1- 3- توزيع بواسون (Poisson Distribution):

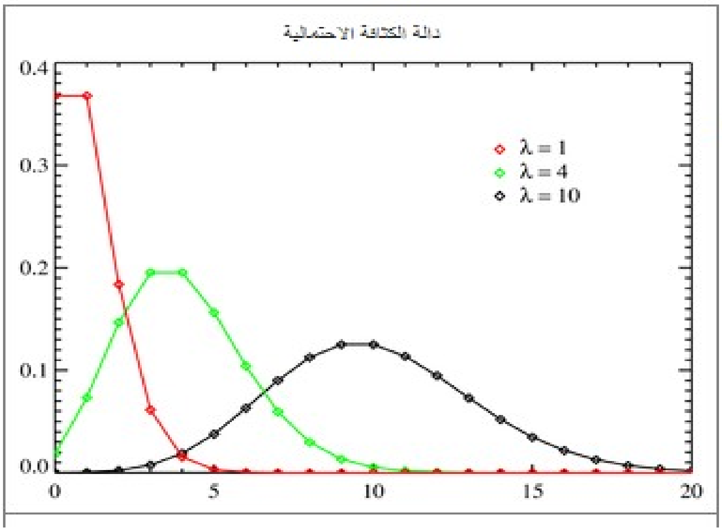
نقول بأنّ للمتغير العشوائي X يتبع توزيع بواسون بالوسيط **λ** $(\lambda > 0)$ إذا كان لـ X دالة الاحتمال التالية:

$$\mathbf{f(x)=P(X=x)}\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{\lambda^{x}e^{-\lambda}}}{\mathbf{x!}} & ;\mathbf{x=0,1,2\ \ldots..}\\ \mathbf{0} & \text{بخلاف ذلك}\end{cases}$$

ويرمز اختصارا للمتغير العشوائي X يتبع توزيع بواسون بـ **$X \sim \wp(\lambda)$**.

ويكون التمثيل البياني لتوزيع بواسون عند قيم مختلفة بالشكل التالي:

توزيع بواسون



**نظرية (5- 2):**

إذا كان المتغير العشوائي X يتوزع وفق توزيع بواسون فإنّ التوقع الرياضي والتباين سوف يكون مساو إلى:

$$\boldsymbol{\mu_X = E(X) = \lambda}$$

$$\boldsymbol{\sigma_X^2 = V(X) = \lambda}$$

البرهان:

من تعريف القيمة المتوقعة نجد:

$$\mathbf{E(X)} = \sum_{x=0}^{\infty} \lambda.\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x})$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{x.\lambda^{x}}{x(x-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x}}{(x-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda.\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{y}}{y!} \qquad ; y = (x-1)$$

$$= \boldsymbol{\lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}}$$

$$= \boldsymbol{\lambda}$$

أيضا:

$$\boldsymbol{E[X(X-1)]} = \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$= \ e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{x}{x}\frac{(x-1)\lambda^2\lambda^{x=2}}{(x-1)(x-2)!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^x\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x=2}}{(x-2)!} = e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^x}{y!} = \boldsymbol{\lambda^2}$$

نقدم فيما يلي بعض الأمثلة التي يكون فيها المتغير العشوائي يتبع توزيع بواسون:

- العدد العشوائي للأشخاص الذين يصلون لمركز البريد خلال ساعة واحدة.
- العدد العشوائي للمكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز الشرطة في يوم واحد.
- العدد العشوائي للولادات التي تحصل في الأسبوع الأول من كل شهر في مستشفى معين.
- العدد العشوائي لحوادث المرور في مدينة ما خلال أسبوع.

**مثال (5- 3):**

إذا كان معدل عدد الولادات في مستشفى عمومي هو 3 ولادات خلال كل ساعة. المطلوب:

– ما احتمال أن تكون هناك حالة ولادة واحدة فقط خلال ساعة معينة؟

– ما احتمال أن تكون هناك 4 ولادات على الأكثر خلال ساعة معينة؟

**الحل:**

ليكن **X** متغير عشوائي يدل على عدد الولادات خلال ساعة. المتغير العشوائي **X** في هذه الحالة يتوزع وفق التوزيع البواسوني بالوسيط $\boldsymbol{\lambda = 3}$.

$$\mathbf{X} \backsim \wp(\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{3}) \ \Leftrightarrow \ \mathbf{P[X = x]} = \frac{\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{x}}\mathbf{e}^{-\boldsymbol{\lambda}}}{\mathbf{x!}}$$

1- احتمال أن تكون هناك حالة ولادة واحدة فقط خلال ساعة معينة:

$$\mathbf{P[X = 1]} = \frac{3^1e^{-3}}{1!} = \mathbf{0.149}$$

2– احتمال أن تكون هناك 4 ولادات على الأكثر خلال ساعة معينة:

$$\mathbf{P[X \leq 4]} = \sum_{x=0}^{4}P(X=x) = \sum_{x=0}^{4}\frac{3^xe^{-3}}{x!} = e^{-3}\left[\frac{3^0}{0!}+\frac{3^1}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}\right] = \mathbf{0.82}$$

**مثال (5–4):**

إذا كان معدل عدد الأفراد الذين يستعملون الموزع الآلي البريدي خلال ساعة واحدة محددة هو 5 أفراد، فما هو احتمال مجيء 3 أفراد في نفس الساعة وفي اليوم الموالي؟

**الحل:**

ليكن **X** متغير عشوائي يدل على عدد الأفراد الوافدين على الموزع الآلي للبريد. المتغير العشوائي **X** في هذه الحالة يتوزع وفق التوزيع البواسوني بالوسيط $\boldsymbol{\lambda = 5}$.

$$\mathbf{X \sim \wp(\lambda = 5) \iff P[X = x] = \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!}}$$

ومنه احتمال مجيء 3 أفراد في نفس الساعة وفي اليوم الموالي هو:

$$\mathbf{P[X = 3]} = \frac{5^{3} e^{-5}}{3!} = \mathbf{0.1404}$$

## ثانيا: بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة

### 2- 1- التوزيع الأسي (Exponential Distribution):

يعدّ التوزيع الأسي نموذج مناسب لكثير من المسائل التي تواجهنا في حياتنا العملية، فعلى سبيل المثال يستخدم التوزيع الأسي في حساب الأزمان التالية:

- الزمن العشوائي لمكالمة هاتفية بين شخصين.
- الزمن العشوائي لمكالمتين هاتفيتين.
- الزمن العشوائي لصيانة موقع إلكتروني.
- عمر جهاز كهربائي أو إلكتروني.

وبشكل عام، نقول عن المتغير العشوائي المستمر X أنه متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي بالوسيط $\boldsymbol{\lambda}$ حيث $(\lambda > 0)$ إذا كان لـ X الكثافة الاحتمالية التالية:

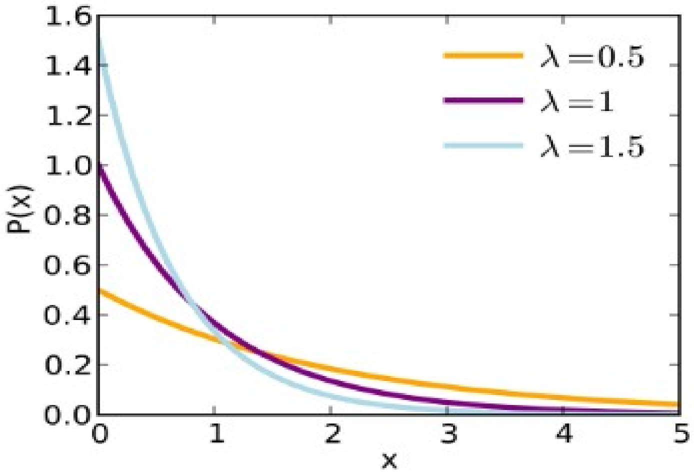
$$\mathbf{f(x) = P(X = x)} = \begin{cases} \boldsymbol{\lambda e^{-\lambda x}} & ; \mathbf{x} > 0 \\ \mathbf{0} & ; \mathbf{x \leq 0} \end{cases}$$

اختصارا يعبّر عن X المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الأسي بـ: $X \sim \xi(\lambda)$.

أما دالة التوزيع التراكمية $\mathbf{F(x)}$ فتكون كمايلي:

$$\mathbf{F(x) = P(X < x)} = \begin{cases} \mathbf{1 - e^{-\lambda x}} & ; \mathbf{x} > 0 \\ \mathbf{0} & ; \mathbf{x \leq 0} \end{cases}$$

ويكون التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسي عند قيم مختلفة للمعلمة $\boldsymbol{\lambda}$ بالشكل التالي:



بينما يكون التوقع الرياضي والتباين بالصيغ التالية:

$$\mu_X = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma_X^2 = E(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

**مثال (5- 5):**

إذا كان X متغير عشوائي مستمر يمثل عمر مصباح كهربائي (بالساعات)، له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 0.0001e^{-0.0001x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1- أوجد دالة التوزيع التراكمية لـ X.

2- أوجد العمر المتوسط (المتوقع) للمصباح.

3- أوجد احتمال أن يعمّر المصباح على الأقل 8000 ساعة.

**الحل:**

1- دالة التوزيع التراكمية F(x):

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.0001x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

**2**- العمر المتوسط (المتوقع) للمصباح:

$$\mu_X = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}} \Rightarrow E(X) = \frac{1}{0.0001} = 1000 \text{ ساعة}$$

**3**- حساب احتمال أن يعمّر المصباح على الأقل 15000 ساعة:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} > \mathbf{8000}) = 1 - P(X \leq 8000) = 1 - F(8000) = 1 - [1 - e^{-0.8}] = e^{-0.8} = \mathbf{0.45}$$

### 2-2- التوزيع الطبيعي (Normal Distribution)

يعتبر من أهم التوزيعات الاحتمالية وأكثرها استخداما، ذلك أن التوزيع الطبيعي يستخدم بكثرة في وصف الكثير من الظواهر الطبيعية والاقتصادية والاجتماعية (من أوزان وأطوال...) التي نصادفها في حياتنا اليومية. ولو مثلنا بيانات هذه الظواهر على معلم متعامد ومتجانس لحصلنا على منحنى كثافة، أو منحنى تكرار له تقريبا شكل الجرس، أو كما نعبر عنه إحصائيا شكل منحنى التكرار الطبيعي أو شكل التوزيع الطبيعي.

فإذا كان **X** متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي **μ** وتباين $\sigma^2$ فإن دالة الكثافة الاحتمالية له تكون بالشكل التالي:

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{\mathbf{2\pi}}}\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad , (-\infty < x < +\infty)$$

ونعبر عن هذه الدالة بالصيغة التالية:

$$\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2)$$

وتقرأ: **X** تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي **μ** وتباين $\sigma^2$.

كما أن تابع التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي (تابع التوزيع الطبيعي) يعرّف بما يلي:

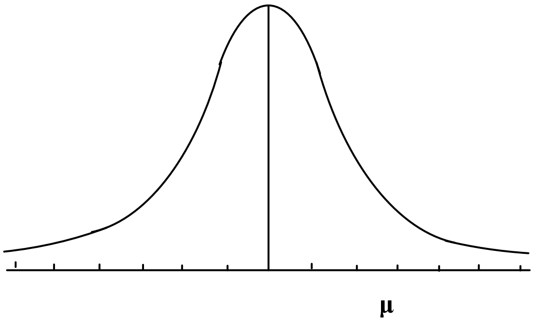
$$\mathbf{P(X < x) = F(x)} = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} \mathbf{f(x)dx}$$

وفي الحساب التكاملي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{\sigma}\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}$$

وبالتالي فإن المساحة تحت منحنى تابع الكثافة للتوزيع الطبيعي يساوي الواحد تماما.

الرسم التالي يوضح منحنى التوزيع الطبيعي:



ومن خلال هذا المنحنى يتضح أن التوزيع متماثل (Symétrique) حول الوسط الحسابي **μ** وأن أكثر المشاهدات تقع حول الوسط الحسابي وأقلها في الطرفين.

ونظرا لصعوبة حساب التكامل السابق أو عمل جداول لحساب هذا التكامل عند قيم مختلفة لـ **μ** و $\sigma^2$ لاستخدامها في حساب الاحتمال (وهي مسألة بدون فائدة)، فإنه بإمكاننا تحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري.

**نظرية (5- 3):**

إذا كان المتغير العشوائي **X** يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط **μ** و تباين $\sigma^2$، أي: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ فإن المتغير العشوائي **Z** يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط **0 = μ** وتباين $\sigma^2 = 1$، أي $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

حسب النظرية (5-3)، تكون دالة الكثافة الاحتمالية لـ **Z** كما يلي:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad ,(-\infty < z < +\infty)$$

أما دالة التوزيع تكون وفق الصيغة التالية:

$$P(Z < z) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

لتسهيل القراءة سنرمز لدالة الكثافة الاحتمالية في هذه الحالة بـ $\varphi(z)$ بدلا من **f(z)** ولدالة التوزيع بـ $\emptyset(z)$ بدلا من **F(z)**. وبالتالي إذا كان $Z\sim N(0,1)$ فإن كثافته $\varphi(z)$ ودالة توزيعه $\emptyset(z)$.

إن حساب قيم دالة التوزيع للمتغير الطبيعي المعياري يعتمد على جدول يعطي قيم دالة التوزيع $\emptyset(z)$ ابتداء من الصفر وبفاصل 0.01 بين كل قيمة والقيمة التي تليها (أنظر الملحق 1). وقد وضعت قيم z ابتداء من 3.4-

وبفاصل 0.1 في العمود الأيسر، ووضعت القيم العشرية الثانية من قيم z في السطر الرأسي. أما قيم المساحات أو القيم الاحتمالية (أي قيم الدالة $\emptyset(z)$) فقد وضعت في صلب الجدول.

**ملاحظة:**

بسبب التماثل، قيم: $\boldsymbol{\emptyset(-z) = 1 - \emptyset(z)}$

لتوضيح استخدام هذا الجدول نأخذ المثال التالي:

**مثال (5- 6):**

إذا كانت المتغيرة العشوائية X تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\boldsymbol{\mu = 5}$ وتباين $\boldsymbol{\sigma^2 = 9}$ أي: $\boldsymbol{X \sim N(5, 9)}$ والمتغيرة **Z** تتبع التوزيع الطبيعي المعياري، أي $\boldsymbol{Z \sim N(0, 1)}$ أوجد القيم الاحتمالية التالية: $\boldsymbol{P(X} < 7)$ ، $\boldsymbol{P(4.2} < X < 5.5)$ ، $\boldsymbol{P(Z} < -1.47)$ ، $\boldsymbol{P(Z} < 1.25)$ ، $\boldsymbol{P(1.14} < Z < 2.89)$ ، $\boldsymbol{P(Z} > 1.30)$.

