



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Dynamique d'une équation de Schrödinger non linéaire

Préparé par : -*Djoual Bessma*
-*Berehal Khawla*

Soutenue devant le jury

Encadré par : *Allal Mehezzem. M.A.A*
Président : *Kaouch Issmail. M.A.A* .
Examineur : *Boudn Rabeh. M.A.A* .

C.U. Abd Elhafid Boussouf
C.U. Abd Elhafid Boussouf
C.U. Abd Elhafid Boussouf

Année Universitaire : 2019/2020

REMERCIEMENT

REMERCIEMENT

En terminant notre mémoire de fin d'études, nous remercier bien **ALLAH** qui nous a donné la force suffisante et la volonté pour faire ce travail.

Un remerciement tout spécial à notre encadreur : **Allal Mehazzem** pour le suivi et l'aide et la Contribution au développement de cette thèse.

Nous tenons également à exprimer nos sincères remerciements à tous les enseignants du département des mathématiques qui nous a guidés pendant ces cinq années.

A la fin, nous tenons remercier tous mes collègues d'études, particulièrement notre promotion.

Merci ...

Dédicace

Je dédie mon travail :

A mes chers parents :

« Hourai & Ibrahim »

A mes chers frères et sœurs :

« Ahima , Issa, walid et Dacud »

A ma sœur ' Linda ' et sa mari ' Abd Ashak ' et ses
enfants « Ritadj, Rachâ, Rayan et Midou »

A mon frère ' Fersse ' et sa femme ' Randa ' et sa fille ' Anfal '

A tous mes amis (es) :

« Hasna, Linda, Marwa, Amina, Chaïma et said »

A mon chère binôme : ' Khawla '

A tous ceux que j'aime

Bessma



DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail à:

Mon cher père qui est mon soutien dans cette vie .

Ma chère mère qui m 'a accompagnée en toutes circonstances.

Tous les nombres de ma famille :

Mes frères: **Brahim, Abdelghani, Abderahmane et Abdelkadousse .**

Ma sœur **Rima** et son mari **Yassine** et ma petite sœur **Houda** .

Mes meilleures amies : **Bassma, Hasna, linda, kanza et Messaoude.**

Ma chère binôme: **Bessma**

En n'oubliant pas les enfants: **Larine, Hachim et Anes.**

A tous les enseignants du département de Mathématiques.

Tous collègues de ma promotion de master 2 Mathématiques 2019/2020.

khawla

ملخص

هذه الأطروحة مكرسة لتقديم دراسة نظرية لمعادلة شرودينجر الغير الخطية. حيث قمنا بمناقشة معادلتها وفقا لبيانات الأولية. و في الجانب النظري نثبت وجود المدارات باستعمال خصائص النظم العكسية.

كلمات مفتاحية : معادلة شرودنجر الغير خطية, المدارات, معادلة شرودنجر المتقطعة الغير خطية, النظم العكسية.

Résumé

Cette thèse est consacrée à la présentation d'une étude théorique de l'équation de Schrödinger non linéaire, dans laquelle nous avons discuté son équation d'après les données primaires. Dans la partie théorique nous prouvons l'approche d'orbite homocline en utilisant les propriétés des systèmes planaires réversible.

Mots clés: équation de Schrödinger non linéaire (NLS), orbite homocline, équation de Schrödinger non linéaire discrète (DNLS), système planaire réversible.

Abstract

This thesis is devoted to the presentation of a theoretical study of the nonlinear Schrödinger equation, in which we have discussed its equation according to the primary data. In the theoretical part we prove the approach of homoclinic orbit by using the properties of reversible planar systems.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation (NLS), homoclinic orbit, discrete nonlinear Schrödinger equation (DNLS), reversible planar system.

Table des matières

1	GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES	3
1.1	Systèmes dynamiques à temps continu	3
1.2	Systèmes dynamiques à temps discret	4
1.2.1	Échantillonnage : passage de temps continu à temps discret	4
1.2.2	Systèmes dynamiques discrets (SDD) d'ordre 1 de dimension m	5
1.2.3	Notion de l'orbite d'un système	5
1.3	Flot	6
1.4	Stabilité des points fixes et des orbites périodiques	8
1.4.1	Stabilité des points fixes	8
1.5	Stabilité des orbites périodiques	9
1.6	Critère de stabilité	9
1.7	Points Attracteurs et sources	11
1.7.1	Orbites périodiques attracteurs et sources	13
1.8	Attracteurs	14
1.9	Les orbites homocliniques et hétérocliniques	16
1.9.1	Les variétés invariantes d'un point singulier	16
1.9.2	Orbites homocliniques	18
1.9.3	Orbites hétérocliniques	19
1.9.4	Connexion homocline et hétérocline	20
2	ÉQUATION DE SCHRÖDINGER NON LINÉAIRE	22
2.1	Présentation de l'équation de Schrödinger :	22
2.2	Hamiltonien	23

TABLE DES MATIÈRES

2.3	L'équation de Schrödinger non linéaire discrète(DNLS)	24
2.4	Existence et unicité des solutions stationnaires	25
2.5	Quelque modèles d'équations de Schrödinger non linéaire	26
2.6	Symétrie par inversion du temps dans les systèmes dynamiques	28
2.7	Difféomorphismes réversibles	30
2.8	les Orbites homoclinique et solutions localisées pour un système de Schrödin- ger non linéaire	34
2.8.1	Point homoclines et hétéroclines	34
2.8.2	Orbites homocliniques d'un système planaires réversibles	34
3	SOLUTION LOCALES D'UNE ÉQUATION DE SCHRÖDINGER DIS- CRET À INTERACTION À LONG TERME	38
3.1	Model (DNLS) :	38
3.2	L'étude théorique	39

Table des figures

1.1	Représentation du flot	7
1.2	Transitivité du flot	8
1.3	Attracteur :Points fixes.	15
1.4	Attracteur périodique.	15
1.5	Attracteur quasi périodique	15
1.6	Attracteur chaotiques	16
1.7	Représentation de la variété et sous-espace propre	18
1.8	Orbite homoclinique	18
1.9	Orbite hetroclinique	19
1.10	Orbite homoclinique	21
2.1	Figure	32

TABLE DES FIGURES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'équation de Schrödinger, conçue par le physicien autrichien Erwin Schrödinger en 1925, est une équation fondamentale en mécanique quantique. Elle décrit l'évolution dans le temps d'une particule massive, et remplit ainsi le même rôle que la relation fondamentale de la dynamique en mécanique classique.

L'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) se pose fréquemment dans des problèmes physiques, par exemple dans la propagation laser en optique non-linéaire. L'équation NLS de focalisation périodique a servi comme une équation pour décrire les phénomènes d'onde instables. Notre intérêt pour cette équation est d'avoir une équation complètement intégrable lorsqu'elle est simulée numériquement apparaît un flot temporellement chaotique. L'équation NLS est un Hamiltonien infini-dimensionnel intégrable qui a de grandes familles de solutions quasi-périodiques et homoclines dont les représentations explicites peuvent être obtenues via la transformation de diffusion inverse (IST). Les structures homoclines ont longtemps été reconnues comme des sources de sensibilité qui sont de petites perturbations peuvent bifurquer les solutions. Le problème que nous étudions ici est de savoir comment ces solutions homoclines réagissent aux perturbations induites par différents schémas numériques.

Dans ce mémoire nous discutons l'équation de Schrödinger non linéaire, en fonction des données initiales, l'objectif de notre travail est d'examiner certaines caractéristiques d'une chaîne homogène d'oscillateurs NLS, qui est une chaîne de pendules réduite à une chaîne de Schrödinger non linéaire.

Nous considérons le système :

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} + 2 |\psi_n|^2 \psi_n + J \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\psi_{n+l-2\psi_n+\psi_{n-l}}}{l^{1+\alpha}} \quad (1)$$

où $i = \sqrt{-1}$, ψ_n sont des variables complexes, $n \in \mathbb{Z}$.

Dans une autre partie, dans les études récentes sur l'équation de Schrödinger, une grande attention a été portée aux solutions localisées. Nous concentrons sur l'existence des solutions localisées de la forme $\psi_n = \phi_n e^{i\omega t}$, où ϕ_n sont indépendants du temps. Ces solutions sont périodiques en temps et spatialement localisées.

Notre objectif est de prouver l'approche d'orbite homocline en utilisant les propriétés des systèmes planaires réversibles.

Cette mémoire est composée de trois chapitres organisés comme suite :

le premier chapitre : nous avons donné des définitions et résultats généraux sur les systèmes dynamiques discrets ainsi que la stabilité des points fixes, des orbites périodiques, en outre les orbites homocliniques, orbites hétérocycliques, connexion homoclines et hétéroclines.

le deuxième chapitre : nous rappelons quelques détails sur l'équation de Schrödinger non linéaire discrets avec quelques modèles, en suite on présente les orbites homocliniques et solutions localisées pour un système de (DNLS), Symétrie par inversion du temps dans les systèmes dynamiques et difféomorphismes réversibles.

le troisième chapitre : nous avons fait une étude pratique pour un modèle d'une équation de Schrödinger discrète non linéaire et nous discutons l'existence des structures homoclines.

Enfin, notre thèse se termine par une conclusion générale qui récapitule nos travaux et les résultats obtenus tout en suggérant d'éventuelles perspectives et travaux futurs.

Chapitre 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Introduction

Le but de la théorie des systèmes dynamiques est de modéliser des processus qui évoluent dans le temps et d'étudier leur comportement.

Cette étude doit permettre de prédire le comportement du système et de le réguler afin d'obtenir les résultats désirés. Pour élaborer un modèle il faut tout d'abord définir quelles sont les valeurs qui évoluent dans le temps, les états du système. Ensuite, il faut trouver des équations mathématiques qui décrivent leur évolution. Généralement, ce sont des équations différentielles (si le temps est considéré comme continu) ou aux différences finies (si le temps du modèle est discret). Les paramètres du modèle sont les coefficients de ces équations et les conditions initiales. Dans ce chapitre nous allons étudier essentiellement les systèmes dynamiques en temps discret.

1.1 Systèmes dynamiques à temps continu

Dans le cas général un système dynamique en temps continu peut être représenté par une équation différentielle.

Selon l'équation, on distingue quelques types différents de systèmes.

* **Systèmes autonomes :**

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

* **Systèmes non-autonomes :**

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

1.2 Systèmes dynamiques à temps discret

Une modélisation discrète du temps peut être imposée soit par la nature même du processus soit par le besoin de "discrétiser" un modèle à temps continu pour le traiter numériquement. L'évolution du système est observée en choisissant certains moments du temps que nous allons supposer équidistants. Dans tous les cas le choix de l'unité de temps représente une partie importante de modélisation du système. Dans le modèle le temps sera donc noté par une variable n qui prend les valeurs entières $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$.

1.2.1 Échantillonnage : passage de temps continu à temps discret

Il existe plusieurs techniques de discrétisation (échantillonnage) des systèmes.

Voici un exemple simple, souvent utilisé : la méthode d'Euler.

Soit une équation différentielle d'ordre 1 :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

Nous voulons étudier la trajectoire de cette équation seulement à des instants choisis, équidistants $t_n = t_0 + n \cdot \Delta t$.

