الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليــم العالــي والبحــث العلمــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire
Abdelhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Estimation d'un retard d'une équation différentielle stochastique

Préparé par :
Guidoum khaoula
Boudjenana khaoula

Soutenue devant le jury

Boourourou Siham	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinateur
Bouzekria Fahima	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Sekhane Chafika	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président

Année universitaire :2019/2020

REMERCIEMENT

Je tiens tout d'abord à remercier dieu de m'avoir donné le courage, la morale et la sauté pour mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreuse ''S.Bouzekria'' d'avoir accepté d'encadrer mon travaille avec compétence, pour sa patience, ses remarques et ses conseils.

Je voudrais également remercier les membres du jury pour avoir accepter d'évaluer ce travail et pour touts leur remarques et critiques.

Nous désirons aussi remercier les professeurs de l'université de Mila ''Monsieur Mohammed Salah Abd Waheb'' et ''Monsieur Boularouk yakoub''.

Nos remerciements sont également adressés à tous les enseignants qui ont contribué notre formation.

DIDICACE

Merci ALLAH tout puissant sur lui et son aide pour compléter cette recherche. A celui qui m'a donné tout ce qu'il avait pour réaliser ses espoirs, à ceux qui me poussait vers l'avant pour obtenir. A l'homme qui a si fortement possédé l'humanité à celui qui m'appris de grands sacrifices, mon chère père, dieu a prolongé sa vie. A celui qui lui a donné le plaisir de son foie, toute tendresse, à ceux qui étaient soulagés chaque fois que je me souvenais de son sourire dans mon visage, ma mère était l'ange le plus cher sur le cœur.

Une spéciale dédicace

A mes frères 'Alaa Edin' et 'Mohammed'.

A mes amies 'Rania', 'Samar', 'Khaoula' , 'aida', 'Fedwa', 'Nourhane', 'Bouthayna'.

A ma promotion de Master M.A 2020.

KHAOULA.B

DIDICACE

Merci ALLAH tout puissant sur lui et son aide pour compléter cette recherche. A celui qui m'a donné tout ce qu'il avait pour réaliser ses espoirs, à ceux qui me poussait vers l'avant pour obtenir. A l'homme qui a si fortement possédé l'humanité à celui qui m'appris de grands sacrifices, mon chère père, dieu a prolongé sa vie. A celui qui lui a donné le plaisir de son foie, toute tendresse, à ceux qui étaient soulagés chaque fois que je me souvenais de son sourire dans mon visage, ma mère était l'ange le plus cher sur le cœur.

Une spéciale dédicace

A mes sœur `Samra', 'Marwa', 'Nessrine', et'Aya'.

A mon frère 'Mohammed' et son mariée, sans oblier `Abd Allah`, `Meryam`, `Batoul` .

A mon marie 'Tarek' et mon deuxième famille, mon mère et mon père, mes sœur 'Ikram' et 'Rihane', mon frère 'Nadir'.

A mes amies 'Samar', 'Khaoula', 'Hayam', 'Malek', 'Ikram', 'Romaissa', 'Wissam', 'Khalida', 'Nesrine', 'Fedwa', 'Chaima'.

A ma promotion de Master M.A 2020

KHAOULA.G

Table des matières

Introduction

En théorie des probabilités et statistiques, un processus de diffusion est une solution d'un équation différentielle stochastique, c'est un processus de Markov en temps continu avec des trajets d'échantillonnage presque sûrement continus. Mouvement brownien, reflété brownien motion et Ornstein – Uhlenbeck sont des exemples des processus de diffusion.
Dans ce travaille, nous avons étudié un cas particulier sur une classe de processus de diffusion à temps continue $X = (X_t, t \geq 0)$ solution d'équations différentielles où la dérivé est une fonctionnelle de la trajectoire définie sur un passé de longueur finie. La dérivé est définie par une mesure impliquant des retards. Plus précisément, nous considérons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = \left(\int_\delta^1 X_{t-s} d\mu(s)\right) dt + \varepsilon dB_t & t \in [\delta, T] \\ X_s = x_0 & si -1 \leq s \leq \delta, \end{cases} \tag{1}$$

où μ est une mesure positive de support $[\delta, 1]$ appelée mesure des retards et le coefficient de diffusion, $\varepsilon \in]0, 1]$ est supposé connu et B_t est un processus de Wiener standard. Si la mesure μ est discrète nous retrouvons les équations différentielles stochastiques avec retards classiques.

