



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abdelhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

**Système d'évolution à base du problème de
Cauchy abstrait dans le cas hyperbolique
en théorie des semi-groupes**

Préparé par :

Oussama Bouanane
Abdelkader Boukezzoula

Soutenue devant le jury

Hafida Laib	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Chafika Sekhane	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Rakia Ahmed- Yahia	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire :2019/2020

Remerciement

Au début et avant tout, nous rendons grâce à **Allah** tout puissant qui il a aider a terminer ce travail. **Nous** le remercions chaleureusement nos encadreur **SEKHANE CHAFIKA** pour son soutien et son aides considérables, ses conseils précieux et ses remarque pertinents que n'ont guidé durant la réalisation de ce mémoire. Au fil de ce stage de mémoire, elle a orienté nos travail en nos proposant des pistes de recherche tout en laissant une grande liberté dans nos volonté certains aspect. Elle a toujours été disponible pour nous donner des conseils et pour relire et corriger ce que nos écrits.

Nous remerciments s'adressent également aux maitres assistantes. A : **AHMED-YAHIA RAKIA** et **LAIB HAFIDA** pour avoir accepter d'évaluer ce travail et faire l'honneur s de participer au jury.

Nous exprimons aussi nos reconnaissance à toute l'équipe des formateurs du Master Mathématiques et Applications et exceptionnellement au Docteur : **BOUDJEDAA Badredine** qui ont assuré une formation solide et efficace pour que serons à la hauteur. Nous espérons que nos travail soit à la hauteur des exigences formulées pour cette formation.

Pour finir, nous ne voudrions pas oublier nos familles et exceptionnellement **nos parents** nos proches qui ont soutenu moralement, sans les nommer. Explicitement, nous le remercions pour leur encouragement.

OUSSAMA ET ABEDELKADER

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A ma fleur de mes espérances, la source de la tendresse à la plus personne, à ma mère, je te dis que tu resteras toujours la plus adorable dans ma vie.

A celui qui a su me donner l'espoir et le courage nécessaire pendant mon long trajet d'étude, à mon père **FOUDIL**, je vous estime fort ainsi que je vous aime.

A mes chères sœurs : **IBTISSEME** et son mari **LAMINE**, **SONIA** et son mari **RACHID** et **HESNA** et son mari **SALIM**, qui m'ont encouragées, qui m'ont données la force et la volonté de surmonter tous les obstacles et les difficultés.

A mes adorables frères **ZINEDINE**, **ISLAM** pour leurs amours et leurs encouragements.

A mes jolies petites fleurs **GHOFRANE**, **SOUJOUDE** et **MARAM** qui m'aiment beaucoup.

A mes plus chers amis **DJAMEL**, **RAOUË**, **OUSSAMA**, **YESSER**, **HOUSSEINE**, **ISLAM**, **FARIDE**, **BAHAA**, **YACINE** et **KARIM** qui ont été toujours là et qui occupent une place vraiment particulière dans ma vie.

OUSSAMA

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A ma fleur de mes espérances, la source de la tendresse à la plus personne, à ma mère, je te dis que tu resteras toujours la plus adorable dans ma vie.

A celui qui a su me donner l'espoir et le courage nécessaire pendant mon long trajet d'étude, à mon père **ABEDELKADER**, je vous estime fort ainsi que je vous aime.

A mes chères sœurs : **WIAME, MAISSA**, qui m'ont encouragées, qui m'ont données la force et la volonté de surmonter tous les obstacles et les difficultés.

A mon adorable frère **NABIL** pour leurs amours et leurs encouragements.

A mes plus chers amis **AKRAM, MOHAMED LAMINE, ZINOUE, ABDOU, ACHRAF, ALI, ISSA, SAID, FOUZI** et **OUSSAMA** qui ont été toujours là et qui occupent une place vraiment particulière dans ma vie.

ABEDELKADER

Table des matières

Remerciement	i
Notations générales	vi
Introduction générale	viii
1 Les opérateurs linéaires	1
1.1 Les opérateurs linéaires	1
1.1.1 Préliminaire	1
1.1.2 Opérateur borné	2
1.1.3 Opérateurs fermés	3
1.1.4 Opérateurs inverses.	4
1.1.5 Opérateurs dissipatifs	5
1.1.6 Quelques théorème d'analyse fonctionnelle	6
1.2 Ensemble résolvant, spectre et résolvant	7
2 Semi-groupes à un paramètre d'opérateurs linéaires bornés	12
2.1 Les C_0 -semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés	12
2.2 L'approximation de Hille-Yosida	16
2.3 Théorème de Hille-Yosida	16
2.4 Théorème de Lumer-Phillips	18
2.5 Quelques C_0 - semi-groupes particuliers	18
2.5.1 C_0 - semi-groupes différentiables	18
2.5.2 C_0 - semi-groupes analytiques	19
3 Problème abstrait de Cauchy	21
3.1 Problème homogène à valeur initiale	21
3.2 Problème non homogène à valeur initiale	27
3.3 Une application	33

TABLE DES MATIÈRES

4	Système d'évolution	35
4.1	Système d'évolution	35
4.2	Stabilité d'une famille de générateurs	41
4.3	Un système d'évolution dans le cas hyperbolique	45
4.4	La régularisation de la solution dans le cas hyperbolique	50
4.5	Un système d'évolution non homogène dans le cas hyperbolique	53
	Conclusion	56
	Bibliographie	57

Notations générales

$\ \cdot\ _X$	La norme d'opérateur sur l'espace de Banach X .
$(B(X), +, \cdot)$	L'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés de X dans X .
Ω	Ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue.
$D(\Omega)$	L'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support compact dans Ω .
$\ \cdot\ _\infty$	La norme de la convergence uniforme sur $C(X, Y)$ lorsque Y e.v.n.
X^*	Le dual topologique de l'espace de Banach X .
$L(X, Y)$	L'ensemble des opérateurs linéaires et continues de X dans Y .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produite scalaire dans la dualité X^*, X .
$\langle f, x \rangle$	Désigne $f(x)$ pour $f \in X^*$ et $x \in X$.
$G(\bar{A})$	La fermeture de A .
$GL(X)$	L'ensemble des opérateurs inversibles.
A^*	L'opérateur adjoint de A .
$\arg z$	Argument de z où $z \in \mathbb{C}$.
$ \arg z $	Le module d'argument de z où $z \in \mathbb{C}$.
$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$	La dériver partielle de u par rapport à t .
$L^\infty(\mathbb{R})$	L'ensemble des fonctions réelles bornées sur $\mathbb{R}$.
$L^2(\omega)$	L'espace des fonctions de carré intégrable sur ω .
$H^1(\omega)$	L'espace de Sobolev des fonctions qui appartiennent à $L^2(\omega)$ et dont les dérivées au sens des distributions appartiennent à $L^2(\omega)$.
$H_0^1(\omega)$	L'adhérence de $D(\omega)$ dans $H^1(\omega)$, c-à-d $H_0^1(\omega) = \overline{D(\omega)}$.
$H^2(\omega)$	L'espace de Sobolev.

$L^1(0, T; X)$	L'espace des fonctions intégrables sur $[0, T]$ à valeur dans X .
$C^1([s, T]; X)$	L'espace des fonctions continûments intégrables sur $[s, T]$ dans X .

Introduction générale

Motivation, position et discussion du problème

L'étude de mathématiques est une grande branche qui base sur des nécessaires outils pour résoudre beaucoup des problèmes « bien posés » dans les différents théories comme des équations d'évolution, les semi-groupes et les opérateurs linéaires .

La théorie des opérateurs (synonymes des applications linéaires continues) est assez complexe, nous ne donnerons ici qu'un très bref aperçu de la partie concernant les opérateurs bornés, fermés, inverses, et dissipatifs, pour lesquels on peut généraliser assez correctement les résultats très simples valables en dimension finie.

Un semi-groupe est d'origine algébrique qui contient la loi de composition interne associative comme dans le cas de la famille $\{T(t), t \geq 0\}$ d'opérateurs linéaires bornée sur un espace de Banach X dans X . L'application $T : [0, +\infty[\rightarrow B(X)$ est vérifiée : $T(0) = I$ (où I est l'opérateur identité de X) et $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$ est appelé le semi-groupe .

La théorie des semi-groupes est découverte par Augustin.Louis.Cauchy avec une question qui annonce que :

« Déterminer toutes les fonctions complexes continues non nulles vérifiant s :

$$T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0 \gg$$

en 1821, mais elle n'a pas trouvé aucune motivation.

Le résultat de question posée par Louis.Cauchy est aussi prouvé par Henri.K.Abel (1802-1829) et qu'il a défini par :

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+ T(t)x}{dt} \Big|_{t=0}, \forall x \in D(A).$$

Il a nommé le générateur infinitésimal de semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$. Cela a donné la naissance effective de la théorie. Cette théorie est appliquée par Hadamard (1865-1963) qui a souligné avec [12] dans le problème autonome de Cauchy qu'il admet des

solutions uniques pour tout $t \geq 0$.

La célébrité de semi-groupe est connue grâce à Eina.Hille (1894-1980) et Kosaku.Yosida (1909-1990) qui ont caractérisé le générateur infinitésimal de semi-groupe fortement continue [9] et [15]. La théorie a vu un parfait degré par les monographies Goldestein et Pazy [3].

Les divers modèles mathématiques comme la physique, la chimie et la finance ... etc, permettent d'étudier les équations aux dérivées partielles.

Le problème sous la forme suivante :

$$(PHC) \begin{cases} u'(t) = Au(t) , t \geq 0 \\ u(0) = x. \end{cases}$$

est dite Le problème homogène abstrait de Cauchy.

Soit $t \mapsto u(t)$ une fonction qui décrit l'état d'un système dans le temps. On se donne aussi la donnée initiale $u(0) = x \in D(A)$ lors de l'expérience.

La fonction u prend ses valeurs dans un ensemble X Banach. Cette solution du problème (PHC) est donnée par : $u(t) = e^{tA}x$, où A est opérateur linéaire non borné, mais il souvent fermé, pour cela on utilise le théorème de Hille-Yosida et le théorème de Lumer-Phillips pour voir si A génère un C_0 -semi-groupe $T(t)_{t \geq 0}$, donc la solution de (PHC) est donnée par : $u(t) = T(t)x$, $\forall t \geq 0, \forall x \in X$.

Dans la situation où A est remplacé par $A(t)$ on trouve le problème d'évolution sous la forme :

$$(PE) \begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + f(t), & s < t \leq T \\ u(s) = x. \end{cases}$$

Pour avoir un système d'évolution il faut vérifier les deux conditions suivantes :

- i) $U(t,t) = I$, $U(t,s) = U(t,r)U(r,s)$, pour $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$.
- ii) $(t,s) \mapsto U(t,s)$ est fortement continue, pour $0 \leq s \leq t \leq T$.

Dans ce cas les solutions de (PE) sont données par : $u(t) = u(t,s)x$.

Plan de travail

Ce mémoire est composé de quatre chapitres. Après l'introduction, nous avons donné au chapitre (1) :

les notions et les définitions des opérateurs que nous avons utilisé dans toute la suite de mémoire. Ensuite, le chapitre(2) :

A présenté une introduction à la théorie des semi-groupes et l'étude de deux classes importants des semi-groupes savoir les semi-groupes différentiables et analytiques.

Dans les deux dernières chapitres, la plupart des outils et des matériaux suivent Pazy.A, au chapitre(3) :

Nous allons étudié en détaille le problème de Cauchy abstrait homogène et non homogène et par l'occasion nous avons donné une application illustrative des équations aux dérivés partielles. Ensuite, le chapitre(4) :

A présenté la démarche pour étudier les équations d'évolutions qui sont plus générales que le(PHC) en donnant à la fin la construction d'un système d'évolution dans le cas hyperbolique.

En fin, nous avons donné la conclusion du présent travail.

Chapitre 1

Les opérateurs linéaires

Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons représenté la théorie des opérateurs linéaires entre ces espaces.

Nous sommes consacrés sur quelques propriétés spectrales de ces opérateurs, à baser plutôt a des théorèmes très riches concernant les caractérisations des opérateurs.

1.1 Les opérateurs linéaires

1.1.1 Préliminaire

Soit X et Y deux espaces de Banach sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Définition 1.1.1.

On appelle A est un opérateur si A est une application tel que :

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto Ax \end{aligned}$$

avec $D(A)$ est le domaine de A .

i) L'opérateur A est dit linéaire si :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in D(A), \text{ on a } A(x + \alpha y) = A(x) + \alpha A(y).$$

1.1. LES OPÉRATEURS LINÉAIRES

ii) On définit l'image d'opérateur A par : $\text{Im}(A) = \{y \in Y, \exists x \in D(A), y = Ax\}$.

iii) On définit le noyau d'opérateur A par : $\ker(A) = \{x \in D(A) / Ax = 0\}$.

1.1.2 Opérateur borné

Définition 1.1.2.

L'opérateur linéaire A est dit borné si et seulement si il est transformé tout ensemble borné de X à un ensemble borné de Y .

Définition 1.1.3.

L'opérateur A est dit borné de X dans Y s'il est une application linéaire continue tel que :

$$\exists c > 0, \forall x \in X : \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$$

Théorème 1.1.1.

La définition (1.1.2) et (1.1.3) sont équivalentes.

Démonstration :

La définition (1.1.2) $\Rightarrow$ La définition (1.1.3).

- Si $x = 0$ (le résultat est trivial).
- Si $x \neq 0$, on considère la boule d'unité fermé $\overline{B}(0, 1)$ de l'espace X . Comme $\overline{B}(0, 1)$ est un l'ensemble borné de X alors $A(\overline{B}(0, 1))$ est un ensemble borné de Y (d'après def(1.1.2)), alors $\exists c > 0$, tel que : $\|Az\| \leq c, \forall z \in \overline{B}(0, 1)$.

Pesons $z = \frac{x}{\|x\|}$ tel que $x \neq 0, \forall x \in X$

$$\Rightarrow \exists c > 0, \text{ tel que : } \|Az\| \leq c$$

$$\Rightarrow \exists c > 0, \text{ tel que : } \|A(\frac{x}{\|x\|})\| \leq c$$

$$\Rightarrow \|Ax \frac{1}{\|x\|}\| \leq c \Rightarrow \|Ax\| \frac{1}{\|x\|} \leq c$$

$$\Rightarrow \|Ax\| \leq c\|x\|$$

$$\Rightarrow \exists c > 0, \text{ tel que : } \|Ax\| \leq c\|x\|, \forall x \in X.$$

La définition (1.1.2) $\Rightarrow$ La définition (1.1.2).

Soit B un ensemble borné de X donc $\exists c' > 0, \|x\|_X \leq c', \forall x \in B$.

1.1. LES OPÉRATEURS LINÉAIRES

Montrons que $A(B)$ un ensemble borné de Y . Soit $y \in A(B) \Rightarrow \exists x \in B$ tel que $y = Ax$.

