

N° Réf :

Centre universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques appliquées

Résolution et comportement d'un système d'équations aux différences d'ordre supérieurs

Préparé par :

. FERHATI Assia
. MEDDOUR Sara

Devant le jury

LAIB Hafida (MCB)	U. Abd Elhafid Boussouf Mila	Président
HADDAD Nabila (MCB)	U. Abd Elhafid Boussouf Mila	Rapporteur
YACINE Halim (MCA)	U. Abd Elhafid Boussouf Mila	Examineur

Année Universitaire : 2019/2020



Remerciements

*En tout premier lieu, nous remercions **DIEU** le tout puissant de nous avoir donnée la force, le courage pour dépasser toutes les difficultés de ce modeste travail.*

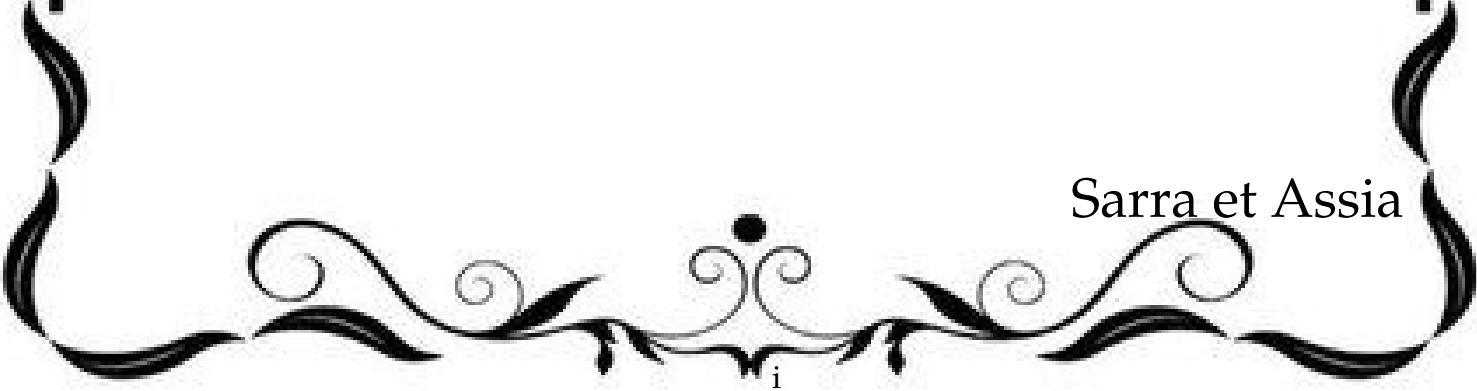
*En deuxième lieu nos plus grande gratitude va à notre directrice de mémoire, Madame **Haddad Nabila** pour sa patience, sa disponibilité, sa gentillesse surtout ses précieux conseils qui ont contribué à alimenter notre réflexion .*

*Nous adressons également nos remerciements les plus vifs à Madame **Laib Hafida** pour avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury et Monsieur **Halim Yacine** pour avoir accepté d'examiner notre travail.*

Nos remerciements chaleureux à tous les cadres et les enseignants de l'institut des sciences et de la technologie et à tous les étudiants de notre promotion.

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration du présent travail.

Sarra et Assia





Dédicace

Je dédie ce modeste travail en signe de respect et de remerciement :

À mes chers parents, qui m'ont aidé de près et de loin.

*À mes chères soeurs **Meriem** et **Asma**, à mes chers frères **Walid**, **Said** et **Abd Raouf** pour leur soutien et leur présence malgré la distance qui nous sépare.*

*À mon mari **Billel** pour leur soutien moral, leur confiance et leur tendresse, J'espère que Dieu vous donne la santé.*

*À mes amis et collègues surtout **Nassira**, **Bouthaina**, **Nour hane**, **Messaouda** qui m'ont apporté leur soutien intellectuel tout au long de ma démarche.*

*À tout ma famille, qui porte le nom **Ferhati**.*

À tout ceux qui ont participé à l'élaboration de ce modeste travail et tous ceux qui nous sont chers.

Ferhati Assia





Dédicace

Je dédie ce modeste travail en signe de respect et de remerciement :

À mes chers parents , qui ont toujours été là pour moi .

*À mes chères soeurs **Nadia, Kenza, Ouidad** et ma petite soeur **Samah**, à mes chers frères **Abd Rehamene** et **Yassine** qui m'avez toujours soutenu et encouragé durant ces années d'études.*

*À mes eveux **Monder** et **Yasser** pour leur amour inestimable.*

*À mes amis et collegues surtout **Nassira, Bouthaina, Nour hane** et **Kamilia** qui m'ont apporté leur soutien inconditionnel et leurs précieux conseils ont été d'une grande aide.*

*À tout ma famille, qui porte le nom **Meddour**.*

À tout ceux qui ont participé à l'élaboration de ce modeste travail et tous ceux qui nous sont chers.

Meddour Sarra

Résumé

Notre objectif principal dans ce mémoire est de résoudre et d'étudier le comportement asymptotique des solutions d'un système des équations aux différences non linéaire d'ordre supérieure.

Nous présentons dans le premier chapitre quelques définitions et résultats connus sur la théorie des équations aux différences linéaires et non linéaires .

Nous donnons dans la deuxième chapitre quelques définitions et résultats sur les systèmes des équations aux différences linéaires et non linéaires.

Le dernier chapitre est consacré sur la résolution et le comportement asymptotique des solutions d'un système d'équation aux différences d'ordre supérieure.

Mots-clés : Équations aux différences, système d'équations aux différences, nombres de Fibonacci, nombres de Lucas, périodicité.

Abstract

Our main goal in this master thesis is to solve and to study the asymptotic behavior of solutions of the system of non linear difference equations .

In the first chapter, we present some definitions and results of theory of linear and non linear difference equations.

In the second chapter, we give some definitions and results of linear and non linear system of difference equations .

the third chapter is devoted to the resolution and the asymptotic behavior of the solution of a system of non linear difference equations .

Keywords : Difference equations, system of difference equations, Fibonacci numbers, Lucas numbers, periodicity.

ملخص

يتمحور هدفنا الرئيسي في هذه المذكرة في حل ودراسة السلوك التقاربي لحلول جملة معادلات فروق غير خطية .

في الفصل الأول نقدم بعض التعاريف و النظريات المعروفة حول معادلات الفروق الخطية والغير خطية .

في الفصل الثاني نعطي بعض التعاريف والنظريات المعروفة حول جملة معادلات الفروق الخطية والغير خطية .

في الفصل الثالث نقوم بحل و دراسة السلوك التقاربي لجملة معادلات فروق غير خطية .

الكلمات المفتاحية

معادلات الفروق , جمل معادلات الفروق , أعداد فيبوناتشي , أعداد لوكاس , دورية.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	3
1 Équation aux différences	5
1.1 Équation aux différences linéaire	5
1.1.1 Équation aux différences linéaire non autonome	5
1.1.2 Méthode de la variation de la constante	15
1.1.3 Résolution de l'équation homogène autonome	18
1.1.4 Méthode d'indéterminée les coefficients pour la résolution de l'équation non homogène	23
1.2 Transformation de l'équation aux différences non linéaire à l'équation aux différences linéaire	30
1.2.1 Équation de Riccati	31
1.2.2 Équation de Riccati généralisée	33
1.2.3 Équation de Riccati de type $f(\frac{x_{n+1}}{x_n}, n) = 0$	35
1.2.4 Équation de Riccati de la forme $(x_{n+k})^{r_1}(x_{n+k-1})^{r_2} \dots (x_n)^{r_{k+1}} = g(n)$	35
2 Système des équations aux différences	37
2.1 Système des équations aux différences linéaire	37
2.1.1 Système autonome homogène	37
2.1.2 Système autonome non homogène	42

2.1.3	Système non autonome homogène	42
2.1.4	Système non autonome non homogène	43
2.2	Système des équations aux différences non linéaire	43
3	Solutions et comportement du système des équations aux différences non linéaire	47
3.1	Forme des solutions	48
3.2	Comportement asymptotique et périodicité des solutions pour $a = b$	53
	Conclusion	66

INTRODUCTION

Les équations aux différences sont à la base de l'analyse appliquée depuis L.Euler, P.L.Tchebycheff et A.A.Markov. Précisément, une équation aux différences est une équation, dont l'inconnu est une suite x_n qui relie plusieurs termes x_i , $i < n$ d'une même suite.

Récemment, il y a plusieurs de recherches et d'intérêt dans les théories des équations aux différences par plusieurs auteurs. La plupart de ces théories sont apparues dans beaucoup de domaines scientifiques comme la biologie, l'économie, la physique, la gestion des ressources. En particulier les équations aux différences non linéaires d'ordre un ont une grande importance dans ces applications.

Le but de ce mémoire est de trouver la forme explicite des solutions d'un système des équations aux différences non linéaire. En plus de l'introduction le mémoire se organiser de trois chapitres :

Dans le premier chapitre nous donnons quelques définitions et résultats connu sur les équations aux différences linéaires et non linéaires; ensuite, nous présentons la méthode de linéarisation sur quelques types d'équations aux différences non linéaires à des équations aux différences linéaires.

Dans le deuxième chapitre nous donnons quelques définitions sur les systèmes des équations aux différences linéaires autonome et non autonome

et aussi les systèmes des équations aux différences non linéaires.

Le dernier chapitre, la première partie est présenté la forme générale des solutions du système des équations aux différences non linéaire suivant

$$x_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta, \quad y_{n+1} = \frac{bx_{n-1} y_n}{x_n - \beta} + \alpha,$$

Où $n \in \mathbb{N}_0$, a, α, β sont des paramètres et les valeurs initiales x_{-1}, y_{-1}, x_0, y_0 sont des nombres réels non nuls.

Nous intéressons spécifiquement dans la deuxième partie sur le comportement asymptotique et la périodicité des solutions de ce système pour $a = b$.

CHAPITRE 1

ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions, théorèmes et résultats généraux sur les équations aux différences qui sont bien détaillés dans [1], [2], [3], [4], [6], [7]. Précieusement, dans la première partie nous intéressons à résoudre les équations aux différences linéaires autonomes et non autonomes. Dans la deuxième partie nous présentons la méthode de linéarisation et quelques types d'équations aux différences non linéaires qui peuvent être résolus en la transformant aux équations aux différences linéaires .

1.1 Équation aux différences linéaire

1.1.1 Équation aux différences linéaire non autonome

Définition 1.1.1. *On appelle équation aux différences linéaire non homogène d'ordre k l'équation*

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \dots + p_k(n)x_n = g(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}, \quad (1.1)$$

où les $p_i(n)$, $i = \{1, \dots, k\}$ et $g(n)$ sont des fonctions réelles ou complexes définies sur $\mathbb{N}_{n_0}$ et $p_k(n) \neq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$,

(où $\mathbb{N}_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, \dots\}$).

L'équation (1.1) est dite autonome si les coefficients $p_i(n)$, $i = \{1, \dots, k\}$, $g(n)$ sont des constantes sinon l'équation est dite non autonome.

Définition 1.1.2. L'équation (1.1) est dite homogène si $g(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$, alors l'équation (1.1) prend la forme suivante

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \dots + p_k(n)x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}, \quad (1.2)$$

(l'équation (1.2) est l'équation homogène associée à l'équation (1.1)).

Remarque 1.1.1. En générale, on associe k valeurs initiales avec l'équation (1.1)

$$x_{n_0} = c_1, x_{n_0+1} = c_2, \dots, x_{n_0+k} = c_k, \quad (1.3)$$

où les c_i , $i = 1, \dots, k$ sont des constantes réelles ou complexes.

Définition 1.1.3. Une suite $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ est dite **solution** de l'équation (1.1) si elle satisfait la relation (1.1) et vérifié les valeurs initiales (1.3).

Théorème 1.1.1. L'équation (1.1) avec les valeurs initiales (1.3) admet **une seule solution**.

Exemple 1.1.1. Considérons l'équation aux différences d'ordre 3

$$x_{n+3} - \frac{n}{n+1}x_{n+2} + nx_{n+1} - 3x_n = n,$$

où $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ et $x_3 = 1$.

Nous calculons les valeurs de x_4 , x_5 , x_6 et x_7 comme suit

D'abord on écrivant l'équation sous la forme suivante

$$x_{n+3} = \frac{n}{n+1}x_{n+2} - nx_{n+1} + 3x_n + n, \quad (1.4)$$

remplaçons n par 1 dans l'équation (1.4) on obtient

$$x_4 = \frac{1}{2}x_3 - x_2 + 3x_1 + 1 = \frac{5}{2},$$

de même pour $n = 2$

$$x_5 = \frac{2}{3}x_4 - 2x_3 + 3x_2 + 2 = -\frac{4}{3},$$

pour $n = 3$

$$x_6 = \frac{3}{4}x_5 - 3x_4 + 3x_3 + 3 = -\frac{5}{2},$$

pour $n = 4$

$$x_7 = \frac{4}{5}x_6 - 4x_5 + 3x_4 + 4 = 13, 13.$$

Lemme 1.1.1. *La forme du solution de l'équation aux différences linéaire non homogène de premier ordre suivante*

$$x_{n+1} = a(n)x_n + g(n), \quad (1.5)$$

avec $x_{n_0} = x_0$, $n \geq n_0 \geq 0$ et $a(n) \neq 0$ est une fonction réelle définie pour $n \geq n_0 \geq 0$ est donnée par

$$x_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0 + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} a(i) \right) g(k). \quad (1.6)$$

Preuve. (par récurrence)

Pour $n = n_0$

$$x_{n_0} = \left[\prod_{i=n_0}^{n_0-1} a(i) \right] x_0 + \sum_{k=n_0}^{n_0-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n_0-1} a(i) \right) g(k) = x_0 \quad (\text{vérifié}).$$

Maintenant supposons que l'équation (1.6) est vraie pour n et montrons quelle est vraie pour $n + 1$.

