الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليــم العالـي والبحـث العلمـي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire de MILA

Nº Réf :……………

Centre Universitaire

Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales

Polygône de valuations p-adiques

Préparé par :

Foughali Selma

Fennour Fatima

Soutenue devant le jury

Laib Hafida	MAA	C.U. Abd Elhafid Boussouf , Mila	Président
Bourourou Siham	MCB	C. U. Abd Elhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Bouzekria Fahima	MAB	C. U. Abd Elhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année universitaire : 2019/2020

REMERCIEMENT

Au terme de ce travail, nous commençons par remercier **DIEU** pour nous avoir

Donné la volonté et le courage pour terminer ce modeste travaille.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes

À qui nous voudrions témoigner toute nos gratitude.

Nous adressons toute nos reconnaissances à la directrice de ce mémoire

Encadreur Dr.Bourourou Siham

Pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils

Qui ont contribué à alimenter mes réflexions.

Nous adressons mes remerciements à tous les enseignants qui ont

Contribué à notre formation.

Mes remerciements chaleureux aux membres de l'institut des science et technologie

Mes remerciements spéciales à mes collègues de la spécialité

MATHÉMATIQUE FONDAMENTALE.

Fatima, Selma

Dédicace

A l'homme de ma vie, mon soutien moral et source de joie et de bonheur

celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste

paradis, à toi ***Mon père***.

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de

mon cœur, ma vie et mon bonheur ; la femme que j'adore

Ma mère.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, à tous

Mes frères et Mes sœurs

Je dédie ce travail dont le grand plaisir leurs revient en premier lieu pour

leurs conseils, aides, et encouragements.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours

à mes côtés, et qui m'ont accompagnaient durant mon

chemin d'études, mes aimables amis, et frère de cœur

Foughali Selma

Fennour Fatima

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'analyse p-adique est une branche de mathématique qui traités les fonctions des nombres p-adiques, qui est introduits par Hensel en 1897, son idée était de pouvoir utiliser la théorie des séries entières en arithmétique et cette idée est engendré l'analyse p-adique. En mathématique et plus particulièrement en théorie des nombres, si p est un nombre premier, un nombre p-adique est un objet mathématique, qui peut écrire sur une suite de chiffres en base p, éventuellement infinie à gauche de la virgule, mais toujours finie à droite de la virgule.

L'ensemble des nombres p-adiques forme un corps noté $\mathbb{Q}_p$ chaque corps $\mathbb{Q}_p$ est construit par complétion du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, lorsque celui-ci est muni d'une norme appelée "norme p-adique". Cette construction s'apparente à celle du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels par complétion du corps des nombres rationnels suivant la norme usuelle, de plus la norme p-adique sur le corps $\mathbb{Q}_p$ est une norme non-archimédienne. On obtient sur ce corps une analyse différente de l'analyse usuelle, que l'on appelle analyse p-adique.
Depuis ce temps-là, les mathématiciens ont commencé à s'intéresse à ce nouveau domaine de mathématique. D'autre part, depuis quelques années plusieurs auteurs en physique mathématique prennent comme corps de base, au lieu des corps des nombres réels et complexes, les corps p-adiques.

La notion de nombre complexe p-adique vient initialement de la construit que certains équations algébriques du second degré n'est pas de solution p-adiques (exemple $x^2 - p = 0, p \geq 2$), donc la raison de compléter le corps $\overline{\mathbb{Q}}_p$ est que l'ensemble de ces nombres est le cadre naturel pour chercher les racines d'équation algébrique (c'est-à-dire, les zéros des polynômes) et il fournissent même des façon simples de trouver des solutions complexes p-adiques.

Ce travail est basé sur la distribution de valeur des fonctions analytiques p-adiques sur un disque fermé. Une propriété importante des fonctions analytiques est que si une fonction est analytique sur un domaine connexe, alors ses valeurs sont entièrement déterminées par ses valeurs sur n'importe quel sous-domaine plus petit, on peut développer une théorie des fonctions analytiques de variables p-adiques, en définissant de telle fonctions par des développements en séries entières convergentes, qui apprissent en analyse, mais aussi en combinatoire en tant que fonctions génératrice, et se généralisent dans la notion de série formelle. Dans la théorie des nombres, le concept de nombre p-adique est approché de celui des séries entières, qui est parmi les sont celles que nous rencontre le plus souvent.

Dans ce mémoire, nous étudions le polygône de valuation p-adique ou la notion du polygône de Newton d'un polynôme dans ce cas p-adique, on sait que la notion du polygône de Newton est découverte par Isaac Newton (1642-1772). En mathématique, le polygône de valuation est un polygône du plan euclidien que l'on peut associer à un polynôme, lorsque les coefficients de ce dernier ont éléments d'un corps normé.

Le polygône de Newton encode un certain nombre d'informations à propos de la factorisation d'un polynôme, et la localisation de ses racines. Il particulièrement, utile lorsque les coefficients du polynôme sont éléments d'un corps des nombres p-adiques, il peut être utilisé avec profit dans l'étude des polynômes en plusieurs indéterminées.

Ce mémoire est composé de l'introduction générale et trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on introduits quelques définitions importantes, et des notions générales sur l'analyse p-adique qu'on a besoin par la suite. Puis on va décrire la méthode de construction du corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$, en suite on donne quelques propriétés analytiques et topologiques du $\mathbb{Q}_p$.

Le deuxième chapitre est essentiellement destinée à rappeler des propriétés classiques liées aux fonction analytiques, dans un corps non-archimédien et dans un disque. Nous étudions aussi les séries entières (définition, rayon de convergence), qui apparaissant en analyse et aussi qui jouent un rôle très important dans la base de la théorie des fonctions analytiques p-adiques, on termine ce chapitre par le principe du module maximum d'une fonction analytique p-adique, qui joue un rôle très important, pour trouver le nombre des zéros et étudier leurs comportement.

En fin, le troisième chapitre est consacré au polygône de valuation p-adique, qui détermine la distribution de zéros des fonctions analytiques p-adiques sur $\mathbb{C}_p$, il joue un grand rôle pour établir la formule de Jensen de théorie de Nevanlinna p-adique, ce chapitre est finalisé par un exemple concret d'application.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE EN ANALYSE P-ADIQUE

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions de base utilisées tout au long du mémoire, quelques résultats fondamentaux des corps non-archimédiens et quelques concepts de base et théorèmes principaux de l'analyse p-adique. Pour plus de détails le lecteur peut voir [1],[2],[3],[4],...

1.1 Corps normé non-archimédien

1.1.1 La norme archimédienne

Définition 1.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, une norme $||.||$ sur $\mathbb{K}$ définie par $||.|| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une application qui vérifiée les trois propriétés suivantes*

(a) $||x|| = 0$ *ssi* $x = 0$ ***(Positivité)****.*

(b) $||xy|| = ||x||||y||, \forall x, y \in \mathbb{K}$ ***(Multiplicativité)****.*

(c) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in \mathbb{K}$ ***(Inégalité triangulaire)****.*

Cette norme est dite archimédienne.

Exemple 1.1.

Soient $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*_+$, la norme $||.||$ qui définie par $x \longmapsto ||x|| = x^n$,est une norme archimédienne. En effet, on a

$||x|| = 0 \Rightarrow x^n = 0 \Rightarrow x = 0 \;\; (n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*_+)$.

$||xy|| = (xy)^n = x^n y^n = ||x||||y||, \forall n \in \mathbb{N}^*_+$.

$||x + y|| = (x + y)^n \leq x^n + y^n \leq ||x|| + ||y||, \forall n \in \mathbb{N}^*_+$.

1.1.2 La norme non-archimédienne

Définition 1.2. *Une norme sur un corps $\mathbb{K}$ est dite non-archimédienne si elle vérifie la propriété suivante*

$$||x+y|| \leq \max\{||x||, ||y||\}, \forall x, y \in \mathbb{K}.$$

*Cette inégalité est appelée l'inégalité triangulaire forte, elle est plus forte que la propriété (c) de la **Définition 1.1**.*

Définition 1.3. *On appelle corps normé non-archimédien, tout couple de la forme* $(\mathbb{K}, ||.||)$ *ou $\mathbb{K}$ est un corps et $||.||$ est une norme non-archimédienne sur $\mathbb{K}$.*

Remarque 1.1. *La distance induite par une norme non archimédienne est appelée distance ultramétrique. Elle vérifie l'inégalité suivante*

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}, \forall x, y, z \in \mathbb{K}.$$

Lorsque $\mathbb{K}$ est muni de cette distance, on dit que $\mathbb{K}$ est un corps ultramétrique. Dans le cas contraire, on dit que $\mathbb{K}$ est un corps archimédien.

Proposition 1.1. *[7]*

Une norme $||.||$ sur un corps $\mathbb{K}$ est dite non archimédienne ssi

$$||n|| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration.

$\Longrightarrow$) Supposons que $||.||$ est non-archimédienne, alors

$$||x+y|| \leq \max\{||x||, ||y||\}, \forall x, y \in \mathbb{K}$$

Soit $P(n) := \{||n|| \leq 1, n \in \mathbb{N}\}$

Par récurrence, on a

Pour $n = 1$

$$||1|| = 1 \leq 1, \text{donc } P(n) \text{ est vraie.}$$

Supposons que $p(n)$ est vraie pour n et on montre qu'elle est vraie pour $n+1$, c'est à dire

$$||n+1|| \leq 1$$

On a

$$||n+1|| \leq \max\{||n||, 1\} = 1 \leq 1$$

D'où

$$||n|| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Longleftarrow$) On suppose que $||n|| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ et on montre que

$$||a+b|| \leq \max\{||a||, ||b||\}, \forall a, b \in \mathbb{K}$$

- **Si** $b = 0$

$$||a+0|| = ||a|| = \max\{||a||, ||0||\} \leq \max\{||a||, ||b||\}$$

- **Si** $b \neq 0$

$$||a+b|| \leq \max\{||a||, ||b||\}, \forall a, b \in \mathbb{K}$$

  Donc

$$\left|\left|\frac{a+b}{b}\right|\right| \leq \max\left\{\frac{||a||}{||b||}, 1\right\}$$

  D'où

$$\left|\left|\frac{a}{b}+1\right|\right| \leq \max\left\{\left|\left|\frac{a}{b}\right|\right|, 1\right\}$$

Il suffit de montrer que $||x+1|| \leq \max\{||x||, 1\}, \forall x \in \mathbb{K}$ Soit

$$||x+1||^n = \left|\left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right|\right| \leq \sum_{k=0}^{n} ||C_n^k|| ||x||^k \leq \sum_{k=0}^{n} ||x||^k$$

- Si $||x|| \leq 1$, alors $||x||^k \leq 1, \forall k = 1, 2, \ldots, n$
- Si $||x|| > 1$, alors $||x^k|| \leq ||x^n||, \forall k = 0, 1, 2, \ldots, n$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n} ||x||^k \leq (n+1). \max\{1, ||x||^n\}.$$

alors,

$$||x+1||^n \leq \sum_{k=0}^{n} ||x||^k \leq (n+1). \max\{1, ||x||^n\}$$

et

$$||x+1|| \leq \sqrt[n]{(n+1)} \max\{1, ||x||\}$$

Puisque $\sqrt[n]{(n+1)} \to 1$ quand $n \to \infty$

Alors,

$$||x+1|| \leq \max\{||x||, 1\}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{K}.$$

$\square$

Corollaire 1.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, alors la norme $||.||$ est archimédienne si et seulement si*

$$\sup\{||n||, n \in \mathbb{Z}\} = \infty.$$

Proposition 1.2. *Soient a et x deux éléments d'un corps non-archimédien $(\mathbb{K}, ||.||)$, on a*

$$||x-a|| \leq ||a|| \Rightarrow ||x|| = ||a||.$$

Démonstration.

Soient $x, a \in \mathbb{K}$, on a

$$||x|| = ||x-a+a|| \leq \max\{||x-a||, ||a||\} = ||a||.$$

De même

$$||a|| = ||a-x+x|| \leq \max\{||x-a||, ||x||\}.$$

- Si $\max\{||x-a||, ||x||\} = ||x||$, on a $||a|| \leq ||x||$, d'où le résultat.
- Si $\max\{||x-a||, ||x||\} = ||x-a||$, on a $||a|| \leq ||x-a||$, donc contradiction avec l'hypothèse.

□

Corollaire 1.2. *Dans un corps ultramétrique $\mathbb{K}$, tous les triangles sont isocèles.*

Démonstration.

Soit le triangle x, y, z.
On a si

$$||y-z|| = ||(y-x)-(z-x)|| < ||x-z||$$

alors d'après la **Proposition 1.2**,

$$||x-y|| = ||x-z||.$$

□

1.2 Corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$

1.2.1 Valuation et norme p-adique sur $\mathbb{Q}$

Nous allons intéresser ici à une norme sur $\mathbb{Q}$, cette norme associé à un nombre premier p.

Définition 1.4. *Soit a non nul dans $\mathbb{Z}$. On définit la valuation p-adique sur $\mathbb{Z}$ par l'application*

$$\begin{array}{rccl} v_p: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\cup\{+\infty\} \\ & a & \longmapsto & \begin{cases} v_p(a) & si \quad a \neq 0 \\ +\infty & si \quad a = 0 \end{cases} \end{array}$$

Où $v_p(a)$ est le plus grand entier positive tel que, $a = p^{v_p(a)}b$ avec $p^{v_p(a)}$ divise a et p ne divise pas b.

Soit $x \in \mathbb{Q}$ non nul, on peut donc écrire $x = \dfrac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$, d'où

$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b).$$

Exemple 1.2.