D'après def(1.1.3) on a :

$$\exists c > 0, \forall x \in B : \|y\| = \|Ax\| \leq c\|x\| \leq cc'$$

$\exists c'' > 0$, tel que : $\|y\| \leq c''$, $\forall y \in A(B)$ d'où $A(B)$ est un ensemble borné. $\square$

1.1.3 Opérateurs fermés

Définition 1.1.4.

Le graphe de A est l'ensemble $G(A) = \{(x, Ax)/x \in X\} \subset X \times Y$. Noter que le graphe est un sous espace de $X \times Y$.

Lemme 1.1.1.

X et Y deux espace vectoriels normés et A est un opérateur linéaire continue, alors $G(A)$ est fermé pour cette norme.

Démonstration :

Soit $\{(x_n, y_n)\}$ une suite dans $G(A)$ qui converge vers (x, y) dans $(X \times Y)$ alors, $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$ si $n \rightarrow +\infty$. Comme $(x_n, y_n) \in G(A)$ donc, $y_n = Ax_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et A continue :

$$y = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n = Ax$$

alors, $(x, y) = (x, Ax) \in G(A)$ et donc, $G(A)$ est fermé. $\square$

Théorème 1.1.2.

Soit A un opérateur linéaire dans X les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est fermé.

(ii) Si $\{x_n\}$ une suite dans $D(A)$ converge vers x dans X et si $\{Ax_n\}$ converge vers y dans Y , alors x est dans $D(A)$ et $Ax = y$.

Définition 1.1.5. (Extension)

Soient A et B deux opérateurs de X dans Y , deux espaces de Banach, avec $D(A)$ et $D(B)$ sont les domaines de A et B respectivement, on dit que A est une extension de B si $D(B) \subset D(A)$ et $Bx = Ax$, $\forall x \in D(B)$, on dit aussi que B est la restriction de A .

Définition 1.1.6. (Opérateur fermable)

Soit un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$, avec X et Y deux espaces de Banach. A est dit fermable s'il admet une extension fermé. L'adhérence de son graphe est le graphe d'un

1.1. LES OPÉRATEURS LINÉAIRES

opérateur noté $\overline{A}$ qu'on appelle la fermeture de A . De plus on a

$$G(\overline{A}) = \overline{G(A)}.$$

1.1.4 Opérateurs inverses.

Définition 1.1.7.

Un opérateur $A \in L(X)$ est dit inversible s'il admet un inverse dans $L(X)$ ie : $\exists B \in \mathcal{L}(X)$ tel que : $AB = BA = I$ où I désigne l'opérateur identité de X . On note $\mathcal{GL}(X)$ l'ensemble des opérateurs $A \in L(X)$ inversibles.

Pour une telle application on définit l'application inverse $(\text{Im}(A), A^{-1})$ telle que $\forall y \in \text{Im}(A)$, $\exists ! x \in D(A)$ tel que $A^{-1}y = x$.

Cette définition implique que :

$$\forall x \in D(A) : A^{-1}Ax = x.$$

$$\forall y \in D(A) : AA^{-1}y = y.$$

Théorème 1.1.3.

Soient X, Y deux espaces de Banach. Soit A un opérateur linéaire défini de X dans Y , alors

(i) L'opérateur inverse $(\text{Im}(A), A^{-1})$ existe si et seulement si : $\ker(A) = 0$.

(ii) Si l'opérateur inverse existe, il est linéaire et continue.

Corollaire 1.1.1.

Soit $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ et $A \in L(X, Y)$ et soit A un opérateur fermé alors les propriétés suivants sont équivalentes :

i) $\exists c > 0$ tel que, pour tout $x \in X$ on a :

$$\|Ax\|_Y \geq c\|x\|_X.$$

ii) A est injectif et $\text{Im}(A)$ est fermé dans Y .

Corollaire 1.1.2.

Soit $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ et $A \in L(X, Y)$ alors, les propriétés suivants sont équivalentes :

i) $\text{Im}(A) = Y$ et $\exists c > 0$ tel que :

$$\forall x \in X, \|Ax\|_Y \geq c\|x\|_X.$$

1.1. LES OPÉRATEURS LINÉAIRES

ii) A est inversible.

Lemme 1.1.2.

Soit $A \in L(X)$. Si $\|A\| < 1$ alors $(I - A) \in GL(X)$, on a

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n \geq 0} A^n$$

de plus, $GL(X)$ est un ouvert de $L(X)$ et l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue sur $GL(X)$.

1.1.5 Opérateurs dissipatifs

Définition 1.1.8. [3]

On note, pour chaque $x_0 \in X$

$$\mathcal{F}(x) = \{f \in X^* : \langle f, x \rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2\}$$

Un opérateur linéaire A est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$, il existe $f \in \mathcal{F}(x)$ tel que $\Re \langle f, Ax \rangle \leq 0$.

Le théorème suivant nous présentons une caractérisation utile des opérateurs dissipatifs.

Théorème 1.1.4. [3]

Un opérateur linéaire A est dissipatif si et seulement si :

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \quad \forall x \in D(A) \text{ et } \forall \lambda > 0.$$

Démonstration :

Supposons que A un opérateur dissipatif, $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$ si et seulement si $f \in \mathcal{F}(x)$ et $\Re \langle f, Ax \rangle \leq 0$, alors :

$$\|\lambda x - Ax\| \|x\| \geq |\langle \lambda x - Ax, f \rangle| \geq \Re \langle \lambda x - Ax, f \rangle \geq \lambda \|x\|^2$$

d'où il résulte l'inégalité de l'énoncé.

Soit $x \in D(A)$ et supposons que $\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|$, $\forall \lambda > 0$.

Si $f_\lambda \in \mathcal{F}(\lambda x - Ax)$ est $g_\lambda = \frac{f_\lambda}{\|f_\lambda\|}$, alors $\|g_\lambda\| = 1$ et

$$\begin{aligned} \lambda \|x\| &\leq \|\lambda x - Ax\| \leq \|f_\lambda\|^{-1} \|\lambda x - Ax\| \|f_\lambda\| = \|f_\lambda\|^{-1} \langle \lambda x - Ax, f_\lambda \rangle = \langle \lambda x - Ax, g_\lambda \rangle \\ &= \lambda \Re \langle x, g_\lambda \rangle - \Re \langle Ax, g_\lambda \rangle \\ &\leq \lambda \|x\| - \Re \langle Ax, g_\lambda \rangle \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.1. LES OPÉRATEURS LINÉAIRES

Donc $\Re\langle Ax, g_\lambda \rangle \leq 0$, alors pour tout $\lambda > 0$:

$$\Re\langle x, g_\lambda \rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Ax\|.$$

D'autre part en appliquant le théorème d'Alaoglu-Bourbaki ([8], théorème V.4.2. page 424), la boule unité de X^* est compact pour la topologie faible*, donc la suite généralisée g_λ , pour $\lambda \rightarrow +\infty$ admet une valeur d'adhérence pour la topologie faible* $g \in X^*$, $\|g\| \leq 1$. De l'inégalité (1.1) on a $\Re\langle Ax, g \rangle \leq 0$ et $\Re\langle x, g \rangle \geq \|x\|$.

D'autre part on a $\Re\langle x, g \rangle \leq |\langle x, g \rangle| \leq \|x\|$ et donc $\langle x, g \rangle = \|x\|$.

Soit $f = \|x\|_g$ alors $f \in \mathcal{F}(x)$ et $\Re\langle f, Ax \rangle \leq 0$.

Donc pour tout $x \in D(A)$, il existe $f \in \mathcal{F}(x)$ telle que $\Re\langle f, Ax \rangle \leq 0$, donc A est dissipatif. □

Remarque 1.1.

Si A est un opérateur dissipatif alors, $\forall \lambda > 0$ l'opérateur

$$(\lambda I - A)x = 0 \Rightarrow 0 \leq \|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Si de plus, $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)$ est surjectif on dit que A est maximal dissipatif.

On note A est m -dissipatif.

Théorème 1.1.5.

Soit A un opérateur dissipatif à domaine dense dans X , s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que :

$$\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X, \text{ alors pour tout } \lambda > 0 \text{ on a, } \text{Im}(\lambda I - A) = X.$$

1.1.6 Quelques théorème d'analyse fonctionnelle

Soient X et Y deux e.v.n. On désigne la norme suivante sur $L(X, Y)$ par :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{x \in X} \|Ax\|.$$

Théorème 1.1.6. (Banach-Steinhaus)[6]

Soient X et Y deux espaces de Banach. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires continues de X dans Y . On suppose que

$$\sup_{i \in I} \|A_i x\| < \infty, \quad \forall x \in X$$

alors

$$\sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty.$$

Autrement dit, il existe un constant c telle que

$$\|A_i x\| \leq c\|x\|, \quad \forall x \in X, \quad \forall i \in I.$$

Corollaire 1.1.3.

Soient X et Y deux espace de Banach. Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite d'opérateurs linéaires de X dans Y , tel que pour chaque $x \in X$, $A_n x$ converge quand $n \rightarrow \infty$ vers une limite notée Ax , alors on a :

$$i) \sup_n \|A_n\| < \infty.$$

$$ii) A \in L(X, Y).$$

$$iii) \|A\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|.$$

Démonstration :

(i) résulte directement du théorème (1.1.6) . Il existe donc une constante c telle que

$$\|A_n x\| \leq c\|x\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in X.$$

D'autre part il est clair que A est linéaire, d'où (ii).

Enfin on a

$$\|A_n x\| < \|A_n\| \|x\|, \quad \forall x \in X$$

et (iii) s'en déduit. □

Théorème 1.1.7. (graphe fermé) [6]

Soient X et Y deux espace de Banach. Soit A un opérateur linéaire de X dans Y . On suppose que le graphe de A , $G(A)$ est fermé dans $X \times Y$, alors A est continue.

Remarque 1.2.

Tout application continue (linéaire ou non linéaire) a un graphe fermé.

1.2 Ensemble résolvant, spectre et résolvant

Cette section est consacrée au rudiments de la théorie spectral : ensemble résolvant, spectre et valeur propre.

Définition 1.2.1.

Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire.

1.2. ENSEMBLE RÉSOLOVANT, SPECTRE ET RÉSOLOVANT

i) On appelle ensemble résolvant de A qu'on note $\rho(A)$, l'ensemble :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A : D(A) \rightarrow X \text{ est bijectif et } (\lambda I - A)^{-1} : X \rightarrow D(A) \text{ est borné}\}.$$

Si A est fermé alors on a :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A : D(A) \rightarrow X \text{ est inversible}\}.$$

Si $\lambda \in \rho(A)$ alors on note $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1} \in L(X)$ est le résolvant de A .

ii) On appelle ensemble spectre de A qui noter $\sigma(A)$ est le complémentaire de résolvant et on écrit :

$$\sigma(A) = \mathbb{C}/\rho(A).$$

Proposition 1.2.1.

La résolvant d'un opérateur linéaire $A \in B(X)$, a les propriétés suivantes :

i) Si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, alors :

$$R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda)R(\lambda; A)R(\mu; A).$$

ii) $R(.; A)$ est une application analytique sur $\rho(A)$.

iii) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\|\lambda\| > \|A\|$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et nous avons :

$$R(\lambda; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

iv) Nous avons :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}, \quad \forall \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lambda \in \rho(A).$$

Démonstration :

i) Nous avons successivement :

$$\begin{aligned} R(\lambda; A) - R(\mu; A) &= (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} \\ &= (\lambda I - A)^{-1} (\mu I - A - \lambda I + A) (\mu I - A)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda) R(\lambda; A) R(\mu; A) \end{aligned}$$

$$\forall \lambda, \mu \in \rho(A).$$

ii) Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$. Notons $D(\lambda_0; \frac{1}{\|R(\lambda_0; A)\|})$ le disque ouvert de centre λ_0 et de rayon $\frac{1}{\|R(\lambda_0; A)\|}$. Alors, pour $\lambda \in D(\lambda_0; \frac{1}{\|R(\lambda_0; A)\|})$, nous avons :

$$\lambda I - A = [I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0 - A)](\lambda_0 I - A).$$

Mais :

$$\|(\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)\| = |\lambda_0 - \lambda|\|R(\lambda_0; A)\| < 1.$$

Compte tenu du lemme (??) , il résulte que :

$$I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A) \in \mathcal{GL}(X),$$

d'où $\lambda I - A \in \mathcal{GL}(X)$ et :

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)^{-1} &= (\lambda_0 I - A)^{-1} [I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)]^{-1} \\ &= R(\lambda_0; A) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; A)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{-1} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0; A)^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $R(., A)$ est analytique sur $\rho(A)$.

iii) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|A\|$. Alors $\|\lambda^{-1}A\| < 1$, d'où $I - \lambda^{-1}A \in \mathcal{GL}(X)$. De plus :

$$(I - \lambda^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1}A)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}.$$

Par conséquent :

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1} (I - \lambda^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

L'assertion (iv) s'obtient par récurrence. Pour $n = 1$, nous avons :

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda; A) = \frac{d}{d\lambda} (\lambda I - A)^{-1} = -(\lambda I - A)^{-2} = R(\lambda; A)^2.$$

Supposons que pour $k \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda; A) = (-1)^k k! R(\lambda; A)^{k+1}.$$

Montrons que :

$$\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}R(\lambda;A) = (-1)^{k+1}(k+1)!R(\lambda;A)^{k+2}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}R(\lambda;A) &= \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}R(\lambda;A)\right) \\ &= \frac{d}{d\lambda}[(-1)^k k!(\lambda I - A)^{-k-1}] \\ &= (-1)^k k!(-k-1)(\lambda I - A)^{-k-2} \\ &= (-1)^{k+1}(k+1)!R(\lambda;A)^{k+2}\end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda;A) = (-1)^n n!R(\lambda;A)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

□

Proposition 1.2.2.

Soit $A \in B(X)$. Alors :

- i) $\sigma(A) \neq \emptyset$.
- ii) $\sigma(A)$ est un ensemble compact.

Démonstration :

- i) Supposons que $\sigma(A) = \emptyset$. Alors $\rho(A) = \mathbb{C}$. Par conséquent, l'application $\lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}$ est définie sur $\mathbb{C}$. De plus, pour $|\lambda| > \|A\|$, nous avons :

$$R(\lambda;A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}, \quad \forall \lambda \in \rho(A).$$

il s'ensuit que :

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} R(\lambda;A) = 0$$

Donc il existe $M > 0$ tel que $\|R(\lambda;A)\| < M, \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Le théorème de Liouville([12],page.231) implique que $R(\cdot;A)$ est constante sur $\mathbb{C}$ et que cette constante ne peut être que 0. Donc $(\lambda I - A)^{-1} = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ ce qui est absurde. Par conséquent $\sigma(A) \neq \emptyset$.

- ii) Nous obtenons que :

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| < \|A\|\}.$$

1.2. ENSEMBLE RÉSOLOVANT, SPECTRE ET RÉSOLOVANT

L'ensemble $\sigma(A)$ est donc borné. Comme nous avons vu que $\sigma(A)$ est un ensemble fermé, il est donc compact.