Nous avons

$$x_{n+1} = a(n)x_n + g(n),$$

ainsi

$$x_{n+1} = a(n) \left[\left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0 + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} a(i) \right) g(k) \right] + g(n),$$

alors

$$= \left[\prod_{i=n_0}^n a(i) \right] x_0 + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^n a(i) \right) g(k) + g(n),$$

d'où

$$x_{n+1} = \left[\prod_{i=n_0}^n a(i) \right] x_0 + \sum_{k=n_0}^n \left(\prod_{i=k+1}^n a(i) \right) g(k),$$

donc (1.6) est vraie pour $n + 1$,

alors (1.6) est vraie pour $n \geq n_0 \geq 0$.

■

Remarque 1.1.2. *Si l'équation (1.5) autonome (à coefficients constantes) non homogène

$$x_{n+1} = ax_n + b, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0},$$

alors la solution générale est

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b.$$

. Si $a = 1$ alors

$$x_n = x_0 + bn.$$

. Si $a \neq 1$,

La formule contient la somme de n terme d'une suite géométrique dont la raison est a et son premier terme est 1.

Donc

$$x_n = a^n x_0 + b \left(\frac{a^n - 1}{a - 1} \right).$$

*Si l'équation (1.5) autonome (à coefficients constantes) homogène

$$x_{n+1} = ax_n, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0},$$

alors la solution générale est

$$x_n = a^n x_0.$$

*Si l'équation (1.5) non autonome (à coefficients constantes) homogène

$$x_{n+1} = a(n)x_n, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0},$$

alors la solution générale est

$$x_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0.$$

Théorème 1.1.2. *L'ensemble des solutions S de l'équation aux différences homogène (1.2) est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension k .*

Définition 1.1.4. *{La Gasoration $W(n)$ }*

La Gasoration $W(n)$ des solutions $\{x_n^1\}_{n \geq n_0}, \{x_n^2\}_{n \geq n_0}, \dots, \{x_n^k\}_{n \geq n_0}$ de l'équation aux différences linéaire homogène (1.2) est donnée par

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^k \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^k \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & \cdots & x_{n+2}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+k-1}^1 & x_{n+k-1}^2 & \cdots & x_{n+k-1}^k \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Lemme 1.1.2. *{Lemme d'Abel}*

*Soient $\{x_n^1\}_{n \geq n_0}, \{x_n^2\}_{n \geq n_0}, \dots, \{x_n^k\}_{n \geq n_0}$ sont des solutions de l'équation aux différences linéaire homogène (1.2), et soit $W(n)$ leur **Gasoration** alors*

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^n p_k(i) \right) W(n_0), \quad \forall n \geq n_0.$$

Preuve. Nous montrons le résultat seulement pour $k = 3$ (avec la même manière on montre le cas générale).

Nous avons

$$x_{n+3} + p_1(n)x_{n+2} + p_2(n)x_{n+1} + p_3(n)x_n = 0, \quad (1.8)$$

et soient

$$\{x_n^1\}_{n \geq n_0}, \{x_n^2\}_{n \geq n_0}, \{x_n^3\}_{n \geq n_0},$$

sont trois solutions différentes de l'équation (1.8), donc La Gasoration est

donnée par

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$W(n+1) = \det \begin{pmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^3 \\ x_{n+3}^1 & x_{n+3}^2 & x_{n+3}^3 \end{pmatrix}.$$

D'autre part nous avons

$$x_{n+3}^1 = -p_1(n)x_{n+2}^1 - p_2(n)x_{n+1}^1 - p_3(n)x_n^1,$$

$$x_{n+3}^2 = -p_1(n)x_{n+2}^2 - p_2(n)x_{n+1}^2 - p_3(n)x_n^2,$$

$$x_{n+3}^3 = -p_1(n)x_{n+2}^3 - p_2(n)x_{n+1}^3 - p_3(n)x_n^3.$$

On substitue dans $W(n+1)$, on trouve

$$\begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^3 \\ -p_1(n)x_{n+2}^1 - p_2(n)x_{n+2}^1 - p_3(n)x_n^1 & -p_1(n)x_{n+2}^2 - p_2(n)x_{n+2}^2 - p_3(n)x_n^2 & -p_1(n)x_n^3 - p_2(n)x_n^3 - p_3(n)x_n^3 \end{vmatrix}$$

On remplace L_3 par $L_3 + p_2(n) + L_2 p_1(n)$ on trouve

$$W(n+1) = \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^3 \\ -p_3(n)x_n^1 & -p_3(n)x_n^2 & -p_3(n)x_n^3 \end{vmatrix},$$

$$W(n+1) = -p_3(n) \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^3 \\ x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 &= -(-1)p_3(n) \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^3 \end{vmatrix}, \\
 &= (-1)^3 P_3(n) \begin{vmatrix} x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^3 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Alors

$$W(n+1) = (-1)^3 p_3(n) W(n). \quad (1.9)$$

L'équation (1.9) est une équation linéaire de premier ordre, donc de lemme (1.1.1), nous avons

$$\begin{aligned}
 W(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} (-1)^3 p_3(i) \right] W(n_0), \\
 &= (-1)^{3(n-1-n_0+1)} \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} P_3(i) \right] W(n_0), \\
 &= (-1)^{3(n-n_0)} \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} P_3(i) \right] W(n_0).
 \end{aligned}$$

■

Théorème 1.1.3. Si les $p_k(n) \neq 0$ pour tout $\mathbb{N}_{n_0}$ alors on a le résultat suivant

$$W(n) \neq 0; \quad \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow W(n_0) \neq 0.$$

Définition 1.1.5. On dit que les suites $\{x_n^1\}_{n \geq n_0}, \{x_n^2\}_{n \geq n_0}, \dots, \{x_n^k\}_{n \geq n_0}$ sont **libres** (linéairement indépendantes) sur N_{n_0} si

$$\forall \alpha_j \in \mathbb{R}; \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j x_n^j = 0 \implies \alpha_j = 0, \quad \forall j = \{1, \dots, k\},$$

et on dit que les suites $\{x_n^1\}_{n \geq n_0}, \{x_n^2\}_{n \geq n_0}, \dots, \{x_n^k\}_{n \geq n_0}$ sont **liée** (linéairement dépendantes) sur N_{n_0} si

$$\exists \alpha_j \neq 0; \sum_{j=1}^m \alpha_j x_n^j = 0.$$

Théorème 1.1.4. Soit $A = \{\{x_n^1\}_{n \geq n_0}, \{x_n^2\}_{n \geq n_0}, \dots, \{x_n^k\}_{n \geq n_0}\}$ un ensemble des solutions de l'équation (1.2) alors

$$A \text{ est libre} \Leftrightarrow W(n) \neq 0.$$

(A est libre i.e les solutions $\{x_n^1\}_{n \geq n_0}, \{x_n^2\}_{n \geq n_0}, \dots, \{x_n^k\}_{n \geq n_0}$ sont libres).

Preuve. Soient $a_1, a_2, \dots, a_k$ telle que

$$a_1(x_n^1) + a_2(x_n^2) + \dots + a_k(x_n^k) = 0 \Leftrightarrow a_1x_n^1 + a_2x_n^2 + \dots + a_kx_n^k = 0.$$

On a une infinité des équations mais on besoin de k équations seulement

$$\begin{cases} a_1x_n^1 + a_2x_n^2 + \dots + a_kx_n^k & = 0, \\ a_1x_{n+1}^1 + a_2x_{n+1}^2 + \dots + a_kx_{n+1}^k & = 0, \\ a_1x_{n+2}^1 + a_2x_{n+2}^2 + \dots + a_kx_{n+2}^k & = 0, \\ \vdots & \vdots \\ a_1x_{n+k-1}^1 + a_2x_{n+k-1}^2 + \dots + a_kx_{n+k-1}^k & = 0 \end{cases}$$

Donc la forme matricielle est donnée par

$$\begin{pmatrix} x_n^1 & x_n^2 \cdots & x_n^k \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 \cdots & x_{n+1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+k-1}^1 & x_{n+k-1}^2 \cdots & x_{n+k-1}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$X_n \gamma = 0. \tag{1.10}$$

On observe que $W(n) = \det X_n$ donc l'équation (1.10) admet une seule solution si et seulement si

$$W(n) \neq 0,$$

et

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) = (0, 0, \dots, 0).$$

Alors $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k$ sont libres.

■

Théorème 1.1.5. *L'ensemble des solutions $\{\{x_n^1\}_{n \geq n_0}, \{x_n^2\}_{n \geq n_0}, \dots, \{x_n^k\}_{n \geq n_0}\}$ de l'équation (1.2) est dite ensemble **fondamentale** si et seulement si*

$$W(n_0) \neq 0.$$

Exemple 1.1.2. *Considérons l'équation aux différences linéaire homogène d'ordre 3 suivante*

$$x_{n+3} + 3x_{n+2} - 4x_{n+1} - 12x_n = 0, \quad \forall n \geq 0. \quad (1.11)$$

- Montrons que $2^n, (-2)^n, (-3)^n$ forme un ensemble fondamentale de l'équation (1.11).

i/ Vérifié que 2^n est une solution de l'équation on substituant 2^n dans l'équation (1.11)

$$2^{n+3} + 3 * 2^{n+2} - 4 * 2^{n+1} - 12 * 2^n = 2^n[8 + 12 - 8 - 12] = 0.$$

De la même manière on vérifie que $(-2)^n$ et $(-3)^n$ sont des solutions de l'équation (1.11).

ii/ On va montrer que cette ensemble $\{2^n, (-2)^n, (-3)^n\}$ est un ensemble fondamentale donc il suffit de montrer que $W(n_0) \neq 0$.

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} 2^n & (-2)^n & (-3)^n \\ 2^{n+1} & (-2)^{n+1} & (-3)^{n+1} \\ 2^{n+2} & (-2)^{n+2} & (-3)^{n+2} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = -20 \neq 0.$$

Donc d'après le théorème (1.1.5) les solutions 2^n , $(-2)^n$ et $(-3)^n$ sont libres (linéairement indépendant) alors elles forment un ensemble fondamentale.

Théorème 1.1.6. Si $\{\{x_n^1\}_{n \geq n_0}, \{x_n^2\}_{n \geq n_0}, \dots, \{x_n^k\}_{n \geq n_0}\}$ un ensemble fondamentale des solutions de l'équation (1.2), alors la solution générale est peut écrire sous forme d'une combinaison linéaire qui donnée par

$$x_n = \sum_{i=1}^k a_i x_n^i,$$

où a_i , $i = \{1, \dots, k\}$ sont des constantes réelles ou complexes.

Exemple 1.1.3. De l'exemple précédent (1.1.2) nous avons $\{2^n, (-2)^n, (-3)^n\}$ est un ensemble fondamentale de l'équation (1.11).

Alors la forme générale de solution est donnée par

$$x_n = c_1 2^n + c_2 (-2)^n + c_3 (-3)^n.$$

Lemme 1.1.3. La différence entre deux solutions $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ et $\{y_n\}_{n \geq n_0}$ de l'équation (1.1) est une solution de l'équation (1.2).

Preuve. Soient $\{x_n\}_{n \geq n_0}$, $\{y_n\}_{n \geq n_0}$ deux solutions de l'équation (1.1), alors

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \dots + p_k(n)x_n = g(n), \quad \forall n \geq n_0, \quad (1.12)$$

$$y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + \dots + p_k(n)y_n = g(n), \quad \forall n \geq n_0. \quad (1.13)$$

La différence entre (1.12) et (1.13) est donnée par

$$(x_{n+k} - y_{n+k}) + p_1(n)(x_{n+k-1} - y_{n+k-1}) + \dots + p_k(n)(x_n - y_n) = 0.$$

Posons $z_n = (x_n - y_n)$, $\forall n \geq n_0$.

Donc

$$z_{n+k} + p_1(n)z_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)z_n = 0, \quad \forall n \geq n_0.$$

D'où $\{z_n\}_{n \geq n_0}$ est une solution de l'équation (1.2).

■

Théorème 1.1.7. *Chaque solution de l'équation (1.1) peuvent écrire sous la forme suivante*

$$x_n = x_n^p + \sum_{i=1}^k a_i x_n^i, \quad \forall n \geq n_0.$$

telle que x_n^p est une solution particulière de l'équation (1.1) et $\{\{x_n^1\}_{n \geq n_0}, \{x_n^2\}_{n \geq n_0}, \dots, \{x_n^k\}_{n \geq n_0}\}$ est l'ensemble fondamentale des solutions de l'équation homogène (1.2).

Preuve. Soient $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ une solution de l'équation (1.1) et $\{x_n^p\}_{n \geq n_0}$ une solution particulière de l'équation (1.1).

D'après le lemme (1.1.3), $\{x_n - x_n^p\}_{n \geq n_0}$ est une solution de l'équation (1.2), et de théorème (1.1.6) nous avons

$$(x_n - x_n^p) = \sum_{i=1}^k a_i x_n^i, \quad \forall n \geq n_0.$$

■

1.1.2 Méthode de la variation de la constante

Dans cette section on présente la résolution des équations aux différences linéaire non homogène d'ordre 2 par la méthode de la variation de la constante.