(1) Soit $x = \dfrac{12}{25}$ *on a,* $v_2\left(\dfrac{12}{25}\right) = 2, v_3\left(\dfrac{12}{25}\right) = 1$ *et* $v_5\left(\dfrac{12}{25}\right) = -2$

Donc pour p différent de 2, 3 et 5, on a, $v_p\left(\dfrac{12}{25}\right) = 0$

(2) Soit $x = \dfrac{35}{88}$ *on a* $v_2(x) = -3, v_5(x) = 1, v_7(x) = 1, v_{11}(x) = -1$ *et* $v_p(x) = 0$ *pour tout p différent de 2,5,7 et 11.*

Proposition 1.3. *[1]*

Soient $x, y \in \mathbb{Q}^*$, la valuation p-adique vérifie les propriétés suivantes

(i) $v_p(1) = 0, \forall p$ *premier.*

(ii) $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

(iii) $v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$.

Démonstration.

D'après l'écriture

$$1 = p^0 1 \Longrightarrow v_p(1) = 0 \quad ((\textbf{i}) \text{ est verifiée})$$

On va montrer (**ii**) et (**iii**)

Soient $x, y \in \mathbb{Q}^*$, avec $x = \dfrac{a}{b}$ et $y = \dfrac{c}{d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^*$

Nous avons

$$xy = \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

D'autre part on a

$a \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow a = p^{m_1}n_1$, avec $m_1 = v_p(a)$ et p ne divise pas n_1

$c \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow c = p^{m_2}n_2$, avec $m_2 = v_p(c)$ et p ne divise pas n_2

donc

$$ac = p^{m_1+m_2}(n_1n_2), \text{avec } p \text{ ne divise pas } (n_1n_2)$$

D'où

$$v_p(ac) = m_1 + m_2 = v_p(a) + v_p(c) \tag{1.1}$$

De plus,

$b \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow b = p^{\alpha_1}\beta_1$, avec $\alpha_1 = v_p(b)$ et p ne divise pas β_1

$d \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow d = p^{\alpha_2}\beta_2$, avec $\alpha_2 = v_p(d)$ et p ne divise pas β_2

donc $bd = p^{\alpha_1+\alpha_2}(\beta_1\beta_2)$, avec p ne divise pas $(\beta_1\beta_2)$

D'où,

$$v_p(bd) = \alpha_1 + \alpha_2 = v_p(b) + v_p(d) \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2) on a

$$\begin{aligned} v_p(xy) = v_p\left(\frac{ac}{bd}\right) \quad &= v_p(ac) - v_p(bd) \\ &= v_p(a) + v_p(c) - v_p(b) - v_p(d) \\ &= v_p(a) - v_p(b) + v_p(c) - v_p(d) \\ &= v_p\left(\frac{a}{b}\right) + v_p\left(\frac{c}{d}\right) \\ &= v_p(x) + v_p(y) \end{aligned}$$

(**iii**) On a

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

D'où

$$\begin{aligned} v_p(x+y) = v_p\left(\frac{ad+cb}{bd}\right) \quad &= v_p(ad+cb) - v_p(bd) \\ &= v_p(ad+cb) - v_p(b) - v_p(d) \end{aligned}$$

D'autre part,

nous avons si $a, b \in \mathbb{Z}^*$, alors

$$v_p(a+b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$$

En effet,

soient $a = p^{m_1}n_1, b = p^{m_2}n_2$, avec $m_1 = v_p(a)$ et $m_2 = v_p(b)$

on particulier,

1. Si $m_1 < m_2$

$$a + b = p^{m_1}(n_1 + p^{m_2 - m_1}n_2)$$

D'où

$$v_p(a+b) = m_1 \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$$

2. Si $m_1 > m_2$

$$a + b = p^{m_2}(n_2 + p^{m_1 - m_2}n_1)$$

D'où

$$v_p(a+b) = m_2 \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$$

3. Si $m_1 = m_2$

$$a + b = p^{m_1}(n_1 + n_2), \text{où } \ p \ \text{ ne divise pas } \ n_1 + n_2$$

D'où

$$v_p(a+b) = m_1 \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$$

par suite,

$$\begin{aligned} v_p(x+y) & \geq \min\{v_p(ad), v_p(cb)\} - v_p(b) - v_p(d) \\ & = \min\{v_p(a) + v_p(d), v_p(c) + v_p(b)\} - v_p(b) - v_p(d) \\ & = \min\{v_p(a) - v_p(b), v_p(c) - v_p(d)\} \\ & = \min\{v_p(x), v_p(y)\} \end{aligned}$$

Donc

$$v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

□

Définition 1.5. *Soit p un nombre premier, on définit la norme p-adique $||.||_p$ sur $\mathbb{Q}$ par l'application*

$$||x||_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \ \text{(ce qui correspond à } v_p(0) = \infty) \end{cases}$$

Exemple 1.3.

1) *On a* $\left|\left|\frac{25}{36}\right|\right|_2 = 4, \left|\left|\frac{25}{36}\right|\right|_5 = \frac{1}{25}, \left|\left|\frac{25}{36}\right|\right|_9 = \frac{1}{9}$ *et* $\left|\left|\frac{25}{36}\right|\right|_p = 1,$

pour p différent de $2, 5, 9$.

2) *On a* $||p^n||_p = \frac{1}{p^n}$. *Plus on est divisible par p, plus on est petit.*

Proposition 1.4. *Pour tout p premier, l'application* $x \mapsto ||x||_p$ *est une norme ultramétrique sur* $\mathbb{Q}$.

Démonstration.

1) Soit $x \in \mathbb{Q}$, alors

$$||x||_p = 0 \Leftrightarrow p^{-v_p(x)} = 0 \Leftrightarrow -v_p(x) = -\infty \Leftrightarrow v_p(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$$

2) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$, alors
Si $x = 0$ ou $y = 0$, on a l'égalité.
Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on trouve

$$||x.y||_p = p^{-v_p(x.y)} = p^{-v_p(x)-v_p(y)} = p^{-v_p(x)}.p^{-v_p(y)} = ||x||_p.||y||_p$$

3) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$, alors

$$v_p(x+y) \geq min\{v_p(x), v_p(y)\}$$

$$\Rightarrow -v_p(x+y) \leq -min\{v_p(x), v_p(y)\} = max\{-v_p(x), -v_p(y)\}$$

$$\Rightarrow p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-min\{v_p(x),v_p(y)\}} = p^{max\{-v_p(x),-v_p(y)\}} = max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\}$$

$$\Rightarrow ||x+y||_p \leq max\{||x||_p, ||y||_p\}.$$

□

Remarque 1.2.

(1) *La norme p-adique* $||.||_p$ *prend ses valeurs dans l'ensemble discret définie par*

$$||\mathbb{Q}||_p = \{p^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

(2) *Par définition de la norme p-adique, on a pour tout* $x \in \mathbb{Q}, ||x||_p \leq 1$.

1.2.2 Complétion de $\mathbb{Q}$

Ce paragraphe présente une construction du corps des nombre p-adiques. La méthode utilisée pour construire ce corps est semblable á la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$.

Définition 1.6. *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps normé on dit que* $\mathbb{K}$ *est complet si toute suite de Cauchy d'éléments de* $\mathbb{K}$ *est convergente dans* $\mathbb{K}$

– *Puisque* $\mathbb{Q}$ *n'est pas complet pour la norme p-adique* $||.||_p$ *on le complété et on obtient un espace complet que l'on note* $\mathbb{Q}_p$ *est qui s'appelle le corps des nombres p-adiques.*

– *On rappelle le procédé de complétion (qui est valable pour un espace métrique quelconque). Soit* E *l'ensemble des suites des Cauchy d'éléments de* $\mathbb{Q}$ *(pour la norme p-adique). On définit sur* E *une relation d'équivalence* R *de la façon suivante : si* $u = (u_n)_n$ *et* $v = (v_n)_n$ *sont des éléments de* E *on a :* uRv *si et seulement si,* $||u_n - v_n||_p$ *tend vers zéro si* n *tend vers l'infini.*

– *L'espace quotient* $\mathbb{Q}_p = E/R$ *c'est l'ensemble des classes d'équivalence des suites de Cauchy dans* $\mathbb{Q}$.

– $\mathbb{Q}$ *est inclus dans* $\mathbb{Q}_p$ *et de plus il est dense.*

– *Nous indiquons comment prolonger la valeur absolue définie sur* $\mathbb{Q}$ *à tout* $\mathbb{Q}_p$*. Soit* x *un élément de* $\mathbb{Q}_p$ *et* $(x_n)_n$ *une suite de Cauchy d'éléments de* $\mathbb{Q}$*, la suite* $(||x_n||_p)_n$ *est une suite de Cauchy dans* $\mathbb{R}_+$ *car*

$$|||x_n||_p - ||x_m||_p| \leq |x_n - x_m|$$

donc, elle converge vers une limite dans $\mathbb{R}_+$ *cette limite est appelée la norme p-adique de* x *c'est une norme ultramétrique et on a,*

$$||x||_p = \lim_{n \to +\infty} ||x_n||_p.$$

On peut également étendre la valuation p-adique au $v_p(x) = \lim_{n \to +\infty} v_p(x_n)$.

Remarque 1.3. *l'ensemble des valeurs de l'application* $||.||_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ *est le même ensemble des valeurs de l'application* $||.||_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$*, et il est donné par :* $\{p^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$*. Par contre la norme usuelle définit sur* $\mathbb{R}$*, elle parcourt tout l'ensemble des nombres réels positif* $\mathbb{R}_+$.

1.2.3 L'anneau des entiers p-adiques

Une partie intéressante dans le corps des nombres p-adique est l'ensemble des éléments de norme p-adique inférieur ou égale à 1, que l'on note $\mathbb{Z}_p$.

Définition 1.7. *Un nombre p-adique est un entier p-adique si son développement canonique ne contient que des puissance positives de p, et on écrit*

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i \ / \ 0 \leq a \leq p-1$$

L'ensemble des entiers p-adique noté par $\mathbb{Z}_p$, où

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p \ / \ x = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i \right\}$$

Autrement dit, $\mathbb{Z}_p$ est aussi représente la boule unité fermé de $\mathbb{Q}_p$

$$\mathbb{Z}_p = \{ x \in \mathbb{Q}_p \ / \ ||x||_p \leq 1 \}.$$

Remarque 1.4. *$\mathbb{Q}_p$ est l'ensemble de fraction de $\mathbb{Z}_p$ tel que*

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a, b \in \mathbb{Z}_p, b \neq 0 \right\}.$$

Proposition 1.5. *[2]*

(i) *Tout élément $x \in \mathbb{Q}_p$ admet un développement unique sous la forme d'une série convergente dans $\mathbb{Q}_P$, i.e*

$$x = \sum_{n \geq n_0} a_n p^n \ \text{ où } v_p(a) = n_0 \ \text{ et } 0 \leq a_n \leq p-1 \ \text{ pour tout entier } n \geq n_0$$

(ii) *L'anneau des entiers p-adique $\mathbb{Z}_p$ est égale à l'ensemble des série de la forme $x = \sum_{n \geq 0} a_n p^n$ tel que $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ dense dans $\mathbb{Z}_p$. Ce développement s'appelle le développement de **Hensel** de x.*

Remarque 1.5. *On peut représenter un entier p-adique par une suite infinie de chiffres en base p à gauche du point (i.e. $x = \ldots a_2 a_1 a_0.$), tandis que les autres éléments de $\mathbb{Q}_p$, eux auront un nombre fini de chiffres à droite du point.*

1.3 Propriétés topologiques et analytiques des nombres p-adiques

1.3.1 Propriétés analytiques

Proposition 1.6. *[6]*
Soit $(a_n)_n$ une suite dans $\mathbb{Q}_p$.On a $(a_n)_n$ est de Cauchy ssi $a_{n+1} - a_n$ tend vers zéro.

Remarque 1.6. *Cette proposition n'est pas vraie pour une norme ordinaire, elle est vraie juste pour la norme p-adique.*

Démonstration.

Ceci provient du fait que la distance p-adique est ultramétrique, si la suite a_n est de Cauchy, il est immédiate que la propriété est vérifiée.

Réciproquement,

Soit $\epsilon > 0$, on suppose $\exists N$ tel que

Si $m \geq N$, on ait que
$$||a_{n+1} - a_n||_p < \epsilon \tag{1.3}$$
par récurrence, pour $n \geq N$ et $h \in \mathbb{N}$, on ait $||a_{n+h} - a_n||_p < \epsilon$
Si $h = 1$
$$||a_{n+1} - a_n||_p \leq \epsilon$$
l'hypothèse (1.3) est vraie.

On suppose que la propriété est vraie pour h et on montre pour $h + 1$

$$||a_{n+h+1} - a_n||_p \leq ||a_{n+h+1} - a_{n+h} + a_{n+h} - a_n||_p \leq \max\{||a_{n+h+1} - a_{n+h}||_p, ||a_{n+h} - a_n||_p\}$$

Et par suit on a
$$||a_{n+h+1} - a_n||_p \leq \max\{\epsilon, \epsilon\} = \epsilon$$
Ce qui montre que
$$||a_{n+1} - a_n||_p \leq \epsilon, \forall n \geq N \text{ et } h \in \mathbb{N}$$
Donc, U_n est une suite de Cauchy. □

Proposition 1.7. *[6]*
Soit $(a_n)_n$ une suite dans $\mathbb{Q}_p$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ dans $\mathbb{Q}_p$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} ||a_n||_p = 0$
Ou bien,

$\exists N_0 \in \mathbb{N}, ||a_n||_p = ||a_{N_0}||_p$, *pour* $n \geq N_0$ *(la suite* $(||a_n||_p)$ *est stationnaire pour un range* N_0*).*

Démonstration.

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ et $n > m$, on a

$$|||a_n||_p - ||a_m||_p| < ||a_n - a_m||_p \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

Donc, $(||a_n||_p)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet,

Donc, $(||a_n||_p)$ est convergente.

Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||a_n||_p \neq 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} ||a_n||_p = l > 0$

Posons $\epsilon = \dfrac{l}{2}$, donc

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_1$, on a $||a_n||_p > \dfrac{l}{2}$

De même, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n, m \geq N_2$, on a $||a_m - a_n||_p < \dfrac{l}{2}$

d'où, pour $n, m > \max\{N_1, N_2\} = N_0$, on a

$$||a_m||_p = ||a_m - a_n + a_n||_p \leq \max\{||a_m - a_n||_p, ||a_n||_p\} = ||a_n||_p$$

Si $n = N_0$, on aura $||a_m||_p \leq ||a_{N_0}||_p$, pour $m \geq N_0$

De même $||a_n||_p \leq \max\{||a_m - a_n||_p, ||a_m||_p\} = ||a_m||_p$, alors

$$||a_{N_0}||_p \leq ||a_m||_p, \text{ pour } m \geq N_0$$

D'où,

$$||a_{N_0}||_p = ||a_m||_p, \text{ pour } m \geq N_0.$$

□

Proposition 1.8. *Soit* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ *une série dans* $\mathbb{Q}_p (a_k \in \mathbb{Q}_p)$, *alors* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ *converge ssi* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, *dans ce cas*

$$||\sum_{n=0}^{+\infty} a_n||_p \leq \max_{n\in\mathbb{N}} ||a_n||_p.$$

Remarque 1.7. *Cette propriété peut être considérée comme la propriété la plus forte pour la convergence des séries.*

Démonstration.

La série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge ssi la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge dans $\mathbb{Q}_p$.

Donc, S_n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$.
D'où, $||S_n - S_{n-1}||_p \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$, mais $a_n = S_n - S_{n-1}$
Donc, $a_n$tend vert zéro dans $\mathbb{Q}_p$.
Maintenant, supposons que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$, on a le résultat.
Sinon, d'après la proposition précédente, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_0$, on a

$$\left|\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right|\right|_p = \left|\left|\sum_{n=0}^{N_0} a_n\right|\right|_p \tag{1.4}$$

D'autre part, on a

$$\max_{0 \leq n < N_0} \{||a_n||_p\} \leq \max_{n \in \mathbb{N}} \{||a_n||_p\} \tag{1.5}$$

De (1.4) et (1.5) on a

$$\left|\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right|\right|_p = \left|\left|\sum_{n=0}^{N_0} a_n\right|\right|_p \leq \max_{0 \leq n < N_0} \{||a_n||_p\} \leq \max_{n \in \mathbb{N}} \{||a_n||_p\}.$$

□

1.3.2 Propriétés topologiques

Nous énonçons et démontrons dans cette section quelques propriétés topologiques importantes de $\mathbb{Z}_p$ et de $\mathbb{Q}_p$. Nous commençons avec des propriétés qui est aussi vrai pour les corps muni d'une norme non-archimedienne.

Soit r un réel strictement positif, et a un nombre p-adique.

- On note $D^+(a, r)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q}_p, ||x - a||_p \leq r\}$ et l'on appelle disque fermé.
- On note $D^-(a, r)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q}_p, ||x - a||_p < r\}$ et l'on appelle disque ouvert et $C(a, r) = D^+(a, r) \backslash D^-(a, r)$ le cercle de centre a et de rayon r.
- La notation $D(a, r)$ désignera l'un ou l'autre de ces deux disques.

Proposition 1.9. *[2],[3],[6]*
Soient $a, b \in \mathbb{Q}_p$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Alors

i) Si $b \in D(a, r)$, alors $D(b, r) = D(a, r)$.
Autrement dit, tout point d'un disque est un centre de ce disque.

ii) Tout disque de l'espace topologique $\mathbb{Q}_p$ est à la fois ouvert et fermé.

iii) Le cercle $C(a, r)$ est un ensemble ouvert dans $\mathbb{Q}_p$.

iv) Soient $D(a, r)$ et $D(b, s)$ deux disques, alors ils sont disjoints, ou l'un est inclus dans l'autre.

Démonstration.

i) Si $b \in D(a, r)$, on a par définition $||b-a||_p < r$. Prenant $x \in \mathbb{Q}_p$ tel que $||x-a||_p < r$,

on a par l'inégalité triangulaire forte,

$$||x - b||_p < max\{||x - a||_p, ||b - a||_p\} < r.$$

de telle sorte que $x \in D(b, r)$, et donc on a montré que $D(a, r) \subset D(b, r)$.
En changeant simplement les rôles de a et b, on montre que $D(b, r) \subset D(a, r)$.

D'où l'égalité.

ii) Soit $a \in \mathbb{Q}_p$ et considérons $D^-(a, r), r > 0$ le disque ouvert centré en a et de rayon r. Par définition, c'est un ouvert de $\mathbb{Q}_p$. Il reste donc à montrer qu'il est aussi fermé dans le cas non-archimédien, alors, prenons un point x sur la frontière de $D^-(a, r)$ ce qui signifie que tout disque ouvert centré en x doit contenir des points qui sont dans $D^-(a, r)$.
Choisissons un rayon $s < r$. Maintenant, puisque x est un point de la frontière de $D^-(a, r), D^-(a, r) \cap D^-(x, s) \neq \emptyset$, il existe un élément $y \in D^-(a, r) \cap D^-(x, s)$. Cela signifie que $||y - a||_p < r$ et $||y - x||_p < s < r$. Appliquant l'inégalité triangulaire forte, nous obtenons

$$||x - a||_p < max\{||x - y||_p, ||y - a||_p\} < max\{s, r\} < r$$

d'où, $x \in D^-(a, r)$. Cela montre que tout point sur la frontière de $D^-(a, r)$ appartient à $D^-(a, r)$, ce qui veut dire que $D^-(a, r)$ est un ensemble fermé.

iii) Soient $x \in C(a, r), \epsilon < r$ et $y \in D^-(x, \epsilon)$, donc

$$||x - y||_p < \epsilon < r = ||x - a||_p.$$

et on a $||x - y||_p = ||(x - a) - (y - a)||_p < ||x - a||_p = r$, d'où

$$||y - a||_p = ||x - a||_p = r$$

c'est à dire $y \in C(a, r)$ ce qui montre que $C(a, r)$ est un ensemble ouvert dans $\mathbb{Q}_p$.

iv) Nous pouvons supposer que $r < s$, si l'intersection n'est pas vide, alors
$\exists c \in D(a, r) \cap D(b, s)$.

En suite, nous avons à partir de (i), que

$$D(a,r) = D(c,r) \text{ et } D(b,s) = D(c,s).$$

Par conséquent,

$$D(a,r) = D(c,r) \subset D(c,s) = D(b,s).$$

$\square$

Proposition 1.10. *[2]*
L'anneau des entiers p-adique $\mathbb{Z}_p$ est un ensemble compacte, et $\mathbb{Z}$ (de même $\mathbb{N}$) est dense dans $\mathbb{Z}_p$.

Démonstration.

Soit (x_n) une suite dans $\mathbb{Z}_p$, le développement de Hensel de chaque terme est écrit comme suite

$$x_k = \ldots a_2^k a_1^k a_0^k = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^k p^i$$

tel que

$$a_i^k \in \{0,1,2,\ldots,p-1\}, \forall i \geq 0$$

On peut trouver $b_0 \in \{0,1,2,\ldots,p-1\}$, est une sous-suite $\{x_{0k}\}_k$ de $\{x_k\}_k$ tel que le dernier chiffre de x_{0k} est b_0.
De même façon, $\exists b_1 \in \{0,1,2,\ldots,p-1\}$, est une sous-suite $\{x_{1k}\}_k$ de $\{x_k\}_k$ telles que les deux derniers chiffres de x_{1k} sont $b_1 b_0$.
On continue cette procédure, on va obtenir des nombres $b_0, b_1, b_2, \ldots$, avec une suite des suites

$$\begin{array}{l} x_{00}, x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0s}, \ldots \\ x_{10}, x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1s}, \ldots \\ \vdots \\ x_{n0}, x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{ns}, \ldots \\ \vdots \end{array}$$

Tel que tout suite est une sous-suite de la suite précédente, et chaque élément de la n'ème rangée termine par $b_n \ldots b_2 b_1 b_0$.
pour tout $j = 0,1,\ldots$ nous avons $x_{jj} \in \{x_{j-1j}, x_{j-1j+1}, \ldots\}$

Par conséquence,

La suite diagonale $x_{00}, x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{ss}, \ldots$ est toujours une sous suite de la suite originale, et de plus elle est évidement converge vers $'' \ldots b_3 b_2 b_1 b_0 ''$
Pour la densité de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_p$, soit $x = \ldots a_2 a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i \in \mathbb{Z}_p$.
pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$x_n = \dots 000 a_n a_{n-1} \dots a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i$$

Alors,

$$x_n \in \mathbb{Z} \text{ et } ||x - x_n||_p \leq p^{-n}$$

Donc, $(x_n)_n$ converge vers x dans $\mathbb{Z}_p$. □

Théorème 1.1. *[5] $\mathbb{Q}_p$ est localement compacte.*

Démonstration.

Le fait que $\mathbb{Q}_p$ soit localement compacte est une conséquence directe de la compacité de $\mathbb{Z}_p$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$, on a $D(x, 1) = \{x + y, y \in \mathbb{Z}_p\}$ est un voisinage compact de x. □

1.4 Corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$

1.4.1 Clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$

Définition 1.8. *On dit qu'un corps non archimédien $\mathbb{K}$ est algébriquement clôs, si chaque polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{K}[\mathbb{X}]$ des racines dans $\mathbb{K}$. Autrement dit, chacun de ces polynômes se décompose en facteurs linéaire dans $\mathbb{K}[\mathbb{X}]$.*

Proposition 1.11. *Le corps des nombres p-adique $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs.*

En effet, pour faire convenablement de l'analyse, il est donc logique de considéré une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, que l'on note $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$ et qui n'est pas complète (le corps $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$ est constitue de toutes les racines des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$), donc nous avons besoin de la compléter pour former un plus grand corps complet, algébriquement clôs note $\mathbb{C}_p$. on montre que l'on peut prolonger la norme à ce corps, qui possède donc aussi une norme non-archimédienne, que l'on note toujours $||.||_p$.

Notation

Le groupes des valeurs de $\mathbb{C}_p$ (i.e. $||\mathbb{C}_p|| = \{||x||_p, x \in \mathbb{C}_p, x \neq 0\}$) est l'ensemble de puissances rationnelles de p, c'est-à-dire, $||\mathbb{C}_p|| = \{p^y, y \in \mathbb{Q}\}$.

CHAPITRE 2

FONCTIONS ANALYTIQUES P-ADIQUES

Dans ce chapitre, nous étudions les fonctions analytiques p-adiques sur un corps des nombres complexes p-adiques noté $\mathbb{C}_p$, ainsi nous donnons certains propriétés et théorèmes importantes sur les zéros des fonctions p-adiques définie par des séries entières.

2.1 Séries entières p-adiques, Rayon de convergence

Définition 2.1. ***(Séries entières p-adiques)***
Une série entière dans $\mathbb{C}_p$ est une série central dont le terme générale est un monôme $a_n(x-a)^n$, où $a \in \mathbb{C}_p$ est un " point centrale " et $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de complexes p-adiques, appelée suite de coefficients, lorsque a est fixé. Cette série est s'écrit sous la forme,

$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n, a_n \in \mathbb{C}_p.$$

Considérons maintenant une série entière de terme générale a_nx^n, avec $a_n \in \mathbb{C}_p$. Cette série est convergente si et seulement si a_nx^n tend vers 0 dans $\mathbb{C}_p$ (suivant la norme p-adique).

Définition 2.2. ***(Rayon de convergence)***
L'ensemble $A = \{r \in [0, +\infty[, ||a_n||r^n \longrightarrow 0\}$ est un ensemble non vide. On appelle rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_nx^n$ la borne supérieure de A si A est majoré, sinon on pose $R = +\infty$.

Proposition 2.1. *[2]*
Soit $\sum_{n\geq 0} a_nx^n$ une série entière à coefficient dans $\mathbb{C}_p$, alors

a) *Si* $a_n \in \mathbb{C}_p^*$ *et si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{||a_{n+1}||_p}{||a_n||_p} = l$, *on a* $R = \dfrac{1}{l}$ *(**forme d'Alembert**)*

b) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{||a_n||_p} = l$, *on a* $R = \dfrac{1}{l}$ *(**Formule de Cauchy**)*

c) *Dans tous les cas on a* $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{||a_n||_p}}$ *(**Formule d'Hadamard**).*

Théorème 2.1. *[6]*
Soient $0 < R < +\infty$ *non nul et* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$*une série entière, où* $a_n \in \mathbb{C}_p$, *on a*

a) Pour tout $x \in \mathbb{C}_p$, *tel que* $||x||_p < R$, *alors la série entière* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *converge.*

b) Pour tout $x \in \mathbb{C}_p$, *tel que* $||x||_p > R$, *alors la série entière* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *diverge.*

Définition 2.3. *(**Série dérivée d'une série entière**)*
Soit $g(x) = \sum\limits_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ *la série dérivée de la série entière*
$f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, *où* $a_n \in \mathbb{C}_p$, *alors la série dérivée* $g(x)$ *a exactement le même rayon de convergence que la série entière* $f(x)$.

2.1.1 Disque de convergence

Définition 2.4. *On appelle disque de convergence de la série entière l'ensemble* $D_R(0 < R < +\infty)$ *des nombres complexes p-adiques, tels que* $||x||_p < R$.
En dehors de D_R, *pour* $||x||_p > R$ *la suite* $a_n x^n$ *ne peut être converge, donc la série* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *ne peut converger.*

Par contre, sur la frontière D_R *il n'existe pas de résultats généraux pour la convergence de la série entière.*

Exemple 2.1. *(**Disque de convergence**)*
1. *Soit* $b \in \mathbb{C}_p^*$, *le disque de convergence de la série* $\sum\limits_{n\geq 0} b^n x^n = \dfrac{1}{1-bx}, x \in \mathbb{C}_p$ *est* $D_R = D^-(0, ||b||_p^{-1})$.

En effet. *D'après la formule d'Alembert, on a*

$$R = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left|\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right|_p = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left|\left|\frac{b^n}{b^{n+1}}\right|\right|_p = \lim_{n\longrightarrow+\infty} ||b||_p^{-1} = ||b||_p^{-1}.$$

2. *Le disque de convergence de la série* $\exp x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, *pour tout* $x \in \mathbb{C}_p$ *est* $D_R = D^-(0, p^{\frac{-1}{p-1}})$.