□

Lemme 1.2.1.

Si $A : D(A) \rightarrow X$ est un opérateur linéaire tel que $\rho(A) \neq \emptyset$, alors A est fermé.

Démonstration :

Soit $\lambda \in \sigma(A)$. On a $(\lambda I - A)^{-1}$ est borné sur X et donc fermé par la suite $(\lambda I - A)$ est fermé, ce qui entraîne que A est fermé.

□

Chapitre 2

Semi-groupes à un paramètre d'opérateurs linéaires bornés

Introduction

Ce chapitre est constitué de deux sections, la première est consacré à l'étude de la théorie des semis groupes d'opérateur linéaire et sa propriété sur un espace de **Banach**. Nous avons précisé également des théorèmes importants concernant les générateurs infinitésimaux des C_0 -semi- groupes et quelques conséquences des ces théorèmes. Nous avons représenté aussi dans la deuxième sections le théorème de **Hille-Yosida**, l'approximation et le théorème de **Lumer-Phillips** dans les C_0 -semi-groupes et quelques notions sur les C_0 -semi-groupes différentiables et analytiques.

2.1 Les C_0 -semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés

Définition 2.1.1. [3]

Soit X est espace de Banach.

- Une famille à un paramètre $(T(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés de X dans X est dite un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si et seulement si :
 - i) $T(0) = I$ (où I est l'opérateur identité de X).
 - ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$.
- Un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit uniformément

2.1. LES C_0 -SEMI-GROUPES D'OPÉRATEURS LINÉAIRES BORNÉS

continue sur X si :

- $\forall x \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$
- L'opérateur linéaire A définit qui par :

$$D(A) = \{x \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\}$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+ T(t)x}{dt} \Big|_{t=0}, \forall x \in D(A)$$

est appelé le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$.

Définition 2.1.2. [3]

Une famille $T(t)$, $t \in [0; +\infty[$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est un semi-groupe fortement continu si et seulement si :

- i) $T(0) = I$ (où I est l'opérateur identité de X).
- ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$.
- iii) $\forall x \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0.$

Ce type de semi groupe sera simplement appelé un C_0 -semi-groupe.

Théorème 2.1.1. [4]

Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe sur X et soit A son générateur infinitésimal. Alors on a les propriétés suivantes :

- i) Pour tout $x \in X$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

- ii) Pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A) \text{ et } A\left(\int_0^t T(s)x ds\right) = T(t)x - x.$$

- iii) Si $x \in D(A)$ alors $T(t)x \in D(A)$ pour tout $x \geq 0$ et

$$\frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax.$$

- iv) Pour $x \in D(A)$ et $t > s \geq 0$

$$T(t)x - T(s)x = \int_0^t AT(\tau)d(\tau).$$

Lemme 2.1.1. [3]

Si $(T(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe sur X , alors pour tout $x \in X$ l'application : $t \mapsto T(t)x$ est une fonction continue sur $[0, +\infty[$ dans X .

Théorème 2.1.2.

Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe sur X . Alors il existe un réel $\omega \geq 0$ et un réel $M \geq 1$ tel que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration :

Considérons le compact $[0, 1]$, comme $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est fortement continue, d'après le lemme précédent on a :

$\forall x \in X$, l'application $t \mapsto T(t)x$ est continue dans l'intervalle $[0, 1]$ par cette application est un compact, donc elle est bornée, alors $\exists M_x$ tel que :

$$\|T(t)x\| \leq M_x, \quad \forall t \in [0, 1].$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus $\exists M > 0$ telle que

$$\|T(t)\| \leq M, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Donc

$$\exists \omega = 0 \text{ tel que } \|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Considérons maintenant le cas où $t \notin [0, 1]$.

Alors $t = n + \delta$, où $n \in \mathbb{N}$ et $\delta \in [0, 1]$.

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} T(t) &= T(n + \delta) \\ &= T(n)T(\delta) \\ &= \overbrace{T(1 + 1 + 1 + \cdots + 1)}^{n \text{ fois}} T(\delta) \\ &= [T(1)]^n T(\delta). \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
 \|T(t)\| &= \|[T(1)]^n T(\delta)\| \\
 &\leq \|[T(1)]^n\| \|T(\delta)\| \\
 &\leq \|T(1)\|^n \|T(\delta)\| \\
 &\leq M^n M = M e^{n \log M} \\
 &= M e^{n\omega}
 \end{aligned}$$

□

Remarque 2.1.

Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe sur X .

- Si $M = 1$ et $\omega = 0$, alors $(T(t))_{t \geq 0}$ est appelé C_0 -semi-groupe de contraction ($\|T(t)\| \leq 1$).
- Si de plus $M \geq 1$ et $\omega = 0$, alors $(T(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe uniformément borné sur X .

Théorème 2.1.3.

Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ alors :

- $D(A)$ est dense dans X .
- A est un opérateur fermé.

Démonstration :

Soit $x_h = \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds$, pour tout $x \in X$.

D'après la partie (i) du théorème (2.1.1) on a $x_h \in D(A)$, pour $h > 0$ et de la partie (ii) de même théorème, on sait que $x_h \rightarrow x$ quand $h \xrightarrow{>} 0$ donc $\overline{D(A)} = X$.

La linéarité de A est évidente, elle découle directement de la définition de l'opérateur A .

Donc, il reste à montrer que A est fermé i.e.

soit $(x_n)_{n \geq 0} \subset D(A)$ tel que :

$x_n \rightarrow x$ et $Ax_n \rightarrow y$ lorsque $n \rightarrow \infty$

d'après la partie (iv) du théorème (2.1.1) on a

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds \quad (2.1)$$

puisque $Ax_n \rightarrow y$, se que implique $T(s)Ax_n \rightarrow T(s)y$ uniformément continue sur un intervalle fermé borné et par conséquent par passage à la limite dans (2.1), on aura

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds \quad (2.2)$$

donc si on divise les deux membres de (2.2) par $t > 0$, par passage a la limite lorsque $t \rightarrow 0$, on voit que $x \in D(A)$ et $Ax = y$, ce qui démontre que A fermé. $\square$

2.2 L'approximation de Hille-Yosida

Définition 2.2.1. [3]

Pour tout $\lambda > 0$ l'approximation de Hille-Yosida de A définit par :

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda; A) = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I$$

(régularisée Hille-Yosida).

Lemme 2.2.1.

Soit A un opérateur linéaire qui satisfait (i) (ii) du théorème (2.1.1).

Si A_λ est une approximation hille-yosida de A alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda x = Ax, \quad \forall x \in D(A).$$

2.3 Théorème de Hille-Yosida

Le théorème de Hille-Yosida nous permet de caractériser les opérateurs qui génèrent des C_0 -semi-groupes.

Théorème 2.3.1. [3]

Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X si et seulement si :

i) A est fermé et à domaine dense : $\overline{D(A)} = X$.

ii) l'ensemble résolvant de A contient $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0. \quad (2.3)$$

Démonstration : [3]

condition nécessaire :

Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, d'après le théorème (2.1.3).

Donc A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.

Pour $\lambda > 0$ et $x \in X$, soit

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \quad (2.4)$$

puisque $t \mapsto T(t)x$ est une fonction continue et uniformément bornée donc l'intégrale existe dans (2.4), comme étant une intégrale impropre qui définit un opérateur linéaire $R(\lambda)$ tel que :

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \|T(t)x\| dt \leq \frac{\|x\|}{\lambda} \quad (2.5)$$

en plus, pour $h > 0$

$$\frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x = \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (T(t+h)x - T(t)x) dt, \quad (2.6)$$

lorsque $h \xrightarrow{>} 0$, le second membre (2.6) converge vers $hR(\lambda)x - x$, ce qui implique que pour tout $x \in X$ et $\lambda > 0$, on a :

$R(\lambda)x \in D(A)$ et $AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$.i.e :

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I \quad (2.7)$$

pour $x \in D(A)$,

$$R(\lambda)Ax = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)Ax dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} AT(t)x dt \quad (2.8)$$

(où, on a utilisé le fait que $AT(t)x = T(t)Ax$, $x \in D(A)$ et que A est fermé) donc de (2.7) et (2.8), on peut déduire que : $R(\lambda)(\lambda I - A)x = x$, $\forall x \in D(A)$.

Donc $R(\lambda)$ est l'inverse de $(\lambda I - A)$ qui existe pour $\lambda > 0$ et satisfait (2.3). $\square$

Théorème 2.3.2.

Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe et A est le générateur infinitésimal alors l'ensemble résolvant de A contient le demi plan ouvert

$$\Lambda_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re \lambda > \omega\} \subset \rho(A)$$

et pour de tels $\lambda > 0$

on a

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\Re \lambda}.$$

2.4 Théorème de Lumer-Phillips

Théorème 2.4.1. (Lumer-Phillips)

Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire à domaine $D(A)$ dense dans X .

A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ de contraction si et seulement si :

A est m -dissipatif.

Corollaire 2.4.1. [4]

Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine $D(A)$ dense dans X . Si A et A^* sont dissipatifs alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ de contraction sur X .

2.5 Quelques C_0 - semi-groupes particuliers

2.5.1 C_0 - semi-groupes différentiables

Définition 2.5.1. [15]

Un C_0 - semi-groupes $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X est dit différentiable pour $t > t_0$ si pour tout $x \in X$, l'application $t \mapsto T(t)x$ est différentiable pour $t > t_0$.

$(T(t))_{t \geq 0}$ est dit différentiable, s'il est différentiable pour $t > 0$.

Remarque 2.2.

Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 - semi-groupes différentiables pour $t > t_0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $t > (n + 1)t_0$ alors $t \mapsto T(t)$ est n -fois différentiables pour la topologie uniforme des opérateurs.

Corollaire 2.5.1.

Si $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 - semi-groupes différentiables alors $t \mapsto T(t)$ est indéfiniment différentiable pour la topologie uniforme des opérateurs.

Lemme 2.5.1.

Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 - semi-groupe différentiable de générateur infinitésimal A . Alors :

$$T^n(t) = [AT(\frac{t}{n})]^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Démonstration :

Pour $n = 1$ le résultat est assuré par le lemme alors

$$T^n(t) = [AT(\frac{t}{n})]^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

en dérivant par rapport à t on trouve

$$T^{(n+1)}(t) = AT(t-s)[AT(\frac{s}{n})]^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

en substituant $\frac{nt}{n+1}$ on obtient le résultat pour $n+1$. □

2.5.2 C_0 - semi-groupes analytiques

On note l'ensemble Δ qui définit par :

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 < \arg z < \theta_2, \quad \theta_1 < 0 < \theta_2\}$$

est appelé angle autour la demi- droite réelle positive .

Définition 2.5.2. [3]

On appelle C_0 - semi-groupe analytique une famille $(T(z))_{z \in \Delta}$ d'opérateur linéaire borné sur X vérifiant les propriétés suivantes :

i) $T(0) = I$ (où I est l'opérateur identité de X).

ii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \Delta$.

iii) $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x, \quad \forall x \in X, \quad \forall z \in \Delta$.

iv) l'application $z \mapsto T(z)$ est analytique sur Δ , pour la norme de $B(X)$.

Puisque la multiplication d'un C_0 - semi-groupe par $e^{\omega t}$ n'a aucun effet sur l'extension à un C_0 - semi-groupe analytique sur un secteur Δ .

Théorème 2.5.1.

Soit A un opérateur linéaire borné à domaine $D(A)$ dense dans X vérifiant les deux conditions suivantes :

2.5. QUELQUES C_0 - SEMI-GROUPES PARTICULIERS

- i) Il existe $\delta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\rho(A) \supset \Sigma_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\}$
- ii) il existe une constant $K > 0$ telle que $\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{K}{|\lambda|}$, $\forall \lambda \in \Sigma_\delta \setminus \{0\}$
 alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 - semi-groupe vérifiant $\|T(t)\| \leq M$, $\forall t \geq 0$,
 pour une certain constante $M \geq 0$ de plus

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{zt} R(z, A) dz$$

où Γ est un chemin lisse dans Σ_δ partant de $\propto e^{-i\theta}$ à $\propto e^{i\theta}$ pour $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \delta$
 cet intégrale converge uniformément pour $t > 0$.

Démonstration :

voir ([3], Theorem 7.7 ,page. 30-32).

□

Chapitre 3

Problème abstrait de Cauchy

Introduction

Dans ce chapitre, la plupart des outils et des matériaux suivent A.Pazy.

Nous avons étudié en détail le problème abstrait de Cauchy, en appliquant les résultats des chapitres précédents.

Nous sommes concentrés à l'étude du problème homogène et non homogène et quelques applications illustratives à la théorie des équations aux dérivées partielles.

3.1 Problème homogène à valeur initiale

Soit X un espace de Banach.

Définition 3.1.1. [3]

Soit A opérateur linéaire défini de $D(A) \subset X$ dans X .

i) Le problème homogène abstrait de la forme suivante :

$$(PHC) \begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \geq 0 \\ u(0) = x. \end{cases}$$

Où t est la variable temps, u est une fonction à valeurs dans X .

Pour $x \in X$, le problème à valeur initiale (PHC) est dit le problème homogène abstrait de Cauchy associé à l'opérateur A avec la condition initiale x .

ii) Consiste à chercher une solution u pour le problème (PHC), on entend par solution une fonction $u(t)$ à valeur dans X tel que :

3.1. PROBLÈME HOMOGENÈ À VALEUR INITIALE

$u(t)$ est continue pour $t \geq 0$, continûment différentiable et $u(t) \in D(A)$ pour $t \geq 0$, $u(t)$ satisfait (PHC).

Notons que puisque $u(t) \in D(A)$ pour $t \geq 0$ et u continue au point $t = 0$, (PHC) ne peut pas avoir une solution pour $x \notin \overline{D(A)}$.

Théorème 3.1.1. [3]

Si A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X . Le problème de Cauchy abstrait homogène pour A admet une solution unique $u(t) = T(t)x$ pour tout $x \in D(A)$ à valeur initial x .

Démonstration :

- L'existence :

Soit $x \in D(A)$.

On a $u(t) = T(t)x$, $u'(t) = \frac{dT(t)x}{dt}$, d'après le théorème (2.1.1) (iii) on a

$$\begin{cases} u'(t) = AT(t)x, & t \geq 0 \\ u'(t) = Au(t), & t \geq 0 \\ u(0) = T(0)x = Ix = x. \end{cases}$$

Donc $u(t) = T(t)x$ est une solution du problème (PHC).

- L'unicité :

Soit v une autre solution de (PHC), alors v est continûment différentiable, soit $t > 0$, pour tout $s \in [0, t]$ on a

$$\begin{aligned} \frac{d(T(t-s)v(s))}{ds} &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)v'(s) \\ &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)Av(s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, la fonction $s \mapsto T(t-s)v(s)$ est constante, en ses valeurs aux points $s = t$ et $s = 0$, alors

$$T(t-t)v(t) = T(t-0)v(0)$$

$$T(0)v(t) = T(t)v(0)$$

$$Iv(t) = T(t)x$$

$$v(t) = T(t)x = u(t)$$

3.1. PROBLÈME HOMOGENÈ À VALEUR INITIALE

pour tout $x \in D(A)$, la solution est $u(t) = T(t)x$ unique.