Notre travail porte sur l'inférence statistique sur la dérive S (drift) définie par

$$S(t, \mu, X) = \int_\delta^1 X_{t-s} d\mu(s),$$

plus particulièrement sur la mesure des retards μ partir de l'observation d'une trajectoire complète $(X(t), t \in [\delta, T])$ et dans le cadre des petites diffusions $\varepsilon \to 0$.

Ce travail est composé de trois chapitres que nous résumons brièvement.

Dans le chapitre 01 :

On essayé de donner des rappelles de base sur les processus stochastique générale et aussi des résultats importants ainsi que des propriétés du mouvement brownien comme un cas particulier. Nous rappelons également la notion de l'intégrale stochastique pour pouvoir définir une équation différentielle stochastique.

Dans le chapitre 02 :

Sera consacré aux nous considérons l'estimation de la densité de la mesure des retards dans un processus de type diffusion en estimant les paramètre par la méthode du maximum vraisemblance dans l'asymptotique des petites diffusion. Tel que nous vérifions la convergence, la normalité asymptotique et l'efficacité de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Dans le chapitre 03 :

Nous donnons un exemple sur des simulations numériques de l'estimateur de maximum de vraisemblance.

Notations

$:=$	Est définie comme,
$i.i.d$	Indépendant identiquement distribué,
$p.s$	Presque sûrement,
$\mathbb{P}-p.s$	Probabilité Presque Sûrement,
$N(0,1)$	Loi normale de moyenne nule et de variance 1,
θ	Paramètre estimer,
$\hat{\theta}_{\varepsilon}$	L'estimation du maximum de vraisemblance,
$\bar{\Theta}$	La fermeture de Θ,
$X=(X_t, t \geq 0)$	Processus de diffusion à temps continue,
μ	Mesure positive des retards et le coefficient de diffusion,
B_t	Processus de Wiener,
$(X(t), t \in [\delta, T])$	Trajectoire complète,
$B_{t_1}, B_{t_2} \ldots, B_{t_n}$	Vecteur gaussien,
$B_0, B_{t_1}-B_0, B_{t_2}-B_1 \ldots B_{t_n}-B_{n-1}$	Vecteur gaussien des retards,
$\mathbb{L}^2$	L'espace des fonction carré intégrable,
Θ	L'espace paramétrique,
(Ω, F, P)	Espace de probabilité,
$(\Omega, A, P, (F_t))$	Espace de probabilité complet,
$(C_{[\delta,T]}, F)$	Espace des fonction réel continue défini sur $[\delta, T]$,

Notations

$\mathbb{H}^2$	L'ensmble des proseccus $f_t(w)$,
$C([0,\infty[)$	L'ensmble d'une musure de wiener,
b,σ	deux fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$,
$C([0,\infty[)$	L'ensmble d'une musure de wiener,
b,σ	deux fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$,
$\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_0} = \mathbb{P}_0$	La loi du processus de wiener,
$B(\theta,\varepsilon\|u\|)$	Boule dans $\mathbb{R}$ centre θ, rayon $\varepsilon\|u\|$,
$B_{\mathbb{R}}$	tribu borélienne sur $\mathbb{R}$,
EMV	Estimateur du maximum de vraisemblance,
LAN	Condition de normalité asymptotique locale.

Chapitre 1

Processus stochastiques

1.1 Généralité sur les processus stochastiques

L'origine des processus stochastiques remonte aux progrès faits au début du XXe siècle dans certaines branches appliquées qu'ils utilisent des observation en fonction du temps comme la mécanique statistique (par **Gibbs**, **Boltzmann**, **Poincaré**, **Smoluchowski** et **Langevin**). Les bases théoriques ont été formulées plus tard (1930-1940). C'est durant cette période que le mot "stochastique", qui provient du grec stokhastikos "conjectural", a commencé être employé.