**الحل:**

- بالنسبة لقيم الاحتمال الخاصة بالمتغير العشوائي **X**، يجب أن نحول المتغير العشوائي **X** إلى **Z** المعيارية كما يلي:

$$\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} = \frac{X - 5}{\sqrt{9}} \sim N(0, 1)}$$

وبالتالي:

➢ $\boldsymbol{P(X} < 7) = P\left(Z < \frac{7-5}{\sqrt{9}}\right) = P\left(Z < \frac{2}{3}\right) = \emptyset(0.66) = \boldsymbol{0.745373}$

وهذه القيمة مستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري (الملحق **1**)، وتمثل تقاطع السطر **0.6** مع العمود **0.06**.

➢ $\boldsymbol{P(4.2} < X < 5.5) = P\left(\frac{4.2-5}{\sqrt{9}} < Z < \frac{5.5-5}{\sqrt{9}}\right) = P(-0.26 < Z < 0.16)$

$$= \emptyset(0.16) - \emptyset(-0.26)$$

$$= 0.563559 - 0.397432 = \boldsymbol{0.166127}$$

وتستخرج القيمة $\boldsymbol{\emptyset(0,16) = 0.563559}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري بالنسبة للقيم الموجبة وهي تمثل تقاطع السطر **0,10** مع العمود **0,06**. أما القيمة $\boldsymbol{\emptyset(-0,26) = 0.397432}$ فتم استخراجها أيضا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري بالنسبة للقيم السالبة وهي تمثل تقاطع السطر **0,2-** مع العمود **0,06-**.

- بالنسبة لقيم الاحتمال الخاصة بالمتغير العشوائي **Z**، فتستخرج بشكل مباشر باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري (الملحق **1**) نجد:

- $\boldsymbol{P(Z} < -1.47) = \emptyset(-1.47) = \ 0.070781$

وهذه القيمة هي تقاطع السطر 1.4- مع العمود 0.07-.

وبنفس الطريقة نجد:

- $P(1.14 < Z < 2.89) = P(Z < 2.89) - P(Z \leq 1.14) = \emptyset(2.89) - \emptyset(1.14)$
$= 0.9980 - 0.8728 = \mathbf{0.1252}$
- $P(Z < 1.25) = \emptyset(1.25) = 0.894350$
- $P(Z > 1.30) = 1 - P(Z \leq 1.30) = 1 - \emptyset(1.30) = 1 - 0.903199 = 0.096801$

يمكن أيضا استخدام جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري بشكل عكسي، كما هو موضح في التمرين التالي:

**مثال (5- 7):**

إذا كان $\boldsymbol{Z \sim N(0,1)}$ وكان لديك $\boldsymbol{P(Z < a) = 0.978822}$ و $\boldsymbol{P(Z > b) = 0.252346}$، أوجد قيمة كل من **a** و **b**.

**الحل:**

- من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نبحث عن قيمة الاحتمال 0.978822، سنجد هذه القيمة تقع عند العمود 4 والسطر 19 وبالتالي قيمة **a = 2.03**.
- قبل البحث عن قيمة $\boldsymbol{b}$ نحوّل أولا العلاقة من أكبر إلى أصغر:

$$P(Z > b) = 0.252346 \Rightarrow P(Z \leq b) = 1 - 0.252346 = 0.747654$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نبحث عن قيمة الاحتمال 0.747654، سنجد هذه القيمة تقع بين العمودين 7 و 8 والسطر 7 وبالتالي قيمة $\boldsymbol{b}$ بالتقريب تساوي 0.66 (b = 0.66).

### 2-3- توزيع مربع كاي $\chi^2$

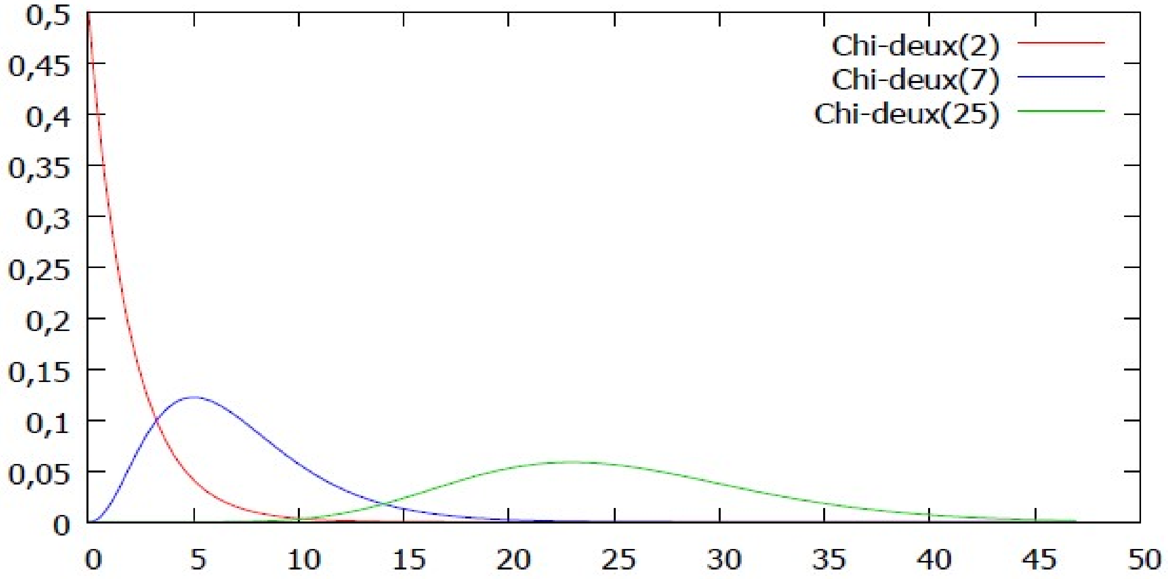
نقول عن المتغير العشوائي $X$ أنه يتبع توزيع مربع كاي $\chi^2$ بدرجة حرية $\boldsymbol{\vartheta}$ (**vartheta**) إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية على الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\vartheta}{2}\right)(2)^{\frac{\vartheta}{2}}} . x^{\frac{\vartheta}{2}-1} . e^{-\frac{x}{2}} \qquad , x \geq 0$$

توزيع مربع كاي يعتبر كحالة خاصة من توزيع جاما (*Gamma*) بالمعلمتين: $\alpha = \frac{\vartheta}{2}$ و $\beta = 2$.

ودرجة الحرية $\vartheta$ تدل على معلمة توزيع مربع كاي، ونكتب: $X \sim \chi^2_{(\vartheta)}$

الشكل البياني التالي يوضح دالة التوزيع لمربع كاي عند قيم مختلفة لـ $\vartheta$.



يتضح من التمثيل البياني الخاص بمربع كاي أنّ الالتواء موجب ويقترب من التماثل كلما كبرت درجة الحرية.

بعبارة أخرى، كلما كان حجم العينة كبيرا $n \geq 30$ يقترب التوزيع من التوزيع الطبيعي.

سنذكر هنا بعض النظريات الهامة الخاصة بهذا التوزيع التي سنستخدمها في تطبيقاتنا ولكن بدون برهان.

**نظرية (4-5):** إذا كان المتغير العشوائي $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ فإن $Z^2 = (\frac{X-\mu}{\sigma})^2 \sim \chi^2_{(1)}$.

**نظرية (5-5):** إذا كانت المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \dots, X_n$ مستقلة عن بعضها وكل متغيرة تتبع التوزيع الطبيعي المعياري $N(0, 1)$، فإن: $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n$ .

**نظرية (6-5):** إذا كانت $U_1, U_2, \dots, U_n$ متغيرات عشوائية مستقلة تتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$ على التوالي، فإن: $\sum_{i=1}^{n} U_i \sim \chi^2_{(\vartheta)}$.

**نظرية (7-5):** إذا أخذت عينات عشوائية كل بحجم $n$ وتباين $S^2$ من مجتمع طبيعي التوزيع بمتوسط حسابي $\mu$ و تباين $\sigma^2$، فإن: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$. **حيث:** $s^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$.

ونعبّر عن قيمة المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع مربع كاي بالرمز $\chi^2_{(\alpha,\vartheta)}$ وهي القيمة التي يقع على يمينها مساحة $\alpha$ عن منحنى مربع كاي بدرجة حرية $\vartheta$ وتحسب قيم هذا المتغير العشوائي والاحتمالات المرافقة له باستخدام جدول مربع كاي الموضح في الملحق 2، والتمرين التالي يوضح كيفية استخدام ذلك الجدول الخاص بالتوزيع.

**مثال (5- 8):** أوجد القيم $\chi^2_{(0.025,20)}$، $\chi^2_{(0.01,5)}$، $\chi^2_{(0.975,7)}$

**الحل:** لإيجاد قيمة $\chi^2_{(0.025,20)}$ نختار من العمود الأيسر الخاص بدرجات الحرية $\vartheta$ القيمة **20** ومن السطر العلوي الخاص بالمساحات (أي الاحتمالات) نختار القيمة **0.025**. وبتقاطع العمود مع السطر نحصل على القيمة المطلوبة، وبالتالي يكون $\chi^2_{(0.025,20)} = 34.17$.

بنفس الطريقة نحصل على $\chi^2_{(0.01,5)} = 15.09$ وأيضا $\chi^2_{(0.975,7)} = 1.69$.

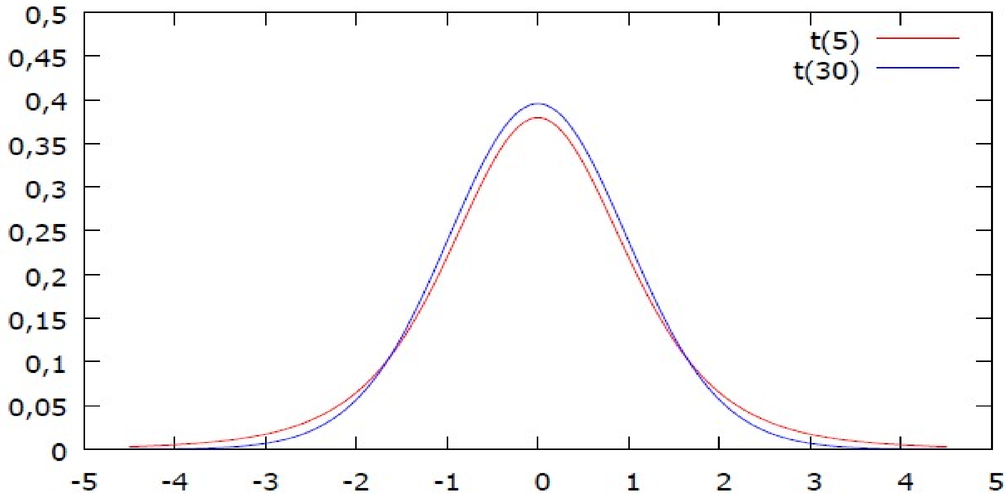
## 2- 4- توزيع ستودنت $t$

إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي t على الصورة:

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\vartheta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\sqrt{\vartheta\pi}}\left(1+\frac{t^2}{\vartheta}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad ,-\infty < t < +\infty$$

فإن هذا التوزيع يسمى توزيع **t**، حيث $\vartheta$ تمثل درجات الحرية وهي في نفس الوقت معلمة هذا التوزيع، ويلعب توزيع **t** دورا مهما عند سحب العينات الصغيرة الحجم $(n < 30)$ من مجتمع مجهول التباين.

ويتشابه توزيع **t** مع التوزيع الطبيعي القياسي من حيث الشكل الجرسي إلاّ أنه أكثر انخفاضا منه، وعندما تزداد درجات الحرية فإن توزيع **t** يقترب من التوزيع الطبيعي القياسي. والشكل التالي يوضح ذلك.



سنذكر هنا بعض النظريات الهامة الخاصة بهذا التوزيع ولكن بدون برهان.

**نظرية (5- 8):** إذا كان المتغيران العشوائيان المستقلان $Y$ و $Z$، حيث أن $Y$ يتوزع توزيعا طبيعيا قياسيا $Y\sim N(0,1)$ و $Z$ يتوزع توزيع مربع كاي $Z\sim \chi^2_{\vartheta}$ فإن المتغير العشوائي $T=\frac{Y}{\sqrt{Z/\vartheta}}\sim t_{\vartheta}$ .

**نظرية (5- 9):** إذا أخذت عينات عشوائية صغيرة كل بحجم $n$ وتباين $S^2$ من مجتمع طبيعي التوزيع بمتوسط حسابي $\mu$ وتباين $\sigma^2$، فإن: $T=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}}\sim t(n-1)$

ونعبّر عن قيمة المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع $t$ بالرمز $t_{(\alpha,\vartheta)}$ وهي القيمة التي يقع على يمينها مساحة $\alpha$ على منحنى توزيع $t$ بدرجة حرية $\vartheta$. وتحسب قيم هذا المتغير العشوائي والاحتمالات المرافقة له باستخدام جدول توزيع ستودنت الموضح بالملحق 3.

**ملاحظة:**

بسبب التوزيع المتماثل حول الصفر، يكون: $t_{(\alpha,\vartheta)}=-t_{(1-\alpha,\vartheta)}$

**مثال (5- 9):** أوجد قيم $t$ في الحالات التالية: $t_{(0.05,15)}$، $t_{(0.95,7)}$، $t_{(0.995,10)}$

**الحل:**

لإيجاد قيمة $t_{(0.05,15)}$ نختار من العمود الأيسر الخاص بدرجات الحرية القيمة 15 ومن السطر العلوي الخاص بالاحتمالات القيمة 0.05. وبتقاطع السطر مع العمود نحصل على القيمة المطلوبة، وبالتالي يكون $t_{(0.05,15)}=1.753$.