□

Donnons d'abord un lemme qu'un utilisera par la suite :

Lemme 3.1.1. [3]

Soit $u(t)$ une fonction à valeurs dans X , continue sur $[0, T]$. Si

$$\left\| \int_0^T e^{ns} u(s) ds \right\| \leq M, \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

alors $u(t) = 0$ sur $[0, T]$.

Théorème 3.1.2. [3]

Soit A un opérateur linéaire à domaine dense. Si $R(\lambda; A)$ existe pour tout réel $\lambda \geq \lambda_0$ et

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\log \|R(\lambda; A)\|}{\lambda} \leq 0. \quad (3.1)$$

Alors le problème d'un Cauchy homogène (PHC) admet au plus une solution pour tout $x \in X$.

Démonstration :

Notons d'abord que $u(t)$ est solution de (PHC) si et seulement si :

$v(t) = e^{\alpha t} u(t)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\frac{v(t)}{dt} = (A + \alpha I)v, \quad v(0) = x$$

puisque :

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= \frac{d(e^{\alpha t} u(t))}{dt} = \alpha e^{\alpha t} u(t) + e^{\alpha t} Au(t) \\ &= \alpha e^{\alpha t} u(t) + Ae^{\alpha t} u(t) \\ &= Av + \alpha v. \end{aligned}$$

C'est à dire, on peut toujours translater A , pour une constante multiplié par l'identité supposer que $R(\lambda; A)$ existe pour tout réel $\lambda \geq 0$ et que la relation (3.1) est satisfaite.

Soit $u(t)$ une solution du problème (PHC) qui satisfait $u(0) = 0$, on va démontrer que $u(t) = 0$.

Considérons la fonction $t \mapsto R(\lambda; A)u(t)$ pour $\lambda > 0$. Puisque $u(t)$ est solution de (PHC) alors,

$$\frac{d}{dt} R(\lambda; A)u(t) = R(\lambda; A)Au(t) = \lambda R(\lambda; A)u(t) - u(t)$$

3.1. PROBLÈME HOMOGENÈ À VALEUR INITIALE

en utilisant la formule de la variation de la constante que :

$$R(\lambda; A)u(t) = - \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} u(\tau) d\tau. \quad (3.2)$$

Donc de (3.1), on peut facilement voir que pour tout $\sigma > 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\sigma\lambda} \|R(\lambda; A)\| = 0$$

donc il s'ensuit de (3.2) que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{t-\sigma} e^{\lambda(t-\sigma-\tau)} u(\tau) d\tau = 0, \quad \text{pour } 0 \leq \tau \leq t - \sigma.$$

Alors d'après le lemme 3.1.1 on déduit que $u(\tau) = 0$ pour $0 \leq \tau \leq t - \sigma$, puisque t et σ sont arbitraires alors $u(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. $\square$

Du théorème 3.1.2 on peut dire que pour obtenir l'unicité de la solution de Cauchy (PHC) il n'est pas nécessaire de supposer que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe ou ce qui est équivalente à dire pour un certain $\omega \geq 0$, $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et $\|(\lambda - \omega)^n R(\lambda, A)\| \leq M$ pour $\lambda > \omega$ ce qui beaucoup mais suffisant pour l'unicité.

De même, pour l'existence de la solution du problème de Cauchy (PHC), il n'est pas nécessaire de supposer que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe. En choisissant l'ensemble D des conditions initiales, la solution de PHC peut exister sous des hypothèses beaucoup plus faibles. Cependant, pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution pour tout $x \in D(A)$. Comme étant une solution différentiable sur $[0, +\infty[$ on doit supposer que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe. Ce qui est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.1.3. [3]

Soit A un opérateur linéaire à domaine dense dans X tel que $\rho(A) \neq \emptyset$. Le problème de Cauchy homogène (PHC) admet une unique solution $u(t)$ continûment différentiable sur $[0, +\infty[$ pour tout condition initiale $x \in D(A)$ si et seulement si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$.

Démonstration :

Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ par le théorème (3.1.1) comme pour tout $x \in D(A)$, la fonction $u(t) = T(t)x$ est l'unique solution du problème (PHC).

3.1. PROBLÈME HOMOGENÈ À VALEUR INITIALE

De plus u est continûment différentiable sur $[0, +\infty[$.

Supposons que (PHC) admet une solution unique qui est continûment différentiable sur $[0, +\infty[$ pour tout $x \in D(A)$, notée $u(t, x)$.

Montrons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe.

Pour $x \in D(A)$, on définit la norme graphe $|x|_G = \|x\| + \|Ax\|$. Puisque $\rho(A) \neq \emptyset$, alors A est fermé et par suite $D(A)$ muni de la norme graphe $|\cdot|_G$ est un espace de Banach qu'on note $[D(A)]$.

Soit $X_{t_0} = C([0, t_0]; [D(A)])$ l'espace de Banach des fonctions continues de $[0, t_0]$ dans $[D(A)]$, muni de la norme supérieure.

Considérons l'application $S : [D(A)] \rightarrow X_{t_0}$ définie par :

$$Sx = u(t, x) \text{ pour tout } 0 \leq t \leq t_0.$$

Par linéarité du problème (PHC) et l'unicité de la solution, il est clair que S est un opérateur linéaire défini sur $[D(A)]$, l'opérateur S est fermé, comme si $x_n \rightarrow x$ dans $[D(A)]$ et $Sx_n \rightarrow v$ dans X_{t_0} , alors puisque A est fermé et $u(t, x_n) = x_n + \int_0^t Au(\tau, x_n) d\tau$, quand $n \rightarrow \infty$, il s'ensuit que $v(t) = x + \int_0^t Av(\tau) d\tau$.

Ce qui entraîne que $v(t) = u(t, x)$ et par suite S est fermé.

Il vient du théorème du graphe fermé que S est borné et

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} |u(t, x)|_G \leq C|x|_G. \quad (3.3)$$

On définit l'application $T(t) : [D(A)] \rightarrow [D(A)]$ par $T(t)x = u(t, x)$.

Par l'unicité de la solution du problème (PHC) il vient que $(T(t))_{t \geq 0}$ vérifie de la propriété des semi-groupes.

D'après (3.3) on a pour $0 \leq t \leq t_0$, $(T(t))_{t \geq 0}$ est uniformément borné.

Cela implique que $T(t)$ est prolongeable par :

$$T(t)x = T(t - nt_0)T(t_0)^n x \text{ pour } nt_0 \leq t \leq (n+1)t_0$$

en un semi-groupe sur $[D(A)]$ vérifiant :

$$|T(t)x|_G \leq Me^{\omega t} |x|_G.$$

Montrons que

$$T(t)Ay = AT(t)y, \quad \forall y \in D(A^2) \quad (3.4)$$

3.1. PROBLÈME HOMOGENÈ À VALEUR INITIALE

posons :

$$v(t) = y + \int_0^t u(s, Ay) ds \quad (3.5)$$

on a

$$v'(t) = u(t, Ay) = Ay + \int_0^t \frac{d}{ds} u(s, Ay) ds \quad (3.6)$$

$$= A \left(y + \int_0^t u(s, Ay) ds \right) = Av(t) \quad (3.7)$$

puisque $v(0) = y$, d'après l'unicité de la solution du (PHC), $v(t) = u(t, y)$, ce qui entraîne que $Au(t, y) = v'(t) = u(t, Ay)$. D'où l'égalité (3.4) puisque $D(A)$ est dense dans X et $\rho(A) \neq \emptyset$, alors $D(A^2) = \{x \in D(A) : Ax \in D(A)\}$ est aussi dense dans X .

Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$, $\lambda_0 \neq 0$ fixé et soit $y \in D(A^2)$, si $x = (\lambda_0 I - A)y$, alors par (3.4)

$$T(t)x = (\lambda_0 I - A)T(t)y$$

et donc

$$\|T(t)x\| = \|(\lambda_0 I - A)T(t)y\| \quad (3.8)$$

$$\leq C_0 |T(t)y|_G \leq C_1 e^{\omega t} |y|_G. \quad (3.9)$$

D'autre part on a, $|y|_G = \|y\| + \|Ay\| \leq C_2 \|x\|$, ce qui entraîne que $\|T(t)x\| \leq C_2 e^{\omega t} \|x\|$. Alors que $(T(t))_{t \geq 0}$ est prolongeable par continuité sur X tout entier, donc $(T(t))_{t \geq 0}$ devient un C_0 -semi-groupe sur X .

Alors montrer que A est générateur infinitésimal de $(T(t))_{t \geq 0}$.

Soit B le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t \geq 0}$ et $x \in D(A)$ par définition on a $T(t)x = u(t, x)$ et donc $\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x$ pour $t \geq 0$, ce qui implique que $\frac{dT(t)x}{dt} \Big|_{t=0} = Ax$ d'où $D(A) \subset D(B)$ et $Ax = Bx$, $\forall x \in D(A)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Re \lambda > \omega$ et $y \in D(A^2)$, par l'égalité (3.4) et comme $Ax = Bx$, $\forall x \in D(A)$ il vient que :

$$e^{-\lambda t} AT(t)y = e^{-\lambda t} T(t)Ay = e^{-\lambda t} T(t)By \quad (3.10)$$

en intégrant (3.10) entre 0 et $+\infty$ on obtient

$$AR(\lambda; B)y = R(\lambda; B)By$$

d'autre part on a, pour tout $y \in D(A^2)$

$$BR(\lambda; B)y = R(\lambda; B)By,$$

3.2. PROBLÈME NON HOMOGENÈ À VALEUR INITIALE

donc

$$AR(\lambda; B)y = BR(\lambda; B)y$$

puisque la famille $(BR(\lambda; B))_{\lambda > 0}$ est uniformément borné, A est fermé et $D(A^2)$ est dense dans X , il en résulte que

$$AR(\lambda; B)y = BR(\lambda; B)y \text{ pour tout } y \in X$$

ce qui implique que $\text{Im} R(\lambda; B) = D(B) \subset D(A)$ et que $Ax = Bx, \forall x \in D(B)$. D'où $A = B$. $\square$

Dans le théorème suivant, on va donner un résultat d'existence et d'unicité par le problème de Cauchy (PHC) où la condition initiale $x \in X$.

Théorème 3.1.4. [3]

Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe différentiable $(T(t))_{t \geq 0}$, $(\frac{dT(t)x}{dt})$ existe, $\forall t > 0, \forall x \in X$, alors pour tout $x \in X$ le problème de Cauchy (PHC) avec la condition initiale $x \in X$ admet une solution unique.

Démonstration :

L'unicité de la solution découle du théorème 3.1.2.

Si $x \in D(A)$, l'existence découle du théorème 3.1.3

Si $x \in X$, alors de la différentiabilité de $T(t)x$ il s'ensuit que pour tout $x \in X$,

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x \text{ pour } t > 0, AT(t)x \text{ est continue pour } t > 0.$$

Donc $T(t)x$ est la solution du problème de Cauchy (PHC) pour tout $x \in X$. $\square$

3.2 Problème non homogène à valeur initiale

Considérons le problème de Cauchy non homogène suivant :

$$(PNHC) \begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t \geq 0 \\ u(0) = x. \end{cases}$$

où $f : [0, T[\rightarrow X$ est une fonction.

Dans tout la suite on suppose que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ et donc le problème de Cauchy homogène associé à $(PNHC)$ $f \equiv 0$ admet une unique solution pour tout condition initiale $x \in D(A)$.

3.2. PROBLÈME NON HOMOGÈNE À VALEUR INITIALE

Définition 3.2.1. [3]

Une fonction $u : [0, T[\rightarrow X$ est une solution (classique) du problème (PNHC) sur $[0, T[$ si :

i) u est continûment différentiable sur $]0, T[$.

ii) $u(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et $u(t)$ satisfait le problème (PNHC) sur $]0, T[$.

Proposition 3.2.1. [3]

Si $f \in L^1(0, T; X)$, alors pour tout $x \in X$ le problème à valeur initiale (PNHC) admet au plus une solution, si elle existe donnée par :

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad (3.11)$$

appelée la solution généraliser de (PNHC).

Démonstration : [3]

On pose que si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ et u la solution du problème de Cauchy non homogène (PNHC), alors la fonction $g(s) = T(t-s)u(s)$ qui est à valeur dans X , est différentiable pour $0 < s < t$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dg(s)}{ds} &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)(Au(s) + f(s)) \\ &= -AT(t-s)u(s) + Au(s)T(t-s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s) \end{aligned}$$

ou $f \in L^1(0, T; X)$, alors la fonction $g(s) = T(t-s)u(s)$ est intégrable et si on intègre $T(t-s)f(s)$ de 0 et t , on aura :

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \frac{dg(s)}{ds} ds &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
 g(t) - g(0) &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
 T(t-t)u(t) - T(t-0)u(0) &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
 Iu(t) - T(t)x &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
 u(t) &= T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds
 \end{aligned}$$

d'où le résultat . □

Remarque 3.1. [4]

Si $f \in L^1(0, T; X)$, alors pour tout $x \in X$ le problème (PNHC) admet au plus une solution, celle existe donner par la relation (3.11).

Pour tout $f \in L^1(0, T; X)$ le second membre $(\int_0^t T(t-s)f(s)ds)$ est une fonction continue sur $[0, T]$, il est naturel de la considérer comme une solution généralisée du (PNHC) même celle n'est pas une fonction différentiable et ne satisfait pas l'équation au sens strict de la définition (3.2.1).

Théorème 3.2.1. [3]

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, soit $f \in L^1(0, T; X)$ une fonction continue sur $]0, T]$ et soit v la fonction définie par :

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.12)$$

le problème de Cauchy non homogène (PNHC) admet une solution u sur $[0, T[$ pour tout $x \in D(A)$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- i) $v(t)$ est continument différentiable sur $]0, T[$.
- ii) $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et la fonction $t \mapsto Av(t)$ est continue sur $]0, T[$. Si (PNHC) admet une solution u sur $[0, T[$ pour $x \in D(A)$, alors v vérifie les deux condition (i) et (ii) en même temps.

Démonstration : [3]

Si le problème de Cauchy (PNHC) admet une solution u pour $x \in D(A)$, cette solution est donnée par (3.11). Par conséquent $v(t) = u(t) - T(t)x$ pour $t > 0$, comme somme de deux fonction différentiable on a $v'(t) = u'(t) - AT(t)x$, qu'est aussi une fonction continue sur $]0, T[$ et donc (i) est vérifiée.

De même si $x \in D(A)$ alors $T(t)x \in D(A)$, pour $t \geq 0$ et donc :

$$v(t) = u(t) - T(t)x \in D(A) \quad \text{pour } t > 0$$

et

$$\begin{aligned} Av(t) &= Au(t) - AT(t)x \\ &= u'(t) - f(t) - T(t)Ax \end{aligned}$$

qui est une fonction continue sur $]0, T[$ et donc la condition (ii) est satisfaite.