1.1.1 Définition des processus stochastique

Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble $\mathbb{T}$, en général $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ et on considère que le processus est indexée par le temps t. Si $\mathbb{T}$ est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire.
Si $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variables aléatoires, plus généralement quand $\mathbb{T} \subset \mathbb{Z}$ le processus est dit discret, pour $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ on parle de champ aléatoire (drap quand $d = 2$).
Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$:
- Pour $t \in \mathbb{T}$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité (Ω, F, P).
- Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in \mathbb{T} \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus. C'est un enjeu que de savoir si un processus admet des trajectoires mesurables, continues, dérivables ou encore plus régulières.

. La fonction moyen du processus :

$$m(t) = E(X_t) = \int_{\Omega} X_t(\omega) dP(\omega).$$

. La variance :

$$\sigma^2(t) = E(|X_t - E(X_t)|)^2.$$

. La fonction de covariance :

$$K(s,t) = E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s).$$

Remarque 1.1 *. $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est un processus centré si son espérance est nulle $E(X_t) = 0$.*
. Si X_t est dans L^2 i.e.$E|X_t|^2 < \infty$.

Définition 1.1 *Un processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est dit adapté à la filtration $(F_t)_{t\geqslant 0}$ si pour chaque t, X_t est F_t-mesurable. Un processus adapté est celui pour lequel une description probabiliste est réalisable.*

Définition 1.2 *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de F, c'est-à-dire $F_t \subset F_s$ pour tout $t \leqslant s$. La tribu F_t est une description mathématique de toute l'information dont on dispose à l'instant t.*

Définition 1.3 *Soit (Ω, F) un espace mesurable. Une variable aléatoire réelle (v.a.r) X est une application mesurable de (Ω, F) dans $\mathbb{R}$ (donc telle que $X^{-1}(A) \in F, \forall A \in B_{\mathbb{R}}$).*

1.1.2 Processus stochastiques particuliers

Définition 1.4 *Le processus (X_t) est dit strictement ou fortement stationnaire, si $\forall$ le $n-$uple du temps $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ tel que $(t_1 < t_2 < \ldots < t_n), t_i \in \mathbb{Z}$ et pour tout temps $(t_1 < t_2 < \ldots < t_n)$, $t_i \in \mathbb{Z}$ avec $t_i + h \in \mathbb{Z}$.*
$\forall i = \overline{1,n}$ la suite $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h})$ à la même loi de probabilité que la suite $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$.

Définition 1.5 *Un processus X_t est dit stationnaire (ou faiblement stationnaire)si :*
. Son espérance $E(X_t)$ est une constante indépendante du temps t.
. Sa fonction de corrélation R(s,t) ne dépend que de la différence $\tau = t - s$.
. $R(\tau)$ est continue (à l'origine).

Définition 1.6 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus stochastique. Il est gaussien si toutes ses lois fini-dimensionnelles $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ sont gaussiennes $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T})$. Un processus gaussien est entièrement déterminé par la donnée de sa valeur moyenne m(t) et de sa fonction de corrélation R(s,t).*

1.2 Mouvement Brownien

Le mouvement brownien est la fois un phénomène naturel, et un objet mathématique. Le phénomène naturel est le mouvement désordonné de particules en suspension dans un liquide. Il en résulte une dispersion des micro-particules dans l'eau, on dit aussi une diffusion du pollen dans l'eau, qui a été décrit pour la première fois en 1827 par la biologiste **Robert Brown**. En 1877, **Delsaux** explique les changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau. Un mouvement de ce type est qualifié de "mouvement au hasard".

Définition 1.7 *Un processus stochastique $(B_t)_{t\geq 0}$ mouvement brownien ou processus de Wiener si :*
i- $B_0 = 0$, *P-presque surement sur* Ω.
ii- *Si pour tous réels* $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *les variables aléatoires* $B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n}$ *sont indépendants et suivent une distribution gaussienne telle que* $\forall h > 0$

$$E(B_{t+h}B_t) = 0 \quad et \quad E(B_{t+h}B_t)^2 = h.$$

1.2.1 Construction d'un mouvement Brownien

Ce processus de diffusion peut être construit par différentes approches. Les définitions les plus usuelles du mouvement brownien sont les suivantes :
1. Kolmogorov (1933 et 1956) : Il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}^+, B_{\mathbb{R}+})$ et un processus stochastique

$$B = \{B_t, F_t^B, t \geqslant 0\},$$

sur le même espace, tels que sous $\mathbb{P}$, B est un mouvement brownien. Construction utilisant la notion de consistance et un critère de continuité.