En effet.

Soit $n = n_0 + n_1 p + \cdots + n_k p^k$ *où* $S_p(n)$ *désigne la somme des chiffres de l'écriture de* n *en base* p *(i.e.* $S_p(n) = n_0 + n_1 + \cdots + n_k$*) et* $v_p(n!) = p^{\frac{n-S_p(n)}{p-1}}$, *d'où*

$$||a_n||_p^{\frac{1}{n}} = \left|\left|\frac{1}{n!}\right|\right|_p^{\frac{1}{n}} = (p^{+v_p(n!)})^{\frac{1}{n}} = p^{\frac{n-S_p(n)}{n(p-1)}} = p^{\frac{1}{p-1}} p^{-\frac{S_p(n)}{n(p-1)}}.$$

En passent à la limite, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} ||a_n||_p^{\frac{1}{n}} = p^{\frac{1}{p-1}}, \text{ où } \lim_{n\to+\infty} p^{-\frac{S_p(n)}{n(p-1)}} = 1$$

D'après la formule de Cauchy, on a

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{||a_n||_p}} = p^{-\frac{1}{p-1}}$$

3. *Le disque de convergence de la série* $\ln_p(x+1) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, *pour tout* $x \in \mathbb{C}_p$, *est* $D_R = D^-(0, 1)$.

En effet. *D'après la formule d'Alembert, on a*

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right|_p == \lim_{n\to+\infty} \left|\left|\frac{n+1}{n}\right|\right|_p = 1.$$

2.2 Fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_p$

Définition 2.5. *Soit* f *une fonction définie de* $D^+(a, R)$ *dans* $\mathbb{C}_p$, *on dit que* f *est une fonction analytique sur* $D^+(a, R)$, *si* $\exists (a_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{C}_p$, *satisfaisant* $||a_n||_p R^n \longrightarrow 0$, *et on a*

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n, \forall x \in D^+(a, R).$$

Autrement dit, on dit qu'une fonction f *est analytique sur un disque fermé si elle est développable en série entière autour de chaque point de son domaine de définition.*

Définition 2.6. *Soit f une fonction définie de $D^-(a,R)$ dans $\mathbb{C}_p$, on dit que f est une fonction analytique sur $D^-(a,R)$, si la restriction de f à $D^+(a,r)$ est une fonction analytique sur $D^+(a,r)$, pour tout $0 < r < R$.*

Définition 2.7. ***(Fonctions entière)***
Les fonctions entiers ce sont des fonctions somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

Remarque 2.1. *Une fonction analytique dans le plan tout entier $\mathbb{C}_p$ est dit entière.*

Proposition 2.2. *[2]*
Pour qu'une fonction $f : D^-(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}_p$ soit analytique sur $D^-(0,R)$, il faut et il suffit qu'il existe une suite unique $(a_n)_{n\geq 0}$, satisfaisant $||a_n||_p r^n \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$ pour tout r, $0 < r < R$, et telle que pour $x \in D^-(0,R)$ on a

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Démonstration.

a) **Condition nécessaire**

On suppose que f est analytique sur $D^-(0,R)$ et on montre que (a_n) est unique.
Soient $r, r' \in \mathbb{R}$, tel que $0 < r < r' < R$, et soient $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{C}_p$ associées à f qui est analytique sur $D^-(0,R)$.
On a par la définition pour tout r, $0 < r < R$, f est analytique sur $D^+(0,r)$.
Pour $r < r'$, on a $D^+(0,r) \subseteq D^+(0,r')$, pour tout $x \in D^+(0,r)$ on a $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ce implique que $x \in D^+(0,r')$ et $f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$, d'où

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n, \forall x \in D^+(0,r)$$

Donc

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} (a_n - b_n) x^n = 0, \text{ d'où } a_n = b_n, \forall n \geq 0$$

Alors on déduit l'unicité de développement en série des fonctions analytique sur $D^+(0,r)$
D'où

$$a_n = b_n, \forall n \geq 0.$$

b) **Condition suffisante**
L'implication inverse est trivial par la définition puisque l'existence d'une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{C}_p$ vérifiant les hypothèses de cette proposition signifie que f est analytique sur $D^+(0,r)$, et pour tout r tel que $0 < r < R$.
D'où f est analytique sur $D^-(0,R)$.

□

Notations

On note par

- $\mathcal{A}(D^+(a,R))$ (resp. $\mathcal{A}(D^-(a,R))$) L'anneau des fonctions analytiques sur le disque $D^+(a,R)$ (resp.$D^-(a,R)$).
- $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ L'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$.
- $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[x]$ L'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$ qui ne sont pas des polynômes, et qui s'appellent fonctions transcendantes.

Exemple 2.2. ***(Fonction transcendante)***
Soient $0 < ||q||_p < 1$ *et* $q \in \mathbb{C}_p$, *la fonction* $f(x) = \sum_{n\geq 1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n$ *est une fonction transcendante.*

En effet.
Par la formule d'Alembert, on a

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right|_p = \lim_{n\to+\infty} \left|\left|\frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}\right|\right|_p = \lim_{n\to+\infty} \left|\left|\frac{1}{q^n}\right|\right|_p = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{||q||_p^n} = +\infty$$

D'où $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[x]$.

Proposition 2.3. *[7]*
Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, *les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $f \in \mathcal{A}(D^-(a,R))$.

(ii) La série $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *est convergente pour tout* $x \in D^-(a,R)$.

Exemple 2.3. ***(Fonctions analytiques sur*** $\mathbb{C}_p$***)***

1. *La fonction* $\exp(x)$ *est analytique sur* $D^-(0, p^{-\frac{1}{P-1}})$, *elle n'est pas analytique sur le cercle, et n'est pas entière sur* $\mathbb{C}_p$.

En effet.
Pour tout r, $0 < r < R$ *et* $R = p^{\frac{-1}{p-1}}$, *il existe* $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}_p$, *telle que*

$$||a_n||_p r^n = \left|\left|\frac{1}{n!}\right|\right|_p r^n = p^{+v_p(n!)} r^n = p^{\frac{n-S_p(n)}{p-1}} r^n = p^{-\frac{S_p(n)}{p-1}} \left[p^{\frac{1}{p-1}} r\right]^n.$$

on sait que, $p^{\frac{1}{p-1}} r < 1$, *donc* $||a_n||_p r^n$ *tend vers zéros, lorsque* n *tend vers infini.*
D'où $\exp(x)$ *est analytique sur* $D^-(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$.

Si $||x||_p = R = p^{-\frac{1}{p-1}}$, *alors*

$$||x||_p R^n = \left|\left|\frac{1}{n!}\right|\right|_p p^{-\frac{n}{p-1}} = p^{\frac{n-S_p(n)}{p-1}} p^{-\frac{n}{p-1}} = p^{-\frac{S_p(n)}{p-1}}$$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} ||a_n||_p R^n = \lim\limits_{n\to+\infty} p^{-\frac{S_p(n)}{p-1}} \neq 0$ *(puisque $S_p(n)$ est constante).*
D'où la fonction $\exp(x)$ *n'est pas analytique sur* $C(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$, *donc la fonction* $\exp(x)$ *n'est pas analytique sur* $C(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$. *Alors* $\exp(x)$ *n'est pas entière sur* $\mathbb{C}_p$.

2. *Le disque de convergence de la série* $f(x) = \sum_{n\geq 0} p^n x^n$ *est*

$$D_R = \{x \in \mathbb{C}_p, ||x||_p < p\} = \{x \in \mathbb{C}_p, ||x||_p \leq 1\} = \mathbb{Z}_p.$$

En effet.

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||a_n||_p}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||p^n||_p}}$$

- *Pour* $r = p$, *on a*
$$||a_n||_p r^n = p^{-n+n} = p^0 = 1$$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||a_n||_p r^n = 1 \neq 0$, *alors f n'est pas analytique sur* $C(0, p)$.
- *Pour* $r < p$, *on a*
$$0 \leq ||a_n||_p r^n < p^{-n} p^n = p^{-n+n} = p^0 = 1$$
on a, $\lim\limits_{n\to+\infty} ||a_n||_p r^n = 1 \neq 0$, *donc f n'est pas analytique sur* $D^-(0, p)$.
- *Pour* $r \leq 1$, *on a*
$$||a_n||_p r^n \leq p^{-n}$$
on a, $\lim\limits_{n\to 0} ||a_n||_p r^n = 0$, *donc f est analytique sur* $D^-(0, 1)$.

3. *La fonction* $\log_p(x+1) = \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, *pour tout* $x \in \mathbb{C}_p$ *n'est pas analytique sur* $D_R = D^-(0, 1)$.

En effet. *on a*

$$||n||_p \geq ||n!||_p \Longrightarrow \left|\left|\frac{1}{n}\right|\right|_p \leq \left|\left|\frac{1}{n!}\right|\right|_p$$

Pour r, $0 < r < 1$, *il existe* $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}_p$, *telle que*

$$||a_n||_p r^n = \left|\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|\right|_p r^n = \left|\left|\frac{1}{n}\right|\right|_p r^n \leq \left|\left|\frac{1}{n!}\right|\right|_p r^n \leq p^{\frac{n-S_p(n)}{p-1}} \leq p^{\frac{n-1}{p-1}}$$

Pour tout entier $n \geq 1, S_p(n) \geq 1$, *on a l'inégalité* $||a_n||_p r^n \leq p^{\frac{n-1}{p-1}}$.

En passant à la limite, on a

$$\lim_{n \to +\infty} ||a_n||_p r^n \neq 0.$$

2.2.1 Dérivées des fonctions analytiques p-adiques

Nous pouvons à présenter énoncer un résultat général relatif aux fonctions analytiques.

Théorème 2.2. *[2]*

(i) L'ensemble $\mathcal{A}(D(0,R))$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}_p$.

(ii) Si $f \in \mathcal{A}(D(0,R))$, f *est continue et dérivable sur* $D(0,R)$, *pour* $x \in D(0,R)$ *sa dérivée* f' *est*

$$f'(x) = \sum_{n \geq 0} n a_n x^{n-1}, \quad \text{et } f' \in \mathcal{A}(D(0,R)).$$

(iii) Pour tout $k \geq 1$, f *a une dérivée k-ième* $f^{(k)}$, *et pour* $x \in D(0,R)$

$$f^{(k)}(x) = k! \sum_{n \geq k} C_k^n a_n x^{n-k}, f^{(k)} \in \mathcal{A}(D(0,R)).$$

2.3 Principes du module maximum

Le module maximum joue un rôle très important, pour trouver le nombre des zéros et comportement des zéros des fonctions analytiques p-adiques.

2.3.1 Zéros des fonctions analytiques p-adiques

Définition 2.8. *Soit* f *une fonction analytique en point* α *de* $D^-(0,R)$. *Le point* α *est appelé " zéro d'ordre de multiplicité* n*" de la fonction* f, *si les conditions suivantes sont vérifiées*

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{n-1}(\alpha) = 0 \text{ et } f^n(\alpha) \neq 0.$$

Définition 2.9. *Soit* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ *(resp.* $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$*), et soit* $\alpha \in \mathbb{C}_p$ *(resp.* $\alpha \in D^-(0,R)$*). Soit* $r \in]0,+\infty[$ *tel que* $D^+(\alpha,r) \subset \mathbb{C}_p$ *(resp.* $r \in]0,R[$ *tel que* $D^+(\alpha,r) \subset D^-(\alpha,R)$*), et soit* $f(x) = \sum_{n \geq q} a_n(x-\alpha)^n, \forall x \in D^+(\alpha,r)$, *où* $a_q(\alpha) \neq 0$ *et* $q > 0$. *On dit que dans ce cas* α *est un zéro de* f *d'ordre de multiplicité* q, *et* q *sera appelé l'ordre de multiplicité de zéro* α.

Cas particulier

- Si $q = 0$, alors α n'est pas un zéro.
- Si $q = 1$, on dit que α est un zéro simple.
- Si $q = 2$, on dit que α est un zéro multiple.
- Si $q = \infty$, en déduit que la fonction est identiquement nulle sur un voisinage de α.

Proposition 2.4. *[7]*
Soit f une fonction analytique au point α. On dit que α est un zéro d'ordre q de f ssi dans certains voisinage de point α, l'égalité suivante est vérifiée

$$f(x) = (x - \alpha)^q g(x)$$

où, g est analytique au point α et $g(\alpha) \neq 0$.

Théorème 2.3. *[7]*
Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(0, r))$ tel que $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, on dit que f ayant un nombre fini de zéros sur $D^-(0, r)$ ssi il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $||a_q||r^q \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} ||a_n||r^n$.

Remarque 2.2. *Si $f \in \mathcal{A}(D^-(0, r))$ n'est pas bornée, alors on dit que f ayant une infinité du zéros sur $D^-(0, r)$.*

Définition 2.10. *Soient $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p), D(0, R) \subset \mathbb{C}_p$ ayant un nombre fini de zéros $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ dans $D(0, R)$, avec ordre de multiplicité $q_1, q_2, \cdots, q_n$ respectivement.*
Le polynôme $P(x)$ définie par $P(x) := \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)^{q_i}$ sera appelé le polynôme des zéros de f dans $D(0, R)$.

Corollaire 2.1. *[7]*
Soit $f \in \mathbb{C}_p, ((D(0, R) \subset \mathbb{C}_p)$ ayant un nombre fini des zéros dans $D(0, R)$.
Soit $P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)^{q_i}$ le polynôme des zéros de f dans $D(0, R)$, alors f peut factorisée sous la forme suivante

$f = Pg$, où $g \in \mathcal{A}(D(0, R))$ et $g(x) \neq 0$, pour tout $x \in D(0, R)$.

2.3.2 Principe du module maximum

Définition 2.11. *Soient $0 < r < R$ et $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathcal{A}(D(0, r))$, on définit le module maximum de f, par la formule suivante*

$$|f|(r) = \max_{n\geq 0} ||a_n||_p r^n.$$

L'application $r \longmapsto |f|(r)$ définit une fonction réelle, croissante sur l'intervalle $[0, R[\subset \mathbb{R}$.