D'autre part on peut facilement vérifier que pour tout $h > 0$:

$$\frac{T(h) - I}{h} v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds, \quad (3.13)$$

de la continue de f , alors il est clair que le second membre de (3.13) tend vers $f(t)$ lorsque $h \rightarrow 0$.

- Si $v(t)$ est continument différentiable sur $]0, T[$, alors (3.13) il s'ensuit que $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et que $Av(t) = v'(t) - f(t)$ c'est à dire $v(t)$ est une solution particulier de $T(t-s)f(s)$, puisque $v(0) = 0$ alors $v(t) = T(t)x + v(t)$ est la solution du problème de Cauchy (PNHC) pour $x \in D(A)$.
- Si $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$, la relation (3.13) on peut déduire que $v(t)$ est dérivable à droite, $D^+v(t)$ de v satisfait la relation suivant : $D^+v(t) = Av(t) + f(t)$.
Donc $D^+v(t)$ serait une fonction continue, alors $v(t)$ est continûment différentiable et $v'(t) = Av(t) + f(t)$ est puisque $v(0) = 0$, alors on déduit que $u(t) = T(t)x + v(t)$ est la solution du problème de Cauchy non homogène (PNHC) pour $x \in D(A)$.

□

le résultat du théorème 3.2.1 permet d'obtenir le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.1.

3.2. PROBLÈME NON HOMOGENÈ À VALEUR INITIALE

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$. Si f est une fonction continument différentiable sur $[0, T]$, alors le problème de Cauchy (PNHC) admet une solution u sur $[0, T[$ pour tout $x \in D(A)$.

Démonstration :

D'après la relation (3.12) du théorème 3.2.1 et par le changement de variable on a :

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(s)f(t-s)ds \quad (3.14)$$

il est facile de voir que la relation (3.14) que $v(t)$ est différentiable pour $t > 0$ et que sa dérivée :

$$\begin{aligned} v'(t) &= T(t)f(0) + \int_0^t T(s)f'(t-s)ds \\ &= T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds \end{aligned}$$

D'où v' est continue sur $]0, T[$ et le résultat se déduit du théorème 3.2.1 . $\square$

Définition 3.2.2. [3]

Une fonction u qui est presque partout (p.p) différentiable sur $[0, T]$ tel que $u' \in L^1(0, T; X)$ est appelée solution forte du problème de Cauchy (PNHC) si :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & \text{p.p sur } [0, T] \\ u(0) = x. \end{cases} \quad (3.15)$$

Notons que si $A = 0$ et $f \in L^1(0, T; X)$ le problème (PNHC) n'admet pas en général de solution a moins que f est continue. Cependant, il admet toujours une solution forte donnée par

$$u(t) = u(0) + \int_0^t f(s)ds$$

il est facile de voir que si u est une solution forte de (PNHC) et si $f \in L^1(0, T; X)$, alors u sera donnée par

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

et donc c'est la solution généralisée et par suite c'est l'unique solution forte du problème (PNHC). La question la plus naturelle qu'on doit supposer c'est par quelles conditions la solution généralisée sera telle une solution forte du problème (PNHC)?.

Théorème 3.2.2. [3]

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, $f \in L^1(0, T; X)$ et soit v la fonction définie par :

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, 0 \leq t \leq T$$

le problème (PNHC) admet une solution forte u sur $[0, T]$, pour tout $x \in D(A)$, si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- i) $v(t)$ est différentiable presque partout sur $[0, T]$ et $v'(t) \in L^1(0, T; X)$.
- ii) $v(t) \in D(A)$ presque partout sur $[0, T]$ et la fonction $Av(t) \in L^1(0, T; X)$.

Si le problème de Cauchy (PNHC) admet une solution forte u sur $[0, T]$ pour un $x \in D(A)$, alors $v(t)$ vérifie les conditions (i) et (ii).

le résultat du Théorème 3.2.2 permet d'obtenir le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.2. [3]

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$.

Si f est différentiable presque partout sur $[0, T]$ et $f' \in L^1(0, T; X)$, alors pour tout $x \in D(A)$, le problème (PNHC) admet une unique solution forte sur $[0, T]$.

Remarque 3.2.

En général, on pose si f est lipschitzienne sur $[0, T]$, alors cette condition n'est pas suffisante d'assurer l'existence de la solution forte de (PNHC) pour $x \in D(A)$. Lorsque si, X , est réflexif et f est lipschitzienne c'est à dire

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| \leq C\|t_1 - t_2\|, \forall t_1, t_2 \in [0, T]$$

alors on peut montrer que f différentiable presque partout sur $[0, T]$ et $f' \in L^1(0, T; X)$.

Corollaire 3.2.3. [3]

Soit X un espace de Banach réflexif et soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$.

Si f est lipschitzienne sur $[0, T]$, alors pour tout $x \in D(A)$ le problème (PNHC) admet une unique solution (classique) u sur $[0, T]$ donnée par :

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Démonstration :

D'après la remarque (3.2) et (3.1) précédentes, le problème à valeurs dans X de Cauchy (PNHC) admet une solution forte et donc d'après les conditions du théorème 3.2.2 $v(t)$ est donnée par :

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

est presque partout différentiable sur $[0, T]$, lorsque on utilise la règle d'intégrale de Leibniz alors sa dérivé est :

$$v'(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds$$

v' est continue sur $[0, T]$. D'où on obtient le résultat du théorème 3.2.1 . □

3.3 Une application

Dans ce paragraphe nous donnons une application de la théorie des semi-groupes et l'étude du problème abstrait de Cauchy dans la résolution de quelques équations aux dérivées partielles classiques en physique.

Exemple 3.1. (L'équation des ondes) [6]

L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles de second ordre, elle joue un rôle fondamental pour la description des ondes, telles qu'elles se produisent en physique : quelles soient mécanique lumineuses. Ce type d'équation apparait dans divers domaines tels que l'acoustique, l'électromagnétisme et la dynamique des fluides. L'équation des ondes dont u est une solution est donnée par :

$$(EO) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = 0, \text{ sur } \Omega \times [0, T], \\ v = 0, \text{ sur } \Omega \times [0, T], \\ v(x, t = 0) = v_0, \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, t = 0) = v_1, \text{ dans } \Omega, \end{array} \right.$$

est hyperbolique où Ω est un sous-ensemble régulier de $\mathbb{R}^n$ et $v_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $v_1 \in H_0^1(\Omega)$.

3.3. UNE APPLICATION

Posons $u = \begin{pmatrix} v \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix}$, l'équation (EO) s'écrit sous la forme abstraite :

$$(PHC) \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.16)$$

où

$$Au = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \Delta u_1 \end{pmatrix} \text{ et } u_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Soit $x \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Le domaine de A est $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$.

Montrons que $(A, D(A))$ est m -dissipatif sur X lorsqu'il est muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_X = \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Omega} u_2 v_2 dx, \text{ où } u = (u_1, u_2) \text{ et } v = (v_1, v_2).$$

D'abord A est dissipatif car $\langle Au, u \rangle_X = \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla u_1 dx + \int_{\Omega} \Delta u_1 u_2 dx = 0$, (d'après la formule de Green).

Soient $(f, g) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. L'équation $u - Au = (f, g)$ est équivalente au système :

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = f \\ u_2 - \Delta u_1 = g \end{cases}$$

En remplaçant $u_2 = u_1 - f$ dans la deux-ème équation, on obtient l'équation

$$u_1 - \Delta u_1 = f + g,$$

qui admet une solution unique $u_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ d'après le théorème de Lax-Milgram.

Par conséquent $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ est unique. Donc $\text{Im}(I - A) = X$ et A est m -dissipatif.

Par le théorème de Lumer-Phillips il vient que A est le générateur infinitésimal d'un

C_0 -semi-groupe de contraction $(T(t))_{t>0}$ et par suite (3.16) admet une solution unique donnée par

$$u(t, x) = (T(t)u_0)(x).$$

Chapitre 4

Système d'évolution

Introduction

Dans le dernier chapitre, nous avons traité en détail le système d'évolution qui a au fond de l'un des domaines les plus fertiles de la recherche mathématique actuelle. Nous avons basé aussi sur la stabilité d'une famille de générateurs, le système d'évolution dans le cas hyperbolique, pour obtenir des résultats généraux et un bagage mathématique a utilisé dans les différents domaines.

4.1 Système d'évolution

X est un espace de Banach.

Soit $A(t) : D(A(t)) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire sur X et f une fonction à valeurs dans X . Le problème d'évolution est de la forme suivante :

$$(PE) \begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + f(t), & s < t \leq T \\ u(s) = x. \end{cases} \quad (4.1)$$

Où t est la variable temps, u est une fonction continue à valeurs dans X et $x \in X$ est la valeur initiale.

Une fonction $u : [s, T] \longrightarrow X$ est dite solution classique de (4.1) si u est continue sur $[s, T]$, $u(t) \in D(A(t))$ pour $s < t \leq T$ et u continument différentiable sur $]s, T]$ et vérifier (4.1).

Cas spéciale, si $A(t) = A$ on a trouvé les résultats du chapitre (3). La solution du

4.1. SYSTÈME D'ÉVOLUTION

problème non homogène est donnée par “la formule de variation de la constante” :

$$u(t) = T(t-s)u(s) + \int_s^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad (4.2)$$

où $T(t)x$ est la solution du problème homogène $u'(t) = Au(t)$, $u(0) = x$. On trouve un résultat similaire lorsque $A(t)$ dépend de t .

Au début, nous sommes concentrés sur le problème homogène :

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t), & 0 \leq s < t \leq T \\ u(s) = x. \end{cases} \quad (4.3)$$

En Commençons par le cas simple lorsque $A(t)$ est un opérateur borné sur X et $t \mapsto A(t)$ est continue pour la topologie uniforme des opérateurs.

Théorème 4.1.1. [3]

Soit X un espace de Banach. Pour tout $0 \leq t \leq T$ et soit $A(t)$ un opérateur linéaire borné sur X .

Si la fonction $t \mapsto A(t)$ est continue pour la topologie uniforme des opérateurs, alors pour tout $x \in X$ le problème à valeur initiale admet une solution classique unique u .

Démonstration :

Au début, nous avons utilisé la méthode des itérations de PICARD pour obtenir l'existence du solution.

posons $\alpha = \max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)\|$, considérons l'application S de $C([s, T], X)$ dans $C([s, T], X)$ définie par :

$$Su(t) = x + \int_s^t A(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (4.4)$$

Notons $\|u\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|$ on a :

$$\begin{aligned} \|Su(t) - Sv(t)\| &= \max_{0 \leq t \leq T} \left\| x + \int_s^t A(\tau)u(\tau)d\tau - x - \int_s^t A(\tau)v(\tau)d\tau \right\| \\ &= \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_s^t A(\tau)u(\tau)d\tau - \int_s^t A(\tau)v(\tau)d\tau \right\| \\ &\leq \alpha(t-s)\|u-v\|_\infty \end{aligned}$$

4.1. SYSTÈME D'ÉVOLUTION

alors on obtient :

$$\|Su(t) - Sv(t)\| \leq \alpha(t-s)\|u - v\|_\infty \quad (4.5)$$

par (4.4) et (4.5) nous avons montré par récurrence la relation suivante.

$$\|S^n u(t) - S^n v(t)\| \leq \frac{\alpha^n(t-s)^n}{n!} \|u - v\|_\infty, \quad s \leq t \leq T.$$

Pour $n = 1$, on obtient la relation (4.5).

On a supposé que cette relation est vraie pour l'ordre $p = n$ et montrer que elle est vraie pour l'ordre $p = n + 1$ on obtient :

$$\|S^{n+1} u(t) - S^{n+1} v(t)\| = \|SS^n u(t) - SS^n v(t)\| \leq \frac{\alpha^{n+1}(t-s)^{n+1}}{(n+1)!} \|u - v\|_\infty, \quad \forall n \geq 1.$$

Alors la relation est vraie. Donc $\forall n \geq 1$ on obtient :

$$\|S^n u(t) - S^n v(t)\| \leq \frac{\alpha^n(t-s)^n}{n!} \|u - v\|_\infty, \quad s \leq t \leq T.$$

Pour n assez grand $\frac{\alpha^n(t-s)^n}{n!} < 1$, donc il vient du théorème du point fixe de PICARD que S admet un point fixe unique u dans $C([s, T], X)$ donné par :

$$Su(t) = x + \int_s^t A(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (4.6)$$

Puisque u est continue, le membre de droite (4.6) est différentiable et vérifier $u'(t) = A(t)u(t)$.

D'où u est une solution du problème (4.3). Puisque tout solution de (4.3) est aussi solution de (4.6), la solution de (4.3) est unique.

□

La notation qui définit par :

$$U(t, s)x = u(t), \quad \text{pour } 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (4.7)$$

est "l'opérateur solution "du problème (4.3).

$U(t, s)$ est une famille à deux paramètres d'opérateurs. Par l'unicité de la solution du problème (4.3) il vient que si $A(t) = A$ est indépendant de t alors

4.1. SYSTÈME D'ÉVOLUTION

$U(t, s) = e^{(t-s)A} = U(t - s)$ et la famille à deux paramètres se réduit en une famille à un seul paramètre $U(t)$, $t \geq 0$, qui est le semi groupe généré par A .

Lemme 4.1.1. (de Gronwall)

Soient $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ à valeurs positives et $M > 0$ vérifiant l'inégalité suivant :

$$u(x) \leq M + \int_a^x u(\tau)v(\tau)d\tau, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (4.8)$$

Alors

$$u(x) \leq M \exp \left(\int_a^x v(\tau)d\tau \right), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (4.9)$$

Dans le cas où $M = 0$, $u \equiv 0$ sur $[a, b]$.

Démonstration :

On a d'après l'inégalité (4.8), on vient que :

$$u(t) \leq M + \int_a^t u(\tau)v(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [a, b].$$

lorsque on remplace $u(t)$ dans la relation suivante, on obtient :

$$\int_a^x \frac{u(t)v(t)}{M + \int_a^x u(\tau)v(\tau)d\tau} dt \leq \int_a^x v(t)dt$$

Car u et v sont des fonctions positives. Alors

$$\log \left(\frac{M + \int_a^x u(\tau)v(\tau)d\tau}{M} \right) \leq \int_a^x v(t)dt.$$

On obtient que :

$$M + \int_a^x u(\tau)v(\tau)d\tau \leq M \exp \left(\int_a^x v(\tau)d\tau \right), \quad \forall x \in [a, b].$$

D'où

$$u(x) \leq M \exp \left(\int_a^x v(\tau)d\tau \right), \quad \forall x \in [a, b].$$

Si $M = 0$

$$0 \leq u(x) \leq 0 + \int_a^x u(\tau)v(\tau)d\tau$$

D'où $u \equiv 0$ sur $[a, b]$. □

Le théorème suivant présente les propriétés fondamentales d'opérateur solution $U(t, s)$ lorsque $A(t)$ est un opérateur linéaire borné sur X pour tout $0 \leq t \leq T$ et l'application $t \mapsto A(t)$ est continue pour la topologie uniforme des opérateurs.