لإيجاد قيمة $t_{(0.95,7)}$ نلاحظ أن قيمة $\alpha=0.95$ غير متوفرة في جدول توزيع ستودنت، وبذلك سوف نستعمل تماثل المنحنى حول الصفر فنحصل على:

$$t_{(0.95,7)}=-t_{(1-0.95,7)}=-t_{(0.05,7)}=-1.895$$

وبالمثل نستخرج قيمة $t_{(0.995,10)}$ فتكون قيمته:

$$t_{(0.995,10)}=-t_{(1-0.995,10)}=-t_{(0.005,10)}=-3.169$$

### 5-2- توزيع فيشر (F)

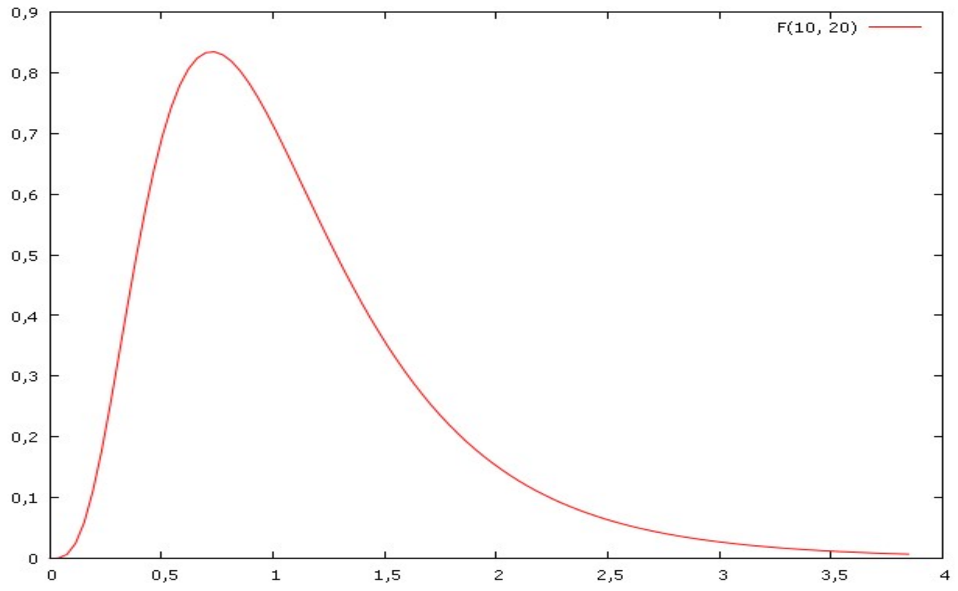
إذا كان المتغيران العشوائيان المستقلان $X_1$ و $X_2$ يتوزعان توزيع مربع كاي بدرجتي حرية $\vartheta_1$ و $\vartheta_2$ على التوالي ( $X_1\sim\chi^2_{\vartheta_1}$ و $X_2\sim\chi^2_{\vartheta_2}$) فإن المتغير $X$ المعرف بالصيغة الآتية: $X=\frac{X_1/\vartheta_1}{X_2/\vartheta_2}$ له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$g(X)=\frac{\Gamma\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\vartheta_2}{2}\right)}(\vartheta_1)^{\frac{\vartheta_1}{2}}(\vartheta_2)^{\frac{\vartheta_2}{2}}X^{\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right)-1}(\vartheta_1+\vartheta_2X)^{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}}\quad ,X>0$$

وعليه نقول بأن المتغير $X$ يتوزع توزيع فيشر بدرجة حرية $\vartheta_1$ و $\vartheta_2$ ويعبّر عنه بالشكل التالي:

$$X\sim F_{(\vartheta_1,\vartheta_2)}$$

ويقترب شكل توزيع فيشر من الشكل التالي:



ونعبّر عن قيمة المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع فيشر بالرمز $F_{(\alpha,\vartheta_1,\vartheta_2)}$ وهي القيمة التي يقع على يمينها مساحة $\alpha$ على منحنى توزيع $F$ بدرجة حرية $\vartheta_1$ في البسط و $\vartheta_2$ في المقام.

والجدول (4) الموضح في الملاحق خاص بقيم المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع فيشر $F_{(\alpha,\vartheta_1,\vartheta_2)}$ حسب قيم $\alpha$ التالية: $\{0.25$ ، $0.10$ ، $0.05$ ، $0.025$ ، $0.01\}$.

**مثال (5- 10):** أوجد القيم التالية: $F_{(0.01,10,12)}$، $F_{(0.025,8,6)}$، $F_{(0.05,12,7)}$، $F_{(0.10,5,4)}$ ، $F_{(0.25,7,9)}$

**الحل:**

لإيجاد قيمة $F_{(0.01,10,12)}$ نستخدم جدول توزيع فيشر الخاص بقيمة $\alpha = 0.01$، ومن السطر في أعلى الجدول الخاص بدرجات حرية البسط نختار القيمة **10** ومن العمود الخاص بدرجات حرية المقام نختار القيمة **12**. وبتقاطع السطر مع العمود نجد أن قيمة $F_{(0.01,10,12)} = 4.85$.

وبتغيير قيم $\alpha$ واستخدام نفس الطريقة نحصل على $F_{(0.025,8,6)} = 5.60$ و $F_{(0.05,12,7)} = 3.57$ و $F_{(0.10,5,4)} = 4.05$ وأيضا $F_{(0.25,7,9)} = 1.60$.

قد يحدث أحيانا أن تكون قيم $\alpha$ هي إحدى القيم التالية غير المتوفرة في جداول فيشر:

$$\{0.01 \text{ ، } 0.025 \text{ ، } 0.05 \text{ ، } 0.10 \text{ ، } 0.25\}$$

وحتى نتمكن من استخراج قيم المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع فيشر في هذه الحالة، نستعين بالنظرية التالية:

**نظرية (5-10):** بفرض أن $n_1$، $n_2 > 0$ فإن:

$$F(1-\alpha, n_1 - 1, n_2 - 1) = \frac{1}{F(\alpha, n_2 - 1, n_1 - 1)}$$

**مثال (5- 11):** أوجد القيمة $F_{(0.90,5,4)}$

**الحل:**

لاحظ أنّ $\alpha = 0.90$ وفي مثالنا هذا غير متوفرة ضمن قيم $\alpha$ في جداول فيشر، لذلك سنستعين بتطبيق النظرية (5- 10):

$$F_{(0.90,5,4)} = \frac{1}{F(0.10,4,5)} = \frac{1}{3.52} = 0.284$$

## تمارين محلولة

**التمرين 01:**

في إطار تدريب الجنود في ثكنة عسكرية على الرمي نحو الهدف بالرصاص، إذا كان احتمال أن يصيب الجندي الهدف 0.7، فإذا كرّر الجندي الرمي نحو الهدف 5 مرات، ورمزنا بـ **X** لعدد مرات إصابة الهدف:

1- أكتب دالة الاحتمال (دالة الكثافة الاحتمالية) لـ **X**.

2- أحسب احتمال إصابة الهدف مرة واحدة فقط.

3- أحسب احتمال إصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر.

4- أحسب احتمال إصابة الهدف.

**الحل:**

**1**- دالة الاحتمال:

إنّ الرمي نحو الهدف يعتبر تجربة برنولية لها نتيجتان، إما النجاح (إصابة الهدف) وإما الفشل (عدم إصابة الهدف) ووسيطها P = 0.7، والرمي نحو الهدف 5 مرات يعني تكرار تجربة برنولي 5 مرات، وهو ما يعني تجربة ذي الحدين بالوسيطين n = 5 و P = 0.7، أي أنّ دالة الاحتمال هي:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{5!}{(5-x)!\,x!}\,(0.8)^x.(0.2)^{5-x} \qquad ; x = 0,1,2\ldots,5$$

**2**- احتمال إصابة الهدف مرة واحدة:

$$\boldsymbol{P(X=1)} = \frac{5!}{(5-1)!\,1!}\,(0.8)^1.(0.2)^{5-1} = \frac{5!}{4!\,1!}.(0.8).(0.2)^4 = \mathbf{0.0064}$$

**3**- احتمال إصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر:

$$\boldsymbol{P(X \le 1)} = P(X=0) + P(X=1) = \frac{5!}{5!\,0!}\,(0.8)^0.(0.2)^5 + 0.0064 = \mathbf{0.00672}$$

**4**- احتمال إصابة الهدف:

$$\boldsymbol{P(X \ge 1)} = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.00032 = \mathbf{0.99968}$$

**التمرين 02:**

إذا علمت أنّ احتمال شفاء مريض بفيروس كورونا خلال شهر عند أخذه لدواء "سبوتنيك" هو 0.6، فإذا كان لدينا 10 مرضى مصابين بنفس الفيروس، فما هو احتمال شفاء:

1- ثلاثة (3) مرضى منهم.

2- سبعة (7) مرضى على الأقل.

3- من 2 إلى 5 مرضى.

**الحل:**

نحن أمام تجربة ثنائية (يشفى أو لا يشفى) أي تجربة برنولي (**Bernoulli**). والعملية تتكرر لـ 10 مرات (10 أشخاص) وهو ما يعني تجربة ذي الحدين (**Binomial**).

إذا كان المتغير العشوائي **X** يدل على المرضى الذين تم شفاؤهم خلال شهر من فيروس كورونا، فعندئذ:

$$X \backsim b(n\,;P)$$
$$X \backsim b(10\,;0.6)$$

**1**- احتمال شفاء 3 مرضى:

$$\mathbf{P(X=3)} = C_{10}^{3}.\,p^{3}.\,q^{20-} = \frac{10!}{7!\,3!}(0.6)^{3}.\,(0.4)^{17} = \mathbf{0.0433}$$

**2**- احتمال شفاء 7 مرضى على الأقل:

$$\mathbf{P(X \geq 7)} = P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$$

$$= C_{10}^{7}.\,p^{7}.\,q^{10-7} + C_{10}^{8}.\,p^{8}.\,q^{10-8} + C_{10}^{9}.\,p^{9}.\,q^{10-9} + C_{10}^{10}.\,p^{10}.\,q^{10-10}$$

$$= \frac{10!}{3!7!}(0.6)^{7}.\,(0.4)^{3} + \frac{10!}{2!8!}(0.6)^{8}.\,(0.4)^{2} + \frac{10!}{1!9!}(0.6)^{9}.\,(0.4)^{1} + \frac{10!}{0!10!}(0.6)^{10}.\,(0.4)^{0}$$

$$= \mathbf{0.3821}$$

**3**- احتمال شفاء من 2 إلى 5 مرضى:

$$\mathbf{P(2 \leq X \leq 5)} = P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$

$$= 0.0106 + 0.0423 + 0.1050 + 0.2007 = \mathbf{0.3586}$$

**التمرين 03:**

إذا كان 10% من إنتاج مصنع معين لانتاج مصبرات الطماطم معيبا (فاسدا)، وتم اختيار عينة تتكون من 50 وحدة من انتاج ذلك المصنع. المطلوب: ما احتمال وجود وحدتين معيبتين؟

**الحل:**

ليكن **X** متغير عشوائي يمثل عدد الوحدات المعيبة وهو يتبع التوزيع البواسوني، ومن معطيات التمرين لدينا $p = 0.10$ و $n = 50$، وبذلك يكون: $\lambda = np = 5$.

ويكون الاحتمال المطلوب هو:

$$\boldsymbol{P(X=2)=\frac{5^{2}e^{-5}}{2!}=0.0842}$$

**التمرين 04:**

إنّ زبائن مكاتب بنك الجزائر يصلون للبنك عشوائيا وبشكل مستقل (أي لا يؤثر وصول أحدهم على وصول الآخر). فإذا كان معدل الوصول هو 15 شخص في الدقيقة. فما هو احتمال:

1- وصول 4 أشخاص في دقيقة واحدة.

2- وصول أي شخص خلال 40 ثانية.

3- وصول شخص واحد على الأقل خلال 40 ثانية.

**الحل:**

ليكن X يمثل متوسط عدد الأشخاص الذين يصلون إلى مكتب بريد الجزائر. المتغير العشوائي في هذه الحالة يتبع توزيع بواسون بالوسيط $\lambda = 15$:

**1-** احتمال وصول 4 أشخاص في دقيقة واحدة:

$$\boldsymbol{P(X=4)}=\frac{15^{4}e^{-15}}{4!}=\boldsymbol{0.00065}$$

**2-** احتمال وصول أي شخص خلال 40 ثانية:

قبل حساب احتمال وصول أي شخص خلال 40 ثانية نحسب متوسط الأشخاص الذين يصلون لمكتب البريد خلال 40 ثانية: أشخاص $\mathbf{10} = \frac{\mathbf{15}\text{ شخص } * \ \mathbf{40}\text{ ثانية}}{\mathbf{60}\text{ دقيقة}}$، ومنه:

$$\boldsymbol{P(X=0)}=\frac{10^{0}.\mathrm{e}^{-1}}{0!}=\boldsymbol{4.54(10)^{-5}}$$

**3-** احتمال وصول شخص واحد على الأقل خلال 40 ثانية:

$$\boldsymbol{P(X\geq 1)}=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\boldsymbol{4.54(10)^{-5}}=\boldsymbol{0.9999}$$

**التمرين 05:**

أوجد تابع الاحتمالات (الدالة التراكمية) للتوزيع الأسي إذا كانت $\mathbf{x=x_0}$، ثم بيّن أنّ التوقع الرياضي يساوي $\boldsymbol{\mu}$.

**الحل:**

- تابع الاحتمالات للتوزيع الأسي إذا كانت $\mathbf{x_0}$ أقل من **0**:

$$\boldsymbol{F(\mathbf{x_0})=P(X\leq \mathbf{x_0})=P(-\infty<X<\mathbf{x_0})}=\int_{-\infty}^{\mathrm{x_0}}\mathbf{f(x)dx}=\int_{-\infty}^{\mathrm{x_0}}\mathbf{0.dx=0}$$

- إذا كانت $\mathrm{x_0}$ محصورة بين 0 و$\infty$ فإن تابع الاحتمالات يكون على الشكل:

$$\boldsymbol{F(\mathbf{x_0})} = \boldsymbol{P(X \le \mathbf{x_0})} = P(-\infty < X < 0) + P(0 < X < \mathrm{x}_0)$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0.\,\mathrm{dx} + \int_{0}^{\mathrm{x}_0} \left[\frac{1}{\mu}\mathrm{e}^{\frac{-1}{\mu}\mathrm{x}}\right].\,\mathrm{dx} = \left[-\mathrm{e}^{\frac{-1}{\mu}\mathrm{x}}\right]_0^{\mathrm{x}_0} = -\mathrm{e}^{\frac{-1}{\mu}\mathrm{x}} + 1 = \mathbf{1} - \mathbf{e}^{\frac{-1}{\mu}\mathbf{x}}$$

ومنه فإنّ تابع الاحتمالات للتوزيع الأسي يكون معرّف كالتالي:

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & ; -\infty < x < 0 \\ \mathbf{1} - \mathbf{e}^{\frac{-1}{\mu}\mathbf{x}} & ; \mathbf{0} < x < \infty \\ \mathbf{1} & ; \boldsymbol{x} \longrightarrow \infty \end{cases}$$

- إيجاد التوقع الرياضي للتوزيع الأسي:

$$\boldsymbol{E(X)} = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{x.\,f(x)dx} = \int_{0}^{\infty} \mathrm{x}.\left[\frac{1}{\mu}\mathrm{e}^{\frac{-1}{\mu}\mathrm{x}}\right] dx = \frac{1}{\mu}\left[-\mathrm{x}.\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{\mu}\mathrm{x}} - \mu.\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{\mu}\mathrm{x}}\right]_0^{\infty} = \boldsymbol{\mu}$$

**التمرين 6:**

إذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 10 وتباين 16 أي $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$، فأوجد قيمة x بحيث يكون $P(X < \mathrm{x}) = 0.9980$.