Si la période d'échantillonnage Δt est choisie assez petite, on peut approcher la dérivée de $x(t)$ par la différence :

$$\dot{x} \approx \frac{x(t_n) - x(t_{n+1})}{\Delta t}. \tag{1.2}$$

Alors, le système dynamique à temps continu peut être approché par le système dynamique à temps discret suivant :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(x_n).$$

1.2.2 Systèmes dynamiques discrets (SDD) d'ordre 1 de dimension m

Dans le cas général un système dynamique discret est décrit par un système d'équations aux différences finies, autrement dit, par une récurrence.

Définition 1.2.1

Soit $D \in \mathbb{R}^m$ un ensemble et $f : D \longrightarrow D$ une fonction continue et dérivable. On appelle "**SDD**" d'ordre 1 en dimension m la récurrente suivante :

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0. \quad (1.3)$$

On utilisera souvent la notation (f, D) pour désigner le système dynamique défini par une fonction f sur l'ensemble D .

1.2.3 Notion de l'orbite d'un système

Nous allons étudier dans la suite seulement les systèmes d'ordre 1. Notre but sera de pouvoir décrire l'évolution des états du système en fonction des conditions initiales. Nous aurons donc besoin d'introduire la notion de trajectoire ou orbite du système.

Soit un **SDD** d'ordre 1 défini par l'itération d'une fonction $f(x)$:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Définition 1.2.2

Orbite d'un système

Étant donné le point initial x_0 , on appelle **orbite** (ou **trajectoire**) du système (1.4) la suite

$$\mathcal{O} = \{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), x_3 = f^3(x_0), \dots, x_n = f^n(x_0), \dots\}.$$

Définition 1.2.3

- Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ s'appelle *périodique* s'il existe un $p > 0$ t.q :

$$x_{n+p} = x_n, \quad \forall n. \quad (1.5)$$

- Une orbite est dite éventuellement périodique s'il existe un $p > 0$ et un $N > 0$ tels que l'égalité (1.5) est vérifiée pour tout $n > N$.
- Une orbite périodique $\mathcal{O}(x_0)$ est toujours une suite de points périodique.
Tous ces points s'appellent point périodique de période p du système.

Définition 1.2.4

Le plus petit nombre p qui vérifie (1.5) s'appelle "**période fondamentale**", de l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$.

Dans la suite nous utiliserons souvent le terme abrégé "**période**" au lieu de "**période fondamentale**", sauf dans les cas où une confusion est possible. Tous les points périodiques de période p sont solutions de l'équation :

$$f^{(p)}(x) = x. \quad (1.6)$$

où

$$f^{(p)}(x) = \underbrace{f(f(f(\cdots f(x)\cdots)))}_{p \text{ fois}}$$

Définition 1.2.5

L'état x^* est un état **d'équilibre** (ou **point fixe**) du système (f, I) si

$$x^* = f(x^*). \quad (1.7)$$

D'un point de vue géométrique les points d'équilibre sont les intersections sur le plan x, y entre la fonction $y = f(x)$ et la droite $y = x$.

Exemple 1.2.1 Le système à temps discret

$$x_{n+1} = x_n^3.$$

a les points fixes

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 1, \quad x_2^* = -1.$$

1.3 Flot

D'après le théorème d'existence et unicité de Cauchy-Lipschitz, si f est de classe C^1 alors il existe une solution maximale unique $x(t)$ au système (1.1) telle que $x(0) = x_0$.

Définition 1.3.1

La correspondance $\varphi_t : x_0 \mapsto x(t)$ qui associe à une donnée initiale x_0 la valeur de la solution maximale $x(t)$ au temps t , qui correspond à cette donnée initiale, est appelée le flot au temps t du champ de vecteurs f .

Le flot du champ de vecteur est l'application qui associe à (t, x) la solution maximale $x(t)$ au temps t qui correspond à la donnée initiale x :

$$(t, x) \mapsto \varphi(t, x) = \varphi_t(x) = x(t)$$

Le flot est dit complet lorsque cette correspondance est définie pour toute valeur de $t \in]-\infty, +\infty[$



FIGURE 1.1 – Représentation du flot

Remarque 1.3.1

On a trois remarques :

1. **Régularité du flot**

Si f est de classe C^k le flot est lui-même de classe C^k

2. **Pour un système linéaire**

$\dot{x} = Ax$, le flot est donné par :

$$\varphi_t(x) = e^{tA}x.$$

Un ensemble $S \subset U$ est dit invariant par le flot φ_t sur U (ou bien par le système $\dot{x} = f(x)$ correspondant) si pour tout $x \in S$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\varphi_t(x) \in S$. Si S vérifie la propriété que $\varphi_t(x) \in S$ pour tout $x \in S$ et tout $t > 0$ alors on dit que S est positivement invariant.

3. **Transitivité du flot**

Le flot vérifie, pour tous t et $s \in \mathbb{R}^+$,

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t}$$

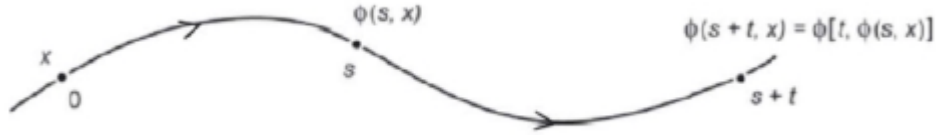


FIGURE 1.2 – Transitivité du flot

1.4 Stabilité des points fixes et des orbites périodiques

1.4.1 Stabilité des points fixes

Définition 1.4.1

Un point fixe x^* s'appelle stable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\sigma > 0$ tel que

$$\text{si } \|x_0 - x^*\| < \sigma \quad \text{alors pour tout } \|x_n - x^*\| < \varepsilon.$$

Autrement dit, toutes les orbites qui commencent près du point x^* restent dans un voisinage de ce point :

$$\text{si } x_0 \in U_\sigma(x^*) \quad \text{alors pour tout } n > 0 \quad f^{(n)}(x_0) \in U_\varepsilon(x^*).$$

où

$$U_\varepsilon(x^*) = \{y : \|y - x^*\| < \varepsilon\}.$$

Exemple 1.4.1

Soit $f(x) = 1 - x$. Le seul point fixe est $x^* = 0.5$. Remarquons que pour tout autre point $x_0 \neq 0.5$ l'orbite correspondante est périodique :

$$f(x_0) = 1 - x_0, \quad f(f(x_0)) = x_0.$$

Aucune orbite ne converge donc vers le point fixe. Néanmoins, tous les éléments d'une orbite restent à la même distance du point $x^* = 0.5$. C'est donc un point fixe stable.

Définition 1.4.2

Un **point fixe** s'appelle *instable* s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\forall r > 0$ il existe un $x_0 \in U_r(x^*)$ et il existe un $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\|x_n - x^*\| > \varepsilon.$$

Cela signifie que pour tout voisinage du point fixe x^* il existe une orbite qui, en commençant dans ce voisinage s'éloigne du point x^* .

1.5 Stabilité des orbites périodiques

x_i est périodique de période p si

$$f^{(p)}(x_i) = x_i, \quad i = \overline{1, p}$$

Un **point périodique** de **période** p est donc un **point fixe** de l'application $f^{(p)}$

Définition 1.5.1

Soit x_i un **point périodique** de **période** p d'un **SDD** défini par une fonction $f(x)$.

L'orbite périodique correspondante $\mathcal{O}(x_i)$ s'appelle **stable**(*instable*) si chacun de ses points est un point fixe **stable**(*instable*) de l'application $f^{(p)}$.

Exemple 1.5.1

Soit $f(x) = 1 - x$. Tout point $x \neq 0.5$ est un point périodique de période 2.

Or l'application $f^{(2)}(x) = 1 - (1 - x) \equiv x$ est l'application identité.

Tous les points sont des points fixes **stables** de cette application. Donc pour tout point $x \neq 0.5$ l'orbite correspondante $\mathcal{O}(x) = \{x, 1 - x\}$ est une orbite périodique **stable**.

1.6 Critère de stabilité

Nous savons déjà que la dynamique d'un système dépend des propriétés de la fonction $f(x)$ qui le définit. Notamment on peut dans beaucoup de cas établir l'existence des points fixes en étudiant la dérivée de la fonction f .

Il existe aussi un théorème qui permet de savoir très facilement si un point fixe donné est stable.

Théorème 1.6.1

Soit $I = [a, b]$ un intervalle. Soit $f : I \longrightarrow I$ une fonction continue sur I ayant un point

fixe $x^* \in I$. S'il existe un voisinage $U_\varepsilon(x^*) \subset I$ tel que la fonction f est dérivable sur ce voisinage et que

$$\left| \frac{d}{dx} f(x) \right| \leq 1, \quad \forall x \in U_\varepsilon(x^*)$$

alors le point x^* est **stable**.

Un point est **instable** si la dernière condition du théorème n'est pas vérifiée dans tout un voisinage de x^* .

Définition 1.6.1

Stabilité locale d'un point fixe.

Soit l'équation en temps discret :

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{1.8}$$

admettant un point fixe x^* vérifiant :

$$x^* = f(x^*).$$

nous définissons une variable locale $u_n = x_n - x^*$. Nous procédons à la linéarisation de l'équation au voisinage du point fixe de manière similaire au cas d'une équation différentielle ordinaire, c'est-à-dire en réalisant le développement limité de la fonction f au voisinage du point fixe x^* .

Le modèle linéaire local s'écrit :

$$u_{n+1} = \lambda u_n,$$

avec $\lambda = \frac{df}{dx_n}(x^*)$. Ce modèle linéaire n'est valable qu'au voisinage du point fixe, qui est l'origine pour le système linéarisé.

La stabilité locale du point fixe dépend de la valeur de la constante λ . En effet, la solution du système linéarisé s'écrit :

$$u_n = \lambda^n u_0.$$

où u_0 est la condition initiale.

Plusieurs cas peuvent se présenter :

1. $\lambda < -1$: Dans ce cas la solution s'écrit : $u_n = (-1)^n |\lambda|^n u_0$. La solution du système linéarisé prend alternativement des valeurs positives et négatives et son module

augmente avec n . Dans ce cas, la solution s'éloigne du point fixe qui est donc instable.