2. Wiener (1923), Lévy (1948), Ciesielski (1961) : Construction basée sur la théorie des espaces de Hilbert et sur le caractère gaussien du mouvement brownien.

3. Donsker(1951) : construction sur l'ensemble $C([0, \infty[)$ d'une mesure, appelée mesure de Wiener, utilisant la notion de convergence faible de variable aléatoire.

et celle la plus utilisée :

Construction par un processus gaussien

1. Nous appellerons processus une famille de variables aléatoires réelles $(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$. On dit qu'un tel processus est gaussien si, pour tout n-uplet $(t_1, \ldots, t_n)$ de points de $\mathbb{R}_+$, le vecteur aléatoire $(B_{t_1}, B_{t_2} \ldots, B_{t_n})$ est un vecteur gaussien.
Dans ce cas, la loi de tous les vecteurs $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ est entièrement caractérisée par la donnée de deux fonctions $m(t) = E(B_t)$ et $K(s,t) = E(B_sB_t) - m(s)m(t)$.

2. Un processus est dit à accroissements indépendants si pour tout n-uplet $(0 \leq t_1 \leq t_2 \ldots \leq t_n)$ les variables

$$B_0, B_{t_1} - B_0, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}},$$

sont indépendantes. Quitte à changer B_t en $B_t - B_0$ on pourra toujours se ramener au cas où $B_0 = 0$.

3. On dit quelle mouvement brownien est standard si $m = 0$ et $\sigma = 1$ et le vecteur $(B_{t_0}, B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ est un vecteur gaussien donc le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ suit une loi gaussienne de moyenne m_t et de variance σ_t.

Théoreme 1.1 *Soit $B = (\Omega, F, (F_t)_{t\geqslant 0}, (B_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien. Alors il satisfait les propriétés suivantes :*

$$.B_0 = 0 \quad \mathbb{P} - ps. \tag{1.1}$$

$$.\forall\ 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n, \quad (B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) \quad \textit{est un vecteur gaussien centré}. \tag{1.2}$$

$$.\forall\ s,t \geq 0,\ \mathbb{E}(B_sB_t) = \min(s,t). \tag{1.3}$$

C'est à dire B est un processus gaussien réel centré et de fonction de covariance $K(s,t) = \min(s,t)$.

Preuve 1.1 *Supposons que B soit un mouvement brownien. Il n'y a que* (1.2) *et* (1.3) *prouver. Soient*

$$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \ \ et \ \ 0 \leq t_1 < \ldots < t_n,$$

montrons par récurrence sur n que

$$a_1 B_{t_1} + \ldots + a_n B_{t_n},$$

est une variable aléatoire normale.
Si $n = 1$ *on a :* $a_1(B_{t_1} - B_0) = a_1 B_{t_1}$ *car* $(B_0 = 0)$,
si on suppose l'assertion démontrée pour $n-1$, *la variable aléatoire*

$$a_1 B_{t_1} + \ldots + a_n B_{t_n},$$

est alors normale comme somme des deux variables aléatoires

$$a_1 B_{t_1} + \ldots + (a_n + a_{n-1}) B_{t_{n-1}},$$

et $a_n(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$, *qui sont normales et indépendantes,* (1.2) *Prenons maintenant*
$0 \leq s \leq t$
(d'après les parties 2 et 3 de la Construction par un processus gaussien) on a

$$E(B_s(B_t - B_s)) = E(B_s)E(B_t - B_s) = 0,$$

on obtient alors aussitôt(1.3) puisque

$$E(B_s B_t) = E(B_s(B_t - B_s + B_s^2) = E(B_s^2) = s = \min(s,t). \qquad \blacksquare$$