Définition 1.1.6. *On définit l'opérateur de différence Δ par*

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

Soit l'équation aux différences linéaire non homogène de second ordre

$$x_{n+2} + p_1(n)x_{n+1} + p_2(n)x_n = g(n), \quad (1.14)$$

où $p_i(n)$, $i = 1, 2$ et $g(n)$ sont des fonctions réelles définies sur $\mathbb{N}_{n_0}$

et $(p_2(n) \neq 0, g(n) \neq 0, \quad \forall n \geq n_0)$.

L'équation homogène associé est

$$x_{n+2} + p_1(n)x_{n+1} + p_2(n)x_n = 0, \quad (1.15)$$

où $\{x_n^1\}_{n \geq n_0}$ et $\{x_n^2\}_{n \geq n_0}$ deux solutions de l'équation (1.15). On a $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ la solution particulière de l'équation (1.14) donnée par

$$x_n = c_1(n)x_n^1 + c_2(n)x_n^2. \quad (1.16)$$

Alors pour trouver les coefficients non constantes $c_1(n)$ et $c_2(n)$ on suivre les étapes suivants

$$\Delta c_1(n) = c_1(n+1) - c_1(n),$$

ainsi

$$c_1(n+1) = \Delta c_1(n) + c_1(n).$$

Donc

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= c_1(n+1)x_{n+1}^1 + c_2(n+1)x_{n+1}^2, \\ &= (\Delta c_1(n) + c_1(n))x_{n+1}^1 + (\Delta c_2(n) + c_2(n))x_{n+1}^2, \\ &= \Delta c_1(n)x_{n+1}^1 + c_1(n)x_{n+1}^1 + \Delta c_2(n)x_{n+1}^2 + c_2(n)x_{n+1}^2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Nous avons

$$\Delta c_1(n+1)x_{n+2}^1 + \Delta c_2(n+1)x_{n+2}^2 = 0,$$

on trouve

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= c_1(n+2)x_{n+2}^1 + c_2(n+2)x_{n+2}^2, \\ &= (\Delta c_1(n+1) + c_1(n+1))x_{n+2}^1 + (\Delta c_2(n+1) + c_2(n+1))x_{n+2}^2, \\ &= c_1(n)x_{n+2}^1 + c_2(n)x_{n+2}^2 + \Delta c_1(n)x_{n+2}^1 + \Delta c_2(n)x_{n+2}^2. \end{aligned}$$

Alors

$$x_{n+2} = c_1(n)x_{n+2}^1 + c_2(n)x_{n+2}^2 + \Delta c_1(n)x_{n+2}^1 + \Delta c_2(n)x_{n+2}^2. \quad (1.18)$$

On remplace l'équation (1.16) et l'équation (1.17) et l'équation (1.18) dans

l'équation (1.14), on trouve

$$c_1(n)x_{n+2}^1 + c_2(n)x_{n+2}^2 + \Delta c_1(n)x_{n+2}^1 + \Delta c_2(n)x_{n+2}^2 + p_1(n)(c_2(n)x_{n+1}^2 + c_1(n)x_{n+1}^1 + \Delta c_1(n)x_{n+1}^1 + \Delta c_2(n)x_{n+1}^2) + p_2(n)(c_1(n)x_n^1 + c_2(n)x_n^2) = g(n).$$

Mais nous avons

$$\Delta c_1(n)x_{n+1}^1 + \Delta c_2(n)x_{n+1}^2 = 0, \quad (1.19)$$

$$x_{n+2}^1 + p_1(n)x_{n+1}^1 + p_2(n)x_n^1 = 0, \quad (1.20)$$

$$x_{n+2}^2 + p_1(n)x_{n+1}^2 + p_2(n)x_n^2 = 0. \quad (1.21)$$

On peut écrire l'équation (1.14) comme suit

$$\Delta c_1(n)x_{n+2}^1 + \Delta c_2(n)x_{n+2}^2 = g(n), \quad (1.22)$$

(c'est une équation aux différences linéaire définie par l'opérateur Δ).

Soit $W(n)$ la Gasoration des solutions $\{x_n^1\}_{n \geq n_0}$ et $\{x_n^2\}_{n \geq n_0}$

Alors

$$W(n) = \begin{vmatrix} x_n^1 & x_n^2 \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 \end{vmatrix},$$

ainsi

$$W(n+1) = \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 \end{vmatrix}.$$

$$= x_{n+1}^1 x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 x_{n+2}^1.$$

On multiplie l'équation (1.22) par x_{n+1}^2

$$\Delta c_1(n)x_{n+2}^1 x_{n+1}^2 + \Delta c_2(n)x_{n+2}^2 x_{n+1}^2 = g(n). \quad (1.23)$$

Et multiplie l'équation (1.19) par x_{n+2}^2

$$\Delta c_1(n)x_{n+1}^1 x_{n+2}^2 + \Delta c_2(n)x_{n+1}^2 x_{n+2}^2 = 0. \quad (1.24)$$

La différence entre (1.24) et (1.23) est

$$\Delta c_1(n)(x_{n+2}^1 x_{n+1}^2 - x_{n+1}^1 x_{n+2}^2) + \Delta c_2(n)(x_{n+1}^2 x_{n+2}^2 - x_{n+2}^2 x_{n+1}^2) = -g(n)x_{n+1}^2.$$

Donc

$$\Delta c_1(n)W(n+1) = -g(n)x_{n+1}^2.$$

Alors

$$\Delta c_1(n) = \frac{-g(n)x_{n+1}^2}{W(n+1)}.$$

D'où

$$c_1(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{-g(i)x_{i+1}^2}{W(i+1)}.$$

Par la même méthode on trouve $c_2(n)$

$$c_2(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{g(i)x_{i+1}^1}{W(i+1)}.$$

D'où

$$x_n = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{-g(i)x_{i+1}^2}{W(i+1)} \right) x_n^1 + \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{g(i)x_{i+1}^1}{W(i+1)} \right) x_n^2,$$

c'est la solution de l'équation aux différences linéaire (1.14).

1.1.3 Résolution de l'équation homogène autonome

Notre objectif dans cette partie est de trouver un ensemble fondamental des solutions d'une équation aux différences linéaire homogène autonome (à coefficients constantes).

Définition 1.1.7. Une équation aux différences linéaire homogènes autonome (à

coefficients constantes) d'ordre k est une équation de la forme

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + p_2 x_{n+k-2} + \dots + p_k x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}, \quad (1.25)$$

où les p_i sont des constantes réelles ou complexes et les $p_k \neq 0$.

Définition 1.1.8. On définit le polynôme caractéristique associé à l'équation (1.25) par

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^k p_i \lambda^{k-i}, \quad (1.26)$$

où λ un nombre complexe non nul

Théorème 1.1.8. Soit λ un nombre complexe non nul. Si la suite définie par $x_n = \lambda^n$, $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$ est une solution de l'équation (1.25), alors λ est une racine de $P(\lambda)$ (i.e λ est une solution de l'équation caractéristique associé à l'équation (1.26)) qui donnée par

$$\sum_{i=0}^k p_i \lambda^{k-i} = 0.$$

Preuve. Supposons

$$x_n = \lambda^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\lambda^{n+k} + p_1 \lambda^{n+k-1} + \dots + p_k \lambda^n = 0.$$

Ainsi

$$\lambda^n (\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \dots + p_k) = 0.$$

Donc

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \dots + p_k = 0.$$

Alors

$$\sum_{i=0}^k p_i \lambda^{k-i} = 0.$$

■

Exemple 1.1.4. Considérons l'équation aux différences suivante

$$3x_{n+2} + 2x_{n+1} - x_n = 0.$$

Le polynôme caractéristique associé à cette équation est

$$p(\lambda) = 3\lambda^2 + 2\lambda - 1.$$

L'équation caractéristique associée est

$$3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0.$$

Théorème 1.1.9. Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont des racines distinctes de polynôme caractéristique (1.26). Alors $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}_{n \geq n_0}$ est un ensemble fondamentale des solutions de l'équation (1.25).

Preuve. Pour montrer que $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}_{n \geq n_0}$ est un ensemble fondamentale, il suffit de montrer que $W(0) \neq 0$, où $W(n)$ est la **Gasoration** des solutions $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}_{n \geq n_0}$

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & \dots & \lambda_k^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & \dots & \lambda_k^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n+k-1} & \lambda_2^{n+k-1} & \dots & \lambda_k^{n+k-1} \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 0$

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}.$$

Cette déterminant est s'appelle **déterminant de Vandermonde** qui donnée par

$$W(0) = \prod_{i \geq j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0.$$

D'où $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}_{n \geq n_0}$ est un ensemble fondamentale des solutions de

l'équation (1.25). ■

Corollaire 1.1.1. *Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont des racines distinctes de $p(\lambda)$. Alors la solution générale de l'équation (1.25) est définie par*

$$x_n = \sum_{i=1}^k a_i \lambda_i^n,$$

où les $a_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$ sont des nombres complexes.

Théorème 1.1.10. *Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ des racines de polynôme (1.26) de multiplicités $m_1, m_2, \dots, m_r$ respectivement tels que $r \leq k$ et $m_1 + m_2 + \dots + m_r = k$. Alors l'ensemble*

$$\bigcup_{i=1}^r \{ \lambda_i^n, n\lambda_i^n, \dots, n^{m_i-1} \lambda_i^n \}_{n \geq n_0},$$

est un ensemble fondamentale des solutions de l'équation (1.26).

Corollaire 1.1.2. *La solution générale de l'équation (1.25) est donnée par*

$$x_n = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j \lambda_i^n, \quad c_{ij} \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}.$$

Tels que

- . Le paramètre $r \leq k$ désigne le nombre des racines distinctes de polynôme caractéristique associée.
- . Le paramètre λ_i désigne une racine de polynôme caractéristique (1.26).
- . Le paramètre m_i désigne la multiplicité de la racine λ_i .
- . Les coefficients c_{ij} sont des constantes qui sont déterminées à partir des valeurs initiales.

Exemple 1.1.5. (Suite de Fibonacci)

Résoudre l'équation qui représente la suite de Fibonacci

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

tels que $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

Le polynôme caractéristique associé à l'équation est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Alors, les racines de $P(\lambda)$ sont

$$\lambda_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right), \lambda_2 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right),$$

ainsi, l'ensemble fondamental des solutions est

$$\left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n, \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}_{n \geq 0},$$

donc, la solution général de l'équation de Fibonacci est donnée par

$$F_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

D'autre part, pour $F_0 = 0, F_1 = 1$ nous avons

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}},$$

d'où, le terme générale de la suite de Fibonacci est

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Exemple 1.1.6. (Suite de Lucas)

Résoudre l'équation qui représente la suite de Lucas

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n,$$

tels que $L_0 = 2$ et $L_1 = 1$.

Le polynôme caractéristique associé à l'équation est

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Alors, les racines de $P(\lambda)$ sont

$$\lambda_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right), \lambda_2 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right),$$

ainsi, l'ensemble fondamental des solution est

$$\left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n, \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}_{n \geq 0},$$

donc, la solution général de l'équation de Fibonacci est donnée par

$$L_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

on utilise les valeurs initiales on obtient $c_1 = 1$ et $c_2 = 1$,
d'où le terme générale de la suite de Lucas est

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

1.1.4 Méthode d'indéterminée les coefficients pour la résolution de l'équation non homogène

La méthode d'indéterminée les coefficients est permet de résoudre les équations aux différences linéaires non homogènes de la forme suivante

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + \dots + p_k x_n = g(n), \quad n \geq n_0, \quad (1.27)$$

où les p_i sont des constantes et $p_k \neq 0$.

Définition 1.1.9. (Opérateur d'avancement)

On définit l'opérateur d'avancement d'une fonction f par

- Si $f(x) = cst \Rightarrow E(f(n)) = cst$.
- Si $f(x) \neq cst \Rightarrow E(f(n)) = f(n+1)$.
- Si $f(x) \neq cst \Rightarrow E^k(f(n)) = f(n+k)$.
- Si $f(x) \neq cst \Rightarrow E(f(n))^k = (f(n+1))^k$.

Définition 1.1.10. (Opérateur annulateur)

Soit l'opérateur polynomial $N(E)$ où E est l'opérateur d'avancement, on dit que $N(E)$ un annulateur de $g(n)$ si

$$N(E)g(n) = 0.$$

Lemme 1.1.4. Le tableau ci-dessous est définie l'opérateur annulateur $N(E)$ pour quelques types des fonctions $g(n)$.

Fonction	Éliminateur $N(E)$
$g(n) = p_k(n)$	$(E - 1)^{k+1}$
$g(n) = cst$	$E - 1$
$g(n) = \alpha^n$	$E - \alpha$
$g(n) = \alpha^n p_k(n)$	$(E - \alpha)^{k+1}$

Tels que α est un nombre entier, $p_k(n)$ un polynôme de degré k .