2. $\lambda = -1$: Il s'agit d'un cas particulier et la solution s'écrit : $u_n = (-1)^n u_0$. La solution du système linéarisé prend alternativement des valeurs positives u_0 et négatives $-u_0$.
 3. $-1 < \lambda < 0$: Dans ce cas la solutions s'écrit : $u_n = (-1)^n |\lambda|^n u_0$. La solution du système linéarisé prend alternativement des valeurs positives et négatives et son module diminue avec n . Dans ce cas, la solution s'approche et tend vers le point fixe lorsque $n \rightarrow \infty$, et ce point fixe est donc localement **asymptotiquement stable**.
 4. $\lambda = 0$: Il s'agit d'un cas particulier. Dès la première itération on va au point fixe 0.
 5. $0 < \lambda < 1$: Dans ce cas la solution s'écrit : $u_n = \lambda^n u_0$. La solution du système linéarisé est du signe de la condition initiale et son module diminue avec n . Dans ce cas, la solution s'approche du point fixe qui est localement **asymptotiquement stable**.
 6. $\lambda = 1$: Ici, la solution est $u_n = u_0$. L'équation linéarisée est confondue avec la première bissectrice. Toute condition initiale est point fixe de l'équation.
 7. $\lambda > 1$: Dans ce cas la solution s'écrit $u_n = \lambda^n u_0$ et s'éloigne du point fixe qui est instable.
- en résumé, il y a stabilité asymptotique de l'origine lorsque $-1 < \lambda < 1$,
c'est-à-dire lorsque :

$$-1 < \frac{df}{dx_n}(x^*) < 1, \quad \text{ou} \quad \text{encore} \quad \left| \frac{df}{dx_n}(x^*) \right| < 1.$$

1.7 Points Attracteurs et sources

Définition 1.7.1

Un point fixe x^* s'appelle attractif s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x_0 \in U_\varepsilon(x^*) \quad x(n) = f^{(n)}(x_0) \rightarrow x^*, \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty$$

Théorème 1.7.1

Soit $I = [a, b]$ un intervalle. Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction continue sur I ayant un point fixe $x^* \in I$. Supposons qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la fonction f est dérivable sur tout le voisinage $U_\varepsilon(x^*)$ du point x^* et que la dérivée de la fonction f est continue au point x^* . Alors le point x^* est attractif si et seulement si

$$\left| \frac{d}{dx} f(x^*) \right| < 1.$$

Définition 1.7.2

Soit x^* un point fixe du **SDD** défini par une fonction $f(x)$. On dit que x^* est point répulsif appelé aussi un point répulsif s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x_0 \in U_\varepsilon(x^*) \quad \text{il existe un } n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{telque } \forall n > n_0.$$

$$|x(n) - x^*| > \varepsilon$$

Théorème 1.7.2

Soit un système dynamique défini par une fonction $f(x)$ continue sur un intervalle $I = [a, b]$. Soit $x^* \in I$ un point fixe du système. Supposons qu'il existe un voisinage $U_\varepsilon(x^*) \subset I$ tel que la fonction $f(x)$ est dérivable sur ce voisinage et que sa dérivée est continue en x^* . Alors x^* est un point répulsif si et seulement si

$$\left| \frac{d}{dx} f(x^*) \right| > 1.$$

Théorème 1.7.3

Soient $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue et dérivable sur I . Soit $x^* \in I$ un point fixe de l'application f tel que

$$\left| \frac{d}{dx} f(x) \right| = 1.$$

Supposons qu'il existe un voisinage U_δ du point x^* tel que la seconde dérivée f'' existe sur tout ce voisinage.

1. si $f''(x^*) > 0$ (f' est strictement croissante) alors x^* est un point **semi-stable** à gauche.
2. si $f''(x^*) < 0$ (f' est strictement décroissante) alors x^* est un point **semi-stable** à droite.
3. si $f'''(x^*) = 0$ (f' a un point d'extremum local) et si la troisième dérivée existe alors
 - si $f'''(x^*) < 0$ (maximum local) x^* est un point **attractif** faible.
 - si $f'''(x^*) > 0$ (minimum local) x^* est une **source** faible.

$f'(x^*)$	$f''(x^*)$	$f'''(x^*)$	caractéristique du point fixe
$ f'(x) > 1$	Indifférent	Indifférent	point source
$ f'(x) < 1$	Indifférent	Indifférent	point attractif
$ f'(x) = 1$	$f''(x^*) < 0$	Indifférent	semi-stable à droite
$ f'(x) = 1$	$f''(x^*) > 0$	Indifférent	semi-stable à gauche
$ f'(x) = 1$	$f''(x^*) = 0$	$f'''(x^*) < 0$	Attracteur faible
$ f'(x) = 1$	$f''(x^*) = 0$	$f'''(x^*) > 0$	source faible

TABLE 1.1 – La nature de point fixe.

1.7.1 Orbites périodiques attracteurs et sources

Comme dans la définition de la stabilité nous utilisons ici le fait qu'un point périodique x_i de période p est nécessairement un point fixe de l'application $f^{(p)}(x)$

$$f^{(p)}(x_i) = x_i$$

Définition 1.7.3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définissant un **SDD** d'ordre 1. Soit $\mathcal{O}(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1), x(2), \dots, x(p-1)\}$ une orbite périodique de période p de ce système. On dit que cette orbite est attractive (ou répulsive) si chacun de ses points est un point fixe attractif (respectivement un point répulsif) de l'application $f^{(p)}(x)$.

Théorème 1.7.4

Soient $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \longrightarrow I$ une fonction continue sur I . Supposons que le SDD défini par la fonction $f(x)$ possède une orbite périodique $\mathcal{O}(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1), x(2), \dots, x(p-1)\} \subset I$ de période p . Supposons en plus qu'autour de chaque point de l'orbite $x(i) \in \mathcal{O}(x_0)$, $i = 0, 1, \dots, p-1$ il existe un voisinage $U_{\delta_i}(x(i)) \subset I$ tel que la fonction $f(x)$ est dérivable dans ce voisinage et que sa dérivée est continue en $x(i)$. Alors l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est **attractive** si et seulement si

$$\left| \frac{d}{dx} f^{(p)}(x_0) \right| = \left| \prod_{j=1}^{p-1} f'(x(j)) \right| < 1$$

l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est **répulsive** si et seulement si

$$\left| \frac{d}{dx} f^{(p)}(x_0) \right| = \left| \prod_{j=1}^{p-1} f'(x(j)) \right| > 1$$

Le cas est indéterminé si [1]

$$\left| \frac{d}{dx} f^{(p)}(x_0) \right| = \left| \prod_{j=1}^{p-1} f'(x(j)) \right| = 1$$

1.8 Attracteurs

Définition 1.8.1

Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est dire une situation (ou un ensemble d'états) vers lesquels évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.

Mathématiquement, l'ensemble A est un attracteur si :

- Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$.
- $\cap \varphi_t(V) = A, \quad t \geq 0$
- Il existe une orbite dense dans A .

Les différents types d'attracteurs

Il existe deux type attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

1. Attracteurs réguliers :

les attracteurs régulières caractérisent l'évolution de système non chaotique et peuvent être de trois sortes :

- **Le point fixe** : c'est l'attracteur le plus simple, et c'est un point de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires, c'est donc une solution stationnaire constante, satisfait $f(x) = x$.

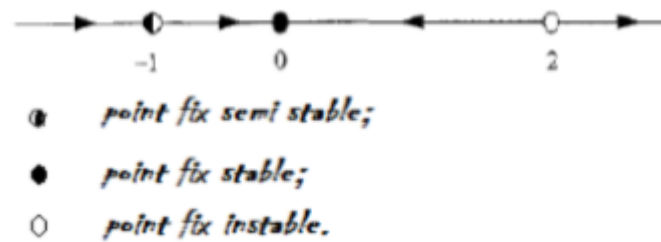


FIGURE 1.3 – Attracteur :Points fixes.

- **Attracteur périodique** :c'est une trajectoire fermé dans l'espace des phases vers la quelle tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système.

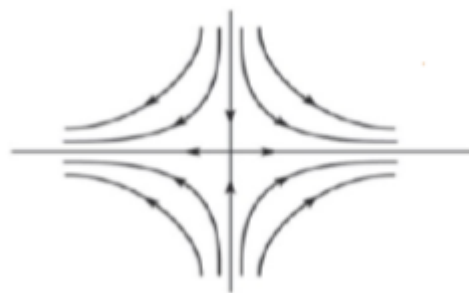


FIGURE 1.4 – Attracteur périodique.

- **Attracteur quasi périodique (tore)** :représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois "mouvements quasi périodiques".

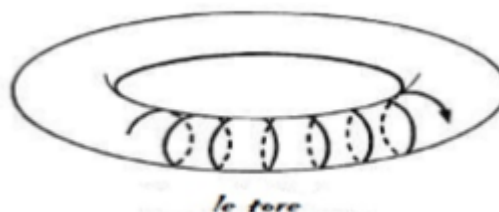


FIGURE 1.5 – Attracteur quasi périodique

2. Attracteurs chaotiques (ou étrange) :

Définition 1.8.2

Soit A un ensemble de $\mathbb{R}^n$, alors A est appelé attracteur étrange s'il est chaotique.



FIGURE 1.6 – Attracteur chaotiques

Les caractéristiques d'un attracteur étranges

- * Dans l'espace des phases l'attracteur est de volume nul.
- * La dimension d de l'attracteur étrange est fractale (non entière) avec $0 < d < n$, ou n la dimension de l'espace des phases.
- * Sensibilité aux conditions initiales : deux trajectoires initialement voisines finissent toujours par s'écarter l'une de l'autre.[\[2\]](#)

1.9 Les orbites homocliniques et hétérocliniques

1.9.1 Les variétés invariantes d'un point singulier

Soit le système dynamique non linéaire suivant :

$$\dot{x} = f(x)$$

et x_p un point singulier.

soit A la matrice jacobienne d'ordre n associé au système, d'après sa linéarisation au voisinage du point singulier.

$$\dot{x} = Ax / A = Jf(x_p)$$

Supposons x_p est point singulier hyperbolique et posons :

* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres de la matrice jacobienne A dont la partie réelle est négative.

* $i_1, i_2, \dots, i_u$ les valeurs propres de la matrice jacobienne A dont la partie réelle est positive.

Et soient :

* E^s le sous espace propre de dimension s engendré par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$

* E^u le sous espace propre de dimension u engendré par $i_1, i_2, \dots, i_u$

Théorème 1.9.1

L'espace $\mathbb{R}^n$ se décompose en somme directe

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$$

de sous-espaces invariants par le $t \rightarrow \exp(tA)$ du système linéaire.

Théorème 1.9.2

Soit un champ de vecteurs f de classe C^1 de flot ϕ_t associé au système dynamique $\dot{x} = f(x)$

On suppose que x_p est un point fixe hyperbolique et donc que la jacobienne $A = Jf(x_p)$ admet

* k valeurs propres de partie réelle strictement négative $(\lambda_i)_{i=1}^k$.

* $n-k$ valeurs propres de partie réelle strictement positive $(\lambda_i)_{i=k+1}^{n-k}$

On note E^s et E^u les espaces stables et instables du système linéarisé $\dot{x} = Ax$.

Alors :

1. *Il existe une variété différentiable W^s de dimension k , tangente à E^s , invariante par le flot ϕ_t et telle que :*

$$\forall x_0 \in W^s, \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x_0) = x_p$$

2. *Il existe de même une variété différentiable W^u de dimension $n-k$; tangente à E^u , invariante par le flot t et telle que :*

$$\forall x_0 \in W^u, \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x_0) = x_p$$

On désigne alors par $(W^s), (W^u)$ et (W^c) les sous-espaces stable, instable et centre définis respectivement par :

* W^s l'espace **stable** engendré par les vecteurs u_j, v_j tels que $a_j < 0$.

* W^u l'espace **instable** engendré par les vecteurs u_j, v_j tels que $a_j > 0$.

* W^c l'espace **central** engendré par les vecteurs u_j, v_j tels que $a_j = 0$.