Théorème 4.1.2. [3]

Pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ on a $U(t, s)$ est un opérateur linéaire borné et on a :

- i) $\|U(t, s)\| \leq \exp\left(\int_s^t \|A(\tau)\|d\tau\right)$.
- ii) $U(t, t) = I$, $U(t, s) = U(t, r)U(r, s)$, pour $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$.
- iii) $(t, s) \mapsto U(t, s)$ est continue pour la topologie uniforme des opérateurs, $0 \leq s \leq t \leq T$.
- iv) $\frac{\partial U(t, s)}{\partial t} = A(t)U(t, s)$, pour $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$.
- v) $\frac{\partial U(t, s)}{\partial s} = -U(t, s)A(s)$, pour $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$.

Démonstration :

Puisque (4.3) est linéaire, il est claire que $U(t, s)$ est un opérateur linéaire défini sur X .

Par (4.6), il vient que

$$\|u(t)\| \leq \|x\| + \int_s^t \|A(\tau)\| \|u(\tau)\|d\tau.$$

D'après le lemme de Gronwall on a

$$\|U(t, s)\| = \|u(t)\| \leq \|x\| \exp\left(\int_s^t \|A(\tau)\|d\tau\right). \quad (4.10)$$

D'où $U(t, s)$ est borné et vérifie (i).

on a

$$U(t, s) = e^{(t-s)A} = U(t - s)$$

si $s = t$ alors :

$$U(t, t) = e^{(t-t)A} = e^{(0)A} = I$$

donc

$$U(t, t) = I$$

de plus

$$U(t, s) = e^{(t-s+r-r)A} = e^{(t-r)A} e^{(r-s)A} = U(t, r)U(r, s), \text{ pour tous } 0 \leq s \leq r \leq t \leq T.$$

D'où (ii) vérifie .

(i) et (ii) implique (iii).

Finalement, par (4.6) et (iii) on déduit que $U(t, s)$ est l'unique solution de l'équation intégrale :

$$()U(t, s) = I + \int_s^t A(\tau)U(\tau, s)d\tau, \quad (4.11)$$

dans $B(X)$, en dérivant (4.11) par rapport à t on obtient (iv).

En dérivant (4.11) cette fois-ci par rapport à s et en appliquant la règle intégrale de Leibniz on obtient :

$$\frac{\partial U(t, s)}{\partial s} = -A(s) + \int_s^t A(\tau) \frac{\partial U(\tau, s)}{\partial s} d\tau.$$

Par l'unicité de la solution de (4.11) on obtient que :

$$\frac{\partial U(t, s)}{\partial s} = -U(t, s)A(s).$$

□

La famille à deux paramètres d'opérateurs linéaires bornés $U(t, s)$, dans le cas non autonome , joue le même rôle du semi-groupe à un paramètre $U(t)$ pour le cas autonome. Donc, on prend la définition suivante :

Définition 4.1.1. [3]

Une famille à deux paramètres d'opérateurs linéaires bornés $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$, sur X est dite un système d'évolution si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- i) $U(t, t) = I$, $U(t, s) = U(t, r)U(r, s)$, pour $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$.
- ii) $(t, s) \mapsto U(t, s)$ est fortement continue, pour $0 \leq s \leq t \leq T$.

Remarque 4.1.

S'il existe un système d'évolution $U(t, s)$ associé au problème non homogène (4.1), où $s \in L^1([0, T] : X)$ pour tout $x \in D(A(s))$, $U(t, s)x \in D(A(t))$ et $U(t, s)x$ est différentiable par rapport à t et par rapport s et vérifiant :

$$\frac{\partial U(t, s)}{\partial t} = A(t)U(t, s)x, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial U(t, s)}{\partial s} = -U(t, s)A(s), \quad (4.13)$$

alors toute solution classique u de (4.1) avec $x \in D(A)$ est donnée par :

$$u(t) = U(t, s)x + \int_s^t U(t, \tau)f(\tau)d\tau, \quad (4.14)$$

4.2 Stabilité d'une famille de générateurs

Cette section couvre quelques concepts de stabilité dont nous aurons besoin pour construire système d'évolution ce problème :

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t), & 0 \leq s < t \leq T \\ u(s) = x. \end{cases} \quad (4.15)$$

dans le cas "hyperbolique".

Définition 4.2.1. [3]

Une famille de générateurs infinitésimaux $(A(t))_{t \in [0, T]}$ des C_0 -semi-groupes sur X est dite stable, s'il existe des constantes $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ (appelées les constantes de stabilité) telles que :

$$\rho(A(t)) \supset]\omega, +\infty[, \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.16)$$

et

$$\left\| \prod_{j=1}^k R(\lambda; A(t_j)) \right\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^k} \quad (4.17)$$

pour tout $\lambda > \omega$ et toute suite finie $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq T$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

Remarque 4.2.

4.2. STABILITÉ D'UNE FAMILLE DE GÉNÉRATEURS

Dans le cas général, les opérateurs $R(\lambda; A(t_j))$ ne commutent pas nécessairement et par suite l'ordre dans (4.17) est important. De plus la suite des produits contenant les t_j doit être toujours "ordonnée par rapport au temps", i.e., un facteur avec un t_j plus grand se trouve à gauche des autres facteurs avec des t_j plus petits.

Par définition, il est clair que la stabilité d'une famille de générateurs infinitésimaux $(A(t))_{t \in [0, T]}$ est conservée lorsqu'on remplace la norme sur X par une norme équivalente, mais les constantes de stabilité dépendent de la norme prise sur X .

Lemme 4.2.1.

Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X , de générateur infinitésimal A , alors :

$$T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}; A\right) \right]^n x, \quad \forall x \in X,$$

et la limite est uniforme en t sur tout intervalle borné.

Démonstration :

Voir [[3]], Theorem 8.3, pag. 33-35) □

Théorème 4.2.1. [3]

Pour $t \in [0, T]$, soit $A(t)$ le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $S_t(s)$, $s \geq 0$ sur X . Alors la famille $(A(t))_{t \in [0, T]}$ est stable, si et seulement si, il existe des constantes $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\rho(A(t)) \supset]\omega, +\infty[, \quad \forall t \in [0, T]$$

et l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\left\| \prod_{j=1}^k S_{t_j}(s_j) \right\| \leq M \exp \left\{ \omega \sum_{j=1}^k s_j \right\} \quad (4.18)$$

pour tout $s_j \geq 0$ et toute suite finie $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq T$, $k = 1, 2, 3, \dots$

ou

$$\left\| \prod_{j=1}^k R(\lambda_j; A(t_j)) \right\| \leq \prod_{j=1}^k \frac{M}{(\lambda_j - \omega)} \quad (4.19)$$

pour tout $\lambda_j > \omega$ et toute suite finie $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq T$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Démonstration :

D'après l'énoncé du théorème, il est clair qu'il suffit de le prouver que pour toute famille $(A(t))_{t \in [0, T]}$ de générateurs infinitésimaux pour $\rho(A(t)) \supset]\omega, +\infty[$, les équations (4.17), (4.18), (4.19) sont équivalents.

Supposons que (4.17) est vrai et soit s_j , $1 \leq j \leq k$ soient des nombres rationnels positifs. Soit $\lambda = N$ un entier positif tel que $Ns_j = m_j$ est un entier positif pour $1 \leq j \leq k$. Dans (4.17), nous prenons des termes $m = \sum_{j=1}^k m_j$ et les subdivisons en K sous-ensembles contenant m_j , $1 \leq j \leq k$ termes. Tout les valeurs de t dans le j -ème sous-ensemble sont considérés comme égales à t_j . Après avoir divisé les deux côtés de l'inégalité par N^m .

On trouve

$$\left\| \prod_{j=1}^k \left[\frac{m_j}{s_j} R\left(\frac{m_j}{s_j}; A(t_j)\right) \right]^{m_j} \right\| \leq M \left(1 - \frac{\omega}{N}\right)^{-m},$$

pour $N \rightarrow \infty$, tel que Ns_j , $1 \leq j \leq k$, rester des entiers, chacun des m_j tend vers l'infini et par le lemme (4.2.1) on obtient :

$$\left\| \prod_{j=1}^k S_{t_j}(s_j) \right\| \leq M \exp \left\{ \omega \sum_{j=1}^k s_j \right\}$$

et donc (4.18) est détient pour toutes les rationnels positives s_j . Le cas général du réels non négatifs s_j , résulte de la fort continuité de $S_t(s)$ dans s et donc (4.17) implique (4.18).

Au chapitre 2, nous avons

$$R(\lambda_j; A(t_j)) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_j s} S_{t_j}(s) x ds \quad \text{pour } \lambda_j > \omega \quad (*)$$

itérer (*) un nombre fini de fois donne

$$\prod_{j=1}^k R(\lambda_j; A(t_j)) x = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \exp \left\{ - \sum_{j=1}^k \lambda_j s_j \right\} \prod_{j=1}^k S_{t_j}(s_j) x ds_1 \cdots ds_k \quad (**)$$

en utilisant (4.18) pour estimer la norme du côté droit de (**) on trouve

$$\left\| \prod_{j=1}^k R(\lambda_j; A(t_j)) x \right\| \leq M \|x\| \prod_{j=1}^k \int_0^\infty e^{(\omega - \lambda_j) s_j} ds_j = M \|x\| \prod_{j=1}^k (\lambda_j - \omega)^{-1}$$

et donc (4.18) implique (4.19).

4.2. STABILITÉ D'UNE FAMILLE DE GÉNÉRATEURS

Choisir tout λ_j égal à λ dans (4.19) montrer que (4.19) implique (4.17) et la preuve est complète. $\square$

Corollaire 4.2.1.

Si pour $t \in [0, T]$, $A(t) \in G(1, \omega)$, i.e., $A(t)$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $S_t(s)$, $s \geq 0$ vérifiant $\|S_t(s)\| \leq e^{\omega s}$, alors la famille $(A(t))_{t \in [0, T]}$ est clairement stable avec les constantes de stabilité $M = 1$ et ω .

Démonstration :

D'après le théorème (2.3.2), on a

$$\Lambda_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re \lambda > \omega\} \subset \rho(A)$$

et pour $\omega = 1$ on trouve

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \Re \lambda > 1\} \subset \rho(A)$$

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : \Re \lambda > 1\} \subset \rho(A).$$

Donc

$$[1, +\infty[\subset \rho(A)$$

on a

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{j=1}^k S_{t_j}(s_j) \right\| &= \|S_{t_1}(s_1).S_{t_2}(s_2).\dots.S_{t_k}(s_k)\| \\ &\leq \|S_{t_1}(s_1)\| \|S_{t_2}(s_2)\| + \dots + \|S_{t_k}(s_k)\| \\ &\leq e^{\omega s_1} e^{\omega s_2} \dots e^{\omega s_k} \quad (\text{car } A(t) \in G(1, \omega)) \\ &= e^{\omega(s_1+s_2+\dots+s_k)} \\ &= e^{\omega \sum_{j=1}^k s_j} \end{aligned}$$

donc d'après le théorème (4.2.1), pour $M = 1$ $A(t)$ est stable. $\square$

Remarque 4.3.

Toute famille $(A(t))_{t \in [0, T]}$ de générateurs infinitésimaux des C_0 -semi-groupes de contractions est stable.

4.3 Un système d'évolution dans le cas hyperbolique

Définition 4.3.1. [16]

Soient X et Y deux espaces de Banach.

- Si Y un sous-espace de X est fermé et soit $T : D(T) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire sur X .
Le sous-espace Y est $(T(t))_{t \geq 0}$ -invariant : $T(t)Y \subseteq Y$.
- Soit $(S(s))_{s \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A . Un sous-espace Y de X est dit A -admissible si Y est un sous-espace invariant par $(S(s))_{s \geq 0}$ et la restriction de $S(s)$ à Y est un C_0 -semi-groupe sur Y , i.e., (il est semi-groupe fortement continue pour la norme $\|\cdot\|_Y$).
la restriction $\tilde{S}(s)$ de $S(s)$, $s \geq 0$, à Y est un C_0 -semi-groupe sur Y . Dans ce cas, $\tilde{A}$ la restriction de A à Y est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(\tilde{S}(s))_{s \geq 0}$ sur Y .

Soit $(A(t))_{t \in [0, T]}$ le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(S_t(s))_{s \geq 0}$ sur X .

supposons les hypothèses suivantes :

- (H_1) : $(A(t))_{t \in [0, T]}$ est une famille stable avec les constantes de stabilité M et ω .
- (H_2) : Y est $A(t)$ -admissible pour $t \in [0, T]$ et la famille $(\tilde{A}(t))_{t \in [0, T]}$ des restrictions à Y est une famille stable sur Y avec les constantes de stabilité $\tilde{M}$ et $\tilde{\omega}$.
- (H_3) : Pour $t \in [0, T]$, $D(A(t)) \supset Y$, $A(t)$ est un opérateur linéaire borné de Y dans X et $t \longmapsto A(t)$ est continue pour la norme usuelle $\|\cdot\|_{Y \rightarrow X}$ de $B(Y, X)$.

Considérons le problème de système d'évolution suivante :

$$(PCAn) \begin{cases} u'(t) = A(t)u(t), & 0 \leq s \leq t \leq T \\ u(s) = x. \end{cases}$$

où la famille $(A(t))_{t \in [0, T]}$ vérifie les conditions $(H_1) - (H_3)$.

L'ensemble des conditions $(H_1) - (H_3)$ est souvent relié au cas "hyperbolique", contrairement au cas "parabolique" dont lequel chaque opérateur $(A(t))_{t \geq 0}$ est supposé le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe analytique. Ces noms sont liés aux différentes applications des résultats abstraits à la théorie des équations aux dérivées partielles.

Le résultat principal de cette section : le théorème (4.3.1), montre que si $(A(t))_{t \in [0, T]}$ vérifie les conditions $(H_1) - (H_3)$, nous pouvons donc relier un système

d'évolution unique $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ au problème (PCAn).

Théorème 4.3.1. [3]

Soit $A(t)$, $0 \leq t \leq T$, le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(S(s))_{s \geq 0}$ sur X .

Si la famille $(A(t))_{t \in [0, T]}$ vérifie les conditions $(H_1) - (H_3)$, alors il existe un unique système d'évolution $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ sur X vérifiant :

- (E_1) $\|U(t, s)\| \leq M e^{\omega(t-s)}$ pour $0 \leq s \leq t \leq T$.
- (E_2) $\frac{\partial^+}{\partial t} U(t, s)x|_{s=t} = A(s)x$ pour $x \in Y$ et $0 \leq s \leq t \leq T$.
- (E_3) $\frac{\partial}{\partial s} U(t, s)x = -U(t, s)A(s)x$ pour $x \in Y$ et $0 \leq s \leq t \leq T$.