Définition 2.12.

i) *Soit $0 < r < R$, on dit que r est un rayon **régulier** pour f, si l'égalité $|f|(r) = ||a_n||_p r^n$ admet un unique indice ($n = n(r) \geq 0$) seulement, le monôme est $||a_n||_p r^n$, où $a_n r^n$ est appelé le monôme dominant pour ce rayon.*

ii) *S'il existe (au moins) deux indices distincts $i \neq j$, tels que $|f|(r) = ||a_i||_p r^i = ||a_j||_p r^j$, on dit que r est un rayon **critique (exceptionnel)** et les monômes $|f|(r) = ||a_i||_p r^i$ s'appellent les monômes de concurrence.*

Remarque 2.3. *Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{C}_p[x] \backslash \{0\}$ et $r \in \mathbb{R}_+$*

i) Si r est un rayon régulier, on a $||f(x)||_p = |f|(r)$.

ii) Si $a_0 \neq 0$, alors $r = 0$ est un rayon régulier et vérifié $||f(x)||_p = ||a_0||_p$, pour $||x||$ assez petit.

Proposition 2.5. *[2]*
Soient $f \in \mathcal{A}(D^+(0,r))$ et $0 < r < R$, tels que $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, la formule

$$||f|| = \sup_{x \in D^+(0,r)} ||f(x)||_p$$

est une norme non-archimédienne sur $\mathcal{A}(D^+(0,r))$.

Démonstration.

1) Soient $f \in \mathcal{A}(D^+(0,r)), 0 < r < R$ et pour tout $x \in D^+(0,r)$

$$\begin{aligned} ||f|| = ||0||_p &\iff \sup_{x \in D^+(0,r)} ||f(x)||_p = ||0||_p \\ &\iff ||f(x)||_p = 0, \forall x \in D^+(0,r) \\ &\iff f(x) = 0, \forall x \in D^+(0,r) \iff f \equiv 0. \end{aligned}$$

2) Soient $f, g \in \mathcal{A}(D^+(0,r)$, $0 < r < R$ et pour tout $x \in D^+(0,r)$

$$||fg|| = \sup_{x \in D^+(0,r)} ||(fg)(x)||_p = \sup_{x \in D^+(0,r)} ||f(x)g(x)||_p = \sup_{x \in D^+(0,r)} (||f(x)||_p ||g(x)||_p) = ||f||||g||.$$

3) Soient $f, g \in \mathcal{A}(D^+(0,r)), 0 < r < R$ et pour tout $x \in D^+(0,r)$

$$\begin{aligned}
||(f+g)(x)||_p &= ||f(x)+g(x)||_p \\
&\leq \max\left(||f(x)||_p, ||g(x)||_p\right) \\
&\leq \max\left(\sup_{x\in D^+(0,r)} ||f(x)||_p, ||g(x)||_p\right), \forall x \in D^+(0,r) \\
&\leq \max\left(\sup_{x\in D^+(0,r)} ||f(x||_p, \sup_{x\in D^+(0,r)} ||g(x)||_p\right), \forall x \in D^+(0,r) \\
&\leq \max\left(||f||, ||g||\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{x\in D^+(0,r)} ||(f+g)(x)||_p \leq \max(||f||, ||g||).$$

D'où,

$$||f+g|| \leq \max(||f||, ||g||).$$

C.Q.F.P.

□

Proposition 2.6. *[2], [3], [7]*
Soient $0 < r < R$ *et* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0,r))$, *on a la relation suivante,*

$$||f|| = \sup_{x\in D^+(0,r)} ||f(x)||_p = |f|(r) \tag{2.1}$$

cette relation est appelée ***égalité de Cauchy*** *et si le rayon* r *du disque est dans le groupe des valeurs de* $\mathbb{C}_p$*, alors un* ***Principe du maximum*** *est vrai : il existe* x_0*, tel que* $||x_0||_p = r$ *et* $||f(x_0)||_p = ||f||$.

Démonstration.

1. Pour montrer l'égalité de Cauchy, on distingue deux cas

Cas 1. si $f \equiv 0$, l'égalité (2.1) est trivialement.

(En effet, $\sup_{x\in D^+(0,r)} ||0(x)||_p = 0$ et $|0|(r) = 0 = \max_{n\geq 0} ||a_n||_p r^n$ d'où $\forall n, a_n = 0$).

Cas 2. si f non équivalent 0, pour tout $x \in D^+(0,r)$. On a d'après **Proposition(2.5)**

$$\begin{aligned}
||f(x)||_p &= ||\sum_{n\geq 0} a_n x^n||_p \\
&\leq \max_{n\geq 0} ||a_n||_p ||x||_p^n \leq \max_{n\geq 0} ||a_n||_p r^n = |f|(r)
\end{aligned}$$

d'où,

$$||f|| = \sup_{x\in D^+(0,r)} ||f(x)||_p \leq |f|(r) \tag{2.2}$$

Pour montrer l'autre inégalité, rappelons qu'on note $|\mathbb{C}_p^*|$, l'ensemble des valeurs $|\mathbb{C}_p^*| = \{p^{-v_p(x)}, x \in \mathbb{C}_p^*\}$, où v est une valuation p-adique dans $\mathbb{C}_p$.

On sait que, $|\mathbb{C}_p^*| = \{p^y = |x|, y \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{C}_p^*\}$, et que c'est un sous groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, .)$.

i) Supposons maintenant que $r \in |\mathbb{C}_p^*|$, et soit $b \in |\mathbb{C}_p^*|$, tel que $||b||_p = r$, comme $\lim\limits_{n\to\infty} ||a_n||_p r^n = 0$, donc il existe n_0 vérifiant

$$|a_{n_0}|r^{n_0} = \max_{n\geq 0} ||a_n||_p r^n \text{ et } ||a_m||_p r^m < \max_{n\geq 0} ||a_n||_p r^n, \forall m > n_0 \tag{2.3}$$

posons, $c_n = \dfrac{a_n b^n}{a_{n_0} b^{n_0}}$, pour tout $n \geq 0$, $g(x) = \sum\limits_{n\geq 0} c_n x^n$ et $P(x) = \sum\limits_{0\leq n\leq n_0} c_n x^n$, on a

$$f(x) = a_{n_0} b^{n_0} g\left(\frac{x}{b}\right), \forall x \in D^+(0,r) \tag{2.4}$$

En effet,

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_{n_0} b^{n_0} \sum_{n\geq 0} \frac{a_n b^n}{a_{n_0} b^{n_0}} \frac{x^n}{b^n} = a_{n_0} b^{n_0} \sum_{n\geq 0} c_n \left(\frac{x}{b}\right)^n = a_{n_0} b^{n_0} g\left(\frac{x}{b}\right)$$

Pour tout $n \geq 0$, on a

$$||c_n||_p = \frac{||a_n b^n||_p}{||a_{n_0} b^{n_0}||_p} = \frac{||a_n||_p ||b^n||_p}{||a_{n_0}||_p ||b^{n_0}||_p} = \frac{||a_n||_p r^n}{||a_{n_0}||_p r^{n_0}} \text{ et } ||c_{n_0}||_p = \frac{||a_{n_0}||_p r^{n_0}}{||a_{n_0}||_p r^{n_0}} = 1$$

de (2,3), devient $\max\limits_{n\geq 0} ||c_n||_p = ||c_{n_0}||_p = 1$ et $||c_m||_p = \dfrac{||a_m||_p r^m}{||a_{n_0}||_p r^{n_0}} < 1$, $\forall m > n_0$.

D'autre part, en calculant le rayon de convergence des fonctions f et g, on trouve $R = 1$ et $||c_n||_p R^n = ||c_n||_p = \dfrac{||a_n||_p r^n}{||a_{n_0}||_p r^{n_0}}$, et d'après que $\lim\limits_{n\to\infty} ||a_n||_p r^n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} ||c_n||_p R^n = 0$.

Donc f et g sont des fonctions analytiques sur $D^+(0,1)$.

On a aussi,

$$|P|(1) = \max_{0\leq n\leq n_0} ||c_n||_p = ||c_{n_0}||_p = 1$$

$$|g|(1) = \max_{n\geq 0} ||c_n||_p = ||c_{n_0}||_p = 1$$

et

$$|g-P|(1)=\max_{n>n_0}||c_n||_p<1$$

donc,

$$|P|(1)=|g|(1)=1$$

Comme $|P|(1)=1$, on déduit que l'image $\overline{P}(x)$ et $P(x)$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p[x]$ n'est pas nulle. Comme $\overline{\mathbb{F}}_p$- la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ est infini, il existe $\overline{y}\in\overline{\mathbb{F}}_p$, tel que $\overline{P}(\overline{y})\neq 0$. Soit $y\in\overline{y}$ et y est l'image de x dans $\mathbb{F}_{\shortmid}$, pour tout $x\in\mathbb{C}_p$ et $||x||_p\leq 1$, on a

$$\begin{aligned}
||P(x)||_p &= ||c_0+c_1x+\ldots+c_{n_0}x^{n_0}||_p\\
&= \max_{0\leq n\leq n_0}||c_n||_p||x||_p^n \quad (\text{car } ||x+y||_p=\max(||x||_p,||y||_p)\Longleftrightarrow ||x||_p\neq ||y||_p)\\
&= \max_{0\leq n\leq n_0}||c_n||_p=1
\end{aligned}$$

et

$$||g(y)-P(y)||_p=\left|\left|\sum_{n>n_0}c_ny^n\right|\right|_p\leq\max_{n>n_0}||c_n||_p||y||_p^n<1$$

donc

$$||g(y)||_p=||g(y)-P(y)+P(y)||_p=\max\left(||P(y)||_p,||g(y)-P(y)||_p\right)=1 \quad (2.5)$$

Posons $x_0=by$ et $x_0\in D^+(0,r)$, on a d'après (2.4)

$$f(x_0)=a_{n_0}b^{n_0}g(y) \quad (2.6)$$

de (2.5) et (2.6), on a

$$||f(x_0)||_p=||a_{n_0}||_p||b^{n_0}||_p||g(y)||_p=||a_{n_0}||_pr^{n_0}=|f|(r)$$

2. Si $r\notin|\mathbb{C}_p^*|$, soit $(r_k)_{k\geq 0}$ une suite croissante d'éléments de $|\mathbb{C}_p^*|$, telle que $\lim\limits_{k\to\infty}r_k=r$ (une suite existe car $\mathbb{Q}_p$ est dense dans $\mathbb{R}$), pour tout $k\geq 0$, il existe $x_{0,k}\in D^+(0,r_k)$, tel que $||f(x_{0,k})||_p=|f|(r_k)$, d'où

$$|f|(r_k)=||f(x_{0,k})||_p\leq\sup_{x\in D(0,r)}||f(x)||_p$$

donc

$$\lim_{k\to\infty}|f|(r_k)\leq\sup_{x\in D^+(0,r)}||f(x)||_p$$

alors

$$|f|(\lim_{k\to\infty} r_k) \leq \sup_{x\in D^+(0,r)} ||f(x)||_p$$

d'où

$$|f|(r) \leq \sup_{x\in D^+(0,r)} ||f(x)||_p \tag{2.7}$$

de (2.2) et (2.7), on obtient l'égalité de Cauchy.

C.Q.F.P.

□

2.3.3 zéros isolés

Le principe des zéros isolés permet de définir un corps des fonctions méromorphe comme ensemble des quotients des fonctions entière, c'est-à-dire des fonctions analytiques définies sur tout le plant complexes p-adiques.

Définition 2.13. *Soit $f \in \mathcal{A}(D(0,R))$ une fonction analytique définit par*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x-a)^k, \forall x \in D^-(a,r), (D(a,r) \subset D(0,R))$$

On dit que a est un zéro isolé de f si c'est un point isolé de l'ensemble des zéros de f, c'est-à-dire, si dans un disque de centre a et de rayon suffisamment petit, a est le seul point où f s'annule.

Remarque 2.4. *Si pour tout entier $k \geq 0, \alpha_k = 0$, alors $f(x) = 0, \forall x \in D(a,r)$, f est identiquement nulle sur $D(a,r)$ d'où, dans ce cas on dit que a est un zéro non isolé.*

Définition 2.14. *Soit f une fonction analytique dans $D(a,r)$, on dit que a est un zéro isolé d'ordre n de f ssi il existe une fonction analytique g sur $D(a,r)$, telle que*

$$f(x) = (x-a)^n g(x) \text{ et } g(a) \neq 0, \forall x \in D(a,r).$$

Théorème 2.4. ***(Principe de zéros isolés)****[9]*
Soit f une fonction analytique dans $D(0,R)$, si f admet un zéro non isolé dans $D(0,R)$, alors f est identiquement nulle dans $D(0,R)$.

Corollaire 2.2. *[2]*
Une fonction analytique non nulle sur un disque vérifie le principe de zéros isolé, c'est-à-dire que si b est un zéro de f, il existe un disque de centre b et de rayon assez petit, où la fonction f n'admet comme zéro que b.

Démonstration.

Si b est un zéro de f, on peut écrire la fonction non nulle f sous la forme

$$f(x) = a_m(x-b)^m + a_{m+1}(x-b)^{n+1} + \dots$$

l'entier m étant ≥ 1 et $a_m \neq 0$.
Il en résulte que si $||x-b||_p$ est assez petit, et non nul, on a

$$||f(x)||_p = ||a_m||_p ||x-b||_p^m \neq 0.$$

□

Conséquence

Les zéros d'une fonction analytique non identiquement nulle sont isolé.