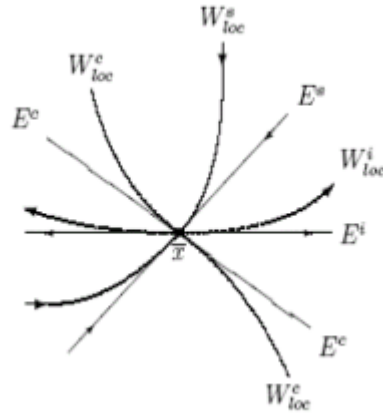


FIGURE 1.7 – Représentation de la variété et sous-espace propre

Remarque 1.9.1

si les valeurs propres de la matrice jacobienne A est nulle alors (W^c) l'espace central[3]

1.9.2 Orbites homocliniques

Définition 1.9.1

Une orbite homoclinique est la trajectoire d'un écoulement d'un système dynamique qui relie un point d'équilibre de selle à lui-même.[3]

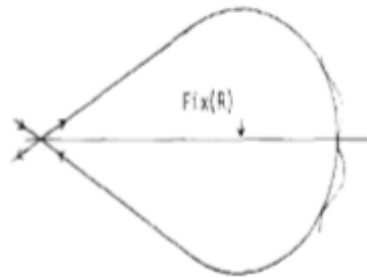


FIGURE 1.8 – Orbite homoclinique

Concentrons notre attention sur les orbites homocliniques émanant de l'origine. Une orbite homoclinique correspond à une orbite qui relie, en avant et en arrière du temps, un point fixe avec lui-même.

Ceci correspond à une solution d'état stationnaire non triviale qui décroît au point fixe pour

$n \rightarrow \pm\infty$. Il s'agit de la solution soliton dite brillante. Une condition suffisante pour l'existence d'une orbite homoclinique pour une application de dimension 2 est que les variétés stables (W^s) et instables (W^u) du point fixe se croisent. Ainsi, une condition nécessaire à l'existence de ces variétés est que le point fixe doit être une selle

. Cette dernière condition, se traduit par un besoin (mais pas suffisante) condition sur les paramètres du système.

Il est important de souligner que l'existence d'un selle ne garantit pas l'existence d'une homoclinique puisque les variétés stables et instables ne pourraient pas se croiser.

1.9.3 Orbites hétérocliniques

Définition 1.9.2

Une orbite hétéroclinique est un chemin dans l'espace des phases qui relie deux points d'équilibre différents. [2]

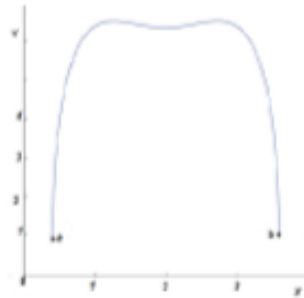


FIGURE 1.9 – Orbite hétéroclinique

Au lieu d'envisager des variétés impliquant un seul point fixe, considérons la variété stable $W^s(x_1^*)$ émanant du point fixe x_1^* et la variété instable $W^u(x_2^*)$ émanant du point fixe x_2^* avec $(x_1^* \neq x_2^*)$. Si ces variétés se croisent alors il est possible de déduire une orbite qui relie, en temps avant x_1^* avec temps arrière x_2^* . Il s'agit d'une orbite dite hétéroclinique et correspond à un état stationnaire qui se relie à des états stationnaires homogènes distincts (x_1^*) et (x_2^*) à savoir un soliton sombre.

1.9.4 Connexion homocline et hétérocline

– **Connexion homocline**

Soit $f : M \rightarrow M$ être une application définie sur un collecteur M , avec un point fixe p . Soit $W^s(f, p)$ et $W^u(f, p)$ être la variété stable et la variété instable du point fixe p respectivement. Soit V une variété invariante connectée telle que $V \subseteq W^s(f, p) \cap W^u(f, p)$.

Alors V s'appelle une connexion homocline.

– **Connexion hétérocline**

C'est une notion similaire, mais elle se réfère à deux points fixes p et q . La condition satisfaite par V est remplacée par : $V \subseteq W^s(f, p) \cap W^u(f, q)$. Cette notion n'est pas symétrique par rapport à p et q .

Les intersections homoclines et hétéroclines

Lorsque les variétés invariantes $W^s(f, p)$ et $W^u(f, q)$, éventuellement avec $p = q$, se croisent mais il n'y a pas de connexion homocline / hétérocline, une structure différente est formée par les deux variétés, parfois appelées l'enchevêtrement homocline / hétérocline

Exemple 1.9.1

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + x^2 \end{cases}$$

Les points singuliers sont $P_1 = (0, 0)$ un centre et $P_2 = (1, 0)$ une col.

Intersection $W^s(x_{p1}) \cap W^u(x_{p2})$ défient un orbite homoclinique ou connexion col.[\[3\]](#)

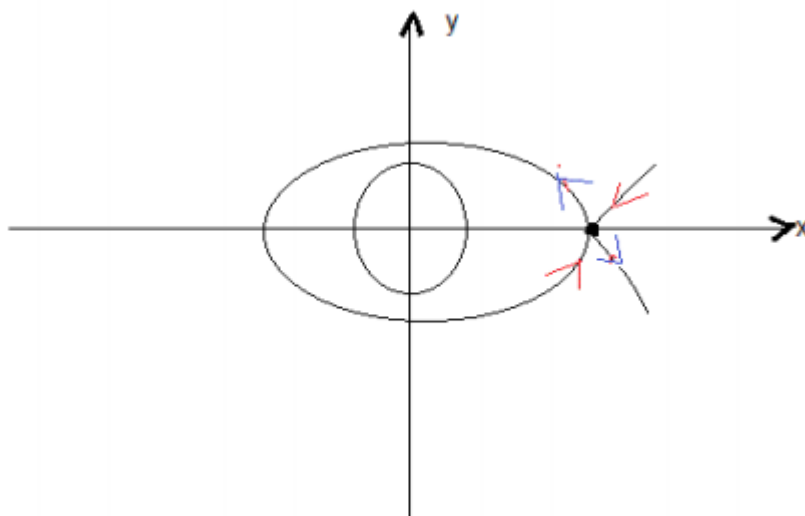


FIGURE 1.10 – Orbite homoclinique

Chapitre 2

ÉQUATION DE SCHRÖDINGER NON LINÉAIRE

Introduction

L'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la physique quantique, comme l'est la loi de Newton en physique classique. On la retrouve pour décrire des phénomènes assez variés que ce soit dans l'optique quantique (propagation d'un faisceau de laser), la physique atomique (supraconductivité, condensation de Bose-Einstein), la technologie électronique (supraconductivité, condensation de Bose-Einstein), la technologie électronique (semi conducteurs, transistors, mémoires), la physique des plasmas, astrophysique, la microscopie électronique, la neutronique, la chimie ou encore la biologie, $\dots$). Nous présentons dans ce chapitre la définition et la formulation de l'équation de Schrödinger, et quelques modèles de cette équation, l'équation DNLS, Symétrie par inversion du temps dans les systèmes dynamiques, Difféomorphismes réversibles et les Orbites homoclinique et solutions localisées pour un système de Schrödinger non linéaire.

2.1 Présentation de l'équation de Schrödinger :

une particule quantique, qu'elle soit une cette particule par exemple un électron, est toujours décrite par une fonction d'onde.

En général cette fonction d'onde dépend de l'espace et du temps

$$\psi(\vec{r}, t)$$

La densité de probabilité de trouver la particule à l'endroit $\vec{r}$ à l'instant t est

$$p(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2.$$

Lorsque cette densité de probabilité ne dépend pas du temps, on dit que le système est dans un "état stationnaire".

Considérons une particule de masse m libre de se déplacer sur l'axe des x et soumise à une force dérivant d'un potentiel $V(x)$.

La fonction d'onde de la particule satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V\psi(x, t) \quad (2.1)$$

où $\partial/\partial t$ et $\partial/\partial x$ indiquent les dérivées partielles par rapport à t et x respectivement et $\hbar$ la constante de planck.

tlq :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \text{ et } h \text{ le constant de planck } (h = 6.626 * 10^{-34} m^2 kg/s)$$

On nomme l'équation (2.1) équation de Schrödinger. À partir de la condition initiale $\psi(x, 0)$ et du potentiel $V(x)$, elle permet de calculer $\psi(x, t)$.[4]

2.2 Hamiltonien

L'opérateur différentiel qui apparaît dans le membre de droite de l'équation de Schrödinger s'appelle le Hamiltonien et indique par $\hat{H}$.

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

Soit H l'espace des fonctions d'onde du système. L'opérateur $\hat{H}$ est une application linéaire de H dans H .

$\hat{H}$ représente physiquement l'énergie, cinétique plus potentielle, de la particule. En termes de l'opérateur $\hat{H}$, l'équation de Schrödinger prend la forme compacte

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(x, t) \quad (2.2)$$

Fonctions propres de $\hat{H}$ et les état stationnaires

Nous cherchons les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger. Pour cela, il faut d'abord calculer les "fonctions propres" de l'opérateur $\hat{H}$. Il s'agit de fonctions tels que

$$H\varphi(x) = E\varphi(x), \quad (2.3)$$

avec E un nombre réel. C'est à partir des fonctions propres de $\hat{H}$ que l'on construit les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger. Considérons en effet une fonction d'onde de la forme :

$$\psi(x, t) = \phi(t)\varphi(x)$$

où $\varphi(x)$ satisfait l'équation (2.4), et injectons-la dans l'équation de Schrödinger (2.2).

On obtient :

$$i\hbar \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \varphi(x) = E\phi(t)\varphi(x) \longrightarrow \phi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}, \quad (2.4)$$

on a donc une solution de l'équation de Schrödinger de la forme :

$$\psi(x, t) = \varphi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}, \quad (2.5)$$

La densité de probabilité de trouver la particule à l'endroit x à l'instant t ,

$$p(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = |\varphi(x)|^2 \quad (2.6)$$

ne dépend pas du temps. l'état $\psi(x, t)$ décrit dans (2.5) est un état "stationnaire" dont les propriétés ne varient pas dans le temps.

La constante E qui apparaît dans (2.4) représente l'énergie de la particule.

2.3 L'équation de Schrödinger non linéaire discrète(DNLS)

L'équation de Schrödinger non linéaire discrète décrit un modèle particulièrement simple pour une structure d'oscillateur couplés anharmonique.

Dans une dimension spatiale, la formule générale de l'équation est :

$$i\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = G(\psi_{n+1}, \psi_n, \psi_{n-1}) + F(\psi_n), \quad (2.7)$$

où, $F(\psi_n)$ représente le terme non linéaire d'équation de Schrödinger, $G(\psi_{n+1}, \psi_n, \psi_{n-1})$ est la fonction de couplement à court terme.

Équation de Schrödinger semi-linéaire

L'équation de Schrödinger semi-linéaire est une équation comportant un terme linéaire de type équation de Schrödinger et un terme de réaction non-autonome :

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} + \Delta \psi_n + f(n, \psi_n) = 0$$

L'équation de Schrödinger semi-linéaire intervient dans de nombreux domaines de la physique : propagation d'ondes, optique non-linéaire, modèles de lasers, modèles de plasma, ... etc .

Équation de Schrödinger cubique focalisante

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} + \Delta \psi_n + |\psi_n|^2 \psi_n = 0$$

.

Équation de Schrödinger cubique défocalisante

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} + \Delta \psi_n - |\psi_n|^2 \psi_n = 0$$

.

2.4 Existence et unicité des solutions stationnaires

La solution stationnaire de l'équation de Schrödinger est sous la forme :

$$\psi_n = \phi_n e^{i\omega t}$$

avec $w \in \mathbb{R}$, et un satisfait le problème indépendant du temps, les solutions sont également appelées états stables.

2.5 Quelques modèles d'équations de Schrödinger non linéaire

L'équation cubique de Schrödinger non linéaire discret

Historiquement, l'équation cubique DNLS a été d'abord dérivé par Holstein en 1959 pour modéliser le mouvement d'un électron auto-piégé (polaron) dans un réseau cristallin unidimensionnel.