Démonstration :

L'approximation d'une famille $(A(t))_{t \in [0, T]}$ par des familles $(A_n(t))_{t \in [0, T]}$ où $n = 1, 2, \dots$.

Définies comme suit : $t_k^n = \frac{k}{n}T$, $k = 0, 1, \dots, n$

soit :

$$\begin{cases} A_n(t) = A(t_k^n), & t_k^n \leq t \leq t_{k+1}^n, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ A_n(T) = A(T). \end{cases} \quad (4.20)$$

car $t \mapsto A(t)$ est continue pour la norme $\|\cdot\|_{Y \rightarrow X}$ de $B(Y, X)$, il s'ensuit que $A(t)$ converge uniformément car :

$$\|A(t) - A_n(t)\|_{Y \rightarrow X} \longrightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty, t \in [0, T]. \quad (4.21)$$

D'après la définition de $A_n(t)$ et par les conditions du théorème il en résulte que pour $n \geq 1$, les familles $(A_n(t))_{t \in [0, T]}$ est une stable sur X avec les constantes de stabilité M et ω et les familles $(\tilde{A}_n(t))_{t \in [0, T]}$ est sont stables sur Y avec les constantes de stabilité $\tilde{M}$ et $\tilde{\omega}$.

Définie une famille à deux paramètres $U_n(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ par :

$$U_n(t, s) = \begin{cases} S_{t_j^n}(t-s), & t_j^n \leq s \leq t \leq t_{j+1}^n \\ S_{t_k^n}(t-t_k^n) \left[\prod_{j=l+1}^{k-1} S_{t_j^n}\left(\frac{T}{n}\right) \right] S_{t_j^n}(t_{l+1}^n - s), \end{cases} \quad (4.22)$$

pour $k > l$, $t_k^n \leq t \leq t_{k+1}^n$, $t_l^n \leq s \leq t_{l+1}^n$.

$U_n(t, s)$ est un système d'évolution, alors

$$U_n(s, s) = I, \quad U_n(t, s) = U_n(t, r)U_n(r, s) \text{ pour } 0 \leq s \leq r \leq t \leq T, \quad (4.23)$$

et

$$(t, s) \longrightarrow U_n(t, s) \text{ est fortement continue sur } 0 \leq s \leq t \leq T. \quad (4.24)$$

d'après la théorème(4.2.1), il s'ensuit que

$$\|U_n(t, s)\| \leq M e^{\omega(t-s)} \text{ pour } 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (4.25)$$

et par (H_2) on a

$$U_n(t, s)Y \subset Y \text{ pour } 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (4.26)$$

puisque $D(A(t)) \supset Y$ pour $t \in [0, T]$, la définition une famille $U_n(t, s)$ entraîne que :

pour $x \in Y$, U est continue pour $0 \leq s \leq t$, continûment différentiable, alors

$$\frac{\partial}{\partial t} U_n(t, s)x = A_n(t)U_n(t, s)x \quad (4.27)$$

pour $t \neq t_j^n, j = 0, 1, \dots, n$, et

$$\frac{\partial}{\partial s} U_n(t, s)x = -U_n(t, s)A_n(s)x \quad (4.28)$$

pour $s \neq t_j^n, j = 0, 1, \dots, n$.

De plus, le théorème (4.2.1) et (H_2) entraîne que :

$$\|U_n(t, s)\| \leq \widetilde{M} e^{\widetilde{\omega}(t-s)} \text{ pour } 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (4.29)$$

voir l'application $\varphi : r \mapsto U_n(t, r)U_m(r, s)x$, pour $x \in Y$.

Par (4.27) et (4.28), il s'ensuit que φ est différentiable en $r, s \leq r \leq t$, sauf en un nombre fini des points r , on a

$$U_n(t, s)x - U_m(t, s)x = - \int_s^t \frac{\partial}{\partial r} U_n(t, r)U_m(r, s)x dr \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_s^t -U_n(t, r)A_n(r)U_m(r, s)x + A_m(r)U_m(r, s)U_n(t, r)x \\ &= \int_s^t U_n(t, r)(A_n(r) - A_m(r))U_m(r, s)x dr. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Alors (4.31) implique que :

$$\|U_n(t, s)x - U_m(t, s)x\| = \left\| \int_s^t U_n(t, r)(A_n(r) - A_m(r))U_m(r, s)x dr \right\|.$$

Posons $\gamma = \max(\omega, \widetilde{\omega})$, par (4.25) et (4.29) il en résulte que :

$$\|U_n(t, s)x - U_m(t, s)x\| \leq M \widetilde{M} e^{\gamma(t-s)} \|x\|_Y \int_s^t \|A_n(r) - A_m(r)\|_{Y \rightarrow X} dr \quad (4.32)$$

4.3. UN SYSTÈME D'ÉVOLUTION DANS LE CAS HYPERBOLIQUE

par (4.21), alors

$$\|A_n(r) - A_m(r)\|_{Y \rightarrow X} \longrightarrow 0$$

il s'ensuit que

$$\|U_n(t, s)x - U_m(t, s)x\| \longrightarrow 0$$

alors $U_n(t, s)$ converge uniformément sur $0 \leq s \leq t \leq T$ dans X , quand $n \rightarrow \infty$. Ou Y est dense dans X , ceci avec (4.25) implique que converge fortement dans X , quand $n \rightarrow \infty$. Soit

$$U(t, s)x = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(t, s)x, \text{ pour } x \in X, 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (4.33)$$

par (4.23) et (4.24), il est clair $U(t, s)$ est un système d'évolution sur X et par (4.25) il s'ensuit que (E_1) est vérifiée.

Par suite, montrer (E_2) et (E_3) voir application $\psi : r \mapsto U_n(t, r)S_\tau(r - s)x$ pour $x \in Y$.

ψ est différentiable sauf en un nombre fini des points r , on a

$$U_n(t, s)x - S_\tau(t - s)x = - \int_s^t \frac{\partial}{\partial r} U_n(t, r)S_\tau(r - s)x dr \quad (4.34)$$

$$= \int_s^t U_n(t, s)(A_n(r) - A(\tau))S_\tau(r - s)x dr \quad (4.35)$$

il en résulte que

$$\|U_n(t, s)x - S_\tau(t - s)x\| \leq M\widetilde{M}e^{\gamma(t-s)}\|x\|_Y \int_s^t \|A_n(r) - A(\tau)\|_{Y \rightarrow X} dr \quad (4.36)$$

par ((4.36) pour passage à la limite quand $n \rightarrow \infty$ on trouve :

$$\|U(t, s)x - S_\tau(t - s)x\| \leq M\widetilde{M}e^{\gamma(t-s)}\|x\|_Y \int_s^t \|A(r) - A(\tau)\|_{Y \rightarrow X} dr \quad (4.37)$$

Choisir $\tau = s$ dans (4.37), avec $t - s > 0$, en faisant tendre $t \downarrow s$ on trouve :

$$\limsup_{t \downarrow s} \frac{1}{t - s} \|U(t, s)x - S_s(t - s)x\| = 0 \quad (4.38)$$

où $t \mapsto A(t)$ est continue pour la norme usuelle de $B(Y, X)$. Puisque $S_s(t - s)x$ est différentiable et dérivée à droite en $t = s$, il en résulte par (4.38) que $U(t, s)x$ est aussi différentiable et se dérivée à droite en $t = s$ sont les mêmes. D'où (E_2) .

4.3. UN SYSTÈME D'ÉVOLUTION DANS LE CAS HYPERBOLIQUE

Choisir $\tau = t$ dans (4.37), avec $t - s > 0$, en faisant tendre $t \uparrow s$ on trouve :

$$\limsup_{t \uparrow s} \frac{1}{t-s} \|U(t,s)x - S_t(t-s)x\| = 0 \quad (4.39)$$

implique que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^-}{\partial s} U(t,s)x &= -A(s)U(t,s)x \\ &= -A(t)x \quad \text{pour } s = t \end{aligned} \quad (4.40)$$

pour $s < t$, (E_2) et la continuité forte de $U(t,s)$ dans X impliquent que :

$$\frac{\partial^+}{\partial s} U(t,s)x = \lim_{h \downarrow 0} \frac{U(t,s+h)x - U(t,s)x}{h} \quad (4.41)$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} U(t,s+h) \frac{x - U(s+h,s)x}{h} \quad (4.42)$$

$$= -U(t,s)A(s)x \quad (4.43)$$

et pour $s \leq t$ on a par (4.40)

$$\frac{\partial^-}{\partial s} U(t,s)x = \lim_{h \downarrow 0} \frac{U(t,s)x - U(t,s-h)x}{h} \quad (4.44)$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} U(t,s) \frac{x - U(s,s-h)x}{h} \quad (4.45)$$

$$= -U(t,s)A(s)x \quad (4.46)$$

les égalités (4.43) et (4.46) montrent que $U(t,s)$ vérifie (E_3) .

Montrer que $U(t,s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ est unique système d'évolution vérifiant (E_1) , (E_2) et (E_3) . Supposons $V(t,s)$ est un autre système d'évolution vérifie $(E_1) - (E_3)$, pour $x \in Y$ considérons la fonction $\phi : r \mapsto V(t,r)U_n(r,s)x$, puisque $V(t,s)$ vérifie (E_3) en suite, cela vient de la construction de $U_n(t,s)$ que ϕ est différentiable sauf en un nombre fini des points r , on a

$$\begin{aligned} V(t,s)x - U_n(t-s)x &= - \int_s^t \frac{\partial}{\partial r} V(t,r)U_n(r,s)x dr \\ &= \int_s^t V(t,r)(A(r) - A_n(r))U_n(r,s)x dr \end{aligned}$$

par suite :

$$\|V(t,s)x - U_n(t-s)x\| \leq M\tilde{M}e^{\gamma(t-s)}\|x\|_Y \int_s^t \|A(r) - A_n(r)\|_{Y \rightarrow X} dr \quad (4.47)$$

4.4. LA RÉGULARISATION DE LA SOLUTION DANS LE CAS HYPERBOLIQUE

quand $n \rightarrow \infty$ dans (4.47) et on utilisant (4.21) on obtient, pour tout $x \in Y$, $V(t, s)x = U(t, s)x$. Puisque Y est dense dans X , $V(t, s)$ et $U(t, s)$ vérifient (E_1) , alors $V(t, s) = U(t, s)$. □

4.4 La régularisation de la solution dans le cas hyperbolique

Soient X et Y deux espaces de Banach tel que Y est densément et continuellement "imbibé" dans X et soit $\{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ une famille des générateurs infinitésimaux d'un C_0 -semi-groupe dans X qui satisfait les conditions $(H_1) - (H_3)$ du section précédente. Soit $f \in C([s, T] : X)$ la valeur initiale du problème :

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + f(t), & 0 \leq s \leq t \leq T \\ u(s) = x. \end{cases} \quad (4.48)$$

Une fonction $u : [s, T] \rightarrow X$ est dit solution classique de (4.48) si u est continue sur $[s, T]$, $u(t) \in D(A(t))$ pour $s < t \leq T$ et u continument différentiable sur $]s, T]$ et vérifier (4.48).

Malheureusement, nous ne savons aucune simple condition pour l'existence de la solution classique du problème (4.48) pour la valeur initiale dans le cas hyperbolique lorsque $f \equiv 0$. Pour obtenir une solution classique de (4.48) dans les conditions raisonnables, nous limiterons dans cet article à une notion assez forte et donc assez restreinte notion de solution de (4.48) à savoir les solution Y -valorisées (solution à valeur Y).

Définition 4.4.1. [3]

Une fonction $u \in C([s, T] : Y)$ est une solution à valeur Y du problème de valeur initiale (4.48) si : $u \in C([s, T] : X)$ et le problème (4.48) satisfait en X .

Une solution à valeur Y du problème de valeur initiale (4.48) diffère d'une solution classique en satisfaisant pour $s \leq t \leq T$, $u(t) \in Y \subset D(A(t))$ plutôt que seulement $u(t) \in D(A(t))$ et en étant continue dans la norme Y plus forte plutôt que simplement dans le X -nom. Pour les solution à valeur Y , nous avons le théorème suivant.

Théorème 4.4.1. [3]

Soit $\{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ une famille des générateurs infinitésimaux d'un C_0 -semi-groupe dans X qui satisfait les conditions $(H_1) - (H_3)$ du définition (4.3.1) et Soit $f \in C([s, T] : X)$. Si le

4.4. LA RÉGULARISATION DE LA SOLUTION DANS LE CAS HYPERBOLIQUE

problème de valeur initiale (4.48) a une solution à valeur Y , alors cette solution u est unique et de plus donner par :

$$u(t) = U(t,s)x + \int_s^t U(t,r)f(r)dr, \quad (4.49)$$

où $U(t,s)$ est le système d'évolution fourni par les théorème précédent.

Démonstration :

Voir ([3] page. 140-141)

□

Théorème 4.4.2. [3]

Soit $\{A(t)\}_{t \in [0,T]}$ satisfait les conditions du théorème (3.1.[3].page.110) et soit $U(t,s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$, le système d'évolution donné dans le théorème (3.1.[3].page.110) si :

- (E_4) $U(t,s)Y \subset Y$ pour $0 \leq s \leq t \leq T$.
- (E_5) pour $x \in Y$, $U(t,s)$ est continue en Y , pour $0 \leq s \leq t \leq T$.

pour chaque $x \in Y$, $U(t,s)x$ est la solution unique évaluée en Y du problème initiale (4.15).

Démonstration :

Il est claire que la solution à valeur de Y du problème à valeur initiale (4.48) est immédiate lorsque en prend le théorème (4.4.1). Il suffit de montrer que si $x \in Y$, $u(t) = U(t,s)x$ est un Y -valeur solution du problème (4.15). Pour (E_4) et (E_5) on pose $u(t) \in Y$ pour tout $s \leq t \leq T$, il est continue pour la norme- Y pour tout $s \leq t \leq T$. Pour compléter la preuve, on a supposer que u est satisfait la différentiabilité de l'équation dans (4.15) d'où, $u(t) = U(t,s)x \in Y$, pour tout $s \leq t \leq T$, on obtient (E_2) par :

$$\frac{\partial^+}{\partial s} U(t,s)x = \lim_{h \downarrow 0} \frac{U(t+h,s)x - U(t,s)x}{h} \quad (4.50)$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{U(t+h,t) - I}{h} U(t,s)x \quad (4.51)$$

$$= U(t,s)A(t)x \quad (4.52)$$

Le membre droit de la relation (4.52) est continue dans X lorsque $t \mapsto U(t,s)x$ est continue dans la norme- Y et $t \mapsto A(t)$ est continue dans $B(Y,X)$.

D'autre part, le droit de la dérivation de $U(t,s)x$ est continue dans X et de plus par conséquent $U(t,s)$ est continument différentiable dans X par :

$$\frac{\partial}{\partial s} U(t,s)x = A(t)U(t,s)x, \text{ pour } s \leq t \leq T.$$

□

Lemme 4.4.1.

Soit $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ est le système d'évolution dans l'espace de Banach X , qui satisfait $\|U(t, s)\| \leq M$ pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$.