Proposition 2.7. *[2]*
Soit f une fonction analytique non nulle sur un disque $D(0,r)$, $0 < r < R$ définie par

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Pour $\rho < r$, on peut définir la fonction qui associe à ρ par la relation $|f|(\rho) = \max_{n\geq 0} ||a_n||_p \rho^n$.
On a comme propriétés

i) *la fonction $|f|(\rho)$ est croissante.*
ii) *si la fonction f a un zéro b dans le disque $D^+(0,\rho)$, la fonction $|f|(\rho)$ est strictement croissante pour $\rho > ||b||_p$.*
iii) *la fonction $|f|(\rho)$ est continue.*

Démonstration.

i) On a déjà vu que $|f|(\rho)$ est la borne supérieure de $||f(x)||_p$ sur le disque $D^+(0,\rho)$ (par la définition du module maximum).
Soient $\rho_1, \rho_2 \in]0, r[$, et $\rho_1 < \rho_2$, on a

$$||a_n||_p \rho_1^n < ||a_n||_p \rho_2^n, \forall n \geq 0 \text{ et } \max_{n\geq 0} ||a_n||_p \rho_1^n < \max_{n\geq 0} ||a_n||_p \rho_2^n$$

d'où,

$$|f|(\rho_1) < |f|(\rho_2)$$

Ce qui donne le résultat immédiatement.

ii) Soit $\rho_0 > ||b||_p$, on a $|f|(\rho_0) = ||a_s||_p\rho_0^s$, pour $s \geq 1$. en raison de la présence d'au moins un zéro dans le disque $D^+(0, \rho_0)$.

Et comme a_s n'est pas nul, si $\rho > \rho_0$, on a $||a_s||_p\rho^s > ||a_s||_p\rho_0^s$,

donc

$|f|(\rho) = \max_{k\geq 0} ||a_k||_p\rho^k \geq ||a_s||_p\rho^s > ||a_s||_p\rho_0^s = |f|(\rho_0)$, pour tout $s \geq 1$

d'où, $|f|(\rho)$ est strictement croissante.

iii) Fixons $\beta \in]0, \rho[$. alors $\lim_{n\to+\infty} ||a_n||_p\beta^n = 0$, de sorte qu'il existe N un entier, tel que $\max_{0\leq n\leq N} ||a_n||_p\beta^n = \max_{n\geq 0} ||a_n||_p\beta^n$. Donc, si $t \in [0, \beta]$, on a aussi

$\lim_{n\to+\infty} ||a_n||_p t^n = 0$ et $\max_{0\leq n\leq N} ||a_n||_p t^n = \max_{n\geq 0} ||a_n||_p t^n = |f|(t)$.

et comme la fonction $t \longmapsto \max_{0\leq n\leq N} ||a_n||_p t^n$ est clairement continue ,

on a démontrer le résultat.

□

Théorème 2.5. ***(Spécificité ultramétrique)****[7]*
Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(0, R)))$, pour tout $r \in]0, \infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), on a

$$|f'|)(r) \leq \frac{1}{r}|f|(r).$$

Démonstration.

Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$, pour tout $r \in]0, \infty[$ $(resp. r \in]0, R[)$

on a

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n, \text{alors} f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$$

et

$$|f'|(r) = \max_{n\geq 1} ||na_n||_p r^{n-1} = \frac{1}{r} \max_{n\geq 1} ||na_n||_p r^n \leq \frac{1}{r} \max_{n\geq 0} ||a_n||_p r^n = \frac{1}{r}|f|(r).$$

C.Q.F.P. □

Lemme 2.1. *[2]*
Soit $Q(x) = b_0 + \cdots + b_s x^s$, un polynôme de $\mathbb{C}_p[x]$.

On suppose que $||b_s||_p r^s = \max_{0\leq j\leq s}\{||b_j||_p r^j\} = |Q|(r)$. On dit alors que le polynôme est distingué et que le polynôme Q a toutes ses racines dans $D^+(0, r)$.

Démonstration.

Montrons que le polynôme $Q(x)$ a toutes ses racines dans le disque $D^+(0,r)$.

On factorise $Q(x) = b_s(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_s)$, où $b_s \neq 0$, et les α_i sont des racines simples et pas forcément distincts.
D'où,

$$|x-\alpha_i|(r) = \max\{||x||_p, ||\alpha_i||_p\} = \max\{r, ||\alpha_i||_p\}$$

et on a

$$|Q|(r) = ||b_s||_p r^s = ||b_s||_p \prod_{i=1}^{s} \max\{r, ||\alpha_i||_p\}$$

alors,

$\prod_{i=1}^{s} \max\{r, ||\alpha_i||_p\} = r^s$, et comme $\max\{r, ||\alpha_i||_p\} \geq r$, pour tout i.

donc

$$\max\{r, ||\alpha_i||_p\} = r \text{et} ||\alpha_i||_p \leq r, \text{pour tout } i.$$

Alors, on a bien montré que toutes les racines de Q sont dans le disque $D^+(0,r)$, et que r soit dans le groupe des valeurs ou non. □

Théorème 2.6. *[2]*
Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *une série entière non nulle à coefficients dans* $\mathbb{C}_p$*, convergente dans le disque* $D^+(0,r)$*, appartenant à* $\mathcal{A}(D^+(0,r))$*, et* s *un indice tel que l'on ait* $||a_s||_p r^s = ||f||(r)$*, et* $||a_j||_p r^j < ||a_s||_p r^s$ *pour* $j > s$*.*

Il existe alors un couple (Q,H)*,* Q *étant un polynôme de* $\mathbb{C}_p[x], Q(x) = b_0 + \ldots + b_s x^s$ *avec* $||b_s||_p r^s = ||Q||(r) = ||f||(r)$ *et* $H(x)$ *une série entière appartenant à* $\mathcal{A}(D^+(0,r))$*, telle que* $||H-1||(r) < 1$*, vérifiant* $f(x) = Q(x)H(x)$*.*

Théorème 2.7. *[2], [10]*
Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0,r))$ *et soit* s *un indice tel que l'on ait* $||a_s||_p r^s = ||f||(r)$ *et* $||a_j||_p r^j < ||a_s||_p r^s$ *pour* $j > s$*, alors*

(i) Si $s > 1$*, la fonction* f *a exactement* s *zéros dans le disque* $D^+(0,r)$*, compte-tenu des multiplicités.*

(ii) La fonction f *n'a aucun zéro dans le disque* $D^+(0,r)$ *si et seulement si* $s = 0$*, et sa norme y est alors constante dans ce disque.*

Démonstration.

On va utiliser le Théorème précédent. On a donc $f = QH$, avec les propriétés indiquées.

(i) Comme $||H-1||(r) < 1$, on a $||H(x)|| = 1$, pour tout $x \in D^+(0,1)$, donc $H(x)$ ne s'annule pas. Comme le polynôme Q qui intervient dans la factorisation a toutes ses racines dans le disque $D^+(0,r)$. D'après le Lemme 2.1, f a exactement s zéros compte-tenu des multiplicités dans ce disque.

(ii) Si f n'a aucun zéro dans le disque, on doit avoir $s = 0$ par *(i)*.
Si $s = 0$, le polynôme Q qui intervient dans la décomposition $f = QH$ est un polynôme de degré 0, donc une constant c, non nulle puisque f est non nulle.
Comme $||H-1||(r) < 1$, on a $||H(x)|| = 1$ pour tout $x \in D^+(0,1)$, et par suite

$||f(x)|| = ||c||$.

□

Théorème 2.8. *[7]*
Soient $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^-(0,r)), 0 < r < R$ *et* $l \in \mathbb{N}$ *le plus petit de tous les entiers* q*, tel que*

$$||a_q||_p r^q \geq \max_{n\geq 0} ||a_n||_p r^n$$

alors, f *a exactement* l *zéros dans le disque* $D^-(0,r)$*.*

Démonstration.

Supposons que $l \in \mathbb{N}$est le plus petit de tous les entiers q, tel que $||a_q||_p r^q \geq \max_{n\geq 0} ||a_n||_p r^n$.

Alors, $||a_n||_p r^n < ||a_l||_p r^l, \forall n < l.$, donc,

pour chaque $n < l$, il existe $\rho_n \in]0, r[$, tel que $||a_l||_p r_0^l > ||a_n||_p r_0^n, \forall r_0 \in]\rho_n, r[$, Posons $\rho = \max_{n<l} \rho_n$

alors, pour tout $r_0 \in]\rho, r[$, on a si $n < 1, ||a_l||_p r_0^l$.

D'autre part, pour $r_0 \in]0, r[$, on a

$||an||_p r_0^n \leq ||a_l||_p r_0^l$, si $n \geq l+1$, parce que $||a_l||_p r^l \leq ||a_n||_p r^n$ et $n < l$.

Par conséquent, en déduit que pour tout $r \in]\rho, r[$, le nombre de zéros de f dans le disque $D^-(0,r)$ est égale à l. □

Remarque 2.5. *La différence* $s - l$ *est le nombre de zéros de la fonction* f *sur le cercle* $C(0,r)$*.*

Corollaire 2.3. *[7]*
Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ non constante, alors f admet au moins un zéro dans $\mathbb{C}_p$.

De plus, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[x]$, alors f a une infinité de zéros dans $\mathbb{C}_p$.

2.4 Application

Exemple 2.4. *Soient $r > 0$ et $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{C}_p[x]$, où $a_0 \neq 0$*

1) Supposons que $||a_0||_p = ||a_1||_pr > ||a_2||_pr^3$ et $x \in D^+(0,r)$, on a

$$|f|(r) = \max_{0\leq i\leq 2}(||a_0||_p, ||a_1||_pr, ||a_2||_pr^2) = ||a_0||_p = ||a_1||_pr$$

donc f admet un zéro dans $D^+(0,r)$ $(s = 1)$, et n'a pas des zéros dans $D^-(0,r)$ $(l = 0)$, alors $s - l = 1 - 0 = 1$ est le nombre de zéros de f sur $C(0,r)$.

2) Supposons que $||a_1||_pr = ||a_2||_pr^2 > ||a_0||_p$, on a

$$|f|(r) = \max_{0\leq i\leq 2}(||a_0||_p, ||a_1||_pr, ||a_2||_pr^2) = ||a_2||_pr^2 = ||a_1||_pr$$

donc f admet deux zéros dans $D^+(0,r)$ $(s = 2)$, et un zéro dans $D^-(0,r)$ $(l = 1)$, alors $s - l = 2 - 1 = 1$ est le nombre de zéros de f sur $C(0,r)$.

3) Supposons que $||a_0||_p = ||a_2||_pr^2 > ||a_1||_pr$, on a

$$|f|(r) = \max_{0\leq i\leq 2}(||a_0||_p, ||a_1||_pr, ||a_2||_pr^2) = ||a_0||_p = ||a_2||_pr^2$$

donc f admet deux zéros dans $D^+(0,r)$ $(s = 2)$, et n'a pas des zéros dans $D^-(0,r)$ $(l = 0)$, alors $s - l = 2 - 0 = 2$ est le nombre de zéros de f sur $C(0,r)$

CHAPITRE 3

POLYGÔNE DE VALUATION

Dans ce chapitre, nous allons présenter les propriétés de polygône de valuation qui détermine la distribution des zéros des fonctions analytiques p-adiques dans $\mathbb{C}_p$, et on donne quelques exemples pour l'interprétation géométrique.

3.1 Distribution de zéros des fonctions analytiques p-adiques

Définition 3.1. ***(Ligne polygônale)***

*Soit $P_1, P_2, \cdots, P_n, n$ points d'un espace affine (euclidien). On appelle **ligne polygônale**, figure notée « $P_1P_2 \cdots P_n$ » et constituée par la suite des $(n-1)$ segment $[P_1P_2], [P_2P_3], \cdots, [P_{n-1}P_n]$. Les points P_i sont appelés les **sommets successifs** de la ligne polygônale.*

Remarque 3.1.

- *La ligne polygônale est dite fermée si $P_1 = P_2$, (on parle alors de polygône).*
- *Elle dite simple si les segments ne se comptent pas.*

Définition 3.2. *Soit $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{C}_p[x] \backslash \{0\}$, on appelle ensemble représentatif de Q dans $\mathbb{R}^2$, et noterons S, **l'ensemble des points** $(i, v_p(a_i)), 0 \leq i \leq n$.*

Étant donné une droite non verticale d'équation

$$Y = aX + b.$$

On dit qu'un point (X, Y) *est au-dessus (resp. au dessous) de cette droite si* $Y \geq aX + b$ *(resp.* $Y \leq aX + b$*).*

Définition 3.3. *Soient* $r \geq 0, Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{C}_p[x]\backslash\{0\}$*, on définit les rayons critiques positifs de* Q *par*

$$r^{j-i} = \frac{||a_i||_p}{||a_j||_p} \in |\mathbb{C}_p^*|, 0 \leq i < j \leq n.$$

Autrement dit, un rayon critique d'une série entière à coefficients dans $\mathbb{C}_p$*, est une norme des éléments algébriques sur* $\mathbb{C}_p$*.*

Remarque 3.2. *Si les coefficients* $a_n \in \mathbb{C}_p$ *sont donnés, il est facile de tracer les courbes* $r \longmapsto ||a_n||_p r^n$ $(n \geq 0)$*, et la borne supérieure* $|Q|(r)$ *sur l'intervalle donné* $[0, r[, r < R$*, cette borne supérieure est une courbe convexe*[1]*, continue et continument dérivable sauf à un ensemble discret*[2] *de point d'intervalle* $[0, r[, r < R$*.*

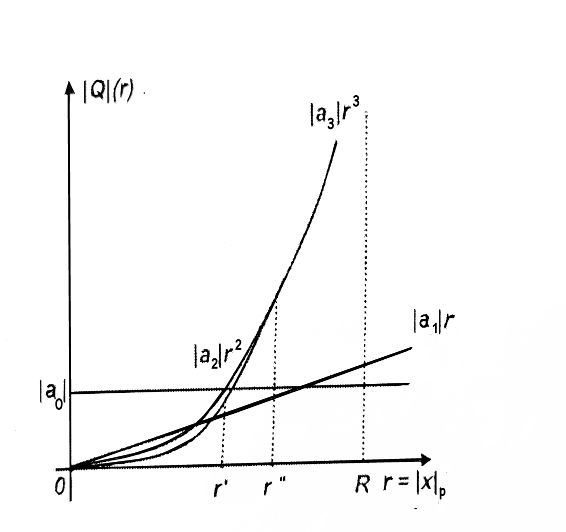

FIGURE 3.1 – Module maximum $r \longmapsto |Q|(r)$

La figure ci-dessus montre l'interprétation géométrique d'un module maximum $r \longmapsto |Q|(r)$.