L'équation réapparut en 1972 lorsque Davydov a étudié le transfert d'énergie en biomolécules. La même équation a également été utilisée par Christodoulakis et Joseph en 1988 pour modéliser la dynamique d'un champ optique dans un réseau de guides d'ondes couplés non linéaires.

En outre, dans les années 1990, l'équation DNLS a également été étudiée comme un modèle de systèmes d'oscillateurs anharmoniques couplés qui admettent les modes dits intrinsèques localisés ou discrets.

Tout récemment, Trombettoni et Smerzi ont également utilisé cette équation en 2001 pour décrire un condensat de Bose-Einstein (BEC) piégé dans un potentiel périodique.

L'équation cubique de DNLS est la version simple la plus étudiée pour l'équation non linéaire de Schrödinger à temps discret, on peut dire que cette équation est "standard" ou "une structure simple".

L'équation cubique de DNLS est donnée par :

$$i \frac{d\psi_n}{dt} = -c\Delta\psi_n + b|\psi_n|^2\psi_n \quad (2.8)$$

où $\psi_n = \psi_n(t)$ représente une fonction complexe du temps t au site n , ψ_n indique la dérivé par rapport au temps et c la constante du couplage entre deux sites adjacents,

$\Delta\psi_n = \psi_{n+1} - \psi_n + \psi_{n-1}$ est le Laplacien discret de dimension 1 et b le paramètre de la non-linéarité.

La valeur de b peut être négative ou positive, ce qui indique la non linéarisation de la focalisation ou de la défocalisation, respectivement.

L'équation DNLS de Ablowitz-Ladik (AL)

Un autre type d'équations DNLS, s'appelle l'équation d'Ablowitz-Ladik (AL). Cette équation a été formulée à l'origine par Ablowitz et Ladik en 1976. Cette équation obtenue en remplaçant la non linéarité diagonale (sur site) dans l'équation cubique avec une non linéarité hors-diagonale (inter-site), résultant :

$$i \frac{d\psi_n}{dt} = -c\Delta\psi_n + b|\psi_n|^2(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) \quad (2.9)$$

L'équation DNLS de Salerno

En 1992, Salerno a proposé un modèle intéressant de l'équation DNLS de la forme :

$$i \frac{d\psi_n}{dt} = -c\Delta\psi_n + 2(1-b)|\psi_n|^2 + b|\psi_n|^2(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) \quad (2.10)$$

qui représente entre le DNLS cubique à $b = 0$ et le système AL(2.9) à $b = 1$. En raison de sa propriété d'incorporer les structures cubiques et AL de l'équation de Schrödinger, l'équation de Salerno devient un modèle général idéal pour étudier, par exemple l'interaction entre les non-linéarités sur place et entre sites.

L'équation saturable DNLS

Une autre variante des équations DNLS qui est très pertinente à discuter est une structure DNLS présentant la non-linéarité dite saturable. Cette équation est écrite comme :

$$i\dot{\psi} = -c\Delta\psi_n + \frac{b\psi_n}{1 + |\psi_n|^2} \quad (2.11)$$

qui représente une version discrète de l'équation de Vinetskii-Kukhtarev. Plus récemment, la version continue de l'équation dans le cas de défocalisation c'est également produit dans un cristal liquide hématique dopé par un colorant azoïque, comme rapporté par Picardie comme dans le cas cubique, le terme de non-linéarité dans l'équation DNLS saturable peut être soit la focalisation soit la défocalisation, indiqué par $b > 0$ ou $b < 0$, respectivement.[\[5\]](#)

2.6 Symétrie par inversion du temps dans les systèmes dynamiques

La symétrie par inversion du temps est l'un des fondements symétries discutées en sciences naturelles. Par conséquent, il se pose dans de nombreux systèmes dynamiques physique, en particulier dans les mécanique quantique. Nous considérons les équations différentielles ordinaires et les difféomorphismes possédant une inversion symétries.

Nous allons maintenant donner une de description mathématique plus précise de symétrie d'inversion du temps dans le cadre des systèmes dynamiques. Nous donnons premièrement un compte rendu historique de son origine.

Nous considérons deux types de systèmes dynamiques, avec temps continu ($t \in \mathbb{R}$) et temps discret ($t \in \mathbb{Z}$) sur un espace de phase Ω . Les systèmes à temps continu sont considérés comme des flots de champs de vecteurs. Les systèmes dynamiques en temps discret sont supposés être générés par un application inversible f . Dans la plupart des applications d'intérêt $\Omega = \mathbb{R}^n$. Dans le temps continue, nous considérons les équations différentielles ordinaires autonome de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (x \in \Omega) \quad (2.12)$$

où $F : \Omega \mapsto T(\Omega)$ est une application (simple, continu). La dynamique de (2.12) est donnée par un opérateur d'évolution d'un seul paramètre

$$\begin{aligned} \varphi_t : \Omega &\rightarrow \Omega, \\ \varphi_t : x(\tau) &\rightarrow \varphi_t(x(\tau)) = \varphi(\tau + t) \end{aligned}$$

tel que, $\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2}$ pour $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Nous disons maintenant qu'un application inversible (simple, continu) $R : \Omega \rightarrow \Omega$ est une symétrie inverse de quand (2.12)

$$\frac{dR(x)}{dt} = -F(R(x)) \quad (2.13)$$

ou équivalent, quand

$$dR(x)|_x.F(x) = -F(R(x)) \quad (2.14)$$

où $dR(x)|_x$ désigne le dérivé (Fréchet) de R en x . En termes d'opérateur d'évolution φ_t , et (2.13) et (2.14) implique

$$R \circ \varphi_t = \varphi_{-t} \circ R = \varphi^{-1} \circ R. \quad (2.15)$$

Dans le contexte de la mécanique classique, où les équations différentielles ordinaires sont dérivées par un Hamiltonien $H(q,p)$, la symétrie d'inversion classique est donnée par

$$R(q, p) = (q, -p). \quad (2.16)$$

Notez que dans ce cas particulier, R est une involution (c'est-à-dire $R^2 = id$). Par analogie avec la définition (2.15) dans le cas des flots, nous appelons une application inversible $R : \Omega \rightarrow \Omega$ une inversion symétrique d'une application inversible $f : \Omega \rightarrow \Omega$ à chaque fois

$$R \circ f = f^{-1} \circ R \quad (2.17)$$

La notion d'inversion de symétrie pour les flots autonome les s'étend naturellement aux les flots non autonome

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t). \quad (2.18)$$

A savoir, nous appelons $R_a : (x, t) \rightarrow (R(x), -t + a)$ une inversion symétrique de (2.18) chaque fois que (2.18) est invariant sous la transformation R_a (pour certains $a \in \mathbb{R}$), c'est-à-dire

$$\frac{dR(x)}{dt} = -F(R(x), -t + a) \quad (2.19)$$

Nous introduisons une nouvelle variable $\tau = t - \frac{a}{2}$, l'équation différentielle étendue $d(x, \tau)dt = (F_0(x, \tau), 1)$ (avec : $(F_0(x, \tau), 1) = F(x, \tau + \frac{a}{2})$) est autonome et a une symétrie inverse $R_0 : (x, \tau) \rightarrow (R(x), -\tau)$.

La présence et l'importance de la symétrie par inversion du temps a été reconnu dans les premiers jours des systèmes dynamiques de Birkhoff. Il l'utilisa dans son étude des problèmes restreint à trois corps en mécanique classique. En particulier, il a noté qu'une application f avec une symétrie inverse R toujours être écrit comme la composition de deux involutions

$$f = R \circ T \quad \text{où} \quad R^2 = T^2 = id \quad (2.20)$$

Notons que R n'est pas une involution, on vérifie facilement que la propriété de décomposition (2.20) se généralise par

$$f = R \circ T \quad \text{où} \quad R^2 \circ T^2 = id \quad (2.21)$$

Dans les flots des champs des vecteurs non autonome (2.18) lorsque $F(x,t)$ est périodique dans le temps, c'est-à-dire $F(x,t) = F(x,t+1)$, puis de manière naturelle l'application d'inverse en temps de chaque flot est autonome. De plus, il est facile de vérifier que lorsque le système non autonome est invariant sous R_a , alors l'application inverse en temps est retourné par rapport à la surface de $t = \frac{a}{2}$ à l'inversion symétrique R .

Un résultat similaire s'applique également aux applications d'inverse locales pour les données des orbites périodiques symétriques écoulements autonomes à une symétrie d'inverse R .

Définition 2.6.1

Un système dynamique est appelé réversible quand il possède une inversion symétrique R satisfaisant (2.13), (2.17) ou (2.19)

Pour des flots autonomes, des applications ou des flots non autonomes, respectivement.[6]

2.7 Difféomorphismes réversibles

Pour simplifier, nous ne considérons que les difféomorphismes de $\mathbb{R}^{2n}$ dans cette section, bien que toutes les définitions et résultats passent immédiatement à arbitraire voire variétés dimensionnelles.

Soit R un difféomorphisme lisse satisfaisant

- (i) $R \circ R = \text{identité}$
- (ii) la dimension de l'ensemble du point fixe de R , $Fix(R)$, est n .

R est appelé une involution inversée. Un difféomorphisme F de $\mathbb{R}^{2n}$ est appelé R -réversible si $R \circ F = F^{-1} \circ R$.

La motivation de cette terminologie vient de la mécanique. Considérons un système mécanique simple sur $\mathbb{R}^{2n}$ défini par le équation différentielle du second ordre $\ddot{q} = -gradV(q)$, tel que la vitesse vecteur $v = \dot{q}$ cette équation peut être vue comme un champ vectoriel sur $\mathbb{R}^{2n}$ donné par :

$$q = v$$

$$v = -\text{grad}V(q)$$

Défini $R(q, v) = (q, -v)$. R est une involution inversée de $\mathbb{R}^{2n}$ soit φ_t soit l'application temporelle t associée au flux de ce système. Un calcul facilement nous donne :

$$R\varphi_t(q, v) = \varphi_{-t}R(q, v)$$

Puisque $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$, il s'ensuit que φ_t est R -réversible. La solution de l'équation différentielle commençant par la condition initiale $(q, -v)$ est la même courbe $q(t)$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ uniquement parcouru dans le sens opposé. C'est la notion classique de réversibilité.

Les difféomorphismes R -réversibles ne doivent pas nécessairement préserver le volume, cependant, ils ont des propriétés de symétrie spéciales. Notez que, à partir du définition $(F \circ R)^2 = \text{identité}$, de sorte que $F \circ R$ est une involution, disons U . Puisque $R = R^{-1}$, il s'ensuit que l'on peut écrire $f = U \circ R$, c'est-à-dire comme une composition de deux involutions.

Certains points périodiques des difféomorphismes réversibles sont faciles à trouver ; ce sont les points périodiques symétriques décrits par la proposition suivant :

Proposition 2.7.1

soit $p \in \text{Fix}(R)$ et suppose $F^k(p) \in \text{Fix}(R)$ ensuite $F^{2k}(p) = p$.

preuve 2.7.1

on a $F^k(p) = RF^k(p) = F^{-k}R(p) = F^{-k}(p)$ par conséquent $F^{2k}(p) = p$.

Par conséquent, des points périodiques symétriques peuvent être trouvés géométriquement nous cherchons que les auto-intersections de l'ensemble de points fixes de R sous l'itération de F .

On retrouve également certains points homocliniques de difféomorphismes R -réversibles géométriquement, comme illustré par ce qui suit.