La méthode d'indéterminée les coefficients

On peut écrire l'équation aux différences non homogène (1.27) sous la forme suivante

$$P(E)x_n = g(n), \quad (1.28)$$

où

$$P(E) = E^k + p_1 E^{k-1} + p_2 E^{k-2} + \dots + p_k,$$

donc, l'équation homogène associé à l'équation (1.48) est

$$P(E)x_n = 0. \quad (1.29)$$

Supposons maintenant que $N(E)$ est un annulateur de $g(n)$ donc, de l'équation (1.27) nous avons

$$N(E)P(E)x_n = 0, \quad (1.30)$$

c'est une équation aux différences linéaire homogène autonome.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ les racines de polynôme caractéristique associée à l'équation (1.29) et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ les solutions de l'équation caractéristique associé à l'équation suivante

$$N(E)x_n = 0. \quad (1.31)$$

La forme générale du solution de l'équation aux différences linéaire non homogène (1.27) est donnée par

$$x_n = x_n^h + x_n^p,$$

$\{x_n^h\}$: la solution de l'équation homogène (1.29).

$\{x_n^p\}$: la solution particulière de l'équation non homogène.

La solution particulière de l'équation non homogène est trouvé selon les valeurs de λ_i et $\mu_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$ comme suit

Premier cas si $\lambda_i \neq \mu_j, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$

Dans ce cas on prend une solution particulière $\{x_n^p\}_{n \geq n_0}$ sous la forme de la solution générale de l'équation (1.31) et les constantes qui seront déterminées après la substitution de $\{x_n^p\}_{n \geq n_0}$ dans l'équation (1.27).

Exemple 1.1.7. *Considérons l'équation suivante*

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 12x_n = n2^n. \quad (1.32)$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante

$$P(E)x_n = g(n),$$

où

$$P(E) = E^2 + E - 12, g(n) = n2^n.$$

Donc, de lemme (1.1.4) le polynôme annilateur de $g(n)$ donnée par

$$N(E) = (E - 2)^2.$$

Maintenant, l'équation homogène associée à l'équation (1.32) est

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 12x_n = 0, \quad (1.33)$$

donc, l'équation caractéristique associée à l'équation (1.33) est

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0. \quad (1.34)$$

Alors $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ sont les solutions de l'équation caractéristique (1.34), donc la solution générale est écrit sous la forme suivante

$$x_n^h = c_1(3)^n + c_2(-4)^n.$$

D'autre part, soit l'équation homogène

$$N(E)x_n = 0,$$

ainsi

$$(E - 2)^2 x_n = 0,$$

alors

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0, \quad (1.35)$$

donc le polynôme caractéristique admet une racine double $\mu_1 = \mu_2 = 2$.

Nous avons $\lambda_i \neq \mu_j$ pour tout $i, j = \{1, 2\}$, donc la solution particulière est écrit sous la forme de la solution générale de l'équation (1.35) i.e

$$x_n^p = a_1 2^{n+2} + a_2 n 2^n. \quad (1.36)$$

On substitue l'équation (1.36) dans l'équation (1.32) on trouve

$$a_1 2^{n+2} + a_2 (n+2) 2^{n+2} + a_1 2^{n+1} + a_2 (n+1) 2^{n+1} - 12a_1 2^n - 12a_2 n 2^n = n 2^n,$$

donc

$$-6a_1 + (-6n + 10)a_2 = n,$$

ainsi

$$-6a_1 + 10a_2 - 6na_2 = n.$$

Alors

$$\begin{cases} -6a_1 + 10a_2 = 0, \\ -6a_2 = 1. \end{cases}$$

Donc

$$a_1 = -\frac{5}{18}, a_2 = -\frac{1}{6}.$$

Alors

$$x_n^p = \frac{-5}{18}2^n - \frac{1}{6}n2^n,$$

et comme

$$x_n = x_n^p + x_n^h,$$

d'où

$$x_n = -\frac{5}{18}2^n - \frac{1}{6}n2^n + c_13^n + c_2(-4)^n.$$

Deuxième cas si $\exists i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, \lambda_i = \mu_j$

Dans ce cas on prend une solution particulière sous la forme de la solution générale de l'équation homogène (1.30) après éliminé les termes qui sont dans la solution générale de l'équation homogène (1.29) puis substituons cette solution dans l'équation (1.27) pour déterminer les constantes .

Exemple 1.1.8. *Considérons l'équation suivante*

$$(E - 3)(E + 2)x_n = 5(3^n). \quad (1.37)$$

On peut écrire l'équation (1.37) sous la forme suivante

$$P(E)x_n = g(n),$$

où

$$P(E) = (E - 3)(E + 2), g(n) = 5(3^n).$$

Maintenant, l'équation homogène associée à l'équation (1.37) est

$$(E - 3)(E + 2)x_n = 0,$$

donc, les racines de polynôme caractéristique associé à l'équation (1.37) sont $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$
alors la solution générale est

$$x_n^h = c_1 3^n + c_2 (-2)^n.$$

Maintenant, de lemme (1.1.4) le polynôme annilateur de $g(n)$ est donnée par

$$N(E) = (E - 3),$$

donc

$$N(E)P(E)x_n = 0, \tag{1.38}$$

ainsi

$$x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0.$$

Donc, les racines de l'équation caractéristique associée à l'équation (1.38) sont $\lambda'_1 = 3$ (double) et $\lambda'_2 = -2$.

Alors la solution générale est

$$x'_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n + c_3 (-2)^n.$$

D'autre part, soit l'équation homogène suivante

$$N(E)x_n = 0, \tag{1.39}$$

ainsi

$$(E - 3)x_n = 0,$$

donc

$$x_{n+1} - 3x_n = 0,$$

alors, la racine de polynôme caractéristique est $\mu_1 = 3$.

Donc il existe $i = j = 1$ tel que $\lambda_1 = \mu_1$ dans ce cas la solution particulière est de la forme de la solution générale de l'équation $N(E)P(E)x_n = 0$ avec l'élimination des termes similaires avec $\{x_n^h\}$.

Donc la solution particulière est

$$x_n^p = an3^n. \quad (1.40)$$

(Le terme c_13^n et $c_3(-2)^n$ est similaire à le terme de l'équation $\{x_n^h\}$).

On substitue la valeur de x_n^p dans l'équation (1.37) on trouve

$$a = \frac{1}{3},$$

donc

$$x_n^p = n3^{n-1}.$$

Nous avons

$$x_n = x_n^p + x_n^h.$$

Alors

$$x_n = n3^{n-1} + c_13^n + c_2(-2)^n.$$

Le tableau suivant est utilisée pour trouver l'expression de quelques solutions particulières x_n^p d'équation (1.27).

$g(n)$	x_n^p
a^n	c_1a^n
$n^k a^n$	$(c_0 + c_1n + \dots + c_k n^k)a^n$
$a^n \sin bn, a^n \cos bn$	$(c_1 \sin bn + c_2 \cos bn)a^n$
$a^n n^k \sin bn, a^n n^k \cos bn$	$(c_0 + c_1n + \dots + c_k n^k)a^n \sin bn + (d_0 + d_1n + \dots + d_k n^k)a^n \cos bn$

TABLE 1.1 – La solution particulière x_n^p

1.2 Transformation de l'équation aux différences non linéaire à l'équation aux différences linéaire

Généralement, la majorité des équations aux différences non linéaires ne peuvent pas être résolus explicitement. Cependant, quelques types des équations non linéaires peuvent être résolus selon des changements des variables qui permet de transformer l'équation non linéaire à une équation aux différences linéaire. Dans cette section, nous présentons quelques types des équations aux différences non linéaire qui admet une transformation linéaire.

Définition 1.2.1. Soit $\mathcal{I}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{I}^{k+1} \rightarrow \mathcal{I}$ une fonction continue, l'équation aux différences d'ordre $k + 1$ est une équation de la forme suivante

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.41)$$

où les valeurs initiales $x_0, x_{-1}, \dots, x_{-k}$ sont des nombres réelles ou complexes. l'équation (1.41) est dite non linéaire si elle est n'est pas de la forme de l'équation (1.1).

Exemple 1.2.1. Soit

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + x_n}{x_{n-2} - 1},$$

c'est une équation aux différences non linéaire d'ordre 3.

Définition 1.2.2. Soit $\{x_n\}_{n \geq -k}$ une solution de l'équation (1.41) alors

✓ si $\exists N \geq -k$ tel que $x_{n+p} = x_n, \forall n \geq N$ alors $\{x_n\}_{n \geq -k}$ est dite **éventuellement périodique** de période $p, p \in \mathbb{N}$,

✓ si $N = -k$ on dit que $\{x_n\}_{n \geq -k}$ est **périodique** de période p .

Exemple 1.2.2. Soit

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 0,$$

est une équation aux différences non linéaire avec $x_0 \neq 0$. Donc

$$x_{n+2} = \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{x_n}} = x_n,$$

Donc la solution $\{x_n\}_{n \geq 0}$ est périodique de période 2 .

D'où la solution est

$$\begin{cases} x_{2n} = x_0, \\ x_{2n+1} = \frac{1}{x_0} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1.2.1 Équation de Riccati

L'équation de Riccati homogène

L'équation homogène de Riccati est donné par

$$x_{n+1}x_n + p(n)x_{n+1} + q(n)x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.42)$$

où p et q sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}$.

On pose

$$y_n = \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

alors

$$x_n = \frac{1}{y_n}.$$

Donc l'équation (1.42) devient

$$\frac{1}{y_{n+1}} \frac{1}{y_n} + p(n) \frac{1}{y_{n+1}} + q(n) \frac{1}{y_n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.43)$$

On multiplie l'équation (1.43) par $(y_{n+1}y_n)$ on obtient

$$1 + p(n)y_n + q(n)y_{n+1} = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

c'est une équation aux différences linéaire homogène d'ordre un.

L'équation de Riccati non homogène

L'équation aux différences non homogène de Riccati est donnée par

$$x_{n+1}x_n + p(n)x_{n+1} + q(n)x_n = g(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.44)$$

où p , q et g sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}$.

On pose

$$x_n = \left(\frac{y_{n+1}}{y_n} \right) - p(n).$$

On substitue dans l'équation (1.44) on trouve

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} \frac{y_{n+1}}{y_n} - \frac{y_{n+1}}{y_n} p(n+1) - \frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} p(n) + p(n+1)p(n) + p(n) \frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} \\ - p(n)p(n+1) + q(n) \frac{y_{n+1}}{y_n} - q(n)p(n) = g(n). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{y_{n+2}}{y_n} - \frac{y_{n+1}}{y_n} p(n+1) + q(n) \frac{y_{n+1}}{y_n} - q(n)p(n) = g(n). \quad (1.45)$$

On multiplie l'équation (1.45) par y_n on trouve

$$y_{n+2} - y_{n+1}p(n+1) + q(n)y_{n+1} - q(n)p(n)y_n = g(n)y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$y_{n+2} + (-p(n+1) + q(n)) y_{n+1} - (q(n)p(n) + g(n)) y_n = 0,$$

c'est une équation aux différences linéaire homogène d'ordre 2.

Exemple 1.2.3. Résoudre l'équation aux différences suivante

$$y_{n+1}y_n - y_{n+1} + y_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.46)$$

L'équation (3.1) est de type équation de Réccati homogène (1.42) avec $p(n) = -1$ et $q(n) = 1$.

Donc de changement de variable $x_n = \frac{1}{y_n}$ l'équation (3.1) devient l'équation aux différences linéaire suivante

$$x_{n+1} - x_n + 1 = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1.2.2 Équation de Riccati généralisée

Soit l'équation aux différences de Réccati généralisée suivante

$$x_{n+1} = \frac{a(n)x_n + b(n)}{c(n)x_n + d(n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.47)$$

où a , b , c et d sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}$, avec $c(n) \neq 0$ et $a(n)d(n) - b(n)c(n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On pose

$$c(n)x_n + d(n) = \frac{y_{n+1}}{y_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$x_n = \frac{y_{n+1}}{c(n)y_n} - \frac{d(n)}{c(n)}.$$

On remplace dans l'équation (1.47) on trouve

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+2}}{c(n+1)y_{n+1}} - \frac{d(n+1)}{c(n+1)} &= \frac{a(n) \left(\frac{y_{n+1}}{c(n)y_n} - \frac{d(n)}{c(n)} \right) + b(n)}{\frac{y_{n+1}}{y_n}}, \\ &= a(n) \left[\frac{y_{n+1}}{c(n)y_n} - \frac{d(n)}{c(n)} \right] \frac{y_n}{y_{n+1}} + b(n) \frac{y_n}{y_{n+1}}, \\ &= a(n) \frac{y_{n+1}}{c(n)y_n} \frac{y_n}{y_{n+1}} - a(n) \frac{d(n)}{c(n)} \frac{y_n}{y_{n+1}} + b(n) \frac{y_n}{y_{n+1}}, \\ &= \frac{a(n)}{c(n)} - a(n) \frac{d(n)}{c(n)} \frac{y_n}{y_{n+1}} + b(n) \frac{y_n}{y_{n+1}}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+2}}{c(n+1)y_{n+1}} &= \frac{a(n)}{c(n)} - a(n) \frac{d(n)}{c(n)} \frac{y_n}{y_{n+1}} + b(n) \frac{y_n}{y_{n+1}} + \frac{d(n+1)}{c(n+1)}, \\ &= \frac{a(n)c(n+1)y_{n+1}}{c(n)c(n+1)y_{n+1}} - \frac{a(n)d(n)y_n c(n+1)}{c(n)y_{n+1}c(n+1)} + \frac{b(n)y_n c(n+1)}{y_{n+1}c(n+1)} + \frac{d(n+1)y_{n+1}}{c(n+1)y_{n+1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$y_{n+2} = \frac{a(n)}{c(n)} c(n+1)y_{n+1} - \frac{a(n)}{c(n)} d(n)y_n c(n+1) + b(n)y_n c(n+1) + d(n+1)y_{n+1},$$

$$= \left(\frac{a(n)}{c(n)}c(n+1) + d(n+1) \right) y_{n+1} + \left(b(n)c(n+1) - \frac{a(n)}{c(n)}d(n)c(n+1) \right) y_n.$$

Alors

$$y_{n+2} - \left(\frac{a(n)}{c(n)}c(n+1) + d(n+1) \right) y_{n+1} + \left(a(n)d(n) \frac{c(n+1)}{c(n)} - b(n)c(n+1) \right) y_n = 0. \quad (1.48)$$

On pose

$$p_1(n) = -\frac{a(n)c(n+1) + d(n+1)c(n)}{c(n)},$$

$$p_2(n) = (a(n)d(n) - b(n)c(n)) \frac{c(n+1)}{c(n)}.$$

Donc l'équation (1.48) devient

$$y_{n+2} + p_1(n)y_{n+1} + p_2(n)y_n = 0,$$

c'est une équation aux différences linéaire homogène d'ordre 2.