1. un ouvert de $\mathbb{C}_p$ est convexe, si on peut relier tout point donné a tout autre par un chemin continu ne sorte pas de l'ouvert.
2. l'ensemble discret est $\{p^y, y \in \mathbb{Q}\} \cup \{0\}$.

3.1.1 Polygône de Newton (p-adique)

Soient $f \in \mathcal{A}(D^+(0,r))$, et $0 < r < R$,l'étude de $|f|(r) = \max_{n\geq 0} ||a_n||_p r^n$ est le mieux fait en utilisent la fonction logarithmique

$$\log_p |f|(r) = \max_{n\geq 0}(\log_p ||a_n||_p + n \log_p r)$$

nous allons utiliser des lettres grecques pour ces logarithmes

$$\rho = \log_p r < \rho_f = \log_p R$$

$$\alpha_n = \log_p ||a_n||_p = \log_p p^{-v_p(a_n)} = -v_p(a_n)$$

$$\mu_\rho = \log_p |f|(r) = -v_p(|f|(r)) = \max_{n\geq 0}(n\rho + \alpha_n)$$

donc

$$\mu_\rho = \max_{n\geq 0}(-v_n + n\rho)$$

Cette fonction est une fonction convexe lorsque l'enveloppe de soutier contient des fonctions linéaire affines, elle s'agit d'une fonction linéaire par morceaux, car les rayons critique (et de leurs logarithmes) se produisent sur un sous ensemble discret.
Dans ce travail on appliquer la notion du polygône sur les polynômes.

Définition 3.4. *Soit* $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{C}_p[x]\backslash\{0\}$, *le graphe d'une fonction*

$$\rho \longmapsto h_\rho = \min_{0\leq i\leq n}(v_i - i\rho), \rho \in \mathbb{R}$$

est appelée polygône de Newton (p-adique) de $\mathbb{Q}$. *Autrement dit, le polygône de Newton (p-adique) est la frontière inférieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble* S. *Il s'agit d'une ligne brisée*[3], *réunion de segments dont les extrémités sont dans* S.

Définition 3.5. *Soit* $a_i x^i$ *est le monôme dominant entre deux rayons critiques* $r_1 < r < r_2$, *on dit que* $h_p = v_i - i\rho$ *est une fonction affine linéaire dans l'intervalle* $[\rho_1, \rho_2]$, *où* $\rho_1 = \log_p r_1$ *et* $\rho_2 = \log_p r_2$, *ceci donne un côté de polygône de valuation et le graphe de cette fonction est la borne inférieure de l'intersection convexe de demi-plan déterminer par la ligne de l'équation*

$$\Delta_n^* : \rho \longmapsto v_n - n\rho$$

La pente de Δ_n^* *est* $-n$ *et cette ligne passe par les points* $(0, v_n)$, *et le segment de* Δ_n^* *contenu dans* $[\rho_1, \rho_2]$.

3. ligne brisé ou ligne polygônale est une figure géométrique formée d'une suite de segments

3.1.2 Enveloppes convexes inférieures

On considère $v_i = v_p(a_i), a_i \in \mathbb{C}_p$ une valuation p-adique sur le corps $\mathbb{C}_p$, pour tout polynôme $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{C}_p[x]\backslash\{0\}$, on considère l'ensemble

$$S = \{P_i = (i, v_i), 0 \leq i \leq n \text{ et } a_i \neq 0\}$$

et son enveloppe convexe inférieure

$$C(S) = \{(i, v_i), 0 \leq i \leq n, v_i \geq h_\rho + i\rho, \text{pour tout} \rho \in \mathbb{R}\}$$

telle que, pour tout $\rho \in \mathbb{R}$, on pose

$$h_\rho = -\mu_\rho = \min_{0 \leq i \leq n} (v_i - i\rho)$$

On désigne par s (resp. l) le plus grand (resp. le plus petit) indice pour lequel ce minimum est atteint.

Si la différence $s - l \geq 0, \rho$ est l'une des pentes du polygône de Newton (p-adique) de Q, et on dit que $s - l$ est sa largeur. Notons que l'on a $\rho \in \mathbb{Q}_p$.

Remarque 3.3.

1) *Certains auteurs[4] définissent le polygône de Newton (p-adique) comme la frontière supérieure de l'enveloppe convexe de l'ensemble des points $(i, -v_p(a_i))$.*

2) *Le polygône de Newton (p-adique) recèle tout information concerne la norme d'une zéros de f dans $\mathbb{C}_p$.*

3.1.3 Pentes du polygône de Newton (p-adique)

Définition 3.6. *Soient $P_i = (i, v_i)$ et $P_j = (j, v_j)$, la pente pour P_i, P_j est déterminer par l'égalité*

$$\rho_{ij} = \frac{v_j - v_i}{j - i}, i < j$$

tel que la quantité $(j - i)$ est la longueur de ligne polygônale (une pente).
Les sommets d'un polygône de Newton (p-adique) sont des ensembles des points où les pentes changent.

4. Cassels J.W.S.Local fields, chapitre 6, section 3.

Remarque 3.4. *Soit $Q \in \mathbb{C}_p[x]\backslash\{0\}$, on suppose v une valuation p-adique est discrète et normalisée, alors les pentes du polygône de Newton (p-adique) de Q sont des nombres rationnels.*

Définition 3.7. *Si $[P_iP_j]$ est un segment de pente ρ_{ij} du polygône de Newton (p-adique), alors ρ_{ij} est appelée pente critique (exceptionnel) et le nombre $r_{ij} = p^{\rho_{ij}}$ défini un rayon critique de polygône de Newton (p-adique).*

Proposition 3.1. *[1]*
Le polygône de Newton de $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{C}_p[x]\backslash\{0\}$ est la frontière de l'enveloppe supérieure convexe des points S.
Autrement dit, le polygône de valuation de Q est le graphe dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction

$$n \longmapsto \max_{\rho}(v_n + n\rho), (-\infty < \rho < \rho_Q).$$

Rappelons que, si Δ est une droite non verticale, le demi-plan supérieure défini par Δ est l'ensemble des points situés au-dessus de Δ.
L'enveloppe supérieure convexe d'une partie de $\mathbb{R}^2$ est l'intersection des demi-plants supérieures la contenant.

Remarque 3.5. *Si a_jx^j est le monôme dominant de rayon critique r_2, alors i, j(où $i < j$) sont les indices extrême pour la concurrence des monômes.*

En effet.
on pose $v_p(a_i) = v_i$ et $v_p(a_j) = v_j$, on a

$$\begin{aligned} ||a_i||_p r_2^i = ||a_j||_j r_2^j \iff & \; r_2^{j-i} = \frac{||a_i||_p}{||a_j||_p} = p^{-v_i+v_j} \\ \iff & \; (j-i)\log_p r_2 = -v_i + v_j \\ \iff & \; \rho_2 = \log_p r_2 = \frac{v_j - v_i}{j-i}, i \neq j \end{aligned}$$

– D'après la définition $h_\rho = \min_{n\geq 0}(v_n - n\rho), (-\infty < \rho < \rho_f = \log_p R)$, on a

$$h_\rho \leq v_n - n\rho, (\rho, n \geq 0)$$

et

$$h_\rho + n\rho \leq v_n, (\rho, n \geq 0)$$

et

$$\max_{\rho}(h_\rho + n\rho) \leq v_n, (n \geq 0)$$

– La fonction $n \longmapsto \max_\rho(h_\rho + n\rho)$ est linéaire par morceaux, convexe, et le graphe de cette fonction est la borne supérieure de l'intersection convexe de demi-plan contient les points $P_n = (n, v_n), (n \geq 0)$ par la ligne de l'équation

$$\Delta_\rho : n \longmapsto h_\rho + n\rho$$

Cette équation a une pente ρ et passe par les points $(0, h_\rho)$, ce donne une méthode pour calcule $h_\rho = -\mu_\rho$, pour les valeurs fixés de ρ.

Interprétation géométrique

– La valeur $v_n - n\rho$ représente géométriquement un longueur (hauteur) au-dessus de l'origine d'une droite de pente ρ, en passant par les points $P_n = (n, v_n), (n \geq 0)$.

– On peut tracer le graphe de la fonction $n \longmapsto v_p(n), \forall n \geq 0$ consiste les points P_n.

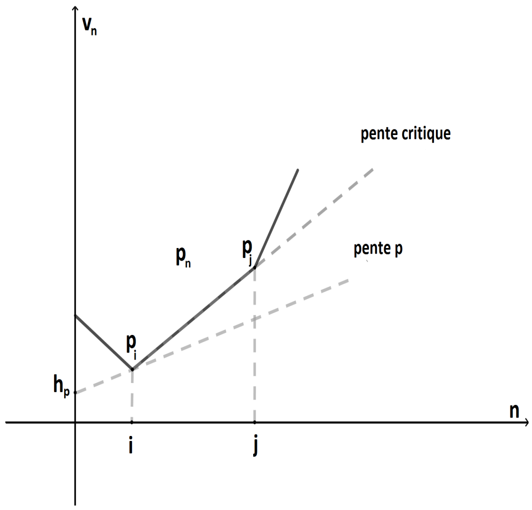

FIGURE 3.2 – Interprétation géométrique d'un polygône de valuation de (p-adique)

3.2 Exemples

Exemple 3.1. *Soit* $P(x) = 1 + px \in \mathbb{C}_p[x]\backslash\{0\}$*, on a*

$a_0 = 1, a_2 = p$*, d'où* $v_p(a_0) = 0, v_p(a_1) = 1$.

Les sommets du polygône de Newton (p-adique) sont les points
$P_0 = (0, 0), P_1 = (1, 1)$.
La pente successive de coté est $\rho = \rho_{01} = \dfrac{v_1 - v_0}{1 - 0} = 1$ *et* $r = p^\rho = p$ *est le rayon critique.*

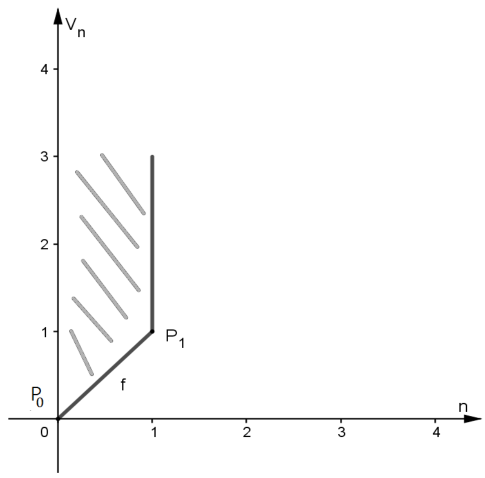

FIGURE 3.3 – polygône de valuation de P

Exemple 3.2. *Soit* $Q(x) = 1 + p^2x^2 \in \mathbb{C}_p[x]\backslash\{0\}$, *on a*
$a_0 = 1, a_2 = p^2$, *d'où* $v_p(a_0) = 0, v_p(a_2) = 2$.
Les sommets du polygône de Newton (p-adique) sont les points
$P_0 = (0, 0), P_2 = (2, 2)$.
Observer l'absence de P_1 *dans cette liste, puisque le coefficient de* x *dans* Q *est nul*
La pente successive de coté est $\rho = \rho_{02} = \dfrac{v_2 - v_0}{2 - 0} = 1$ *et* $r = p^\rho = p$ *est le rayon critique.*

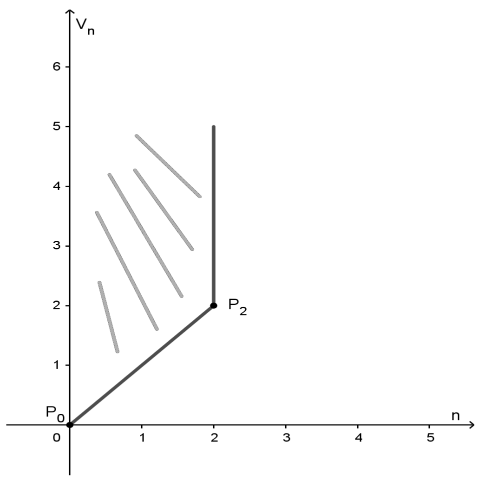

FIGURE 3.4 – polygône de valuation de Q

Exemple 3.3. *Soit* $H(x) = 1 + (1-p)x + p^2x^2 \in \mathbb{C}_p[x]\backslash\{0\}$, *on a*

$a_0 = 1, a_1 = 1-p, a_2 = p^2$, *d'où* $v_p(a_0) = v_p(a_1) = 0, v_p(a_2) = 2$.

Les sommets du polygône de Newton (p-adique) sont les points
$P_0 = (0,0), P_1 = (1,0), P_2 = (2,2)$.

Les pentes successives des cotés sont $\rho_1 = \rho_{01} = \dfrac{v_1 - v_0}{1-0} = 0$ *et* $\rho_2 = \rho_{12} = \dfrac{v_2 - v_1}{2-1} = 2$ *et* $r_1 = 1, r_2 = p^2$ *deux rayons critiques correspondant.*

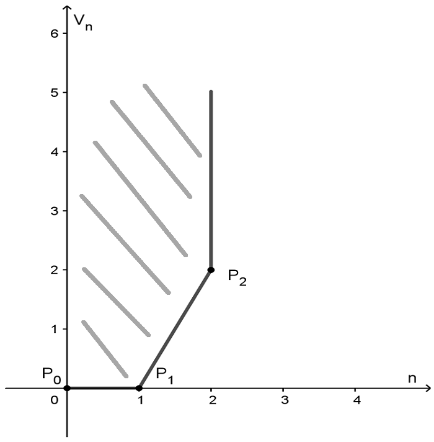

FIGURE 3.5 – polygône de valuation de H

Exemple 3.4. *Soit* $I(x) = 15 + 35x + 2x^2 + 25x^5 \in \mathbb{C}_p[x]\backslash\{0\}$, *où* $(p = 5)$

On a $v_5(a_0) = 1, v_5(a_1) = 1, v_5(a_2) = 0, v_5(a_5) = 2$.