**الحل:**

نقوم بتحويل المتغير العشوائي X إلى المتغيرة Z المعيارية:

$$\boldsymbol{Z = \frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}}$$

أما قيمة **z** الموافقة لـ **x** فهي: $\boldsymbol{z = \frac{\mathrm{x} - \mu}{\sigma}}$

نعيّن قيمة **z** بحيث يكون:

$$P(X < \mathrm{x}) = P(Z < z) = 0.9980$$

من خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد قيمة **z** الموافقة للقيمة 0.9980 هي: $\boldsymbol{z = 2.88}$.

**التمرين 07:**

إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $40 = \mu$ وتباين $36 = \sigma^2$ أو قيمة كل من:

**1-** قيمة $\boldsymbol{a}$ التي يقع على يسارها 45% من المساحة تحت منحنى تابع الكثافة.

**2-** قيمة $\boldsymbol{b}$ التي يقع على يمينها 14% من المساحة تحت منحنى تابع الكثافة.

**الحل:**

1- ايجاد قيمة $\boldsymbol{a}$:

قيمة $\boldsymbol{a}$ التي يقع على يسارها 45% من المساحة تحت منحنى تابع الكثافة تعني أنّ:

$$F(a) = P(X < a) = 0.45$$

وبتحويل X إلى Z المعيارية:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} = \frac{a-40}{\sqrt{36}}$$

ومنه:

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} < \frac{a-40}{\sqrt{36}}\right) = P(Z < z) = 0.45$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد قيمة **z** الموافقة لقيمة الاحتمال 0.45 هي $(\boldsymbol{z = -0.13})$، وبذلك تكون قيمة $\boldsymbol{a}$ هي:

$$\boldsymbol{a} = 6(z) + 40 = 6(-0.13) + 40 = \boldsymbol{39.22}$$

**2-** إيجاد قيمة $b$:

قيمة $b$ التي يقع على يمينها 14% من المساحة تحت منحنى تابع الكثافة، تعني أنّ:

$$P(X > b) = 0.14$$

ومنه:

$$P(X < b) = 1 - 0.14 = 0.86$$

وبتحويل $X$ **إلى** $Z$ المعيارية نجد:

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} < \frac{b-40}{\sqrt{36}}\right) = P(Z < z) = 0.86$$

حيث:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد قيمة z الموافقة للقيمة 0.86 هي z = 1.08، وبالتالي:

$$z = 1.86 = \frac{b-40}{\sqrt{36}} = \frac{b-40}{6} \Rightarrow \boldsymbol{b = 46.48}$$

## تمارين مقترحة

**التمرين 01:**

إذا علمت أن $\frac{1}{10}$ من إنتاج مصنع لإنتاج السيارات يمثل إنتاج معيب، فإذا اشترى أحد الوكلاء 4 سيارات، فأوجد ما يلي:

1- التوزيع الاحتمالي لعدد السيارات المعيبة.

2- لنفرض أن الوكيل يحقق ربحا قدره 60 مليون عن كل سيارة سليمة وخسارة مقدارها 40 مليون عن كل سيارة معيبة، فما هي القيمة المتوقعة للربح والخسارة.

**التمرين 02:**

صندوق يحتوي على 10 كرات، منها 4 كرات معيبة. لنفرض أنّ المتغير العشوائي $X$ يمثل عدد الكرات المعيبة في عينة مكونة من 6 كرات تم سحبها من الصندوق ومع الإرجاع. أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي $X$.

**التمرين 03:**

إذا كان الوقت المستغرق لشحن (ملأ) شاحنة من النوع المتوسط هو 10 دقائق، وكان وقت الشحن يتبع التوزيع الأسي، المطلوب:

- بيّن أن قانون التوزيع الأسي يحقق شروط دالة الاحتمال.
- أوجد احتمال أن تشحن الشاحنة في أقل من 5 دقائق.
- أوجد احتمال أن تشحن الشاحنة في وقت يتراوح بين 5 و10 دقائق.

**التمرين 04:**

المعطيات الميدانية تثبت أنّ مدة حياة السلع المعمرة تتبع التوزيع الأسي. فإذا افترضنا أنّ المدة المتوسطة لحياة الثلاجة هي 10 سنوات. المطلوب:

1- ما هو احتمال أن تكون مدة حياة الثلاجة أقل من 5 سنوات.

2- ما هو احتمال أن تكون مدة حياة الثلاجة أكبر من 14 سنة.

3- ما هو احتمال أن تكون مدة حياة الثلاجة محصورة بين 4 و8 سنوات.

**التمرين 05:**

إذا كانت $\boldsymbol{X\sim N(4,16)}$ و $\boldsymbol{Z\sim N(0,1)}$، المطلوب:

- أوجد القيم الاحتمالية التالية:

$P(X > 6)$ , $P(5 < X < 8)$ , $P(Z < 3.42)$ , $P(3 < Z < 3.3)$

– أوجد قيمة **a** و **b** بحيث:

- $P(Z < a) = 0.579260$ , $P(Z < -b) = 0.011304$

### التمرين 06:

أوجد القيم الجدولية التالية:

$\chi^2_{(0.995,5)}$ , $\chi^2_{(0.1,15)}$ , $\mathrm{t}_{(0.975,3)}$ , $\mathrm{t}_{(0.01,10)}$ , $F_{(0.05,2,8)}$ , $\mathrm{F}_{(0.975,2,8)}$

# المراجع

## 1- باللغة العربية

- إدريس عبدلي، **دروس مدعمة بأمثلة وتمارين محلولة في مقياس (الإحصاء 2)**، مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك، جامعة البليدة 2، 2018- 2019.
- إمتثال محمد حسن، عادل محمود حلاوة، لبيبة حسب النبي العطار، **مقدمة في أساليب الاستدلال الإحصائي والتنبؤ**، الطبعة الأولى، مكتبة الوفاء القانونية، الإسكندرية، 2012.
- أنور اللحام، محمد شفيق ياسين، **مبادئ الإحصاء والاحتمال**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1991.
- إياد محمد الهوبي، **الإحصاء التطبيقي**، الطبعة الأولى، الكلية الجامعية للعلوم والتكنولوجيا، خان يونس– فلسطين، 2014.
- البشير عبد الكريم، **الاحتمالات والإحصاء**، مطبوعة موجهة لطلبة السنة الثانية علوم اقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية، جامعة الشلف، 2005– 2006.
- جورج كانافوس، دون ميلر، **الإحصاء للتجاريين– مدخل حديث**، تعريب سلطان محمد عبد الحميد، دار المريخ، الرياض– السعودية، 2004.
- سامي بن جدو ، **محاضرات في الإحصاء 3**، مطبوعة علمية موجهة لطلبة السنة الثانية علوم اقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية، المركز الجامعي ميلة، 2018- 2019.
- سمير سليم العبيدي، جمال إبراهيم البياتي، **الإحصاء التطبيقي– طرق اختبارات الفروض وموضوعات أخرى في الاستدلال الإحصائي**، دار شموع الثقافة، بنغازي– ليبيا، 2002.
- عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، **الإحصاء للعلوم الإدارية والتطبيقية**، الطبعة الأولى، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان– الأردن، 1997.
- نجاة رشيد الكيخيا، **أساسيات الاستنتاج الإحصائي**، دار المريخ للنشر، المملكة العربية السعودية، 2007.

## 2- باللغة الأجنبية

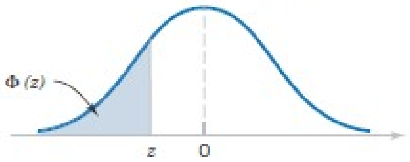
- Armitage, P & Berry, G, **Statistical Methods in Medical Research**, Third Edition, Blackwell Scientific Publication, Oxford, 1994.
- Cochran, W. G, **Sampling techniques**, Third Edition, Wiley, New York, 1997.
- Douglas C. Montegomery, George C. Runger, **Applied Statistics and Probability for Engineers**, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc, USA, 2002.

- François Dress, **Les Probabilités et Statistique de A a Z- 500 définitions, formules et tests d'hypothèse**, Dunod, Paris, 2013.
- Khaldi Khaled, **Methodes Statistiques- Rappels de cours Exercices corrigés**, Offices Des Publications Universitaires, Alger, 2005.
- Sheldon Ross, **A first course in probability**, Fifth edition, library of congress cataloging- in publication data, 1997.

# الملاحق

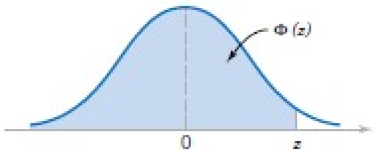
## الملحق (1): جدول التوزيع الطبيعي المعياري

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$



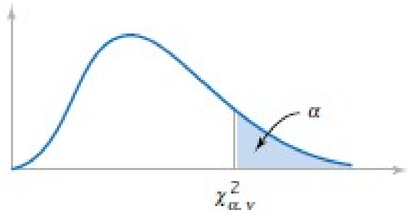
| z | −0.09 | −0.08 | −0.07 | −0.06 | −0.05 | −0.04 | −0.03 | −0.02 | −0.01 | −0.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −3.9 | 0.000033 | 0.000034 | 0.000036 | 0.000037 | 0.000039 | 0.000041 | 0.000042 | 0.000044 | 0.000046 | 0.000048 |
| −3.8 | 0.000050 | 0.000052 | 0.000054 | 0.000057 | 0.000059 | 0.000062 | 0.000064 | 0.000067 | 0.000069 | 0.000072 |
| −3.7 | 0.000075 | 0.000078 | 0.000082 | 0.000085 | 0.000088 | 0.000092 | 0.000096 | 0.000100 | 0.000104 | 0.000108 |
| −3.6 | 0.000112 | 0.000117 | 0.000121 | 0.000126 | 0.000131 | 0.000136 | 0.000142 | 0.000147 | 0.000153 | 0.000159 |
| −3.5 | 0.000165 | 0.000172 | 0.000179 | 0.000185 | 0.000193 | 0.000200 | 0.000208 | 0.000216 | 0.000224 | 0.000233 |
| −3.4 | 0.000242 | 0.000251 | 0.000260 | 0.000270 | 0.000280 | 0.000291 | 0.000302 | 0.000313 | 0.000325 | 0.000337 |
| −3.3 | 0.000350 | 0.000362 | 0.000376 | 0.000390 | 0.000404 | 0.000419 | 0.000434 | 0.000450 | 0.000467 | 0.000483 |
| −3.2 | 0.000501 | 0.000519 | 0.000538 | 0.000557 | 0.000577 | 0.000598 | 0.000619 | 0.000641 | 0.000664 | 0.000687 |
| −3.1 | 0.000711 | 0.000736 | 0.000762 | 0.000789 | 0.000816 | 0.000845 | 0.000874 | 0.000904 | 0.000935 | 0.000968 |
| −3.0 | 0.001001 | 0.001035 | 0.001070 | 0.001107 | 0.001144 | 0.001183 | 0.001223 | 0.001264 | 0.001306 | 0.001350 |
| −2.9 | 0.001395 | 0.001441 | 0.001489 | 0.001538 | 0.001589 | 0.001641 | 0.001695 | 0.001750 | 0.001807 | 0.001866 |
| −2.8 | 0.001926 | 0.001988 | 0.002052 | 0.002118 | 0.002186 | 0.002256 | 0.002327 | 0.002401 | 0.002477 | 0.002555 |
| −2.7 | 0.002635 | 0.002718 | 0.002803 | 0.002890 | 0.002980 | 0.003072 | 0.003167 | 0.003264 | 0.003364 | 0.003467 |
| −2.6 | 0.003573 | 0.003681 | 0.003793 | 0.003907 | 0.004025 | 0.004145 | 0.004269 | 0.004396 | 0.004527 | 0.004661 |
| −2.5 | 0.004799 | 0.004940 | 0.005085 | 0.005234 | 0.005386 | 0.005543 | 0.005703 | 0.005868 | 0.006037 | 0.006210 |
| −2.4 | 0.006387 | 0.006569 | 0.006756 | 0.006947 | 0.007143 | 0.007344 | 0.007549 | 0.007760 | 0.007976 | 0.008198 |
| −2.3 | 0.008424 | 0.008656 | 0.008894 | 0.009137 | 0.009387 | 0.009642 | 0.009903 | 0.010170 | 0.010444 | 0.010724 |
| −2.2 | 0.011011 | 0.011304 | 0.011604 | 0.011911 | 0.012224 | 0.012545 | 0.012874 | 0.013209 | 0.013553 | 0.013903 |
| −2.1 | 0.014262 | 0.014629 | 0.015003 | 0.015386 | 0.015778 | 0.016177 | 0.016586 | 0.017003 | 0.017429 | 0.017864 |
| −2.0 | 0.018309 | 0.018763 | 0.019226 | 0.019699 | 0.020182 | 0.020675 | 0.021178 | 0.021692 | 0.022216 | 0.022750 |
| −1.9 | 0.023295 | 0.023852 | 0.024419 | 0.024998 | 0.025588 | 0.026190 | 0.026803 | 0.027429 | 0.028067 | 0.028717 |
| −1.8 | 0.029379 | 0.030054 | 0.030742 | 0.031443 | 0.032157 | 0.032884 | 0.033625 | 0.034379 | 0.035148 | 0.035930 |
| −1.7 | 0.036727 | 0.037538 | 0.038364 | 0.039204 | 0.040059 | 0.040929 | 0.041815 | 0.042716 | 0.043633 | 0.044565 |
| −1.6 | 0.045514 | 0.046479 | 0.047460 | 0.048457 | 0.049471 | 0.050503 | 0.051551 | 0.052616 | 0.053699 | 0.054799 |
| −1.5 | 0.055917 | 0.057053 | 0.058208 | 0.059380 | 0.060571 | 0.061780 | 0.063008 | 0.064256 | 0.065522 | 0.066807 |
| −1.4 | 0.068112 | 0.069437 | 0.070781 | 0.072145 | 0.073529 | 0.074934 | 0.076359 | 0.077804 | 0.079270 | 0.080757 |
| −1.3 | 0.082264 | 0.083793 | 0.085343 | 0.086915 | 0.088508 | 0.090123 | 0.091759 | 0.093418 | 0.095098 | 0.096801 |
| −1.2 | 0.098525 | 0.100273 | 0.102042 | 0.103835 | 0.105650 | 0.107488 | 0.109349 | 0.111233 | 0.113140 | 0.115070 |
| −1.1 | 0.117023 | 0.119000 | 0.121001 | 0.123024 | 0.125072 | 0.127143 | 0.129238 | 0.131357 | 0.133500 | 0.135666 |
| −1.0 | 0.137857 | 0.140071 | 0.142310 | 0.144572 | 0.146859 | 0.149170 | 0.151505 | 0.153864 | 0.156248 | 0.158655 |
| −0.9 | 0.161087 | 0.163543 | 0.166023 | 0.168528 | 0.171056 | 0.173609 | 0.176185 | 0.178786 | 0.181411 | 0.184060 |
| −0.8 | 0.186733 | 0.189430 | 0.192150 | 0.194894 | 0.197662 | 0.200454 | 0.203269 | 0.206108 | 0.208970 | 0.211855 |
| −0.7 | 0.214764 | 0.217695 | 0.220650 | 0.223627 | 0.226627 | 0.229650 | 0.232695 | 0.235762 | 0.238852 | 0.241964 |
| −0.6 | 0.245097 | 0.248252 | 0.251429 | 0.254627 | 0.257846 | 0.261086 | 0.264347 | 0.267629 | 0.270931 | 0.274253 |
| −0.5 | 0.277595 | 0.280957 | 0.284339 | 0.287740 | 0.291160 | 0.294599 | 0.298056 | 0.301532 | 0.305026 | 0.308538 |
| −0.4 | 0.312067 | 0.315614 | 0.319178 | 0.322758 | 0.326355 | 0.329969 | 0.333598 | 0.337243 | 0.340903 | 0.344578 |
| −0.3 | 0.348268 | 0.351973 | 0.355691 | 0.359424 | 0.363169 | 0.366928 | 0.370700 | 0.374484 | 0.378281 | 0.382089 |
| −0.2 | 0.385908 | 0.389739 | 0.393580 | 0.397432 | 0.401294 | 0.405165 | 0.409046 | 0.412936 | 0.416834 | 0.420740 |
| −0.1 | 0.424655 | 0.428576 | 0.432505 | 0.436441 | 0.440382 | 0.444330 | 0.448283 | 0.452242 | 0.456205 | 0.460172 |
| 0.0 | 0.464144 | 0.468119 | 0.472097 | 0.476078 | 0.480061 | 0.484047 | 0.488033 | 0.492022 | 0.496011 | 0.500000 |