Si $H(t)$ une famille d'opérateur linéaire et continue fortement alors il existe une famille d'opérateur linéaire unique $V(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ dans X tel que :

$$V(t, s)x = U(t, s)x + \int_s^t V(t, r)H(r)U(r, s)xdr, \quad x \in X \quad (4.53)$$

et $V(t, s)x$ est continue en s, t pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$.

Remarque 4.4.

Si $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ est le système d'évolution qui satisfait $(E_4) - (E_5)$ et pour tout $x \in X$ la valeur initiale du problème (4.48) a une unique solution de valeur- Y et donner par $U(t, s)x$.

En addition, lorsque le système d'évolution $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ satisfait $(E_1) - (E_5)$ en peut remplacer la condition (H_2) par une autre condition $(H_2)^+$ tel que :

- $((H_2)^+)$ la famille $\{Q(t)\}_{t \in [0, T]}$ est isomorphisme de Y à X telle que :

$$\forall x \in Y, \quad Q(t)x$$

est continument différentiable dans X en $[0, T]$ et :

$$Q(t)A(t)Q(t)^{-1} = A(t) + B(t), \quad (4.54)$$

où $B(t)$, $0 \leq t \leq T$ est une famille d'opérateur linéaire et continue fortement .

Théorème 4.4.3. [3]

Soit $A(t)$, $0 \leq t \leq T$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe dans X . Si la famille $\{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ est satisfait les conditions (H_1) , $(H_2)^+$ et (H_3) alors il existe une unique solution $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ dans X qui satisfait $(E_1) - (E_5)$.

Démonstration :

Voir ([3] page. 143-145)

□

Corollaire 4.4.1. [3]

4.5. UN SYSTÈME D'ÉVOLUTION NON HOMOGÈNE DANS LE CAS HYPERBOLIQUE

Soit $\{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ une famille des générateurs infinitésimaux d'un C_0 -semi-groupe dans X . Si la famille $\{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ est satisfait les conditions (H_1) , $(H_2)^+$ et (H_3) et pour $x \in X$ la valeur initiale du problème :

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t), & s < t \leq T \\ u(s) = x. \end{cases} \quad (4.55)$$

Alors il existe une unique solution de la valeur Y dans $s \leq t \leq T$.

Une cas spéciales, pour que les conditions du théorème (4.4.3) sont simples à vérifier où $D(A(t)) = D$ est indépendant de t . Dans ce cas, on peut définir en D la norme $\|\cdot\|_Y$ par :

$$\|x\|_Y = \|x\| + \|A(0)x\|, \forall x \in Y = D. \quad (4.56)$$

Et n'est pas difficile, de voir que $A(0)$ est incluse dans D qu'il est équipé la norme d'espace de Banach que l'on note par Y . Ce Y est claire que densément et continuellement imbibé dans X .

Théorème 4.4.4. [3]

Soit $\{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ une famille stable de générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe dans X . Si $D(A(t)) = D$ est indépendant de t et $\forall x \in Y$, $A(t)x$ est continument différentiable dans X . Alors il existe une unique système d'évolution $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ qui satisfait $(E_1) - (E_5)$, ou Y est équipé D dans la norme $\|\cdot\|_Y$ qui donner par la relation (4.56).

Démonstration :

Nous supposons que $\{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ est satisfait les conditions (H_1) , $(H_2)^+$ et (H_3) . La condition (H_1) est trivial dans le théorème. La continuité différentiable de $A(t)x$ dans X est claire que implique $t \mapsto A(t)$ est continue dans la norme $B(Y, X)$, donc (H_3) est satisfait. Pour montrer $(H_2)^+$ on note pour tout $\lambda_0 > \omega$ l'opérateur $Q(t) = \lambda_0 I - A(t)$ est un isomorphisme de Y dans X par l'hypothèse de $A(t)u$, alors $Q(t)$ est continument différentiable dans X pour tout $x \in X$. Finalement, $Q(t)A(t)Q(t)^{-1} = A(t)$, qui donne par la relation (4.54) est satisfait pour $B(t) \equiv 0$, donc la preuve est complétée. $\square$

4.5 Un système d'évolution non homogène dans le cas hyperbolique

Cette section consacrée à quelque remarques concernant les solutions du problème de valeur initiale non homogène dans le cas hyperbolique

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + f(t), & 0 \leq s \leq t \leq T \\ u(s) = x. \end{cases} \quad (4.57)$$

Définition 4.5.1. [3]

Soit $(A(t))_{t \in [0, T]}$ vérifie les conditions du théorème (4.3.1) et soit $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ est un système d'évolution donné par le théorème (4.3.1). pour chaque $f \in L^1(s, T : X)$ et $x \in X$, la fonction continue

$$u(t) = U(t, s)x + \int_s^t U(t, r)f(r)dr \quad (4.58)$$

est appelée la solution "mild" du problème à valeur initiale (4.57).

D'après le remarque (4.1), il s'ensuit que si le système d'évolution $U(t, s)$ assez régulier et $f \in C^1([s, T] : X)$, alors le problème de valeur initiale (4.57) a une solution classique unique pour $x \in D(A(s))$ et cette solution coïncide avec la solution "mild" (4.58). Un résultat similaire (théorème (4.4.1)) pour les solutions à valeur Y de (4.57).

L'existence de solution à valeur Y pour le problème de valeur initiale non homogène il est fourni par la théorème suivant :

Théorème 4.5.1. [3]

Soit $(A(t))_{t \in [0, T]}$ satisfait la condition du théorème (4.4.2). Si $f \in C([s, T] : Y)$ alors pour $x \in X$ le problème de valeur initiale (4.57) possède une solution u unique à valeur Y donné par :

$$u(t) = U(t, s)x + \int_s^t U(t, r)f(r)dr \quad (4.59)$$

Démonstration :

Par le théorème (4.4.2) montré que $U(t, s)$ est une solution à valeur- Y du problème de la valeur initiale homogène (PCAn).

Prouver que u donné par (4.59) est une solution à valeur- Y de (4.57), montrerons que

$$w(t) = \int_s^t U(t, r)f(r)dr$$

est une solution à valeur- Y de (4.57) avec la valeur initiale $w(s) = x = 0$. De notre hypothèse sur f et (E_4) il s'ensuit facilement que $w(t) \in Y$ pour $s \leq t \leq T$. De E_5 il suit que $r \rightarrow U(t, r)f(r)$ est continu en Y ce qui implique $t \rightarrow w(t)$ continue en Y et $r \rightarrow A(t)U(t, r)f(r)$ est continue dans X pour $s \leq t \leq T$.

La continuité de $r \rightarrow A(t)U(t, r)f(r)$ implique que $w(t)$ est continûment différentiable

4.5. UN SYSTÈME D'ÉVOLUTION NON HOMOGÈNE DANS LE CAS HYPERBOLIQUE

dans X et que :

$$w'(t) = A(t)w(t) + f(t) \quad \text{pour } s \leq t \leq T$$

enfin, l'unicité de la solution à valeur- Y de (4.57) est une conséquence directe du théorème 4.5.1. □

Le théorème (4.5.1) montre que si la famille $(A(t))_{t \in [0, T]}$ est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe dans X satisfait aux conditions (H_1) , (H_2^+) , et (H_3) alors pour tout $x \in Y$ et $f \in C([s, T] : Y)$ le problème de la valeur initiale (4.57) possède u est une solution unique de valeur Y donné par (4.59).

Théorème 4.5.2. [3]

Soit $(A(t))_{t \in [0, T]}$ une famille stable de générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe sur X tel que $D(A(t)) = D$ est indépendant de t et pour $x \in D$, $t \mapsto A(t)x$ est continûment différentiable dans X . Si $f \in C^1([s, t] : X)$ alors pour tout $x \in D$ le problème de la valeur initiale (4.59) a une solution classique unique u donnée par :

$$u(t) = U(t, s)x + \int_s^t U(t, r)f(r)dr.$$

Démonstration :

Voir ([3] page 147-149) □

Conclusion

Tout d'abord, ce mémoire est une étude plus motivante baser aux outils mathématique, intervenant dans la théorie des opérateurs, les semi-groupes et ses applications dans le cadre des équations différentielles et aux dérivées partielle.

Ensuite, ce travail a consiste à introduire aux l'étude des notions des bases fondamentales de la théorie mais à conséquent, d'obtenir des résultats généraux et un bagage mathématique plus utiliser dans les différents domaines de nos vis.

Finalement, comme applications, nous traitons plus en détails le problème de Cauchy abstrait homogène et non homogène et le système d'évolution qui sont au fond de l'un des domaines les plus fertiles de la recherche mathématique actuelles, en donnant un exemple applicable et quelques équations au dérivés partielles classique qui donne à nous une tâche motivante pour plusieurs recherche au futur.

Résumé

Ce mémoire est composé de quatre chapitres. Nous avons donné au chapitre (1) , les notions et les définitions des opérateurs que nous avons utilisés dans toute la suite de mémoire. D'abord, au chapitre(2) nous avons présenté une introduction à la théorie des semi-groupes et l'étude de deux classes importantes des semi-groupes savoir les semi-groupes différentiables et analytiques. Dans les deux derniers chapitres, la plupart des outils et des matériaux suivent Pazy.A, au chapitre(3) , Nous sommes étudié en détail le problème de Cauchy abstrait homogène et non homogène et par l'occasion nous avons donné une application illustrative des équations aux dérivées partielles. En fin, au chapitre(4) , nous avons présenté la démarche pour étudier les équations d'évolutions qui sont plus générales que le(PHC) en donnant à la fin la construction d'un système d'évolution dans le cas hyperbolique.

Mots clés : Opérateur linéaire, semi-groupe, problème abstrait de Cauchy homogène et non homogène, système d'évolution.

Abstract

This work is made up of four chapters. We gave in chapter (1), the concepts and definitions of operators that we have used throughout the remainder of the work. First, in chapter (2) , we presented an introduction to the theory of semi-groups and the study of two important classes of semi-groups namely the differentiable and analytical semi-groups. In the last two chapters, most tools and materials follow Pazy.A, in chapter (3), we are studied in detail the homogeneous abstract Cauchy problem and nonhomogeneous and on occasion we have given an illustrative application of partial derivative equations. At the end, in chapter (4), we presented the approach to study the equations of evolution which are more general than the (PHC) by giving at the end the construction of an evolution system in the case hyperbolic.

Keywords: Linear operator, semi-group, homogeneous and non-homogeneous Cauchy abstract problem, evolution system.

ملخص

تتكون هذه المدكرة من أربعة فصول. أعطينا في الفصل (1) مفاهيم وتعريف عوامل التشغيل التي استخدمناها طوال الفترة المتبقية من الأطروحة. في الفصل (2) قدمنا مقدمة لنظرية مجموعات شبه نصفية ودراسة فئتين مهمتين من مجموعات شبه وهي المجموعات شبه التحليلية المتميزة.

في الفصلين الأخيرين ، تتبع معظم الأدوات والمواد من Pazy.A ، في الفصل(3) درسنا بالتفصيل مشكلة كوشي مجردة متجانسة وغير

متجانسة وفي بعض الأحيان قدمنا تطبيقًا توضيحيًا لمعادلات مشتقة جزئية. في النهاية ، في الفصل (4) قدمنا منهج دراسة معادلات التطور الأكثر عمومية من (PHC) من خلال إعطاء في نهاية المطاف بناء نظام تطور في القضية القطعي.

الكلمات المفتاحية: عامل خطي ، شبه مجموعة ، مشكلة مجردة من الكوشي متجانسة وغير متجانسة ، نظام التطور

Bibliographie

- [1] Ahmed,N.U.semi groups theory with application to systeme and control, Logman Scientific and Technical, LONDON,1991.
- [2] André.W.Analyse Fonctionnelle, Technique de l'ingénieur, traité sciences fondamentales,7.pp.
- [3] APazy.Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.Springer Verlag,NEWYORK, BERLIN, 1-20 et 126-149 P.P, 1983.
- [4] Boudjedaa.B. Cours théorie des semi-groupes,département des sciences technologie et informatique, chapitre 1 et 2,2019.
- [5] Brayan.P.Rynne and Martin .Ayoyngson, Linear Fonctionnelle Analysis, LONDON,2008 .
- [6] Brezis.H,Analyse Fonctionnelle (théorie et application), Masson,16-17,29 et 101 p.p, 1983.
- [7] Cauchy.A.L, cours d'analyse de l'école Royale Polytechnique,Première partie, Analyse Algébrique, 1821.
- [8] Dunford.N,S,Schwartz.J.T.Linear operators, part I.Interscience publishers, INC, NEW-YORK,Wiley, 1967 .
- [9] Hille .E. Functional Analysis and semi groups, Amer .Math.Soc.Coll.Publ,vol31, Amer .Math.Soc.1948.
- [10] Emmanuel.F, Analyse Fonctionnelle et Theorie des operateurs cours et exercices,2009-2010 .
- [11] Ezzinbi.Kh.Lecture notes in Functional ANalysis and evolution equations, PMB 681,FCT NIGERIA, 2-5 p.p, August 2010.

- [12] Hadmard.J, Le Prince de Huygens, Bull.Soc.Math.FRANCE, 610-640 p.p, 1952.
- [13] Hundert Mark.D, Meyriss.M, Schanau Belt.R, Machinek.L. Operators semi groups and dispersive equation, 16th Internat seminar on evolution equation, 77-78 p.p, February 21, 2013.
- [14] Irina V. Melnikova and Alexei Finil'kov. Abstract Cauchy problem : three approaches, Chapman and Hall/CRC monograph and surveys in pure and applied Mathematics, 120, 2001.
- [15] Yosida. K. On the differentiability and the representation of one parameter semi groups of linear operators, J.Math.Soc.JAPAN1, 15-21 p.p, 1948.
- [16] Klaus.J. E., Ramier.N. One parameter semi groups for linear Evolution Equations, 2000 Springer-Verlag, NEWYORK, 1991 .
- [17] Lemle, L, D. Approximation à YOSIDA d'un générateur infinitésimal d'un semi groupe continu d'opérateurs linéaires bornés. Bil.St.Acad."Henri Coanda" Bra, Sov, 2-12 p.p, (2000).
- [18] Lumer.G, Phillips.R.S. Dissipative operators in Banach space Pacific J.Math, 679-698 p.p, 11(1961).
- [19] Miyadera.I. Generation of strongly continuous semi groups of operators. Tohoku, Math, J, U, 109-114 p.p, 1952.
- [20] Moussaoui.M. Doctoral thesis on semi groups and application. ENS of COSTANTINE, 6, 11 and 16 p.p, October 28-31, 2017.
- [21] Pierre.L-B, introduction à la théorie spectrale cours et exercices corrigés, Springer, PARIS, chapitre 2, 17-18 p.p, 2003 .
- [22] Schanau Belt.R. These of doctorat Evolution Equations, chapitre 1, 1 p.p, August, 2, 2019.
- [23] Walter.H, Introduction à l'Analyse fonctionnelle, CANADA, 1981 .