Proposition 2.7.2

soit $p \in \text{Fix}(R)$ un point fixe symétrique pour F et soit $W^s(p)$ et $W^u(p)$ désignent la variété stable et instable de p .

ensuite $R(W^u(p)) = W^s(p)$ et $R(W^s(p)) = W^u(p)$. En particulier, si $q \in W^u(p) \cap \text{Fix}(R)$ alors q est un point homoclinique.

preuve 2.7.2

soit $x \in W^u(p)$ de sorte que $\lim_{n \rightarrow \infty} F^{-n}(x) = p$ Ainsi nous avons

$$p = R \lim_{n \rightarrow \infty} (F^{-n}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(R(x))$$

de sorte que $R(x) \in W^s(p)$ D'où $RW^u(p) \subset W^s(p)$.

On a de même $RW^s(p) \subset W^u(p)$, de sorte que $RW^u(p) = W^s(p)$

si $q \in W^u(p) \cap \text{Fix}(R)$, alors $q = R(q) \in W^s(p) \cap \text{Fix}(R)$ aussi, de sorte que q est un point homoclinique.[8]

Par conséquent, pour produire des points homocliniques pour les difféomorphismes réversibles, il suffit de trouver les intersections de $w^u(p)$ avec $\text{Fix}(R)$. Comme nous le montrons ci-dessous, c'est souvent facile à faire. Nous remarquons que les deux propositions ci-dessus sont vrai en bien plus général.

Les points homocliniques qui se trouvent également dans $\text{Fix}(R)$ sont classés symétriques points homocliniques. Un tel point est appelé un point homoclinique régulier si la variété instable (et donc aussi la variété stable) rencontre $\text{Fix}(R)$ transversalement au point homoclinique. Nous soulignons que symétrique régulière les points homocliniques n'ont pas besoin d'être non dégénérés (c'est-à-dire, les points stables et instables les variétés n'ont pas besoin de se croiser transversalement à un tel point). En effet, l'écurie et les variétés instables pourraient être toutes deux tangentes à l'espace propre -1 du dérivée de R rencontrant donc $\text{Fix}(R)$ transversalement, mais pas entre eux. Une un exemple de ceci est esquissé sur la Figure .

C'est un exercice facile pour prouver que l'homoclinique symétrique non dégénérée les points

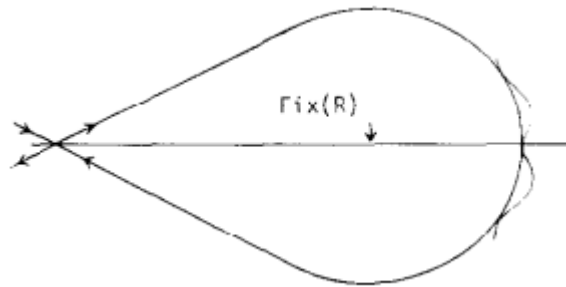


FIGURE 2.1 – Figure

doivent être réguliers.

Par conséquent, la notion de régularité est plus faible que non-dégénérescence. Dans les ap-

plications, il est souvent plus facile de vérifier la régularité, et plus un rappel important, la régularité donne lieu à une infinité de points à proximité.

Proposition 2.7.3

Soit p un point fixe symétrique et soit q un régulier point homoclinique symétrique en $W^u(p)$. Soit N n'importe quel voisinage de p dans $\text{Fix}(R)$. Alors il existe une infinité de points périodiques symétriques dans N .

preuve 2.7.3

Soit P un disque ouvert en $W^u(p)$ à propos de p et soit Q un disque ouvert dans $\text{Fix}(R)$ à propos de q . Par le λ - lemme de Palis, pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un entier n et un sous-ensemble ouvert $Q_n \subset Q$ tels que $F^n(Q_n)$ est $C^1 - \varepsilon$ fermée à P . Notez que P rencontre N transversalement à la p . Par conséquent, nous pouvons choisir ε petit-assez pour que $F^n(Q_n)$ soit transverse à N en un point q_n proche de p . D'où q_n et $F^{-n}(q_n) \in \text{Fix}(R)$, et il découle de la première proposition que q_n , est un point périodique symétrique de période $2n$.

Tous les points périodiques d'un difféomorphisme réversible ne sont pas symétriques cependant, les points périodiques non symétriques doivent apparaître par paires. En effet, si p est un point fixe pour F^k , alors $R(p)$ est également fixé par F^k par réversibilité. Arguments comme ci-dessus s'étendent facilement au cas non symétrique pour prouver.

Proposition 2.7.4

Soit p un point périodique non symétrique. Supposons $q \in w^u(p) \cap \text{Fix}(R)$. Puis $q \in w^u(p) \cap w^s(R(p))$.

Ainsi certains points hétérocliniques peuvent être trouvés géométriquement tout comme points homocliniques symétriques. Les points hétérocliniques symétriques réguliers sont défini comme des points homocliniques réguliers. La proposition suivante est vérifiée d'une manière similaire à ce qui précède.

Proposition 2.7.5

Soit F un difféomorphisme R -réversible du plan et supposons que p soit un point de selle non symétrique pour F . Supposons une branche de $W^u(p)$ et une branche de $W^s(p)$ rencontrent $\text{Fix}(R)$ transversalement. Alors il existe une infinité d'orbites périodiques symétriques qui entrent dans n'importe quel voisinage de p et $R(p)$. [9]

2.8 les Orbites homoclinique et solutions localisées pour un système de Schrödinger non linéaire

2.8.1 Point homoclines et hétéroclines

Dans certaines conditions les variétés stable et instable d'un point singulier x_p pourant posséder des points d'intersection distincts de x_p . De même deux variétés instable de deux points singulier distincts x_{p1} et x_{p2} pourtant se couper.

Définition 2.8.1

On appelle point homocline toute intersection $W^s(x_p) \cap W^u(x_p)$ distincte de x_p

On appelle point hétérocline toute intersection $W^s(x_{p1}) \cap W^u(x_{p2})$ (où $W^u(x_{p1}) \cap W^s(x_{p2})$) x_{p1} et x_{p2} étant deux points singulier distincts. Le caractère invariant par le flot des variétés invariantes stable et instable fait que :

des que l'on a un point homocline ou hétérocline ou en a une indéfnité.

Lorsque deus "arcs" de variétés invariantes de deux points singuliers (où W^s et W^u d'un même point singulier) seront confondus on parlera d'orbites hétéroclinique (où homoclinique) ou de connexion hétéroclinique (où homoclinique).

2.8.2 Orbites homocliniques d'un système planaires réversibles

Un systèmes planaires réversibles est définie. Soit R un difféomorphisme satisfaisant.

(i) $R \circ R = \text{identité}$,

(ii) l'ensemble des points fixes de R , $\text{Fix}(R)$, est du dimension 1.

R s'appelle une involution inverse. Un difféomorphisme T s'appelle R -réversible

si $R \circ T = T^{-1} \circ R$.

Les difféomorphismes R -réversibles ont certaines propriétés spéciales de symétrie que nous avons besoin étudier pour l'existence de solutions localisées dans les milieux non linéaire de Schrödinger.

Proposition 2.8.1

Soit p un point fixe non symétrique.

Supposons que $q \in W^u(p) \cap \text{Fix}(R)$. Ensuite $q \in W^u(p) \cap W^s(R(p))$.

Une classe de l'application planaires réversibles classiques est dérivée d'équations à différences symétriques du formulaire.

$$\phi_{n+1} + \phi_{n-1} = g(\phi_n) \quad (2.22)$$

qui surviennent souvent dans la discussion sur les états stationnaires des oscillateurs couplés dans un réseaux ou, comme il sera montré dans [7], les solutions de solitons de Schrödinger non linéaire treillis. Le système (2.22) peut être écrit comme une carte plane, notée T , de la forme

$$x_{n+1} = z_n, \quad z_{n+1} = -x_n + g(z_n), \quad \text{i.e.} \quad R(x, z) = (z, -x + g(z))$$

Il est facile de vérifier que R est inversible et $R^{-1}(x, z) = (-z + g(x), x)$. De plus, R est Difféomorphisme à C^1 si g est C^1 . Dans [7], nous supposons toujours que G est à C^1 et une fonction impaire.

On peut vérifier que R est R_1 -réversible par rapport à l'involution $R_1(x, z) = (z, x)$, et R_2 -réversible par rapport à l'involution $R_2(x, z) = (-z, -x)$ puisque g est une fonction impaire. Notez que les ensembles de points fixes $\text{fix}(R_1)$ et $\text{fix}(R_2)$ sont donnés par les lignes $z = x$ et $z = -x$, notés S_1 et S_2 , respectivement. Soit $f(z) = g(z) - 2z$.

Proposition 2.8.2 :

Soit $p \in \text{Fix}(R)$ un point fix symétrique de T . Soit $W^s(p)$ et $W^u(p)$ désignent les variétés stables et instables (respectivement) de p . Alors $R(W^u(p)) = W^s(p)$ et $R(W^s(p)) = W^u(p)$. En particulier :
si $q \in W^u(p) \cap \text{Fix}(R)$ alors q est un point homocline.

Théorème 2.8.1

Suppose que :

(i) $f(z)$ est une fonction C^1 et impaire, admet à trois zéros réels, $-z_0, 0$ et z_0 ($z_0 > 0$) avec $f'(0) > 0$,

(ii) $\sup_{z \geq z'} \{f(z)\} < 0$, pour certains $z' \geq z_0$

Donc, l'application planaire T a une orbite homocline.

Théorème 2.8.2

Suppose que

(i) $f(z)$ est une fonction C^1 et impaire, et $f(z) + 4z$ n'a que des trois zéros réels, $-z_0, 0$ et

$z_0(z_0 > 0)$ avec $f'(0) < -4$,

(ii) $\inf_{z \geq z'} (\{f(z) + 4z\}) > 0$, pour certains $z' > z_0$.

Donc, l'application planaire T a une orbite homoclinique.

preuve 2.8.1

Notons d'abord que nous avons la symétrie suivante :

si x_n est une solution de l'équation aux différences

$$f(x_n) = x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n \quad (2.23)$$

alors $\{y_n = (-1)^n x_n\}$ est une solution de l'équation aux différences

on a $g(x_n) = x_{n-1} + x_{n+1}$ alors si n pair on aura :

$$\begin{cases} y_n = (-1)^n x_n \\ y_{n+1} = (-1)^{n+1} x_{n+1} \\ y_{n-1} = (-1)^{n-1} x_{n-1} \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} y_n = x_n \\ y_{n+1} = -x_{n+1} \\ y_{n-1} = -x_{n-1} \end{cases}$$

on remplace sur (2.23) on trouve :

$$\begin{aligned} \hat{f}(y_n) &= -y_{n+1} - y_{n-1} - 2y_n \\ &= -g(y_n) - 2y_n \\ &= -f(y_n) - 2y_n - 2y_n \\ &= -f(y_n) - 4y_n \end{aligned}$$

D'où $\hat{f}(z) = -f(z) - 4z$ et vice versa. Les hypothèses (i) et (ii) garantissent que les hypothèses (i) et (ii) du théorème (2.8.1) sont satisfaites pour $\hat{f}(Z)$.

Il s'ensuit que la carte planaire T induite à partir de (2.8.2) a une orbite homoclinique, impliquant l'existence d'une orbite homocline pour la carte planaire T .