Exemple 1.2.4. Résoudre l'équation aux différences suivante

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 3}{3x_n + 2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.49)$$

L'équation (1.49) est une équation de Riccati généralisée avec $a = 2$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 2$.

Nous avons $ad - bc = -5 \neq 0$

Donc de changement de variable

$$3x_n + 2 = \frac{y_{n+1}}{y_n},$$

l'équation (1.49) devient

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} - 5y_n = 0.$$

En effet

$$p_1(n) = \frac{-12}{3} = -4,$$

$$p_2(n) = -5.$$

1.2.3 Équation de Riccati de type $f(\frac{x_{n+1}}{x_n}, n) = 0$

Soit l'équation de Riccati de type suivant

$$f(\frac{x_{n+1}}{x_n}, n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.50)$$

De changement de variable $z_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$, l'équation (1.50) devient

$$f(z_n, n) = 0.$$

Exemple 1.2.5. Soit l'équation aux différences non linéaire suivante

$$x_{n+1}^2 - 3x_{n+1}x_n + 2x_n^2 = 0.$$

Donc

$$\frac{x_{n+1}^2}{x_n^2} - 3\frac{x_{n+1}}{x_n} + 2 = 0.$$

Alors

$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2 - 3\frac{x_{n+1}}{x_n} + 2 = 0,$$

est de la forme de l'équation (1.50), donc de changement de variable

$$z_n = \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

l'équation devient

$$z_n^2 - 3z_n + 2 = 0.$$

1.2.4 Équation de Riccati de la forme $(x_{n+k})^{r_1}(x_{n+k-1})^{r_2} \dots (x_n)^{r_{k+1}} = g(n)$

Soit l'équation aux différences non linéaire de Riccati de la forme suivant

$$(x_{n+k})^{r_1}(x_{n+k-1})^{r_2} \dots (x_n)^{r_{k+1}} = g(n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.51)$$

Nous entrons $\ln$ sur les deux cotées de l'équation (1.51), on trouve

$$\ln [(x_{n+k})^{r_1}(x_{n+k-1})^{r_2} \dots (x_n)^{r_{k+1}}] = \ln g(n),$$

ainsi

$$r_1 \ln [x_{n+k}] + r_2 \ln [x_{n+k-1}] + \dots + r_{k+1} \ln [x_n] = \ln g(n).$$

On pose $z_n = \ln (x_n)$, l'équation devient

$$r_1 z_{n+k} + r_2 z_{n+k-1} + \dots + r_{k+1} z_n = \ln g(n),$$

c'est une équation aux différence linéaire non homogène d'ordre k .

Exemple 1.2.6. Résoudre l'équation aux différences suivante

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2}{x_n^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \ln (x_{n+2}) &= \ln \left(\frac{x_{n+1}^2}{x_n^2} \right), \\ &= \ln (x_{n+1}^2) - \ln (x_n^2), \\ &= 2 \ln x_{n+1} - 2 \ln x_n. \end{aligned}$$

Donc

$$\ln (x_{n+2}) - 2 \ln x_{n+1} + 2 \ln x_n = 0.$$

On pose $z_n = \ln (x_n)$.

Alors on obtient

$$z_{n+2} - 2z_{n+1} + 2z_n = 0.$$

CHAPITRE 2

SYSTÈME DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

2.1 Système des équations aux différences linéaire

Dans cette section, nous définissons les quatre types des systèmes des équations aux différences linéaires et nous intéressons de trouver la forme des solutions de ces systèmes.

2.1.1 Système autonome homogène

Définition 2.1.1. *On appelle système de k équations aux différences linéaire autonome du premier ordre*

$$\begin{cases} x_{n+1}^1 &= a_{11}x_n^1 + a_{12}x_n^2 + \cdots + a_{1k}x_n^k, \\ x_{n+1}^2 &= a_{21}x_n^1 + a_{22}x_n^2 + \cdots + a_{2k}x_n^k, \\ \vdots & \\ x_{n+1}^k &= a_{k1}x_n^1 + a_{k2}x_n^2 + \cdots + a_{kk}x_n^k, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_{n_0},$$

avec les valeurs initiales $x_{n_0}^1, x_{n_0}^2, \dots, x_{n_0}^k$ sont des constantes réelles ou complexes. On peut écrire ce système sous la forme suivante

$$X_{n+1} = AX_n, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}, \quad (2.1)$$

où

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{R}), i, j \in \mathbb{N}$$

Proposition 2.1.1. Le système (2.1) avec les valeurs initiales $X_{n_0} = X_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^k)^T$ admet une solution unique donnée par

$$X_n = A^{n-n_0} X_{n_0}, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

Le problème qui se pose maintenant, comment trouver la forme de A^n explicitement?

Des cas particuliers où A est une matrice diagonalisable ou triagonalisable, la matrice A^n est définie explicitement

Exemple 2.1.1. A diagonalisable

Considérons la matrice A d'ordre $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ associée à A est

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Donc

$$P_A(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 4),$$

alors les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \text{ et } \lambda_3 = -4;$$

donc $s_p = \{1, 2, -4\}$,

les vecteurs propres associé sont

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$\text{Card}(s_p(A)) = \text{Ordre}(A),$$

alors, A est diagonalisable.

Donc A écrit sous la forme suivante

$$A = PDP^{-1}.$$

Avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$A = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Ainsi

$$A^n = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$A^n = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 18 + 12 * (-4)^n \\ 18 - 18 * (-4)^n \\ 18 + 12 * (-4)^n \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.1.2. *A triagonalisable*

Soit la matrice B d'ordre $n = 2$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique $P_B(\lambda)$ associée à B

$$P_B(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Les valeurs propres sont $\lambda = -1$ (double) ($s_p = \{-1\}$), les vecteurs propres sont

$$E_{-1} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Comme

$$\text{Card}(s_p(B)) \neq \text{Ordre}(B),$$

donc B n'est pas diagonalisable.

On a

$$P_B(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 1).$$

On a le polynôme caractéristique $P_B(\lambda)$ est scinde, donc B est triagonalisable.

Maintenant, on va compléter E_{-1} on trouve

$$w = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc B écrit sous la forme suivante

$$B = PJP^{-1},$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} J &= D + N, \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$A^n = PJ^nP^{-1}.$$

D'autre par, on a

$$J^n = (D + N)^n,$$

ainsi

$$= D^n + nND^{n-1},$$

donc

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix},$$

alors

$$J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

D'où

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n(2-2n) & (-1)^n(2-2n) \\ (-1)^{n+1} - 2n(-1)^{n-1} & (-1)^n - 2n(-1)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

2.1.2 Système autonome non homogène

Soient $A = (a_{ij}) \in M_k(\mathbb{R})$ une matrice (constante) régulière, B est une fonction définie sur $\mathbb{N}_{n_0}$ avec $B(n) \in \mathbb{R}^k$ et $k \geq 2$.

Définition 2.1.2. On appelle système des équations aux différences linéaire autonome d'ordre 1 non homogène l'équation suivante

$$X_{n+1} = AX_n + B(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.2)$$

Proposition 2.1.2. Le système (2.2) avec les valeurs initiales $X_{n_0} = X_0$ admet une solution unique donnée par

$$X_n = A^{n-n_0}X_0 + \sum_{i=n_0}^{n-1} A^{n-i-1}B(i), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

2.1.3 Système non autonome homogène

Soient $A(n) = (a_{ij}(n)) \in M_k(\mathbb{R})$ une matrice régulière sur $\mathbb{N}_{n_0}$.

Définition 2.1.3. On appelle système des équations aux différences non autonome homogène l'équation

$$X_{n+1} = A(n)X_n, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.3)$$

Proposition 2.1.3. Le système (2.3) avec $X_{n_0} = X_0$ admet une solution unique et cette solution est

$$X_n = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right) X_0, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.4)$$

où

$$\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right) = \begin{cases} A(n-1)A(n-2) \dots A(n_0) & n > n_0, \\ \mathbb{I} & \text{si } n = n_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

2.1.4 Système non autonome non homogène

Soient $A(n) = (a_{ij}(n)) \in M_k(\mathbb{R})$ une matrice régulière, B est une fonction définie sur $\mathbb{N}_{n_0}$ avec $B(n) \in \mathbb{R}^k$ et $k \geq 2$.

Définition 2.1.4. On appelle système des équations aux différences linéaire non autonome non homogène l'équation suivante

$$X_{n+1} = A(n)X_n + B(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.6)$$

Proposition 2.1.4. Toute solution du système (2.6) s'écrit sous la forme

$$X_n = X_n^h + X_n^p, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

où X_n^h est la solution générale du système (2.3) et X_n^p est une solution particulière du système (2.6)

Théorème 2.1.1. Le système (2.6) avec $X(n_0) = X_0$ admet une solution unique et cette solution est

$$X(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right) X_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} A(i) \right) B(r) \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}, \quad (2.7)$$

2.2 Système des équations aux différences non linéaire

Définition 2.2.1. Un système de k -équations aux différences non linéaire d'ordre 1 est un système donné par

$$\begin{cases} x_{n+1}^1 = f_1(x_n^1, \dots, x_n^k), \\ x_{n+1}^2 = f_2(x_n^1, \dots, x_n^k), \\ \vdots \\ x_{n+1}^k = f_k(x_n^1, \dots, x_n^k). \end{cases}$$

Avec les valeurs initiales $x_0^1, \dots, x_0^k$ sont des constantes réelles ou complexes et f_i sont des fonctions continues de k variables (non linéaires).

Ce système s'écrit sous la forme

$$X_{n+1} = F(X_n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0},$$

où $X_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k)^T$, et F est une fonction continue de k variable définie comme suite

$$\begin{aligned} F : \mathbb{I}^k &\longrightarrow \mathbb{I} \\ X_n &\longmapsto F(X_n) = (f_1(X_n), f_2(X_n), \dots, f_k(X_n)). \end{aligned}$$

Définition 2.2.2. Soient f et g deux fonctions continues

$$f : \mathbb{I}^{k+1} \times \mathbb{J}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{I}, \quad g : \mathbb{I}^{k+1} \times \mathbb{J}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{J},$$

où $\mathbb{I}, \mathbb{J}$ sont des parties de $\mathbb{R}$.

Un système des équations aux différences d'ordre $2k + 2$ est un système donnée par

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}), \\ y_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}), \end{cases} \quad (2.8)$$

où $n, k \in \mathbb{N}_0$, $(x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0) \in \mathbb{I}^{k+1}$ et $(y_{-k}, y_{-k+1}, \dots, y_0) \in \mathbb{J}^{k+1}$.

Définition 2.2.3. On définit la fonction

$$H : \mathbb{I}^{k+1} \times \mathbb{J}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{I}^{k+1} \times \mathbb{J}^{k+1},$$

par

$$H(w) = (f_0(w), f_1(w), \dots, f_k(w), g_0(w), g_1(w), \dots, g_k(w)),$$

où

$$w = (u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k)^T,$$

et

$$f_0(w) = f(w), \quad f_1(w) = u_0, \dots, \quad f_k(w) = u_{k-1},$$

$$g_0(w) = g(w), \quad g_1(w) = v_0, \dots, \quad g_k(w) = v_{k-1}.$$

On pose

$$w_n = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k})^T.$$

Ainsi, le système (2.8) est équivalent avec le système suivant

$$\begin{aligned} H(w_n) &= (f(w_n), x_n, \dots, x_{n-k+1}, g(w_n), y_n, \dots, y_{n-k+1}), \\ &= (x_{n+1}, x_n, \dots, x_{n-k+1}, y_{n+1}, y_n, \dots, y_{n-k+1}), \\ &= w_{n+1}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_{n+1} &= f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}), \\ x_n &= x_n, \\ \vdots & \\ x_{n-k+1} &= x_{n-k+1}, \\ y_{n+1} &= g(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}), \\ y_n &= y_n, \\ \vdots & \\ y_{n-k+1} &= y_{n-k+1}. \end{array} \right.$$

Exemple 2.2.1. Soit le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_{n+1} &= \frac{2 + y_n}{5 + x_{n-1}}, \\ y_{n+1} &= \frac{2 + x_n}{5 + y_{n-1}}. \end{array} \right.$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{2 + y_n}{5 + x_{n-1}}, \\ x_n = x_n, \\ y_{n+1} = \frac{2 + x_n}{5 + y_{n-1}}, \\ y_n = y_n. \end{cases}$$

Définition 2.2.4. (Périodicité)

On dit que la solution $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -k}$ est **périodique** de période p s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que

$$\begin{cases} x_{n+p} = x_n, \\ y_{n+p} = y_n. \end{cases} \quad \forall n \geq -k.$$

CHAPITRE 3

SOLUTIONS ET COMPORTEMENT DU SYSTÈME DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES NON LINÉAIRE

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution et l'étude de comportement des solutions du système des équations aux différences non linéaire suivant

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta, & n \in \mathbb{N}, \\ y_{n+1} = \frac{by_n x_{n-1}}{x_n - \beta} + \alpha, & n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.1)$$

où les paramètres a, b, α, β et les valeurs initiales $x_{-i}, y_{-i}, i = 0, 1$, sont des nombres réels non nuls.