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$



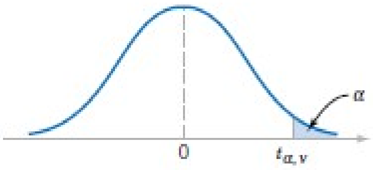
| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.500000 | 0.503989 | 0.507978 | 0.511967 | 0.515953 | 0.519939 | 0.532922 | 0.527903 | 0.531881 | 0.535856 |
| 0.1 | 0.539828 | 0.543795 | 0.547758 | 0.551717 | 0.555760 | 0.559618 | 0.563559 | 0.567495 | 0.571424 | 0.575345 |
| 0.2 | 0.579260 | 0.583166 | 0.587064 | 0.590954 | 0.594835 | 0.598706 | 0.602568 | 0.606420 | 0.610261 | 0.614092 |
| 0.3 | 0.617911 | 0.621719 | 0.625516 | 0.629300 | 0.633072 | 0.636831 | 0.640576 | 0.644309 | 0.648027 | 0.651732 |
| 0.4 | 0.655422 | 0.659097 | 0.662757 | 0.666402 | 0.670031 | 0.673645 | 0.677242 | 0.680822 | 0.684386 | 0.687933 |
| 0.5 | 0.691462 | 0.694974 | 0.698468 | 0.701944 | 0.705401 | 0.708840 | 0.712260 | 0.715661 | 0.719043 | 0.722405 |
| 0.6 | 0.725747 | 0.729069 | 0.732371 | 0.735653 | 0.738914 | 0.742154 | 0.745373 | 0.748571 | 0.751748 | 0.754903 |
| 0.7 | 0.758036 | 0.761148 | 0.764238 | 0.767305 | 0.770350 | 0.773373 | 0.776373 | 0.779350 | 0.782305 | 0.785236 |
| 0.8 | 0.788145 | 0.791030 | 0.793892 | 0.796731 | 0.799546 | 0.802338 | 0.805106 | 0.807850 | 0.810570 | 0.813267 |
| 0.9 | 0.815940 | 0.818589 | 0.821214 | 0.823815 | 0.826391 | 0.828944 | 0.831472 | 0.833977 | 0.836457 | 0.838913 |
| 1.0 | 0.841345 | 0.843752 | 0.846136 | 0.848495 | 0.850830 | 0.853141 | 0.855428 | 0.857690 | 0.859929 | 0.862143 |
| 1.1 | 0.864334 | 0.866500 | 0.868643 | 0.870762 | 0.872857 | 0.874928 | 0.876976 | 0.878999 | 0.881000 | 0.882977 |
| 1.2 | 0.884930 | 0.886860 | 0.888767 | 0.890651 | 0.892512 | 0.894350 | 0.896165 | 0.897958 | 0.899727 | 0.901475 |
| 1.3 | 0.903199 | 0.904902 | 0.906582 | 0.908241 | 0.909877 | 0.911492 | 0.913085 | 0.914657 | 0.916207 | 0.917736 |
| 1.4 | 0.919243 | 0.920730 | 0.922196 | 0.923641 | 0.925066 | 0.926471 | 0.927855 | 0.929219 | 0.930563 | 0.931888 |
| 1.5 | 0.933193 | 0.934478 | 0.935744 | 0.936992 | 0.938220 | 0.939429 | 0.940620 | 0.941792 | 0.942947 | 0.944083 |
| 1.6 | 0.945201 | 0.946301 | 0.947384 | 0.948449 | 0.949497 | 0.950529 | 0.951543 | 0.952540 | 0.953521 | 0.954486 |
| 1.7 | 0.955435 | 0.956367 | 0.957284 | 0.958185 | 0.959071 | 0.959941 | 0.960796 | 0.961636 | 0.962462 | 0.963273 |
| 1.8 | 0.964070 | 0.964852 | 0.965621 | 0.966375 | 0.967116 | 0.967843 | 0.968557 | 0.969258 | 0.969946 | 0.970621 |
| 1.9 | 0.971283 | 0.971933 | 0.972571 | 0.973197 | 0.973810 | 0.974412 | 0.975002 | 0.975581 | 0.976148 | 0.976705 |
| 2.0 | 0.977250 | 0.977784 | 0.978308 | 0.978822 | 0.979325 | 0.979818 | 0.980301 | 0.980774 | 0.981237 | 0.981691 |
| 2.1 | 0.982136 | 0.982571 | 0.982997 | 0.983414 | 0.983823 | 0.984222 | 0.984614 | 0.984997 | 0.985371 | 0.985738 |
| 2.2 | 0.986097 | 0.986447 | 0.986791 | 0.987126 | 0.987455 | 0.987776 | 0.988089 | 0.988396 | 0.988696 | 0.988989 |
| 2.3 | 0.989276 | 0.989556 | 0.989830 | 0.990097 | 0.990358 | 0.990613 | 0.990863 | 0.991106 | 0.991344 | 0.991576 |
| 2.4 | 0.991802 | 0.992024 | 0.992240 | 0.992451 | 0.992656 | 0.992857 | 0.993053 | 0.993244 | 0.993431 | 0.993613 |
| 2.5 | 0.993790 | 0.993963 | 0.994132 | 0.994297 | 0.994457 | 0.994614 | 0.994766 | 0.994915 | 0.995060 | 0.995201 |
| 2.6 | 0.995339 | 0.995473 | 0.995604 | 0.995731 | 0.995855 | 0.995975 | 0.996093 | 0.996207 | 0.996319 | 0.996427 |
| 2.7 | 0.996533 | 0.996636 | 0.996736 | 0.996833 | 0.996928 | 0.997020 | 0.997110 | 0.997197 | 0.997282 | 0.997365 |
| 2.8 | 0.997445 | 0.997523 | 0.997599 | 0.997673 | 0.997744 | 0.997814 | 0.997882 | 0.997948 | 0.998012 | 0.998074 |
| 2.9 | 0.998134 | 0.998193 | 0.998250 | 0.998305 | 0.998359 | 0.998411 | 0.998462 | 0.998511 | 0.998559 | 0.998605 |
| 3.0 | 0.998650 | 0.998694 | 0.998736 | 0.998777 | 0.998817 | 0.998856 | 0.998893 | 0.998930 | 0.998965 | 0.998999 |
| 3.1 | 0.999032 | 0.999065 | 0.999096 | 0.999126 | 0.999155 | 0.999184 | 0.999211 | 0.999238 | 0.999264 | 0.999289 |
| 3.2 | 0.999313 | 0.999336 | 0.999359 | 0.999381 | 0.999402 | 0.999423 | 0.999443 | 0.999462 | 0.999481 | 0.999499 |
| 3.3 | 0.999517 | 0.999533 | 0.999550 | 0.999566 | 0.999581 | 0.999596 | 0.999610 | 0.999624 | 0.999638 | 0.999650 |
| 3.4 | 0.999663 | 0.999675 | 0.999687 | 0.999698 | 0.999709 | 0.999720 | 0.999730 | 0.999740 | 0.999749 | 0.999758 |
| 3.5 | 0.999767 | 0.999776 | 0.999784 | 0.999792 | 0.999800 | 0.999807 | 0.999815 | 0.999821 | 0.999828 | 0.999835 |
| 3.6 | 0.999841 | 0.999847 | 0.999853 | 0.999858 | 0.999864 | 0.999869 | 0.999874 | 0.999879 | 0.999883 | 0.999888 |
| 3.7 | 0.999892 | 0.999896 | 0.999900 | 0.999904 | 0.999908 | 0.999912 | 0.999915 | 0.999918 | 0.999922 | 0.999925 |
| 3.8 | 0.999928 | 0.999931 | 0.999933 | 0.999936 | 0.999938 | 0.999941 | 0.999943 | 0.999946 | 0.999948 | 0.999950 |
| 3.9 | 0.999952 | 0.999954 | 0.999956 | 0.999958 | 0.999959 | 0.999961 | 0.999963 | 0.999964 | 0.999966 | 0.999967 |

## الملحق (2): جدول توزيع مربع كاي



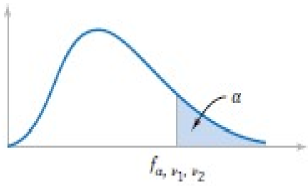
| $\alpha$<br>$v$ | .995 | .990 | .975 | .950 | .900 | .500 | .100 | .050 | .025 | .010 | .005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .00+ | .00+ | .00+ | .00+ | .02 | .45 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | .01 | .02 | .05 | .10 | .21 | 1.39 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.60 |
| 3 | .07 | .11 | .22 | .35 | .58 | 2.37 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.34 | 12.84 |
| 4 | .21 | .30 | .48 | .71 | 1.06 | 3.36 | 7.78 | 9.49 | 11.14 | 13.28 | 14.86 |
| 5 | .41 | .55 | .83 | 1.15 | 1.61 | 4.35 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 |
| 6 | .68 | .87 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 5.35 | 10.65 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 |
| 7 | .99 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 6.35 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 7.34 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.96 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 8.34 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 9.34 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 10.34 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.72 | 26.76 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 11.34 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 12.34 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 13.34 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.27 | 7.26 | 8.55 | 14.34 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 15.34 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.09 | 16.34 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.87 | 17.34 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.12 | 11.65 | 18.34 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.85 | 12.44 | 19.34 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.28 | 11.59 | 13.24 | 20.34 | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 10.98 | 12.34 | 14.04 | 21.34 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 |
| 23 | 9.26 | 10.20 | 11.69 | 13.09 | 14.85 | 22.34 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 |
| 24 | 9.89 | 10.86 | 12.40 | 13.85 | 15.66 | 23.34 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 |
| 25 | 10.52 | 11.52 | 13.12 | 14.61 | 16.47 | 24.34 | 34.28 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 |
| 26 | 11.16 | 12.20 | 13.84 | 15.38 | 17.29 | 25.34 | 35.56 | 38.89 | 41.92 | 45.64 | 48.29 |
| 27 | 11.81 | 12.88 | 14.57 | 16.15 | 18.11 | 26.34 | 36.74 | 40.11 | 43.19 | 46.96 | 49.65 |
| 28 | 12.46 | 13.57 | 15.31 | 16.93 | 18.94 | 27.34 | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 48.28 | 50.99 |
| 29 | 13.12 | 14.26 | 16.05 | 17.71 | 19.77 | 28.34 | 39.09 | 42.56 | 45.72 | 49.59 | 52.34 |
| 30 | 13.79 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 20.60 | 29.34 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 |
| 40 | 20.71 | 22.16 | 24.43 | 26.51 | 29.05 | 39.34 | 51.81 | 55.76 | 59.34 | 63.69 | 66.77 |
| 50 | 27.99 | 29.71 | 32.36 | 34.76 | 37.69 | 49.33 | 63.17 | 67.50 | 71.42 | 76.15 | 79.49 |
| 60 | 35.53 | 37.48 | 40.48 | 43.19 | 46.46 | 59.33 | 74.40 | 79.08 | 83.30 | 88.38 | 91.95 |
| 70 | 43.28 | 45.44 | 48.76 | 51.74 | 55.33 | 69.33 | 85.53 | 90.53 | 95.02 | 100.42 | 104.22 |
| 80 | 51.17 | 53.54 | 57.15 | 60.39 | 64.28 | 79.33 | 96.58 | 101.88 | 106.63 | 112.33 | 116.32 |
| 90 | 59.20 | 61.75 | 65.65 | 69.13 | 73.29 | 89.33 | 107.57 | 113.14 | 118.14 | 124.12 | 128.30 |
| 100 | 67.33 | 70.06 | 74.22 | 77.93 | 82.36 | 99.33 | 118.50 | 124.34 | 129.56 | 135.81 | 140.17 |

## الملحق (3): جدول توزيع ستودنت



| $\alpha$ $\nu$ | .40 | .25 | .10 | .05 | .025 | .01 | .005 | .0025 | .001 | .0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .325 | 1.000 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 127.32 | 318.31 | 636.62 |
| 2 | .289 | .816 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 14.089 | 23.326 | 31.598 |
| 3 | .277 | .765 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 7.453 | 10.213 | 12.924 |
| 4 | .271 | .741 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 5.598 | 7.173 | 8.610 |
| 5 | .267 | .727 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 4.773 | 5.893 | 6.869 |
| 6 | .265 | .718 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 4.317 | 5.208 | 5.959 |
| 7 | .263 | .711 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 4.029 | 4.785 | 5.408 |
| 8 | .262 | .706 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 3.833 | 4.501 | 5.041 |
| 9 | .261 | .703 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 3.690 | 4.297 | 4.781 |
| 10 | .260 | .700 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 3.581 | 4.144 | 4.587 |
| 11 | .260 | .697 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 3.497 | 4.025 | 4.437 |
| 12 | .259 | .695 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.428 | 3.930 | 4.318 |
| 13 | .259 | .694 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.372 | 3.852 | 4.221 |
| 14 | .258 | .692 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.326 | 3.787 | 4.140 |
| 15 | .258 | .691 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.286 | 3.733 | 4.073 |
| 16 | .258 | .690 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 3.252 | 3.686 | 4.015 |
| 17 | .257 | .689 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.222 | 3.646 | 3.965 |
| 18 | .257 | .688 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.197 | 3.610 | 3.922 |
| 19 | .257 | .688 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.174 | 3.579 | 3.883 |
| 20 | .257 | .687 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.153 | 3.552 | 3.850 |
| 21 | .257 | .686 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.135 | 3.527 | 3.819 |
| 22 | .256 | .686 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.119 | 3.505 | 3.792 |
| 23 | .256 | .685 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.104 | 3.485 | 3.767 |
| 24 | .256 | .685 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.091 | 3.467 | 3.745 |
| 25 | .256 | .684 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.078 | 3.450 | 3.725 |
| 26 | .256 | .684 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.067 | 3.435 | 3.707 |
| 27 | .256 | .684 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.057 | 3.421 | 3.690 |
| 28 | .256 | .683 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.047 | 3.408 | 3.674 |
| 29 | .256 | .683 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.038 | 3.396 | 3.659 |
| 30 | .256 | .683 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.030 | 3.385 | 3.646 |
| 40 | .255 | .681 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 2.971 | 3.307 | 3.551 |
| 60 | .254 | .679 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 2.915 | 3.232 | 3.460 |
| 120 | .254 | .677 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 2.860 | 3.160 | 3.373 |
| $\infty$ | .253 | .674 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 2.807 | 3.090 | 3.291 |