Les sommets du polynôme de Newton (p-adique) sont les points
$P_0 = (0,1), P_1 = (1,1), P_2 = (2,0), P_5 = (5,2)$.

Observer l'absence de P_3, P_4 *dans cette liste, puisque le coefficient de* x^3, x^4 *dans* I *est nul.*

Les pentes successives des cotés sont $\rho_1 = \dfrac{v_2 - v_0}{2-0} = -\dfrac{1}{2}, \rho_2 = \dfrac{v_5 - v_2}{5-2} = \dfrac{2}{3}$ *et*
$r_1 = 5^{-\frac{1}{2}}, r_2 = 5^{\frac{2}{3}}$ *les rayons critiques.*

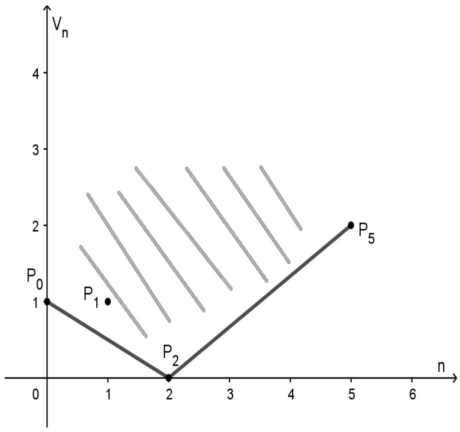

FIGURE 3.6 – polygône de valuation de I

Exemple 3.5. *Construisons maintenant le polygône de Newton (p-adique) du polynôme*

$$K(x) = 1 + 10x + \frac{1}{5}x^2 + 45x^3 + 25x^5 + 625x^6, \ \ (p = 5)$$

vu comme polynôme à coefficients dans le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_5 \subset \mathbb{C}_5$.
La valuation que l'on utilise est donc la valuation 5-adique, on a

$$v_5(a_0) = 0, v_5(a_1) = 1, v_5(a_2) = -1, v_5(a_3) = 1, v_5(a_5) = 2, v_5(a_6) = 4.$$

Les sommets du polygône de Newton sont les points
$P_0 = (0, 0), P_1 = (1, 1), P_2 = (2, -1), P_3 = (3, 1), P_5 = (5, 2), P_6 = (6, 4)$.
Noter l'absence de P_4 *dans cette liste, puisque le coefficient de* x^4 *dans* K *est nul.*

Les pentes successives des cotés sont

$$\rho_1 = \frac{v_2 - v_0}{2 - 0} = -\frac{1}{2}, \rho_2 = \frac{v_5 - v_2}{5 - 2} = 1, \rho_3 = \frac{v_6 - v_5}{6 - 5} = 2.$$

d'où, $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. *Le graphe de polygône de Newton (5-adique) de* K *à partir de l'ensemble des points* $(i, v_i(a_i))$ *est illustrée dans la figure (3.7) ci-dessus, et on voit qu'il s'agit de ligne brisée de sommets. On a les rayons critiques suivants*
$r_1 = 5^{-\frac{1}{2}}, r_2 = 5, r_3 = 5^2$

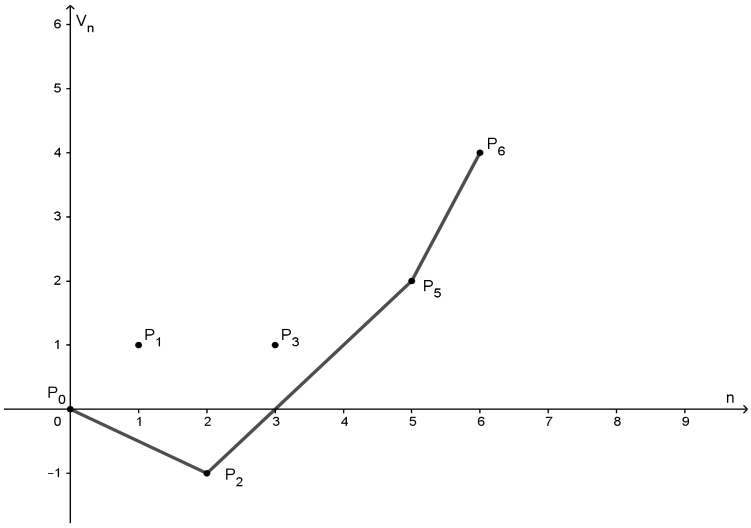

FIGURE 3.7 – Constructions du polygône de valuation (5-adique) d'un polygône K

Maintenant, on pose

$$\mu_\rho = \max_{n\geq 0}(-v_n + n\rho)$$

1. Si $\rho_1 = -\dfrac{1}{2}$

- *pour* $n = 0$ $\qquad -v_0 + 0\rho_1 = 0$
- *pour* $n = 1$ $\qquad -v_1 + 1\rho_1 = -\dfrac{3}{2}$
- *pour* $n = 2$ $\qquad -v_2 + 2\rho_1 = 0$
- *pour* $n = 3$ $\qquad -v_3 + 3\rho_1 = -\dfrac{5}{2}$
- *pour* $n = 5$ $\qquad -v_5 + 5\rho_1 = -\dfrac{9}{2}$
- *pour* $n = 6$ $\qquad -v_6 + 6\rho_1 = -7$

$$\mu_{\rho_1} = \max_{n\geq 0}(-v_n + n\rho_1) = 0$$

alors μ_{ρ_1} *n'admet pas de zéros dans* $D^-(0, r_1)$ *et admet* 2 *zéros dans* $D^+(0, r_1)$*, donc* $s - l = 2 - 0 = 2$ *est le nombre de zéros sur* $C(0, r_1)$*.*

2. *Si* $\rho_2 = 1$

- *pour* $n = 0$ $\quad -v_0 + 0\rho_2 = 0$
- *pour* $n = 1$ $\quad -v_1 + 1\rho_2 = -1 + 1 = 0$
- *pour* $n = 2$ $\quad -v_2 + 2\rho_2 = 1 + 2 = 3$
- *pour* $n = 3$ $\quad -v_3 + 3\rho_2 = -1 + 3 = 2$
- *pour* $n = 5$ $\quad -v_5 + 5\rho_2 = -2 + 5 = 3$
- *pour* $n = 6$ $\quad -v_6 + 6\rho_2 = -4 + 6 = 2$

$$\mu_{\rho_2} = \max_{n \geq 0}(-v_n + n\rho_2) = 3$$

alors μ_{ρ_2} *admet* 5 *zéros dans* $D^+(0, r_2)$ *et admet* 2 *zéros dans* $D^-(0, r_2)$, *donc* $s - l = 5 - 2 = 3$ *est le nombre de zéros sur* $C(0, r_2)$.

3. *Si* $\rho_3 = 2$

- *pour* $n = 0$ $\quad -v_0 + 0\rho_3 = 0$
- *pour* $n = 1$ $\quad -v_1 + 1\rho_3 = -1 + 2 = 1$
- *pour* $n = 2$ $\quad -v_2 + 2\rho_3 = 1 + 4 = 5$
- *pour* $n = 3$ $\quad -v_3 + 3\rho_3 = -1 + 6 = 5$
- *pour* $n = 5$ $\quad -v_5 + 5\rho_3 = -1 + 10 = 8$
- *pour* $n = 6$ $\quad -v_6 + 6\rho_3 = -4 + 12 = 8$

$$\mu_{\rho_3} = \max_{n \geq 0}(-v_n + n\rho_3) = 8$$

alors μ_{ρ_3} *admet* 6 *zéros dans* $D^+(0, r_3)$ *et admet* 5 *zéros dans* $D^-(0, r_3)$, *donc* $s - l = 6 - 5 = 1$ *est le nombre de zéros sur* $C(0, r_3)$.

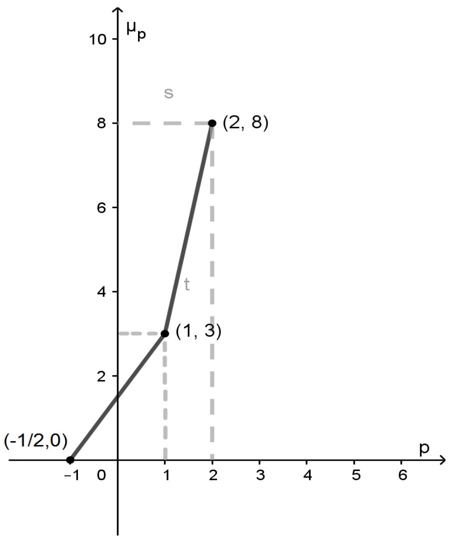

FIGURE 3.8 – Polygône de valuation (5-adique) de K

On fabrique maintenant une fonction Φ_f sur $I =]-\infty, \log_p R[$ définie par

$$\Phi_f(\log_p r) = \log_p |f|(r) = \max_{n\geq 0}\{\log_p ||a_n||_p + n\log_p r\}$$

Cette fonction est la fonction de valuation de f.

Notations

On note par $V(f,r)$ (resp. $v(f,r)$) le plus grand (resp. le plus petit) entier j tel que

$$\log ||a_j||_p + j\log r = \Phi_f(\log r) = \max_{n\geq 0}\{\log ||a_n||_p + n\log r\}$$

C'est à dire que,

$$||a_j||_p r^j = \max_{n\geq 0} ||a_n||_p r^n$$

Théorème 3.1. *[3],[5]*

La fonction Φ_f vérifiant les propriétés suivantes

(i) C'est une fonction convexe, croissante, continue et affine par morceau.
(ii) Si f a un zéro dans $D^-(0,r)$, la fonction Φ_f est strictement croissante pour

$$\log r > \log ||b||_p$$

(iii) La fonction Φ_f est dérivable à gauche et à droite en chaque point $\log r \in I$. Sa dérivée à gauche en $\log r$ est égale à $v(f,r)$ et sa dérivée à droite en $\log r$ est égale à $V(f,r)$.

(iv) Le nombre de zéros de $||f||$ dans le cercle $C(0,r)$, en prenant en compte les multiplicités, est égale à $V(f,r) - v(f,r)$, où $V(f,r)$ (resp. $v(f,r)$) est le nombre des zéros de f dans le disque $D^+(0,r)$ (resp. $D^-(0,r)$).

Remarque 3.6. *La représentation de la fonction Φ_f est connue en analyse non-archimédienne comme polygône de valuation.*

CONCLUSION

Le but de ce travail est de présenter de façon assez élémentaire la notion de polygône de Newton (p-adique), qui joue un rôle très important pour détermine la distribution de zéros des fonctions analytiques p-adique et qui reste valable pour les fonctions analytiques, mais n'est pas valable pour les fonctions méromorphes qui on peut l'exprime sous la forme de la fraction de deux fonctions analytiques, donc il est d'expliquer comment, notamment, on peut en déduire un critère d'irréductibilité des polynômes a coefficients rationnels p-adiques.

NOTATIONS

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail.
Soit p un nombre premier.

- $\mathbb{N}$: Ensemble des nombres naturels.
- $\mathbb{Z}$: Ensemble des nombres entiers.
- $\mathbb{Q}$: Ensemble des nombres rationnels.
- $\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes.
- $\mathbb{Z}_p$: Anneau des entiers p-adiques.
- $\mathbb{Q}_p$: Corps des fractions de $\mathbb{Z}_p$.
- $\mathbb{C}_p$: Complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$.
- $||.||_p$: La norme p-adique.
- C_n^k : Coefficients binomiaux (combinaison de k parmi n).
- $K[x]$: L'ensemble des polynômes a coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $D^-(a,R)$: $\{x \in \mathbb{C}_p, ||x-a||_p < R\}$: Disque ouvert de centre a et de rayon R.
- $D^+(a,R)$: $\{x \in \mathbb{C}_p, ||x-a||_p \leq R\}$: Disque fermé de centre a et de rayon R.
- $D(a,R)$: Disque fermé ou ouvert de centre a et de rayon R.
- $C(a,R)$: $\{x \in \mathbb{C}_p, ||x-a||_p = R\}$: Cercle de centre a et de rayon R.

- $v_p(a)$: Valuation p-adique sur $\mathbb{Z} - \{0\}$ est le plus grand entier $\alpha > 0$ où p^α divise a.
- $\mathcal{A}(D(a,R))$: Ensemble des fonctions analytiques p-adiques sur $D(a,R)$.
- $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$: Ensemble des fonctions entières.
- $\overline{\mathbb{Q}}_p$: Clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$.
- $|\mathbb{C}_p|$: Ensemble des puissances rationnelles de p.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Amice, *Les nombres p-adiques.* Presses Universitaire de France 1975.

[2] J.P. Bézivin,*Dynamique des fractions rationnelles p-adiques.* Cours de DEA de mathematiques, Université de CAEN. 23 mai 2005.

[3] S. Bourourou, *Résolution de certaines classes d'équations fonctionnelles aux q-différences et aux différences dqns l'espace des fonctions méromorphes p)adiques.* Thèse de Doctorat. Université de Jijel. 2016.

[4] B. Diarra, *Analyse p-adique.* Cours de DEA-Algèbre Commutative, FAST-Université du Mali. 1999.

[5] A. Escassut, *Analytic Elements in p-adic Analysis.* Word Scientific Publishing. 1995.

[6] Fernando Q. Gouvêa, *p-adic Numbers.* An Introduction, Second Edition 1997.

[7] S. Katok, *Real and p-adic analysis course notes for math 497C mass program, Fall 2000 Revised.*2000(2001).

[8] A. Robert, A course in p-adic Analysis. Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, No. 198, 2000.

[9] Murşan, Alexe Cãlin, *Non archimedian filds.Topological proprities of* $\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p$ *(p-adics numbers.*

[10] T. Zerzaihi, *Cours de fonction analytique* 1^{er} *Master.* Jijel 2012.