Dans cette chapitre, nous avons bien détaillé l'article [5].

Remarque 3.0.1. *On dit que le système (3.1) avec les valeurs initiales x_{-1}, y_{-1}, x_0 et y_0 qui sont positives et non nuls soit un système bien définie si et seulement si*

$$y_n - \alpha \neq 0, \quad x_n - \beta \neq 0 \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par exemple si on choisit les paramètres a, b, α, β et les valeurs initiales positives

telles que $x_0 > \beta$ et $y_0 > \alpha$, alors tout les solutions du système correspondant sont bien définies.

Maintenant si au moins l'une des valeurs initiales est nulle alors le système soit non définie, parce que par exemple si on prend $y_{-1} = 0$ alors $x_1 = \beta$ et donc on trouve

$$\begin{cases} x_2 = \frac{ax_1y_0}{y_1 - \alpha} + \beta, & n \in \mathbb{N}, \\ y_2 = \frac{by_1x_0}{x_1 - \beta} + \alpha, & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Alors y_2 n'est pas définie.

3.1 Forme des solutions

Nous donnons dans cette partie la forme des solutions du système (3.1).

Théorème 3.1.1. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -1}$ une solution du système (3.1), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x_{2n} &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2i+1} d \right) x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2i+1} d \right) \left(\left(\frac{a}{b} \right)^{k+1} \frac{x_0 - \beta}{x_{-1}} + 1 \right) \beta, \\ x_{2n-1} &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2i} d \right) x_{-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2i} d \right) \left(\left(\frac{a}{b} \right)^k \frac{ay_{-1}}{y_0 - \alpha} + 1 \right) \beta, \\ y_{2n} &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2i+1} \frac{ab}{d} \right) y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2i+1} \frac{ab}{d} \right) \left(\left(\frac{b}{a} \right)^{k+1} \frac{y_0 - \alpha}{y_{-1}} + 1 \right) \alpha, \\ y_{2n-1} &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2i} \frac{ab}{d} \right) y_{-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2i} \frac{ab}{d} \right) \left(\left(\frac{b}{a} \right)^k \frac{bx_{-1} - \alpha}{x_0 - \beta} + 1 \right) \alpha, \end{aligned}$$

avec
$$d = \frac{ay_{-1}(x_0 - \beta)}{x_{-1}(y_0 - \alpha)}.$$

Preuve. Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta, \quad y_{n+1} = \frac{bx_{n-1} y_n}{x_n - \beta} + \alpha,$$

donc

$$x_{n+1} - \beta = \frac{ax_n y_{n-1}}{y_n - \alpha}, \quad y_{n+1} - \alpha = \frac{bx_{n-1} y_n}{x_n - \beta}.$$

Alors

$$\frac{x_{n+1} - \beta}{x_n} = \frac{ay_{n-1}}{y_n - \alpha}, \quad \frac{y_{n+1} - \alpha}{y_n} = \frac{bx_{n-1}}{x_n - \beta}.$$

Par les changements des variables suivant

$$\begin{cases} v_n = \frac{x_n - \beta}{x_{n-1}}, & n \in \mathbb{N}, \\ u_n = \frac{y_n - \alpha}{y_{n-1}}, & n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Le système (3.1) devient

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{a}{u_n}, & n \in \mathbb{N}, \\ u_{n+1} = \frac{b}{v_n}, & n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Ainsi

$$\begin{cases} v_{n+2} = \frac{a}{u_{n+1}}, & n \in \mathbb{N}, \\ u_{n+2} = \frac{b}{v_{n+1}}, & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} v_{n+2} = \left(\frac{a}{b}\right) v_n, & n \in \mathbb{N}, \\ u_{n+2} = \left(\frac{b}{a}\right) u_n, & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nous avons

Pour $n = 0$
$$v_2 = \left(\frac{a}{b}\right) v_0.$$

Pour $n = 1$ $v_3 = \left(\frac{a}{b}\right) v_1.$

Pour $n = 2$ $v_4 = \left(\frac{a}{b}\right) v_2 = \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{a}{b}\right) v_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 v_0.$

Pour $n = 3$ $v_5 = \left(\frac{a}{b}\right) v_3 = \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{a}{b}\right) v_1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 v_1.$

Alors par récurrence, nous avons

$$v_{2n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n v_0,$$

$$v_{2n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^n v_1.$$

De la même manière, on trouve

$$\begin{cases} u_{2n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n u_0. \\ u_{2n+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^n u_1. \end{cases}$$

De changements des variables (3.2) on trouve

$$\begin{cases} x_n = v_n x_{n-1} + \beta, & n \in \mathbb{N}, \\ y_n = u_n y_{n-1} + \alpha, & n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.4)$$

remplaçons n par $2n$ et $2n + 1$ respectivement dans le système (3.4), nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_{2n} = v_{2n} x_{2n-1} + \beta = \left(\frac{a}{b}\right)^n v_0 x_{2n-1} + \beta,$$

$$x_{2n+1} = v_{2n+1} x_{2n} + \beta = \left(\frac{a}{b}\right)^n v_1 x_{2n} + \beta,$$

$$y_{2n} = u_{2n} y_{2n-1} + \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^n u_0 y_{2n-1} + \alpha,$$

$$y_{2n+1} = u_{2n+1}y_{2n} + \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^n u_1 y_{2n} + \alpha,$$

ainsi

$$x_{2n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} v_0 v_1 x_{2n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^n v_1 \beta + \beta, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

$$x_{2n+2} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1} v_0 v_1 x_{2n} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} v_0 \beta + \beta, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.6)$$

$$y_{2n+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} u_0 u_1 y_{2n-1} + \left(\frac{b}{a}\right)^n u_1 \alpha + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.7)$$

$$y_{2n+2} = \left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1} u_0 u_1 y_{2n} + \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} u_0 \alpha + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.8)$$

posons

$$f_n = x_{2n-1}, \quad g_n = x_{2n}, \quad h_n = y_{2n-1}, \quad k_n = y_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

Alors, les équations (3.5) – (3.8) devient des équations aux différences linéaires de premier ordre suivant

$$f_{n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} v_0 v_1 f_n + \left(\frac{a}{b}\right)^n v_1 \beta + \beta, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$g_{n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1} v_0 v_1 g_n + \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} v_0 \beta + \beta, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$h_{n+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} u_0 u_1 h_n + \left(\frac{b}{a}\right)^n u_1 \alpha + \alpha, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$k_{n+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1} u_0 u_1 k_n + \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} u_0 \alpha + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}.$$

D'après le lemme (1.1.1) pour $n \in \mathbb{N}$ nous obtenons

$$f_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^{2i} v_0 v_1 \right) f_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^{2i} v_0 v_1 \right) \left(\left(\frac{a}{b}\right)^k v_1 + 1 \right) \beta,$$

$$g_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^{2i} v_0 v_1 \right) g_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^{2i+1} v_0 v_1 \right) \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} v_0 + 1 \right) \beta,$$

$$h_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2i} u_0 u_1 \right) h_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2i} u_0 u_1 \right) \left(\left(\frac{b}{a} \right)^k u_1 + 1 \right) \alpha,$$

$$k_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2i} u_0 u_1 \right) k_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2i+1} u_0 u_1 \right) \left(\left(\frac{b}{a} \right)^{k+1} u_0 + 1 \right) \alpha,$$

on substitue les changements des variables (3.9) on trouve

$$x_{2n-1} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2i} v_0 v_1 \right) x_{-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2i} v_0 v_1 \right) \left(\left(\frac{a}{b} \right)^k v_1 + 1 \right) \beta,$$

$$x_{2n} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2i} v_0 v_1 \right) x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2i+1} v_0 v_1 \right) \left(\left(\frac{a}{b} \right)^{k+1} v_0 + 1 \right) \beta,$$

$$y_{2n-1} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2i} u_0 u_1 \right) y_{-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2i} u_0 u_1 \right) \left(\left(\frac{b}{a} \right)^k u_1 + 1 \right) \alpha,$$

$$y_{2n} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2i} u_0 u_1 \right) y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2i+1} u_0 u_1 \right) \left(\left(\frac{b}{a} \right)^{k+1} u_0 + 1 \right) \alpha.$$

D'après les équations (3.2) et (3.3), nous avons

$$v_0 = \frac{x_0 - \beta}{x_{-1}}, u_0 = \frac{y_0 - \alpha}{y_{-1}}, u_1 = \frac{bx_{-1}}{x_0 - \beta}, v_1 = \frac{ay_{-1}}{y_0 - \alpha}.$$

Soit $d = v_0 v_1$, alors

$$d = \frac{ay_{-1}(x_0 - \beta)}{x_{-1}(y_0 - \alpha)},$$

et on a
$$u_0 u_1 = \frac{bx_{-1}(y_0 - \alpha)}{y_{-1}(x_0 - \beta)} = \frac{ab}{d}.$$

On substitue $u_0, u_1, v_0, v_1, d, \frac{ab}{d}$ on obtient

$$x_{2n-1} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2i} d \right) x_{-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2i} d \right) \left(\left(\frac{a}{b} \right)^k \frac{ay_{-1}}{y_0 - \alpha} + 1 \right) \beta,$$

$$\begin{aligned}
 x_{2n} &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2i} d \right) x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2i+1} d \right) \left(\left(\frac{a}{b} \right)^{k+1} \frac{x_0 - \beta}{x_{-1}} + 1 \right) \beta, \\
 y_{2n-1} &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2i} \frac{ab}{d} \right) y_{-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2i} \frac{ab}{d} \right) \left(\left(\frac{b}{a} \right)^k \frac{bx_{-1} - \alpha}{x_0 - \beta} + 1 \right) \alpha, \\
 y_{2n} &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2i} \frac{ab}{d} \right) y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{2i+1} \frac{ab}{d} \right) \left(\left(\frac{b}{a} \right)^{k+1} \frac{y_0 - \alpha}{y_{-1}} + 1 \right) \alpha.
 \end{aligned}$$

■

3.2 Comportement asymptotique et périodicité des solutions pour $a = b$

Dans cette section on s'intéresse à l'étude de comportement des solutions du système (3.1) pour $a = b$.

Le corollaire suivant définit la forme des solutions pour $a = b$.

Corollaire 3.2.1. *Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -1}$ une solution du système (3.1) avec $a = b$, alors pour $n \in \mathbb{N}$ nous avons*

$$\begin{aligned}
 x_{2n-1} &= \begin{cases} x_{-1} + h_1 \beta n & d = 1, \\ d^n x_{-1} + \left(\frac{d^n - 1}{d - 1} \right) h_1 \beta & d \neq 1. \end{cases} \\
 x_{2n} &= \begin{cases} x_0 + h_0 \beta n & d = 1, \\ d^n x_0 + \left(\frac{d^n - 1}{d - 1} \right) h_0 \beta & d \neq 1. \end{cases} \\
 y_{2n-1} &= \begin{cases} y_{-1} + t_1 \alpha n & d = a^2, \\ \left(\frac{a^2}{d} \right)^n y_{-1} + \left[\frac{\left(\frac{a^2}{d} \right)^n - 1}{\frac{a^2}{d} - 1} \right] t_1 \alpha & d \neq a^2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$y_{2n} = \begin{cases} y_0 + t_0 \alpha n & d = a^2, \\ \left(\frac{a^2}{d}\right)^n y_0 + \left[\frac{\left(\frac{a^2}{d}\right)^n - 1}{\frac{a^2}{d} - 1} \right] t_0 \alpha & d \neq a^2. \end{cases}$$

Où

$$h_0 = \frac{x_0 - \beta}{x_{-1}} + 1, h_1 = \frac{ay_{-1}}{y_0 - \alpha} + 1, t_0 = \frac{y_0 - \alpha}{y_{-1}} + 1, t_1 = \frac{ax_{-1}}{x_0 - \beta} + 1.$$

Preuve. Comme $a = b$ d'après le théorème (3.1.1) nous avons

$$x_{2n-1} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} d \right) x_{-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} d \right) \left(\frac{ay_{-1}}{y_0 - \alpha} + 1 \right) \beta,$$

alors

$$\begin{aligned} x_{2n-1} &= d^n x_{-1} + \sum_{k=0}^{n-1} (d^{n-k-1}) \left(\frac{ay_{-1}}{y_0 - \alpha} + 1 \right) \beta, \\ &= d^n x_{-1} + \left(\frac{ay_{-1}}{y_0 - \alpha} + 1 \right) \beta \sum_{k=0}^{n-1} (d^{n-k-1}), \\ &= d^n x_{-1} + \left(\frac{ay_{-1}}{y_0 - \alpha} + 1 \right) \beta [d^{n-1} + d^{n-2} + \dots + d^0]. \end{aligned}$$