Théorème 2.8.3

Suppose que $f(z)$ est une fonction C^1 et impaire, et admet a trois zéros réels, $-z_0, 0$ et $z_0 (z_0 > 0)$ avec $f'(z_0) > 0$ Donc, l'application planaire T a une orbite hétéroclinique.

La preuve du théorème suivant est similaire à celle du théorème (2.8.1) et est donc omise.

Théorème 2.8.4

Suppose que $f(z)$ est une fonction C^1 et impaire, et $f(z) + 4z$ n'a que des trois zéros réels, $-z_0, 0$ et $z_0 (z_0 > 0)$ avec $f'(z_0) < -4$, Donc, l'application planaire T a une orbite hétéroclinique.

[7] La preuve des théorèmes (2.8.1), (2.8.2), et (2.8.3) sont trouvées dans Nous faisons quelques remarques avant d'appliquer ces théorèmes à la méthode non linéaire de Schrödinger discret.

Chapitre 3

SOLUTION LOCALES D'UNE ÉQUATION DE SCHRÖDINGER DISCRET À INTERACTION À LONG TERME

Introduction

Dans ce chapitre, Nous discutons l'existence des structures homocline par une étude théorique d'une équation de Schrödinger non linéaire. En fonction des données initiales, on utilise l'étude théorique pour montrer l'existence des solutions homoclines par l'utilisation des propriétés symétriques du système réversible.

3.1 Model (DNLS) :

Dans on montre que l'équation de chaîne NLS peut être dérivée d'une chaîne de pendule. Lorsque la distance entre les oscillateurs $\Delta x \rightarrow 0$, la chaîne des oscillateurs de Schrödinger est réduite à une chaîne de Schrödinger non linéaire.

Nous considérons une chaîne Frenkel-Kontorovich de N pendules, i.e. : chaque pendule dans la chaîne réagit seulement avec les deux pendules proches. [10]

Nous dérivons l'équation d'amplitude pour la chaîne de pendule. Voir

Solution locales d'une équation de Schrödinger discrét à interaction à long terme

Pour $n = 0$ (l'oscillateur centrale) nous avons :

$$i \frac{\partial \psi_0}{\partial t} + 2 |\psi_0|^2 \psi_0 + J \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\psi_{l-2\psi_0+\psi_{-l}}}{l^{1+\alpha}}$$

Cette équation peut être combinée a cette équation valide pour tout n :

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} + 2 |\psi_n|^2 \psi_n + J \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\psi_{n+l-2\psi_n+\psi_{n-l}}}{l^{1+\alpha}} = 0 \quad (3.1)$$

3.2 L'étude théorique

Dans les études récentes sur l'équation de Schrödinger , une grande attention a été portée aux solutions localisées

Dans il a concentré sur l'existence des solutions localisées de la forme $\psi_n = \phi_n e^{i\omega t}$ où ϕ_n sont indépendant du temps. ces solution sont périodique en temps et spatialement localisée. Notre objective est de prouver l'approche d'orbite homocline en utilisant les propriété des systèmes planaires réversible.[7]

pour

$$\psi_n = \phi_n e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad \frac{d\psi_n}{dt} = i\omega \phi_n e^{i\omega t}$$

l'équation (3.1) devient par :

$$-w\phi_n e^{i\omega t} + 2 |\phi_n|^2 \phi_n e^{i\omega t} + J e^{i\omega t} \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\phi_{n+l} - 2\phi_n + \phi_{n-l}}{l^{1+\alpha}} = 0$$

$$w\phi_n - 2 |\phi_n|^2 \phi_n = J \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\phi_{n+l} - 2\phi_n + \phi_{n-l}}{l^{1+\alpha}}$$

$$w\phi_n - 2 |\phi_n|^2 \phi_n = J \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\phi_{n+l} + \phi_{n-l}}{l^{1+\alpha}} - 2J \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\phi_n}{l^{1+\alpha}}$$

$$\sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\phi_{n+l} + \phi_{n-l}}{l^{1+\alpha}} = \frac{1}{J} (w\phi_n - 2 |\phi_n|^2 \phi_n) + 2\phi_n \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}}$$

on met :

$$G(\phi_n) = \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\phi_{n+l} + \phi_{n-l}}{l^{1+\alpha}}$$

$$g(\phi_n) = \frac{1}{J} (w\phi_n - 2 |\phi_n|^2 \phi_n)$$

ci à dire

$$G(\phi_n) = g(\phi_n) + 2\phi_n \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}}$$

on va calculer l'application T pour l'ordre 1 :

Solution locales d'une équation de Schrödinger discret à interaction à long terme

On pose $N = 4 \Rightarrow \frac{N}{2} - 1 = 1$

donc $G(\phi_n)$ Vous écrivez sous la forme suivant :

$$\phi_{n+1} + \phi_{n-1} = G(\phi_n)$$

On utilisant changement de variable :

$$\begin{cases} x_n^1 = \phi_{n-(\frac{N}{2}-1-0)} = \phi_{n-(1-0)} = \phi_{n-1} \\ x_n^2 = \phi_{n-(\frac{N}{2}-1-1)} = \phi_{n-(1-1)} = \phi_n \end{cases}$$

après changement de variables on aura

$$\begin{cases} x_{n+1}^1 = \phi_n = x_n^2 \\ x_{n+1}^2 = G(x_n^2) - x_n^1 \end{cases}$$

ci à dire l'application T écrire comme :

$T(x^1, x^2) = (x^2 - x^1 + 1^{1+\alpha}G(x_n^2))$ on va calculer l'application T pur l'ordre 2 :

pour $N = 6 \Rightarrow \frac{N}{2} - 1 = 2$

$$\sum_{l=1}^2 \frac{\phi_{n+l} + \phi_{n-l}}{l^{1+\alpha}} = G(\phi_n)$$

on a

$$\begin{aligned} \phi_{n+1} + \phi_{n-1} + \frac{\phi_{n+2}}{2^{1+\alpha}} + \frac{\phi_{n-2}}{2^{1+\alpha}} &= G(\phi_n) \\ \frac{\phi_{n+2}}{2^{1+\alpha}} &= G(\phi_n) - \phi_{n+1} - \phi_{n-1} - \frac{\phi_{n-2}}{2^{1+\alpha}} \end{aligned}$$

alors

$$\phi_{n+2} = 2^{1+\alpha}G(\phi_n) - 2^{1+\alpha}\phi_{n+1} - 2^{1+\alpha}\phi_{n-1} - \phi_{n-2}$$

On utilisant changement de variable :

$$\begin{cases} x_n^1 = \phi_{n-(\frac{N}{2}-1-0)} = \phi_{n-(2-0)} = \phi_{n-2} \\ x_n^2 = \phi_{n-(\frac{N}{2}-1-1)} = \phi_{n-(2-1)} = \phi_{n-1} \\ x_n^3 = \phi_{n-(\frac{N}{2}-1-2)} = \phi_{n-(2-2)} = \phi_n \\ x_n^4 = \phi_{n-(\frac{N}{2}-1-3)} = \phi_{n-(2-3)} = \phi_{n+1} \end{cases}$$

Solution locales d'une équation de Schrödinger discrét à interaction à long terme

$$\begin{cases} x_n^1 = \phi_{n-2} \\ x_n^2 = \phi_{n-1} \\ x_n^3 = \phi_n \\ x_n^4 = \phi_{n+1} \end{cases}$$

On observe le système suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1}^1 = \phi_{n-1} = x_n^2 \\ x_{n+1}^2 = \phi_n = x_n^3 \\ x_{n+1}^3 = \phi_{n+1} = x_n^4 \\ x_{n+1}^4 = \phi_{n+2} = 2^{1+\alpha}G(x_n^3) - 2^{1+\alpha}x_n^4 - 2^{1+\alpha}x_n^2 - x_n^1 \end{cases}$$

après changement de variables on aura

$$\begin{cases} x_{n+1}^1 = x_n^2 \\ x_{n+1}^2 = x_n^3 \\ x_{n+1}^3 = x_n^4 \\ x_{n+1}^4 = -x_n^1 - 2^{1+\alpha}x_n^2 - 2^{1+\alpha}x_n^4 + 2^{1+\alpha}G(x_n^3) \end{cases}$$

Alors l'application T écrire sous la forme suivant :

$T(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^2, x^3, x^4, -x^1 - 2^{\alpha+1}x^2 - 2^{1+\alpha}x^4 + 2^{1+\alpha}G(x_n^3))$ on va calculer l'application T pour l'ordre 3 : pour $N = 8, \Rightarrow \frac{N}{2} - 1 = 3$

$$\sum_{l=1}^3 \frac{\phi_{n+l} + \phi_{n-l}}{l_{1+\alpha}} = G(\phi_n)$$

$$\phi_{n+l} + \phi_{n-l} + \frac{1}{2^{\alpha+1}}\phi_{n+2} + \frac{1}{2^{\alpha+1}}\phi_{n-2} + \frac{1}{3^{\alpha+1}}\phi_{n+3} + \frac{1}{3^{\alpha+1}}\phi_{n-3} = G(\phi_n)$$

$$\frac{1}{3^{\alpha+1}}\phi_{n+3} = G(\phi_n) - \phi_{n+l} - \phi_{n-l} - \frac{1}{2^{\alpha+1}}\phi_{n+2} - \frac{1}{2^{\alpha+1}}\phi_{n-2} - \frac{1}{3^{\alpha+1}}\phi_{n-3}$$

$$\phi_{n+3} = 3^{\alpha+1}G(\phi_n) - 3^{\alpha+1}\phi_{n+l} - 3^{\alpha+1}\phi_{n-l} - \frac{3^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}}\phi_{n+2} - \frac{3^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}}\phi_{n-2} - \phi_{n-3}$$

on utilisant le changement de variable :

Solution locales d'une équation de Schrödinger discrét à interaction à long terme

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n^1 = \phi_{n-3} \\ x_n^2 = \phi_{n-2} \\ x_n^3 = \phi_{n-1} \\ x_n^4 = \phi_n \\ x_n^5 = \phi_{n+1} \\ x_n^6 = \phi_{n+2} \end{array} \right.$$

donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1}^1 = \phi_{n-2} = x_n^2 \\ x_{n+1}^2 = \phi_{n-1} = x_n^3 \\ x_{n+1}^3 = \phi_n = x_n^4 \\ x_{n+1}^4 = \phi_{n+1} = x_n^5 \\ x_{n+1}^5 = \phi_{n+2} = x_n^6 \\ x_{n+1}^6 = \phi_{n+3} = 3^{\alpha+1}G(x_n^4) - 3^{\alpha+1}x_n^5 - 3^{\alpha+1}x_n^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha+1}x_n^6 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha+1}x_n^2 - x_n^1 \end{array} \right.$$

après changement de variables on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1}^1 = x_n^2 \\ x_{n+1}^2 = x_n^3 \\ x_{n+1}^3 = x_n^4 \\ x_{n+1}^4 = x_n^5 \\ x_{n+1}^5 = x_n^6 \\ x_{n+1}^6 = -x_n^1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha+1}x_n^2 - 3^{\alpha+1}x_n^3 - 3^{\alpha+1}x_n^5 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha+1}x_n^6 + 3^{\alpha+1}G(x_n^4). \end{array} \right.$$

donc l'application T donnée par la forme suivant :

$$T(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6) = (x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, -x_n^1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha+1}x_n^2 - 3^{\alpha+1}x_n^3 - 3^{\alpha+1}x_n^5 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha+1}x_n^6 + 3^{\alpha+1}G(x_n^4))$$

enfin on va calcule l'application T pour l'ordre N' tel que $N' = \left(\frac{N}{2} - 1\right)$

et on a

$$\sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\phi_{n+l} + \phi_{n-l}}{l^{1+\alpha}} = G(\phi_n)$$