## الملحق (4): جداول توزيع فيشر



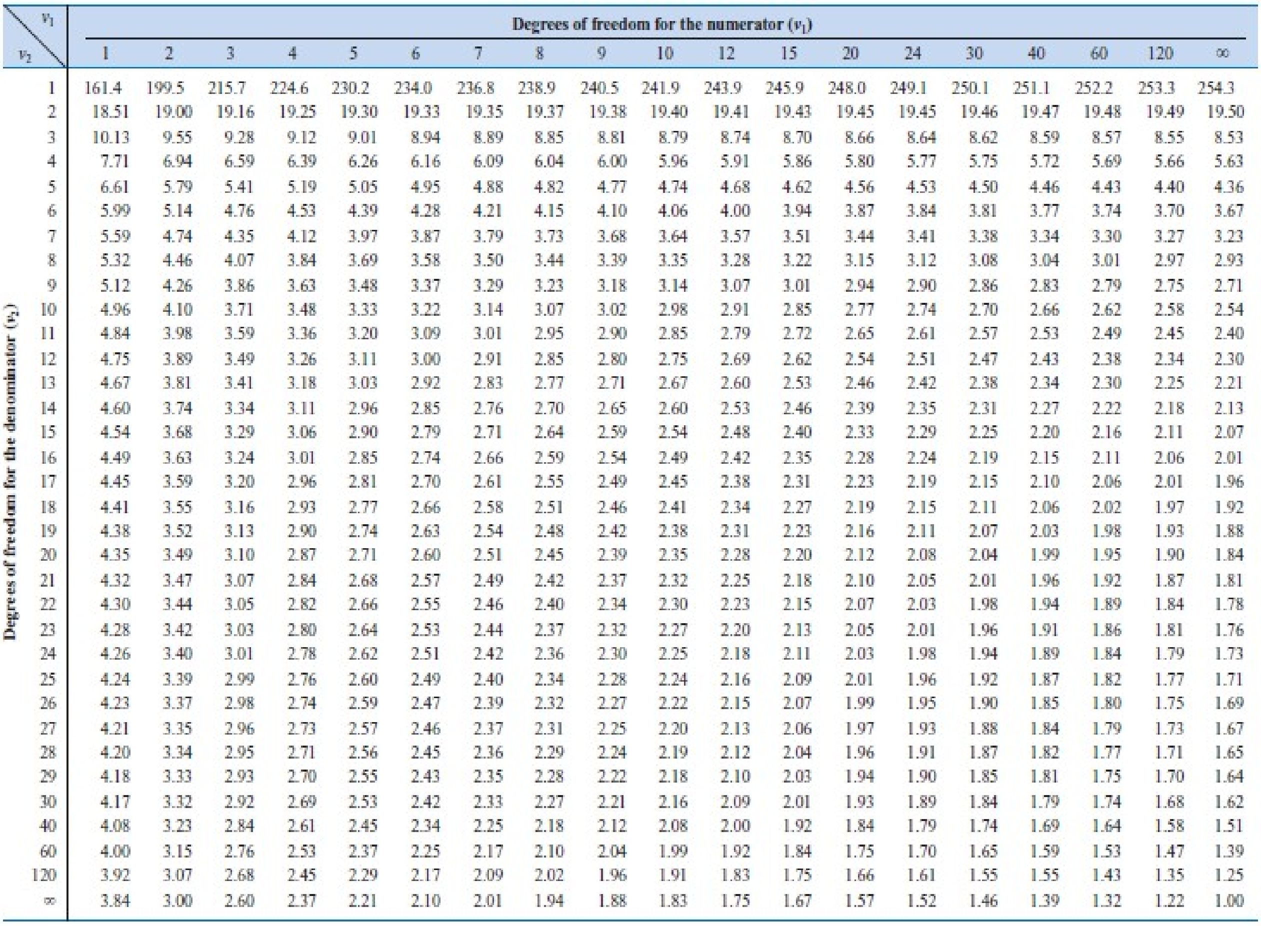
$f_{0.25,v_1,v_2}$

| | $v_2$ \ $v_1$ | Degrees of freedom for the numerator ($v_1$) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| Degrees of freedom for the denominator ($v_2$) | 1 | 5.83 | 7.50 | 8.20 | 8.58 | 8.82 | 8.98 | 9.10 | 9.19 | 9.26 | 9.32 | 9.41 | 9.49 | 9.58 | 9.63 | 9.67 | 9.71 | 9.76 | 9.80 | 9.85 |
| | 2 | 2.57 | 3.00 | 3.15 | 3.23 | 3.28 | 3.31 | 3.34 | 3.35 | 3.37 | 3.38 | 3.39 | 3.41 | 3.43 | 3.43 | 3.44 | 3.45 | 3.46 | 3.47 | 3.48 |
| | 3 | 2.02 | 2.28 | 2.36 | 2.39 | 2.41 | 2.42 | 2.43 | 2.44 | 2.44 | 2.44 | 2.45 | 2.46 | 2.46 | 2.46 | 2.47 | 2.47 | 2.47 | 2.47 | 2.47 |
| | 4 | 1.81 | 2.00 | 2.05 | 2.06 | 2.07 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 |
| | 5 | 1.69 | 1.85 | 1.88 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.88 | 1.88 | 1.88 | 1.88 | 1.87 | 1.87 | 1.87 |
| | 6 | 1.62 | 1.76 | 1.78 | 1.79 | 1.79 | 1.78 | 1.78 | 1.78 | 1.77 | 1.77 | 1.77 | 1.76 | 1.76 | 1.75 | 1.75 | 1.75 | 1.74 | 1.74 | 1.74 |
| | 7 | 1.57 | 1.70 | 1.72 | 1.72 | 1.71 | 1.71 | 1.70 | 1.70 | 1.70 | 1.69 | 1.68 | 1.68 | 1.67 | 1.67 | 1.66 | 1.66 | 1.65 | 1.65 | 1.65 |
| | 8 | 1.54 | 1.66 | 1.67 | 1.66 | 1.66 | 1.65 | 1.64 | 1.64 | 1.63 | 1.63 | 1.62 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.60 | 1.59 | 1.59 | 1.58 | 1.58 |
| | 9 | 1.51 | 1.62 | 1.63 | 1.63 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.60 | 1.59 | 1.59 | 1.58 | 1.57 | 1.56 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.54 | 1.53 | 1.53 |
| | 10 | 1.49 | 1.60 | 1.60 | 1.59 | 1.59 | 1.58 | 1.57 | 1.56 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.53 | 1.52 | 1.52 | 1.51 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.48 |
| | 11 | 1.47 | 1.58 | 1.58 | 1.57 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.53 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.47 | 1.46 | 1.45 |
| | 12 | 1.46 | 1.56 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 |
| | 13 | 1.45 | 1.55 | 1.55 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.42 | 1.41 | 1.40 |
| | 14 | 1.44 | 1.53 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 |
| | 15 | 1.43 | 1.52 | 1.52 | 1.51 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.46 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.41 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 |
| | 16 | 1.42 | 1.51 | 1.51 | 1.50 | 1.48 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.44 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 |
| | 17 | 1.42 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 |
| | 18 | 1.41 | 1.50 | 1.49 | 1.48 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.42 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 |
| | 19 | 1.41 | 1.49 | 1.49 | 1.47 | 1.46 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.41 | 1.40 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.30 |
| | 20 | 1.40 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.29 |
| | 21 | 1.40 | 1.48 | 1.48 | 1.46 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.28 |
| | 22 | 1.40 | 1.48 | 1.47 | 1.45 | 1.44 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.39 | 1.37 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 |
| | 23 | 1.39 | 1.47 | 1.47 | 1.45 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.28 | 1.27 |
| | 24 | 1.39 | 1.47 | 1.46 | 1.44 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.38 | 1.36 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.26 |
| | 25 | 1.39 | 1.47 | 1.46 | 1.44 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.25 |
| | 26 | 1.38 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.42 | 1.41 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.35 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.26 | 1.25 |
| | 27 | 1.38 | 1.46 | 1.45 | 1.43 | 1.42 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.24 |
| | 28 | 1.38 | 1.46 | 1.45 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.25 | 1.24 |
| | 29 | 1.38 | 1.45 | 1.45 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.27 | 1.26 | 1.25 | 1.23 |
| | 30 | 1.38 | 1.45 | 1.44 | 1.42 | 1.41 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.32 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.24 | 1.23 |
| | 40 | 1.36 | 1.44 | 1.42 | 1.40 | 1.39 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.28 | 1.26 | 1.25 | 1.24 | 1.22 | 1.21 | 1.19 |
| | 60 | 1.35 | 1.42 | 1.41 | 1.38 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.27 | 1.25 | 1.24 | 1.22 | 1.21 | 1.19 | 1.17 | 1.15 |
| | 120 | 1.34 | 1.40 | 1.39 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.26 | 1.24 | 1.22 | 1.21 | 1.19 | 1.18 | 1.16 | 1.13 | 1.10 |
| | ∞ | 1.32 | 1.39 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.25 | 1.24 | 1.22 | 1.19 | 1.18 | 1.16 | 1.14 | 1.12 | 1.08 | 1.00 |

## $f_{0.10,v_1,v_2}$

| $v_1$ / $v_2$ | Degrees of freedom for the numerator ($v_1$) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Degrees of freedom for the denominator ($v_2$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 1 | 39.86 | 49.50 | 53.59 | 55.83 | 57.24 | 58.20 | 58.91 | 59.44 | 59.86 | 60.19 | 60.71 | 61.22 | 61.74 | 62.00 | 62.26 | 62.53 | 62.79 | 63.06 | 63.33 |
| 2 | 8.53 | 9.00 | 9.16 | 9.24 | 9.29 | 9.33 | 9.35 | 9.37 | 9.38 | 9.39 | 9.41 | 9.42 | 9.44 | 9.45 | 9.46 | 9.47 | 9.47 | 9.48 | 9.49 |
| 3 | 5.54 | 5.46 | 5.39 | 5.34 | 5.31 | 5.28 | 5.27 | 5.25 | 5.24 | 5.23 | 5.22 | 5.20 | 5.18 | 5.18 | 5.17 | 5.16 | 5.15 | 5.14 | 5.13 |
| 4 | 4.54 | 4.32 | 4.19 | 4.11 | 4.05 | 4.01 | 3.98 | 3.95 | 3.94 | 3.92 | 3.90 | 3.87 | 3.84 | 3.83 | 3.82 | 3.80 | 3.79 | 3.78 | 3.76 |
| 5 | 4.06 | 3.78 | 3.62 | 3.52 | 3.45 | 3.40 | 3.37 | 3.34 | 3.32 | 3.30 | 3.27 | 3.24 | 3.21 | 3.19 | 3.17 | 3.16 | 3.14 | 3.12 | 3.10 |
| 6 | 3.78 | 3.46 | 3.29 | 3.18 | 3.11 | 3.05 | 3.01 | 2.98 | 2.96 | 2.94 | 2.90 | 2.87 | 2.84 | 2.82 | 2.80 | 2.78 | 2.76 | 2.74 | 2.72 |
| 7 | 3.59 | 3.26 | 3.07 | 2.96 | 2.88 | 2.83 | 2.78 | 2.75 | 2.72 | 2.70 | 2.67 | 2.63 | 2.59 | 2.58 | 2.56 | 2.54 | 2.51 | 2.49 | 2.47 |
| 8 | 3.46 | 3.11 | 2.92 | 2.81 | 2.73 | 2.67 | 2.62 | 2.59 | 2.56 | 2.54 | 2.50 | 2.46 | 2.42 | 2.40 | 2.38 | 2.36 | 2.34 | 2.32 | 2.29 |
| 9 | 3.36 | 3.01 | 2.81 | 2.69 | 2.61 | 2.55 | 2.51 | 2.47 | 2.44 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.28 | 2.25 | 2.23 | 2.21 | 2.18 | 2.16 |
| 10 | 3.29 | 2.92 | 2.73 | 2.61 | 2.52 | 2.46 | 2.41 | 2.38 | 2.35 | 2.32 | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.18 | 2.16 | 2.13 | 2.11 | 2.08 | 2.06 |
| 11 | 3.23 | 2.86 | 2.66 | 2.54 | 2.45 | 2.39 | 2.34 | 2.30 | 2.27 | 2.25 | 2.21 | 2.17 | 2.12 | 2.10 | 2.08 | 2.05 | 2.03 | 2.00 | 1.97 |
| 12 | 3.18 | 2.81 | 2.61 | 2.48 | 2.39 | 2.33 | 2.28 | 2.24 | 2.21 | 2.19 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.04 | 2.01 | 1.99 | 1.96 | 1.93 | 1.90 |
| 13 | 3.14 | 2.76 | 2.56 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.23 | 2.20 | 2.16 | 2.14 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.98 | 1.96 | 1.93 | 1.90 | 1.88 | 1.85 |
| 14 | 3.10 | 2.73 | 2.52 | 2.39 | 2.31 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.12 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.94 | 1.91 | 1.89 | 1.86 | 1.83 | 1.80 |
| 15 | 3.07 | 2.70 | 2.49 | 2.36 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.12 | 2.09 | 2.06 | 2.02 | 1.97 | 1.92 | 1.90 | 1.87 | 1.85 | 1.82 | 1.79 | 1.76 |
| 16 | 3.05 | 2.67 | 2.46 | 2.33 | 2.24 | 2.18 | 2.13 | 2.09 | 2.06 | 2.03 | 1.99 | 1.94 | 1.89 | 1.87 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.72 |
| 17 | 3.03 | 2.64 | 2.44 | 2.31 | 2.22 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.03 | 2.00 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.69 |
| 18 | 3.01 | 2.62 | 2.42 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.08 | 2.04 | 2.00 | 1.98 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.69 | 1.66 |
| 19 | 2.99 | 2.61 | 2.40 | 2.27 | 2.18 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.98 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.79 | 1.76 | 1.73 | 1.70 | 1.67 | 1.63 |
| 20 | 2.97 | 2.59 | 2.38 | 2.25 | 2.16 | 2.09 | 2.04 | 2.00 | 1.96 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.77 | 1.74 | 1.71 | 1.68 | 1.64 | 1.61 |
| 21 | 2.96 | 2.57 | 2.36 | 2.23 | 2.14 | 2.08 | 2.02 | 1.98 | 1.95 | 1.92 | 1.87 | 1.83 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.62 | 1.59 |
| 22 | 2.95 | 2.56 | 2.35 | 2.22 | 2.13 | 2.06 | 2.01 | 1.97 | 1.93 | 1.90 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.73 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.60 | 1.57 |
| 23 | 2.94 | 2.55 | 2.34 | 2.21 | 2.11 | 2.05 | 1.99 | 1.95 | 1.92 | 1.89 | 1.84 | 1.80 | 1.74 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.62 | 1.59 | 1.55 |
| 24 | 2.93 | 2.54 | 2.33 | 2.19 | 2.10 | 2.04 | 1.98 | 1.94 | 1.91 | 1.88 | 1.83 | 1.78 | 1.73 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.57 | 1.53 |
| 25 | 2.92 | 2.53 | 2.32 | 2.18 | 2.09 | 2.02 | 1.97 | 1.93 | 1.89 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.63 | 1.59 | 1.56 | 1.52 |
| 26 | 2.91 | 2.52 | 2.31 | 2.17 | 2.08 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.88 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.71 | 1.68 | 1.65 | 1.61 | 1.58 | 1.54 | 1.50 |
| 27 | 2.90 | 2.51 | 2.30 | 2.17 | 2.07 | 2.00 | 1.95 | 1.91 | 1.87 | 1.85 | 1.80 | 1.75 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.60 | 1.57 | 1.53 | 1.49 |
| 28 | 2.89 | 2.50 | 2.29 | 2.16 | 2.06 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 1.87 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.66 | 1.63 | 1.59 | 1.56 | 1.52 | 1.48 |
| 29 | 2.89 | 2.50 | 2.28 | 2.15 | 2.06 | 1.99 | 1.93 | 1.89 | 1.86 | 1.83 | 1.78 | 1.73 | 1.68 | 1.65 | 1.62 | 1.58 | 1.55 | 1.51 | 1.47 |
| 30 | 2.88 | 2.49 | 2.28 | 2.14 | 2.03 | 1.98 | 1.93 | 1.88 | 1.85 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.50 | 1.46 |
| 40 | 2.84 | 2.44 | 2.23 | 2.09 | 2.00 | 1.93 | 1.87 | 1.83 | 1.79 | 1.76 | 1.71 | 1.66 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.51 | 1.47 | 1.42 | 1.38 |
| 60 | 2.79 | 2.39 | 2.18 | 2.04 | 1.95 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.74 | 1.71 | 1.66 | 1.60 | 1.54 | 1.51 | 1.48 | 1.44 | 1.40 | 1.35 | 1.29 |
| 120 | 2.75 | 2.35 | 2.13 | 1.99 | 1.90 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.68 | 1.65 | 1.60 | 1.55 | 1.48 | 1.45 | 1.41 | 1.37 | 1.32 | 1.26 | 1.19 |
| ∞ | 2.71 | 2.30 | 2.08 | 1.94 | 1.85 | 1.77 | 1.72 | 1.67 | 1.63 | 1.60 | 1.55 | 1.49 | 1.42 | 1.38 | 1.34 | 1.30 | 1.24 | 1.17 | 1.00 |