*Si $d = 1$

$$x_{2n-1} = x_{-1} + \left(\frac{ay_{-1}}{y_0 - \alpha} + 1 \right) \beta [1^{n-1} + 1^{n-2} + \dots + 1],$$

d'où

$$x_{2n-1} = x_{-1} + h_1 \beta n.$$

*Si $d \neq 1$, la formule de x_{2n-1} contient la somme de n terme d'une suite géométrique dont la raison est d et sont premier terme est 1, donc

$$x_{2n-1} = d^n x_{-1} + \left(\frac{ay_{-1}}{y_0 - \alpha} + 1 \right) \beta \frac{d^n - 1}{d - 1},$$

d'où

$$x_{2n-1} = d^n x_{-1} + h_1 \beta \frac{d^n - 1}{d - 1}.$$

De la même manière on trouve

*Si $d = 1$

$$x_{2n} = x_0 + h_0 \beta n.$$

*Si $d \neq 1$

$$x_{2n} = d^n x_0 + h_0 \beta \frac{d^n - 1}{d - 1}.$$

D'autre part, comme $a = b$ la suite y_{2n-1} est donnée par

$$y_{2n-1} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{a^2}{d} \right) y_{-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{a^2}{d} \right) \left(\frac{bx_{-1}}{x_0 - \beta} + 1 \right) \alpha,$$

alors

$$\begin{aligned} y_{2n-1} &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{a^2}{d} \right) y_{-1} + \left(\frac{bx_{-1}}{x_0 - \beta} + 1 \right) \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{a^2}{d} \right), \\ &= \left(\frac{a^2}{d} \right)^n y_{-1} + \left(\frac{bx_{-1}}{x_0 - \beta} + 1 \right) \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a^2}{d} \right)^{n-k}, \\ &= \left(\frac{a^2}{d} \right)^n y_{-1} + \left(\frac{bx_{-1}}{x_0 - \beta} + 1 \right) \alpha \left[\left(\frac{a^2}{d} \right)^n + \left(\frac{a^2}{d} \right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{a^2}{d} \right)^1 \right]. \end{aligned}$$

*Si $d = a^2$

$$y_{2n-1} = y_{-1} + t_1 \alpha [1^n + 1^{n-1} + \dots + 1],$$

d'où

$$y_{2n-1} = y_{-1} + t_1 \alpha n.$$

*Si $d \neq a^2$, la formule de y_{2n-1} contient la somme de n terme d'une suite géométrique dont la raison est $\frac{a^2}{d}$ et sont premier terme est 1, donc

$$y_{2n-1} = \left(\frac{a^2}{d} \right)^n y_{-1} + \left(\frac{bx_{-1}}{x_0 - \beta} + 1 \right) \alpha \frac{\left(\frac{a^2}{d} \right)^n - 1}{\frac{a^2}{d} - 1},$$

d'où

$$y_{2n-1} = \left(\frac{a^2}{d}\right)^n y_{-1} + t_1 \alpha \frac{\left(\frac{a^2}{d}\right)^n - 1}{\frac{a^2}{d} - 1}.$$

De la même manière on trouve

*Si $d = a^2$

$$y_{2n} = y_0 + t_0 \alpha n.$$

*Si $d \neq a^2$

$$y_{2n} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{a^2}{d}\right) y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{a^2}{d}\right) \frac{y_0 - \alpha}{y_{-1}} \alpha,$$

d'où

$$y_{2n} = \left(\frac{a^2}{d}\right)^n y_0 + t_0 \frac{\left(\frac{a^2}{d}\right)^n - 1}{\frac{a^2}{d} - 1}.$$

■

Dans le théorème suivant nous étudions les limites des solutions du système (3.1) avec $a = b$.

Théorème 3.2.1. *Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -1}$ une solution du système (3.1) avec $a = b$, alors les assertions suivantes sont vraies*

(a) Si $x_{-1} + h_1 \frac{\beta}{d-1} \neq 0$, alors

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{2n-1}| = +\infty, & \text{si } |d| > 1, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n-1} = \left| \frac{h_1 \beta}{d-1} \right|, & \text{si } |d| < 1. \end{cases}$$

Sinon, si on prend $x_{-1} + h_1 \frac{\beta}{d-1} = 0$ et $d \neq 1$ nous obtenons $x_{2n-1} = x_{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Supposons $d = 1$, si $h_1 \beta \neq 0$ (i.e $h_1 \neq 0$) alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{2n-1}| = +\infty$. Sinon, nous obtenons $x_{2n-1} = x_{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) si $x_0 + h_0 \frac{\beta}{d-1} \neq 0$ alors

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{2n}| = +\infty, & \text{si } |d| > 1, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = \frac{h_0 \beta}{d-1}, & \text{si } |d| < 1. \end{cases}$$

Sinon, si $x_0 + h_0 \frac{\beta}{d-1} = 0$ et $d \neq 1$ nous obtenons $x_{2n} = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Supposons $d = 1$, si $h_0 \beta \neq 0$ (i.e $h_0 \neq 0$), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{2n}| = +\infty$. Sinon, $x_{2n} = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(e) Si $y_{-1} + t_1 \frac{\alpha}{\left(\frac{a^2}{d}\right) - 1} \neq 0$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} |y_{2n-1}| = +\infty, & \text{si } |d| < a^2, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{2n-1} = \frac{t_1 \alpha}{\left(\frac{a^2}{d}\right) - 1}, & \text{si } |d| > a^2. \end{cases}$$

Sinon, si $y_{-1} + t_1 \frac{\alpha}{\left(\frac{a^2}{d}\right) - 1} = 0$ et $d \neq 1$, nous obtenons $y_{2n-1} = y_{-1}$ pour tout

$n \in \mathbb{N}$.

(f) Supposons $d = a^2$, si $t_1 \alpha \neq 0$ (i.e $t_1 \neq 0$), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y_{2n-1}| = +\infty$. Sinon, nous obtenons $y_{2n-1} = y_{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(g) Si $y_0 + t_0 \frac{\alpha}{\left(\frac{a^2}{d}\right) - 1} \neq 0$, alors

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} |y_{2n}| = +\infty, & \text{si } |d| < a^2, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{2n} = \frac{t_0 \alpha}{\left(\frac{a^2}{d}\right) - 1}, & \text{si } |d| > a^2. \end{cases}$$

Sinon, si $y_0 + t_0 \frac{\alpha}{\left(\frac{a^2}{d}\right) - 1} = 0$ et $d \neq 1$ nous obtenons $y_{2n} = y_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(h) Supposons $d = a^2$. si $t_0\alpha \neq 0$ (i.e $t_0 \neq 0$) alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y_{2n}| = +\infty$. Sinon, nous obtenons $y_{2n} = y_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve.

(a) On a d'après le corollaire précédent la suite x_{2n-1} avec $d \neq 1$ est donnée par

$$x_{2n-1} = d^n x_{-1} + h_1 \beta \frac{d^n - 1}{d - 1},$$

ainsi

$$\begin{aligned} x_{2n-1} &= d^n x_{-1} + h_1 \beta \left[\frac{d^n}{d - 1} - \frac{1}{d - 1} \right], \\ &= d^n x_{-1} + h_1 \frac{\beta}{d - 1} d^n - h_1 \frac{\beta}{d - 1}, \end{aligned}$$

alors

$$x_{2n-1} = \left[x_{-1} + h_1 \frac{\beta}{d - 1} \right] d^n - h_1 \frac{\beta}{d - 1}.$$

Posons $c_1 = x_{-1} + h_1 \frac{\beta}{d - 1}, \quad c_2 = -h_1 \frac{\beta}{d - 1}.$

Alors on obtient

$$x_{2n-1} = c_1 d^n + c_2.$$

Si $c_1 \neq 0$

Si $|d| > 1$ alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{2n-1}| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |c_1 d^n + c_2|, \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |c_1| |d^n|, \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Si $|d| < 1$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (c_1 d^n + c_2) = c_2 = -h_1 \frac{\beta}{d-1}.$$

Si $c_1 = 0$ i.e.

$$x_{-1} + h_1 \frac{\beta}{d-1} = 0,$$

alors

$$x_{-1} = -h_1 \frac{\beta}{d-1}.$$

D'où

$$x_{2n-1} = c_2 = -h_1 \frac{\beta}{d-1} = x_{-1}.$$

(b) Pour $d = 1$

On a

$$x_{2n-1} = x_{-1} + h_1 \beta n.$$

Si $h_1 \neq 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{2n-1}| = +\infty.$$

Si $h_1 = 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n-1} = x_{-1}.$$

(c) Nous avons

$$x_{2n} = d^n x_0 + h_0 \beta \frac{d^n - 1}{d-1}.$$

De la même manière on trouve

$$x_{2n} = \left[x_0 + h_0 \frac{\beta}{d-1} \right] d^n - h_0 \frac{\beta}{d-1}.$$

Posons

$$c_3 = x_0 + h_0 \frac{\beta}{d-1}, \quad c_4 = -h_0 \frac{\beta}{d-1}.$$

On obtient

$$x_{2n} = c_3 d^n + c_4.$$

Si $c_3 \neq 0$

Si $|d| > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{2n}| = +\infty.$$

Si $|d| < 1$

$$x_{2n} = c_4 = -h_0 \frac{\beta}{d-1}.$$

Si $c_3 = 0$

$$x_{2n} = x_0.$$

(d) Si $d = 1$ donc

$$x_{2n} = x_0 + h_0 \beta n.$$

Si $h_0 \neq 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{2n}| = +\infty.$$

Si $h_0 = 0$ alors

$$x_{2n} = x_0.$$

(e) Nous avons

$$y_{2n-1} = \left(\frac{a^2}{d}\right)^n y_{-1} + t_1 \alpha \frac{\left(\frac{a^2}{d}\right)^n - 1}{\left(\frac{a^2}{d}\right) - 1},$$

ainsi

$$\begin{aligned} y_{2n-1} &= \left(\frac{a^2}{d}\right)^n y_{-1} + t_1 \alpha \left[\frac{\left(\frac{a^2}{d}\right)^n}{\left(\frac{a^2}{d}\right) - 1} - \frac{d}{a^2 - d} \right], \\ &= \left(\frac{a^2}{d}\right)^n y_{-1} + t_1 \frac{\left(\frac{a^2}{d}\right)^n \alpha}{\left(\frac{a^2}{d}\right) - 1} - t_1 \frac{d\alpha}{a^2 - d}, \end{aligned}$$

alors

$$y_{2n-1} = \left[y_{-1} + t_1 \frac{\alpha}{\left(\frac{a^2}{d}\right) - 1} \right] \left(\frac{a^2}{d}\right)^n - t_1 \frac{d\alpha}{a^2 - d}.$$

Posons

$$c_5 = y_{-1} + t_1 \frac{d\alpha}{a^2 - d}, \quad c_6 = -t_1 \frac{d\alpha}{a^2 - d}.$$

On obtient

$$y_{2n-1} = c_5 \left(\frac{a^2}{d}\right)^n + c_6.$$

Si $c_5 \neq 0$

Si $|d| < a^2$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} |y_{2n-1}| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| c_5 \left(\frac{a^2}{d}\right)^n + c_6 \right|, \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| c_5 \left(\frac{a^2}{d}\right)^n \right|, \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Si $|d| > a^2$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(c_5 \left(\frac{a^2}{d}\right)^n + c_6 \right) = c_6 = -t_1 \frac{d\alpha}{a^2 - d}.$$

Si $c_5 = 0$

$$y_{-1} + t_1 \frac{d\alpha}{a^2 - d} = 0,$$

alors

$$y_{-1} = -t_1 \frac{d\alpha}{a^2 - d}.$$

On trouve

$$y_{2n-1} = -t_1 \frac{d\alpha}{a^2 - d} = y_{-1}.$$

(f) Si $d = a^2$ donc

$$y_{2n-1} = y_{-1} + t_1 \alpha n.$$

Si $t_1 \neq 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |y_{2n-1}| = +\infty.$$

Si $t_1 = 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{2n-1} = y_{-1}.$$

(g) Nous avons

$$y_{2n} = \left(\frac{a^2}{d}\right)^n y_0 + t_0 \alpha \frac{\left(\frac{a^2}{d}\right)^n - 1}{\left(\frac{a^2}{d}\right) - 1},$$

De la même manière on trouve

$$y_{2n} = \left(\frac{a^2}{d}\right)^n y_0 + t_0 \frac{\left(\frac{a^2}{d}\right)^n \alpha}{\left(\frac{a^2}{d}\right) - 1} - t_0 \frac{d\alpha}{a^2 - d}.$$

Posons

$$c_7 = y_0 + t_0 \frac{d\alpha}{a^2 - d}, \quad c_8 = -t_0 \frac{d\alpha}{a^2 - d}.$$

On obtient

$$y_{2n} = c_3 \left(\frac{a^2}{d}\right)^n + c_4.$$

Si $c_7 \neq 0$

Si $|d| < a^2$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |y_{2n}| = +\infty.$$

Si $|d| > a^2$

$$y_{2n} = c_8 = -t_0 \frac{d\alpha}{a^2 - d}.$$

Si $c_7 = 0$

$$y_{2n} = y_0.$$

(h) Si $d = a^2$ donc

Si $t_0 \neq 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |y_{2n}| = +\infty.$$

Si $t_0 = 0$ alors

$$y_{2n} = y_0.$$

■

Corollaire 3.2.1. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -1}$ une solution du système (3.1) avec $a = b$. Alors les assertions suivantes sont vraies

(a) Si $d = -1$, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{4n-1} &= x_{-1}, \\ x_{4n} &= x_0, \\ x_{4n+1} &= -x_{-1} + h_1\beta, \\ x_{4n+2} &= -x_0 + h_0\beta. \end{cases}$$

i.e., la suite $\{x_n\}_{n \geq -1}$ est périodique de période 4.