Solution locales d'une équation de Schrödinger discret à interaction à long terme

c-à-d

$$\sum_{l=1}^{N'} \frac{\phi_{n+l} + \phi_{n-l}}{l^{1+\alpha}} = G(\phi_n)$$

en suite $G(\phi_n)$ écrire comme :

$$\begin{aligned} G(\phi_n) &= \phi_{n+1} + \phi_{n-1} + \frac{1}{2^{1+\alpha}} (\phi_{n+2} + \phi_{n-2}) + \frac{1}{3^{1+\alpha}} (\phi_{n+3} + \phi_{n-3}) + \dots + \frac{1}{N'^{1+\alpha}} (\phi_{n+N'} + \phi_{n-N'}) \\ \Rightarrow \frac{1}{N'^{1+\alpha}} \phi_{n+N'} &= -\phi_{n+1} - \phi_{n-1} - \frac{1}{2^{1+\alpha}} (\phi_{n+2} + \phi_{n-2}) - \frac{1}{3^{1+\alpha}} (\phi_{n+3} + \phi_{n-3}) - \dots - \\ &\quad \frac{1}{N'^{1+\alpha}} \phi_{n-N'} + N'^{1+\alpha} G(\phi_n) \\ \phi_{n+N'} &= N'^{1+\alpha} \left(-\phi_{n+1} - \phi_{n-1} - \frac{1}{2^{1+\alpha}} (\phi_{n+2} + \phi_{n-2}) - \frac{1}{3^{1+\alpha}} (\phi_{n+3} + \phi_{n-3}) - \dots - \frac{1}{N'^{1+\alpha}} \phi_{n-N'} + N'^{1+\alpha} G(\phi_n) \right) \end{aligned}$$

Vérifier le document précédent

$$G(\phi_n) = (\phi_{n-1} + \phi_{n+1}) + \frac{1}{2^{1+\alpha}} (\phi_{n-2} + \phi_{n+2}) + \frac{1}{3^{1+\alpha}} (\phi_{n-3} + \phi_{n+3}) + \dots + \frac{1}{(N')^{1+\alpha}} (\phi_{n-N'} + \phi_{n+N'})$$

$$\begin{aligned} \phi_{n+N'} &= - (N')^{1+\alpha} \left(\sum_{l=1}^{N'-1} \frac{\phi_{n-l} + \phi_{n+l}}{l^{1+\alpha}} \right) - \phi_{n-N'} + (N')^{1+\alpha} G(\phi_n) \\ &= -\phi_{n+N'} - (N')^{1+\alpha} \left(\frac{\phi_{n-1} + \phi_{n+1}}{1^{1+\alpha}} + \dots + \frac{\phi_{n-l} + \phi_{n+l}}{l^{1+\alpha}} + \dots + \frac{\phi_{n-(N'-1)} + \phi_{n+(N'-1)}}{(N'-1)^{1+\alpha}} \right) + (N')^{1+\alpha} G(\phi_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{2N'} &= -x_n^1 - (N')^{1+\alpha} \left(\frac{x_n^{(N'+1)-1} + x_n^{(N'+1)+1}}{1^{1+\alpha}} + \dots + \frac{x_n^{(N'+1)-l} + x_n^{(N'+1)+l}}{l^{1+\alpha}} + \dots + \frac{x_n^{(N'+1)-(N'-1)} + x_n^{(N'+1)+(N'-1)}}{(N'-1)^{1+\alpha}} \right) \\ &\quad + (N')^{1+\alpha} G(x_n^{(N'+1)}) \\ &= -x_n^1 - (N')^{1+\alpha} \left(\sum_{l=1}^{N'-1} \frac{x_n^{(N'+1)-l} + x_n^{(N'+1)+l}}{l^{1+\alpha}} \right) + (N')^{1+\alpha} G(x_n^{(N'+1)}) \end{aligned}$$

$$T(x^1, x^2, \dots, x^{2N'}) = (x^2, x^3, \dots, x^{2N'}, -x^1 - (N')^{1+\alpha} \left(\sum_{l=1}^{N'-1} \frac{x_n^{(N'+1)-l} + x_n^{(N'+1)+l}}{l^{1+\alpha}} \right) + (N')^{1+\alpha} G(x_n^{(N'+1)}))$$

après changement de variables on aura

Calculer T^{-1}

on pose

Solution locales d'une équation de Schrödinger discrét à interaction à long terme

$$H(t^1, t^2, \dots, t^{2N'-1}) = -(N')^{1+\alpha} \left(\sum_{l=1}^{N'-1} \frac{t^{(N')-l} + t^{(N')+l}}{l^{1+\alpha}} \right) + (N')^{1+\alpha} G(t^{(N')})$$

on utilisant le changement de variable

$$\begin{aligned} t^1 &= x^2 \\ t^2 &= x^3 \\ &\vdots \\ t^{2N'-1} &= x^{2N'} \\ \text{alors} \end{aligned}$$

$$T(x^1, x^2, \dots, x^{2N'}) = (t^1, t^2, \dots, t^{2N'-1}, -x^1 + H(t^1, t^2, \dots, t^{2N'-1}))$$

$$\begin{aligned} T^{-1} \circ T(x^1, x^2, \dots, x^{2N'}) &= T^{-1}(t^1, t^2, \dots, t^{2N'-1}, -x^1 + H(t^1, t^2, \dots, t^{2N'-1})) \\ &= (x^1 + H(t^1, t^2, \dots, t^{2N'-1}) - H(t^1, t^2, \dots, t^{2N'-1}), t^1, t^2, \dots, t^{2N'-1}) \\ &= (x^1, x^2, \dots, x^{2N'}) \end{aligned}$$

donc

$$T^{-1}(t^1, t^2, \dots, t^{2N'-1}, y) = (-y + H(t^1, t^2, \dots, t^{2N'-1}), t^1, t^2, \dots, t^{2N'-1})$$

donc

$$\begin{aligned} T^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^{2N'}) &= (-x^{2N'} + H(x^1, x^2, \dots, x^{2N'-1}), x^1, x^2, \dots, x^{2N'-1}) \\ &= \left(-x^{2N'} - (N')^{1+\alpha} \left(\sum_{l=1}^{N'-1} \frac{x^{(N')-l} + x^{(N')+l}}{l^{1+\alpha}} \right) + (N')^{1+\alpha} G(x^{(N')}), x^1, x^2, \dots, x^{2N'-1} \right) \end{aligned}$$

T est inversible. De plus T est difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ si $(N')^{1+\alpha} G = H$ est $\mathcal{C}^1$.

Nous assumons que H est toujours de classe $\mathcal{C}^1$ est une fonction impaire. On peut vérifier que T est R_1 -réversible avec le respect de l'involution $R_1(x^1, x^2, \dots, x^{N'}, x^{N'+1}, \dots, x^{2N'}) = (x^{N'+1}, x^2, \dots, x^{N'}, x^1, \dots, x^{2N'})$, et R_2 -réversible avec le respect de l'involution $R_2(x^1, x^2, \dots, x^{N'}, x^{N'+1}, \dots, x^{2N'}) = (-x^{N'+1}, x^2, \dots, x^{N'}, -x^1, \dots, x^{2N'})$ dès que H est une fonction impaire.

Notez que l'ensemble des points fixes $Fix(R_1)$ et $Fix(R_2)$ sont données par les lignes

Solution locales d'une équation de Schrödinger discret à interaction à long terme

$x^{N'+1} = x^1$ et $x^{N'+1} = -x^1$, noté par S_1 et S_2 , respectivement. Soit

$$\begin{aligned}
 f(x^{N'+1}) &= (N')^{1+\alpha} G(x^{N'+1}) - (N')^{1+\alpha} 2x^{N'+1} \sum_{l=1}^{N'} \frac{1}{l^{1+\alpha}} \\
 &= (N')^{1+\alpha} \left(\frac{1}{J} (wx^{N'+1} - 2|x^{N'+1}|^2 x^{N'+1}) + 2x^{N'+1} \sum_{l=1}^{N'} \frac{1}{l^{1+\alpha}} \right) - 2x^{N'+1} \sum_{l=1}^{N'} \frac{1}{l^{1+\alpha}} \\
 &= (N')^{1+\alpha} \left(\frac{1}{J} (wx^{N'+1} - 2|x^{N'+1}|^2 x^{N'+1}) \right)
 \end{aligned}$$

D'où

$$f(z) = (N')^{1+\alpha} \left(\frac{1}{J} (wz - 2|z|^2 z) \right)$$

On montre que

- (i) $f(z)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et une fonction impaire, et a seulement trois zéros, $-z_0$, 0 , et z_0 , ($z_0 > 0$)
- (ii) $\sup_{z \geq z'} f(z) < 0$ pour certain $z > z_0$.

L'application T possède un orbite homocline.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le but de ce mémoire est d'étudier les structures homoclines pour l'équation de Schrödinger discrète non linéaire.

Nous avons divisé notre travail en trois chapitre : Dans le premier chapitre nous avons rappelé des notions générales et des définitions de système dynamique discret.

Le deuxième chapitre nous avons présenté quelques définitions sur l'équation de Schrödinger non linéaire continue et discret, ainsi que les systèmes réversibles symétriques.

Le dernier chapitre nous avons considéré une étude théorique pour un modèle d'une équation de Schrödinger discrète non linéaire et nous discutons l'existence des structures homoclines.

Bibliographie

- [1] A.Désilles, *Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret*, (24 septembre 2003), pp[21-113].
- [2] Z.Herrouache et S.E.Ben Mammeri, *Équation de Schrödinger non linéaire discrète et chaos spatio-temporel, mémoire fin d'étude, Master académique, Centre universitaire Mila, (2016/2017)pp[14-19]*.
- [3] R.Ben dahmane, *stabilité structurelle*, (juin 2019), en Mathématique, Universitaire Mohamed.Khider.Biskra, pp[16-18].
- [4] A.Simatra, *introduction à la mécanique quantique*,(2008)
- [5] M.Syafwan, *the existence and stability of solitons in discrete non linear Schrodinger equation, Doctoral dissertation, uninersity of Nottingham, 2012*.
- [6] J.S.W.lamb A.G.Roberts, *Time-reversal symmetry in dynamical systems, University of Warwick, physica D 112, Coventry CV47AL, UK, (1998)pp[2-5]*.
- [7] W.X.Qin.X.Xiao, *Homoclinic orbits and localized solutions in nonlinear Schrödinger lattices*, Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou 215006, People's Republic of China,(2007)pp[2305-2316].
- [8] R. DEVANEY, *Reversible diffeomorphisms and flows, Trans, Amer, Math, Sot, 218, (1976)pp[89-100]*
- [9] R.L. DEVANEY, *Homoclinic Bifurcations and the Area-Conserving HBnon Mapping, Department of Mathematics, Boston University, Boston, Massachusetts 02215 Received (May 3, 198)pp[256-258]*
- [10] M.William, L.Robinson, *Solitons, spatiotemporal chaos and synchronization in arrays of damped driven non linear oscillators Department of Mathematics and Applied Mathematics University of Cape Town, (2008) pp[17-19]*.