$$f_{0.05,v_1,v_2}$$



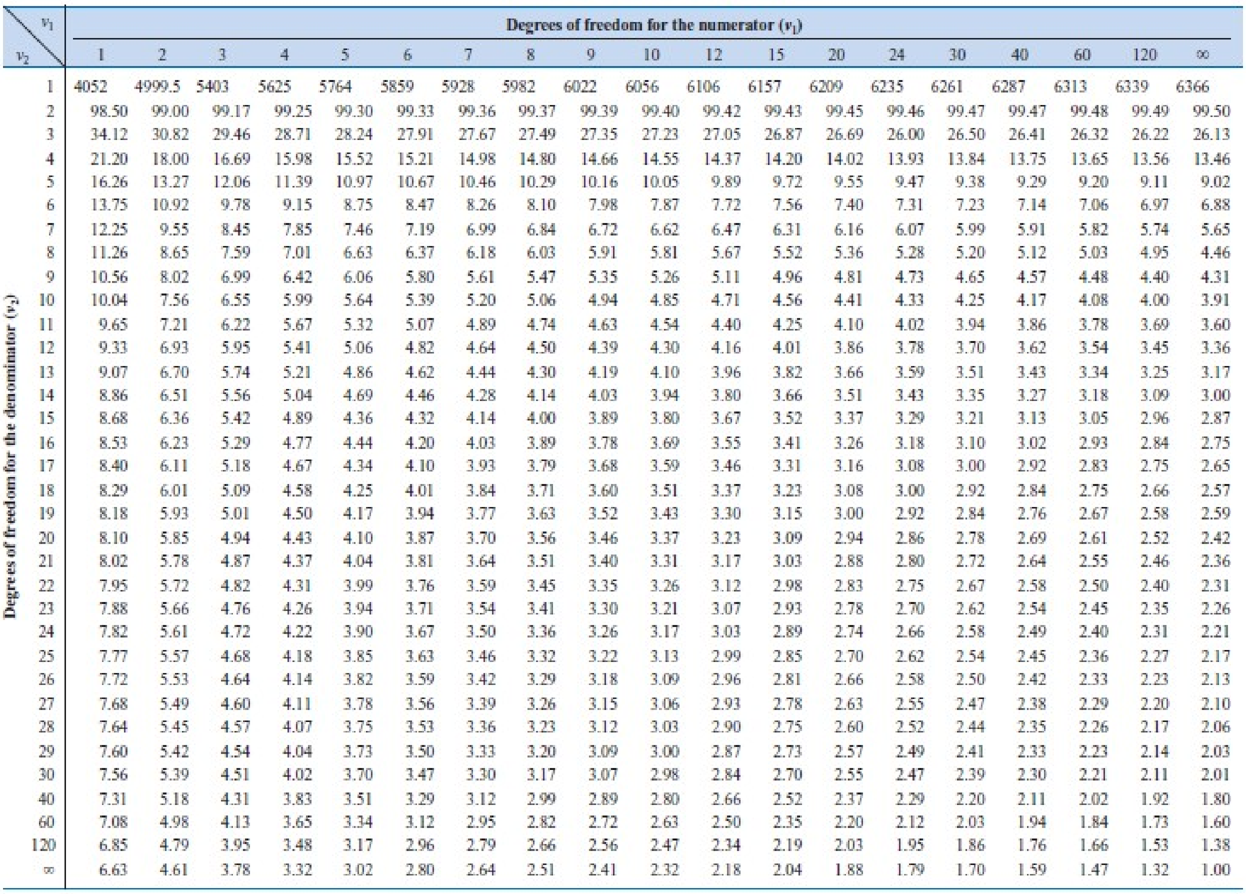
Degrees of freedom for the denominator ($v_2$)

| $v_1$ / $v_2$ | Degrees of freedom for the numerator ($v_1$) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 1 | 161.4 | 199.5 | 215.7 | 224.6 | 230.2 | 234.0 | 236.8 | 238.9 | 240.5 | 241.9 | 243.9 | 245.9 | 248.0 | 249.1 | 250.1 | 251.1 | 252.2 | 253.3 | 254.3 |
| 2 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 | 19.40 | 19.41 | 19.43 | 19.45 | 19.45 | 19.46 | 19.47 | 19.48 | 19.49 | 19.50 |
| 3 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 | 8.74 | 8.70 | 8.66 | 8.64 | 8.62 | 8.59 | 8.57 | 8.55 | 8.53 |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 | 5.91 | 5.86 | 5.80 | 5.77 | 5.75 | 5.72 | 5.69 | 5.66 | 5.63 |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 | 4.68 | 4.62 | 4.56 | 4.53 | 4.50 | 4.46 | 4.43 | 4.40 | 4.36 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 | 4.00 | 3.94 | 3.87 | 3.84 | 3.81 | 3.77 | 3.74 | 3.70 | 3.67 |
| 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 | 3.57 | 3.51 | 3.44 | 3.41 | 3.38 | 3.34 | 3.30 | 3.27 | 3.23 |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.35 | 3.28 | 3.22 | 3.15 | 3.12 | 3.08 | 3.04 | 3.01 | 2.97 | 2.93 |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 | 3.07 | 3.01 | 2.94 | 2.90 | 2.86 | 2.83 | 2.79 | 2.75 | 2.71 |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 | 2.91 | 2.85 | 2.77 | 2.74 | 2.70 | 2.66 | 2.62 | 2.58 | 2.54 |
| 11 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 | 2.85 | 2.79 | 2.72 | 2.65 | 2.61 | 2.57 | 2.53 | 2.49 | 2.45 | 2.40 |
| 12 | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 | 2.75 | 2.69 | 2.62 | 2.54 | 2.51 | 2.47 | 2.43 | 2.38 | 2.34 | 2.30 |
| 13 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 | 2.67 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.25 | 2.21 |
| 14 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.39 | 2.35 | 2.31 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | 2.13 |
| 15 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 | 2.48 | 2.40 | 2.33 | 2.29 | 2.25 | 2.20 | 2.16 | 2.11 | 2.07 |
| 16 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 | 2.42 | 2.35 | 2.28 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.01 |
| 17 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.45 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.19 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.01 | 1.96 |
| 18 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 | 2.34 | 2.27 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.97 | 1.92 |
| 19 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.93 | 1.88 |
| 20 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 | 2.28 | 2.20 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.84 |
| 21 | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 | 2.32 | 2.25 | 2.18 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.81 |
| 22 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 | 2.30 | 2.23 | 2.15 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.78 |
| 23 | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.32 | 2.27 | 2.20 | 2.13 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.76 |
| 24 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 | 2.25 | 2.18 | 2.11 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.73 |
| 25 | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 | 2.24 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.71 |
| 26 | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 | 2.22 | 2.15 | 2.07 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.85 | 1.80 | 1.75 | 1.69 |
| 27 | 4.21 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.25 | 2.20 | 2.13 | 2.06 | 1.97 | 1.93 | 1.88 | 1.84 | 1.79 | 1.73 | 1.67 |
| 28 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.19 | 2.12 | 2.04 | 1.96 | 1.91 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.71 | 1.65 |
| 29 | 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.55 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 | 2.18 | 2.10 | 2.03 | 1.94 | 1.90 | 1.85 | 1.81 | 1.75 | 1.70 | 1.64 |
| 30 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.68 | 1.62 |
| 40 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.08 | 2.00 | 1.92 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.64 | 1.58 | 1.51 |
| 60 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 | 1.92 | 1.84 | 1.75 | 1.70 | 1.65 | 1.59 | 1.53 | 1.47 | 1.39 |
| 120 | 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.45 | 2.29 | 2.17 | 2.09 | 2.02 | 1.96 | 1.91 | 1.83 | 1.75 | 1.66 | 1.61 | 1.55 | 1.55 | 1.43 | 1.35 | 1.25 |
| ∞ | 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 | 1.75 | 1.67 | 1.57 | 1.52 | 1.46 | 1.39 | 1.32 | 1.22 | 1.00 |