(b) Si $d = -a^2$, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$ on trouve

$$\begin{cases} y_{4n-1} &= y_{-1}, \\ y_{4n} &= y_0, \\ y_{4n+1} &= -y_{-1} + t_1\alpha, \\ y_{4n+2} &= -y_0 + t_0\alpha. \end{cases}$$

i.e., la suite $\{y_n\}_{n \geq -1}$ est périodique de période 4.

(c) Si $a = 1$, $\alpha x_0 + \beta y_0 = \alpha x_{-1} + \beta y_{-1} = \alpha\beta$ et $x_{-1} + x_0 \neq \beta$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{2n-1} &= x_{-1}, \\ x_{2n} &= x_0, \\ y_{2n-1} &= y_{-1}, \\ y_{2n} &= y_0. \end{cases}$$

i.e., la solution $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -1}$ est périodique de période 2.

Preuve.

(a) De corollaire (3.2.1) la suite x_{2n} est donnée par

$$x_{2n} = d^n x_0 + h_0 \beta \left(\frac{d^n - 1}{d - 1} \right).$$

Pour $d = -1$, on trouve

$$x_{2n} = (-1)^n x_0 + h_0 \beta \left(\frac{(-1)^n - 1}{-2} \right).$$

Donc

Si n pair (i.e. $n = 2n'$) alors

$$x_{4n} = (-1)^{2n} x_0 + h_0 \beta \left(\frac{(-1)^{2n} - 1}{-2} \right) = x_0.$$

Si n impair (i.e. $n = 2n' + 1$) alors

$$x_{4n+2} = (-1)^{2n+1} x_0 + h_0 \beta \left(\frac{(-1)^{2n+1} - 1}{-2} \right) = -x_0 + h_0 \beta.$$

De la même manière, on trouve

$$\begin{cases} x_{4n-1} = x_1, \\ x_{4n+1} = -x_1 + h_1 \beta. \end{cases}$$

(b) Nous avons

$$y_{2n-1} = \left(\frac{a^2}{d} \right)^n y_{-1} + t_0 \alpha \left(\frac{\left(\frac{a^2}{d} \right)^n - 1}{\left(\frac{a^2}{d} \right) - 1} \right).$$

Si $d = -a^2$ alors

$$y_{2n-1} = (-1)^n y_{-1} + t_0 \alpha \left(\frac{(-1)^n - 1}{-2} \right).$$

Si n pair (i.e. $n = 2n'$) alors

$$y_{4n-1} = (-1)^{2n} y_{-1} + t_1 \alpha \left(\frac{(-1)^{2n} - 1}{-2} \right) = y_{-1}.$$

Si n impair (i.e. $n = 2n' + 1$) alors

$$y_{4n+1} = (-1)^{2n+1} y_0 + t_1 \alpha \left(\frac{(-1)^{2n+1} - 1}{-2} \right) = -y_{-1} + t_1 \alpha.$$

De la même manière, on trouve

$$\begin{cases} y_{4n} = y_0, \\ y_{4n+2} = -y_0 + t_0 \alpha. \end{cases}$$

(c) Puisque $a = 1$ et $\alpha x_0 + \beta y_0 = \alpha x_{-1} + \beta y_{-1} = \alpha \beta$, nous obtenons

$$d - 1 = \frac{\beta - x_{-1} - x_0}{x_{-1} x_0} \beta, \quad h_1 = \frac{x_{-1} - \beta}{x_0} + 1 \text{ et } t_0 = \frac{x_0}{x_{-1} - \beta} + 1,$$

d'où il résulte que $(d - 1)x_0 + h_0 \beta$, $(d - 1)x_{-1} + h_1 \beta$, $(1 - d)y_0 + t_0 \alpha d$, $(1 - d)y_{-1} + t_1 \alpha d$, sont égaux à zéro. D'autre part, comme $x_{-1} + x_0 \neq \beta$, nous obtenons cas (a), (c), (e) et (g) du théorème (3.2.1) que

$$x_{2n-1} = x_{-1}, \quad x_{2n} = x_0, \quad y_{2n-1} = y_{-1}, \quad y_{2n} = y_0.$$

■

Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème (3.2.1) et du corollaire (3.2.1).

Corollaire 3.2.2. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq -1}$ une solution du système (3.1) avec $a = b$, alors les assertions suivantes sont vraies

(a) Si $|a| = 1$, $a y_{-1}(x_0 - \beta) = x_{-1}(\alpha - y_0)$ (i.e. $d = -1$), alors la solution est périodique de période 4.

(b) Si $a = 1$, $x_{-1} + x_0 = \beta$ et $y_{-1} + y_0 = \alpha$ (i.e. $d = 1$), alors la solution est périodique de période 2.

(c) Si $a = 1$, $x_{-1} + x_0 \neq \beta$ et $\alpha x_0 + \beta y_0 = \alpha x_{-1} + \beta y_{-1} = \alpha\beta$, alors la solution est périodique de période 2.

Dans la partie suivante nous donnons deux exemples numériques où la solution est périodique de période 4 et 2 respectivement.

Exemple 3.2.1. Considérons le tableau des paramètres et des valeurs initiales suivant

a	b	α	β	x_{-1}	x_0	y_{-1}	y_0
1	1	1	51/100	-21/50	13/50	63/50	13/50

Dans ce cas

$$d = -1 = -a^2,$$

de corolaire (3.2.2) la solution est périodique de période 4 est donnée par

$$\left\{ \left(\frac{21}{50}, \frac{63}{50} \right), \left(\frac{13}{50}, \frac{13}{50} \right), \left(\frac{-653}{140}, \frac{247}{525} \right), \left(\frac{179}{100}, \frac{71}{50} \right), \left(\frac{21}{50}, \frac{63}{50} \right), \left(\frac{13}{50}, \frac{13}{50} \right), \left(\frac{-653}{140}, \frac{247}{525} \right), \left(\frac{179}{100}, \frac{71}{50} \right), \dots \right\}.$$

Exemple 3.2.2. Considérons le tableau des paramètres et des valeurs initiales suivant

a	b	α	β	x_{-1}	x_0	y_{-1}	y_0
1	1	2	4	-9	11	8	-4

Dans ce cas

$$a = 1 \text{ et } d = 1; x_{-1} + x_0 = \beta \text{ et } y_{-1} + y_0 = \alpha$$

La solution du système (3.1) est périodique de période 2 alors

$$\{(8, 11), (-4, -9), (8, 11), (-4, -9), \dots\}.$$

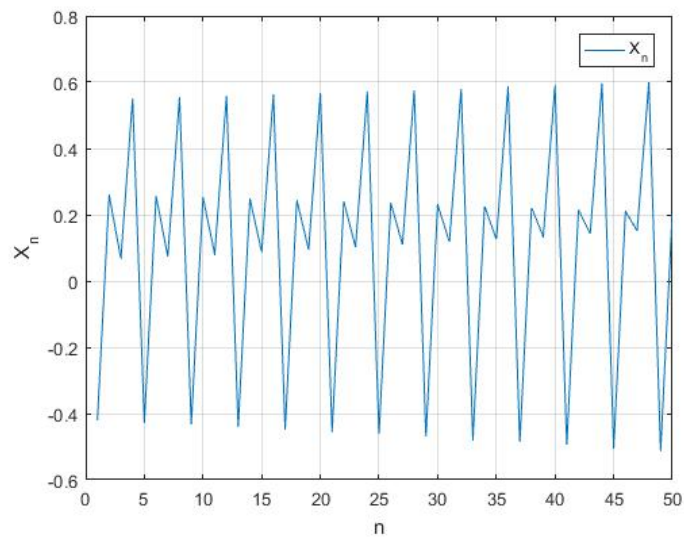


FIGURE 3.1 – courbe de x_n de l'exemple 2.2.1

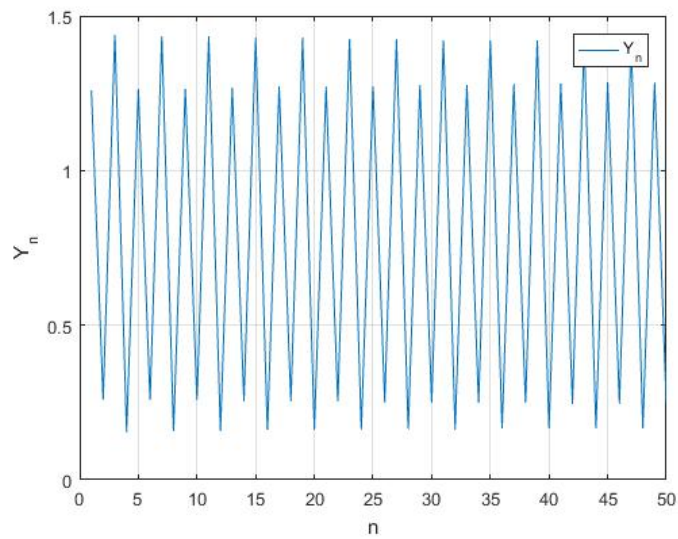


FIGURE 3.2 – courbe de y_n de l'exemple 2.2.1

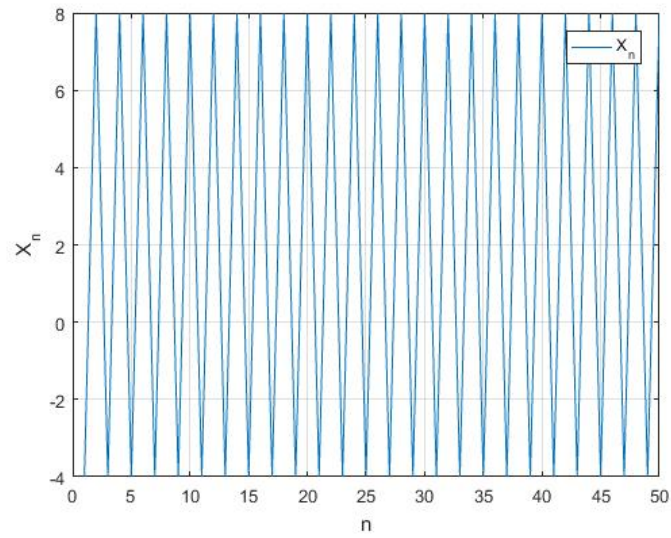


FIGURE 3.3 – courbe de x_n de l'exemple 3.2.2

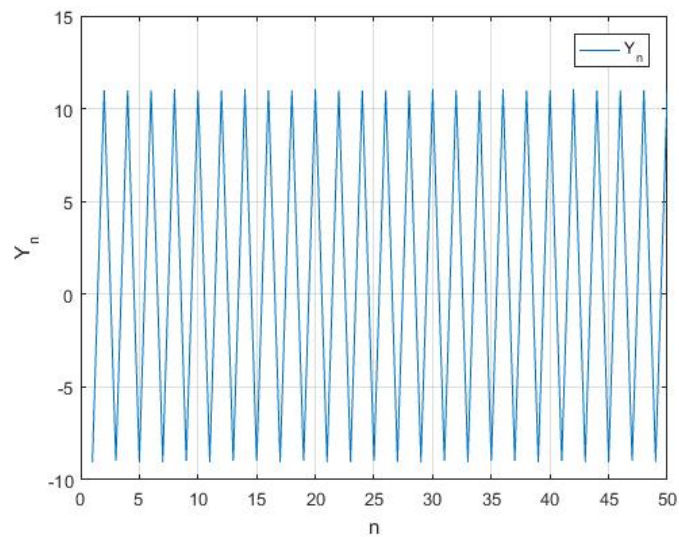


FIGURE 3.4 – courbe de y_n de l'exemple 3.2.2

CONCLUSION

Dans notre mémoire, nous avons présenté les solutions du système des équations aux différences non linéaire suivant

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta, & n \in \mathbb{N}, \\ y_{n+1} = \frac{by_n x_{n-1}}{x_n - \beta} + \alpha, & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Et aussi nous avons étudié le comportement asymptotique des solutions du système des équations aux différences non linéaire dans le cas $a = b$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] *E. Camouzis, G. Ladas*. Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures. Chapman and Hall/ CRC, 2008.
- [2] *I. Dekkar*. Variations sur les équations aux différences (non) autonomes, thèse de doctorat, Université Mohamed Seddik ben Yahia, Jijel, 2017.
- [3] *M. R. S. Kulenovic, G. Ladas*. Dynamics of second order rational difference equation with open problems and conjectures. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington, D. C, 2002.
- [4] *N. Finizio, G. Ladas*. An introduction to differential equations with difference equations, Fourier series, and partial differential equations. Wadsworth publishing company, 1982.
- [5] *N. Haddad, N. Touafek, and J. F. T. Rabago*. Well-defined solutions of a system of difference equations. Journal of Applied Mathematics and Computing, 56(2018), 439-458.
- [6] *S. Elaydi*. An Introduction to differential equations, Undergraduate Texts in Mathematics. New York, USA, Springer, 1999.
- [7] *V. L. Kocić, G. Ladas*. Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications. Kluwer academic publishers, 1993.