$$f_{0.025,v_1,v_2}$$

| | $v_1$ | Degrees of freedom for the numerator ($v_1$) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $v_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| Degrees of freedom for the denominator ($v_2$) | 1 | 647.8 | 799.5 | 864.2 | 899.6 | 921.8 | 937.1 | 948.2 | 956.7 | 963.3 | 968.6 | 976.7 | 984.9 | 993.1 | 997.2 | 1001 | 1006 | 1010 | 1014 | 1018 |
| | 2 | 38.51 | 39.00 | 39.17 | 39.25 | 39.30 | 39.33 | 39.36 | 39.37 | 39.39 | 39.40 | 39.41 | 39.43 | 39.45 | 39.46 | 39.46 | 39.47 | 39.48 | 39.49 | 39.50 |
| | 3 | 17.44 | 16.04 | 15.44 | 15.10 | 14.88 | 14.73 | 14.62 | 14.54 | 14.47 | 14.42 | 14.34 | 14.25 | 14.17 | 14.12 | 14.08 | 14.04 | 13.99 | 13.95 | 13.90 |
| | 4 | 12.22 | 10.65 | 9.98 | 9.60 | 9.36 | 9.20 | 9.07 | 8.98 | 8.90 | 8.84 | 8.75 | 8.66 | 8.56 | 8.51 | 8.46 | 8.41 | 8.36 | 8.31 | 8.26 |
| | 5 | 10.01 | 8.43 | 7.76 | 7.39 | 7.15 | 6.98 | 6.85 | 6.76 | 6.68 | 6.62 | 6.52 | 6.43 | 6.33 | 6.28 | 6.23 | 6.18 | 6.12 | 6.07 | 6.02 |
| | 6 | 8.81 | 7.26 | 6.60 | 6.23 | 5.99 | 5.82 | 5.70 | 5.60 | 5.52 | 5.46 | 5.37 | 5.27 | 5.17 | 5.12 | 5.07 | 5.01 | 4.96 | 4.90 | 4.85 |
| | 7 | 8.07 | 6.54 | 5.89 | 5.52 | 5.29 | 5.12 | 4.99 | 4.90 | 4.82 | 4.76 | 4.67 | 4.57 | 4.47 | 4.42 | 4.36 | 4.31 | 4.25 | 4.20 | 4.14 |
| | 8 | 7.57 | 6.06 | 5.42 | 5.05 | 4.82 | 4.65 | 4.53 | 4.43 | 4.36 | 4.30 | 4.20 | 4.10 | 4.00 | 3.95 | 3.89 | 3.84 | 3.78 | 3.73 | 3.67 |
| | 9 | 7.21 | 5.71 | 5.08 | 4.72 | 4.48 | 4.32 | 4.20 | 4.10 | 4.03 | 3.96 | 3.87 | 3.77 | 3.67 | 3.61 | 3.56 | 3.51 | 3.45 | 3.39 | 3.33 |
| | 10 | 6.94 | 5.46 | 4.83 | 4.47 | 4.24 | 4.07 | 3.95 | 3.85 | 3.78 | 3.72 | 3.62 | 3.52 | 3.42 | 3.37 | 3.31 | 3.26 | 3.20 | 3.14 | 3.08 |
| | 11 | 6.72 | 5.26 | 4.63 | 4.28 | 4.04 | 3.88 | 3.76 | 3.66 | 3.59 | 3.53 | 3.43 | 3.33 | 3.23 | 3.17 | 3.12 | 3.06 | 3.00 | 2.94 | 2.88 |
| | 12 | 6.55 | 5.10 | 4.47 | 4.12 | 3.89 | 3.73 | 3.61 | 3.51 | 3.44 | 3.37 | 3.28 | 3.18 | 3.07 | 3.02 | 2.96 | 2.91 | 2.85 | 2.79 | 2.72 |
| | 13 | 6.41 | 4.97 | 4.35 | 4.00 | 3.77 | 3.60 | 3.48 | 3.39 | 3.31 | 3.25 | 3.15 | 3.05 | 2.95 | 2.89 | 2.84 | 2.78 | 2.72 | 2.66 | 2.60 |
| | 14 | 6.30 | 4.86 | 4.24 | 3.89 | 3.66 | 3.50 | 3.38 | 3.29 | 3.21 | 3.15 | 3.05 | 2.95 | 2.84 | 2.79 | 2.73 | 2.67 | 2.61 | 2.55 | 2.49 |
| | 15 | 6.20 | 4.77 | 4.15 | 3.80 | 3.58 | 3.41 | 3.29 | 3.20 | 3.12 | 3.06 | 2.96 | 2.86 | 2.76 | 2.70 | 2.64 | 2.59 | 2.52 | 2.46 | 2.40 |
| | 16 | 6.12 | 4.69 | 4.08 | 3.73 | 3.50 | 3.34 | 3.22 | 3.12 | 3.05 | 2.99 | 2.89 | 2.79 | 2.68 | 2.63 | 2.57 | 2.51 | 2.45 | 2.38 | 2.32 |
| | 17 | 6.04 | 4.62 | 4.01 | 3.66 | 3.44 | 3.28 | 3.16 | 3.06 | 2.98 | 2.92 | 2.82 | 2.72 | 2.62 | 2.56 | 2.50 | 2.44 | 2.38 | 2.32 | 2.25 |
| | 18 | 5.98 | 4.56 | 3.95 | 3.61 | 3.38 | 3.22 | 3.10 | 3.01 | 2.93 | 2.87 | 2.77 | 2.67 | 2.56 | 2.50 | 2.44 | 2.38 | 2.32 | 2.26 | 2.19 |
| | 19 | 5.92 | 4.51 | 3.90 | 3.56 | 3.33 | 3.17 | 3.05 | 2.96 | 2.88 | 2.82 | 2.72 | 2.62 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.33 | 2.27 | 2.20 | 2.13 |
| | 20 | 5.87 | 4.46 | 3.86 | 3.51 | 3.29 | 3.13 | 3.01 | 2.91 | 2.84 | 2.77 | 2.68 | 2.57 | 2.46 | 2.41 | 2.35 | 2.29 | 2.22 | 2.16 | 2.09 |
| | 21 | 5.83 | 4.42 | 3.82 | 3.48 | 3.25 | 3.09 | 2.97 | 2.87 | 2.80 | 2.73 | 2.64 | 2.53 | 2.42 | 2.37 | 2.31 | 2.25 | 2.18 | 2.11 | 2.04 |
| | 22 | 5.79 | 4.38 | 3.78 | 3.44 | 3.22 | 3.05 | 2.93 | 2.84 | 2.76 | 2.70 | 2.60 | 2.50 | 2.39 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.14 | 2.08 | 2.00 |
| | 23 | 5.75 | 4.35 | 3.75 | 3.41 | 3.18 | 3.02 | 2.90 | 2.81 | 2.73 | 2.67 | 2.57 | 2.47 | 2.36 | 2.30 | 2.24 | 2.18 | 2.11 | 2.04 | 1.97 |
| | 24 | 5.72 | 4.32 | 3.72 | 3.38 | 3.15 | 2.99 | 2.87 | 2.78 | 2.70 | 2.64 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.15 | 2.08 | 2.01 | 1.94 |
| | 25 | 5.69 | 4.29 | 3.69 | 3.35 | 3.13 | 2.97 | 2.85 | 2.75 | 2.68 | 2.61 | 2.51 | 2.41 | 2.30 | 2.24 | 2.18 | 2.12 | 2.05 | 1.98 | 1.91 |
| | 26 | 5.66 | 4.27 | 3.67 | 3.33 | 3.10 | 2.94 | 2.82 | 2.73 | 2.65 | 2.59 | 2.49 | 2.39 | 2.28 | 2.22 | 2.16 | 2.09 | 2.03 | 1.95 | 1.88 |
| | 27 | 5.63 | 4.24 | 3.65 | 3.31 | 3.08 | 2.92 | 2.80 | 2.71 | 2.63 | 2.57 | 2.47 | 2.36 | 2.25 | 2.19 | 2.13 | 2.07 | 2.00 | 1.93 | 1.85 |
| | 28 | 5.61 | 4.22 | 3.63 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.55 | 2.45 | 2.34 | 2.23 | 2.17 | 2.11 | 2.05 | 1.98 | 1.91 | 1.83 |
| | 29 | 5.59 | 4.20 | 3.61 | 3.27 | 3.04 | 2.88 | 2.76 | 2.67 | 2.59 | 2.53 | 2.43 | 2.32 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| | 30 | 5.57 | 4.18 | 3.59 | 3.25 | 3.03 | 2.87 | 2.75 | 2.65 | 2.57 | 2.51 | 2.41 | 2.31 | 2.20 | 2.14 | 2.07 | 2.01 | 1.94 | 1.87 | 1.79 |
| | 40 | 5.42 | 4.05 | 3.46 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.62 | 2.53 | 2.45 | 2.39 | 2.29 | 2.18 | 2.07 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.80 | 1.72 | 1.64 |
| | 60 | 5.29 | 3.93 | 3.34 | 3.01 | 2.79 | 2.63 | 2.51 | 2.41 | 2.33 | 2.27 | 2.17 | 2.06 | 1.94 | 1.88 | 1.82 | 1.74 | 1.67 | 1.58 | 1.48 |
| | 120 | 5.15 | 3.80 | 3.23 | 2.89 | 2.67 | 2.52 | 2.39 | 2.30 | 2.22 | 2.16 | 2.05 | 1.94 | 1.82 | 1.76 | 1.69 | 1.61 | 1.53 | 1.43 | 1.31 |
| | ∞ | 5.02 | 3.69 | 3.12 | 2.79 | 2.57 | 2.41 | 2.29 | 2.19 | 2.11 | 2.05 | 1.94 | 1.83 | 1.71 | 1.64 | 1.57 | 1.48 | 1.39 | 1.27 | 1.00 |

## $f_{0.01,v_1,v_2}$



| | $v_1$ / $v_2$ | Degrees of freedom for the numerator ($v_1$) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| Degrees of freedom for the denominator ($v_2$) | 1 | 4052 | 4999.5 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5928 | 5982 | 6022 | 6056 | 6106 | 6157 | 6209 | 6235 | 6261 | 6287 | 6313 | 6339 | 6366 |
| | 2 | 98.50 | 99.00 | 99.17 | 99.25 | 99.30 | 99.33 | 99.36 | 99.37 | 99.39 | 99.40 | 99.42 | 99.43 | 99.45 | 99.46 | 99.47 | 99.47 | 99.48 | 99.49 | 99.50 |
| | 3 | 34.12 | 30.82 | 29.46 | 28.71 | 28.24 | 27.91 | 27.67 | 27.49 | 27.35 | 27.23 | 27.05 | 26.87 | 26.69 | 26.00 | 26.50 | 26.41 | 26.32 | 26.22 | 26.13 |
| | 4 | 21.20 | 18.00 | 16.69 | 15.98 | 15.52 | 15.21 | 14.98 | 14.80 | 14.66 | 14.55 | 14.37 | 14.20 | 14.02 | 13.93 | 13.84 | 13.75 | 13.65 | 13.56 | 13.46 |
| | 5 | 16.26 | 13.27 | 12.06 | 11.39 | 10.97 | 10.67 | 10.46 | 10.29 | 10.16 | 10.05 | 9.89 | 9.72 | 9.55 | 9.47 | 9.38 | 9.29 | 9.20 | 9.11 | 9.02 |
| | 6 | 13.75 | 10.92 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 | 7.87 | 7.72 | 7.56 | 7.40 | 7.31 | 7.23 | 7.14 | 7.06 | 6.97 | 6.88 |
| | 7 | 12.25 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 | 6.62 | 6.47 | 6.31 | 6.16 | 6.07 | 5.99 | 5.91 | 5.82 | 5.74 | 5.65 |
| | 8 | 11.26 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 | 5.81 | 5.67 | 5.52 | 5.36 | 5.28 | 5.20 | 5.12 | 5.03 | 4.95 | 4.46 |
| | 9 | 10.56 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 | 5.26 | 5.11 | 4.96 | 4.81 | 4.73 | 4.65 | 4.57 | 4.48 | 4.40 | 4.31 |
| | 10 | 10.04 | 7.56 | 6.55 | 5.99 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 | 4.85 | 4.71 | 4.56 | 4.41 | 4.33 | 4.25 | 4.17 | 4.08 | 4.00 | 3.91 |
| | 11 | 9.65 | 7.21 | 6.22 | 5.67 | 5.32 | 5.07 | 4.89 | 4.74 | 4.63 | 4.54 | 4.40 | 4.25 | 4.10 | 4.02 | 3.94 | 3.86 | 3.78 | 3.69 | 3.60 |
| | 12 | 9.33 | 6.93 | 5.95 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.64 | 4.50 | 4.39 | 4.30 | 4.16 | 4.01 | 3.86 | 3.78 | 3.70 | 3.62 | 3.54 | 3.45 | 3.36 |
| | 13 | 9.07 | 6.70 | 5.74 | 5.21 | 4.86 | 4.62 | 4.44 | 4.30 | 4.19 | 4.10 | 3.96 | 3.82 | 3.66 | 3.59 | 3.51 | 3.43 | 3.34 | 3.25 | 3.17 |
| | 14 | 8.86 | 6.51 | 5.56 | 5.04 | 4.69 | 4.46 | 4.28 | 4.14 | 4.03 | 3.94 | 3.80 | 3.66 | 3.51 | 3.43 | 3.35 | 3.27 | 3.18 | 3.09 | 3.00 |
| | 15 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.36 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 | 3.80 | 3.67 | 3.52 | 3.37 | 3.29 | 3.21 | 3.13 | 3.05 | 2.96 | 2.87 |
| | 16 | 8.53 | 6.23 | 5.29 | 4.77 | 4.44 | 4.20 | 4.03 | 3.89 | 3.78 | 3.69 | 3.55 | 3.41 | 3.26 | 3.18 | 3.10 | 3.02 | 2.93 | 2.84 | 2.75 |
| | 17 | 8.40 | 6.11 | 5.18 | 4.67 | 4.34 | 4.10 | 3.93 | 3.79 | 3.68 | 3.59 | 3.46 | 3.31 | 3.16 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.83 | 2.75 | 2.65 |
| | 18 | 8.29 | 6.01 | 5.09 | 4.58 | 4.25 | 4.01 | 3.84 | 3.71 | 3.60 | 3.51 | 3.37 | 3.23 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.75 | 2.66 | 2.57 |
| | 19 | 8.18 | 5.93 | 5.01 | 4.50 | 4.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 | 3.43 | 3.30 | 3.15 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.76 | 2.67 | 2.58 | 2.59 |
| | 20 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.70 | 3.56 | 3.46 | 3.37 | 3.23 | 3.09 | 2.94 | 2.86 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.52 | 2.42 |
| | 21 | 8.02 | 5.78 | 4.87 | 4.37 | 4.04 | 3.81 | 3.64 | 3.51 | 3.40 | 3.31 | 3.17 | 3.03 | 2.88 | 2.80 | 2.72 | 2.64 | 2.55 | 2.46 | 2.36 |
| | 22 | 7.95 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 | 3.26 | 3.12 | 2.98 | 2.83 | 2.75 | 2.67 | 2.58 | 2.50 | 2.40 | 2.31 |
| | 23 | 7.88 | 5.66 | 4.76 | 4.26 | 3.94 | 3.71 | 3.54 | 3.41 | 3.30 | 3.21 | 3.07 | 2.93 | 2.78 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.35 | 2.26 |
| | 24 | 7.82 | 5.61 | 4.72 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.26 | 3.17 | 3.03 | 2.89 | 2.74 | 2.66 | 2.58 | 2.49 | 2.40 | 2.31 | 2.21 |
| | 25 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.85 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.22 | 3.13 | 2.99 | 2.85 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.36 | 2.27 | 2.17 |
| | 26 | 7.72 | 5.53 | 4.64 | 4.14 | 3.82 | 3.59 | 3.42 | 3.29 | 3.18 | 3.09 | 2.96 | 2.81 | 2.66 | 2.58 | 2.50 | 2.42 | 2.33 | 2.23 | 2.13 |
| | 27 | 7.68 | 5.49 | 4.60 | 4.11 | 3.78 | 3.56 | 3.39 | 3.26 | 3.15 | 3.06 | 2.93 | 2.78 | 2.63 | 2.55 | 2.47 | 2.38 | 2.29 | 2.20 | 2.10 |
| | 28 | 7.64 | 5.45 | 4.57 | 4.07 | 3.75 | 3.53 | 3.36 | 3.23 | 3.12 | 3.03 | 2.90 | 2.75 | 2.60 | 2.52 | 2.44 | 2.35 | 2.26 | 2.17 | 2.06 |
| | 29 | 7.60 | 5.42 | 4.54 | 4.04 | 3.73 | 3.50 | 3.33 | 3.20 | 3.09 | 3.00 | 2.87 | 2.73 | 2.57 | 2.49 | 2.41 | 2.33 | 2.23 | 2.14 | 2.03 |
| | 30 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.07 | 2.98 | 2.84 | 2.70 | 2.55 | 2.47 | 2.39 | 2.30 | 2.21 | 2.11 | 2.01 |
| | 40 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 | 2.80 | 2.66 | 2.52 | 2.37 | 2.29 | 2.20 | 2.11 | 2.02 | 1.92 | 1.80 |
| | 60 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 | 2.50 | 2.35 | 2.20 | 2.12 | 2.03 | 1.94 | 1.84 | 1.73 | 1.60 |
| | 120 | 6.85 | 4.79 | 3.95 | 3.48 | 3.17 | 2.96 | 2.79 | 2.66 | 2.56 | 2.47 | 2.34 | 2.19 | 2.03 | 1.95 | 1.86 | 1.76 | 1.66 | 1.53 | 1.38 |
| | ∞ | 6.63 | 4.61 | 3.78 | 3.32 | 3.02 | 2.80 | 2.64 | 2.51 | 2.41 | 2.32 | 2.18 | 2.04 | 1.88 | 1.79 | 1.70 | 1.59 | 1.47 | 1.32 | 1.00 |