. On peut facilement simuler une trajectoire de mouvement brownien dans un intervalle de temps $[0, T]$ il suffit pour cela de posée un pas de temps $\Delta t > 0$ et décrire

$$B_{\Delta t} = B_{\Delta t} - B_0 \rightsquigarrow N(0, \Delta t) \rightsquigarrow \sqrt{\Delta t} N(0,1),$$

les accroissements $(B_{n\Delta t} - B_{(n-1)\Delta t})$, avec $0 \leq n \leq N$ et $N > 0$, étant indépendants et gaussiens, il suffit donc de simuler une loi gaussienne

$$B_{t+\Delta t} - B_t \rightsquigarrow N(0, \Delta t) \rightsquigarrow \sqrt{\Delta} t N(0,1),$$

nous pouvons aussi simuler facilement une seule trajectoire brownienne de la façon suivante. Considérons la subdivision de l'intervalle de temps $[0, T]$ suivante :

$0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_N < t_{N+1} = T$ avec $t_{i+1} - t_i = \Delta t$, pour $i = 1$ on a $B_0 = B_{t_1} = 0$. On donne l'algorithme suivant :
1. Générée une nouveau variable aléatoire Z de la distribution gaussienne $N(0, 1)$.
2. $i = i + 1$.
3. $B_{t_i} = B_{t_{i-1}} + Z \rightsquigarrow \Delta t$.
4. si $i \leqslant N + 1$ réitérez a l'étape 1.
La fonction BMN permet de simuler un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geqslant 0}$ dans l'intervalle du temps $[t_0, T]$ avec un pas $\Delta t = (T - t_0)/N$.

Dans la figure suivante on va présenté un exemple d'un Mouvement Brownien

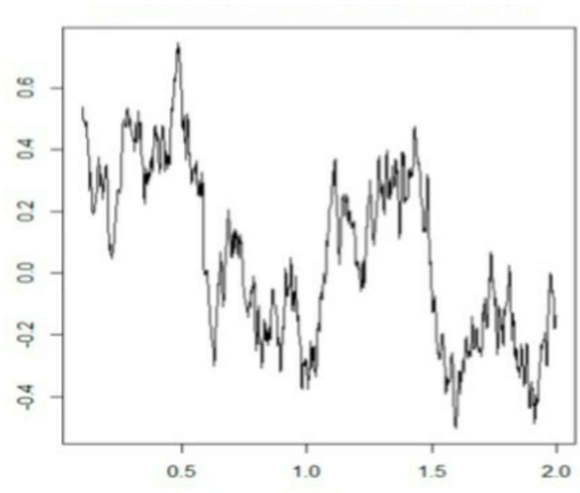

FIGURE 1.1 – Trajectoire brownienne simulée a partir d'une distribution gaussienne.

1.2.2 Continuité des trajectoires

Définition 1.8 *On dit qu'un processus aléatoire* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *est continu si*

$$\lim_{h \to 0} |X_{t+h} - X_t| = 0,$$

selon le type de convergence de cette variable aléatoire, on obtient une continuité plus ou moins forte.

Définition 1.9 *Un mouvement brownien (standard) réel est un processus gaussien centré*

$(B_t)_{t\geqslant 0}$ *trajectoires continues de fonction de covariance*

$$K(s,t) = \min(s,t) = s \wedge t,$$

soit $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ *une famille de variables aléatoires indexées par le temps. On dit que* B *est un mouvement brownien si c'est un processus à trajectoires continues tel que*
1. Pour $t \geqslant 0 : B_t \rightsquigarrow N(0,t)$.
2. Pour tout $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *, les variables aléatoires* $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*

Propriété 1.1 *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $(B_{t_{t\geqslant 0}})$ *un mouvement brownien standard. On a*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\mathbb{P}(|B_{t+h} - B_t| > \varepsilon) = 0.$$

Le mouvement brownien a de nombreuse propriétés dont certaines peuvent être prise comme définition.

1.2.3 Propriétés en loi du mouvement brownien

Propriété 1.2 *La densité de* $\Delta B = (B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ *est donnée par*

$$f_{\Delta B}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\Pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(\frac{-x_j^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right).$$

Propriété 1.3 *La densité* $B = (B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ *est*

$$f_B(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\Pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(\sum_{1}^{n} \frac{-(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right).$$

Proposition 1.1 *Soit* B_t *un mouvement brownien standard. On a presque surment*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \ , \ \lim_{t\to 0} \sup \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \inf \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty \ , \ \lim_{t\to 0} \inf \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{B_t}{t} = 0.$$

Dans la figure suivante on va présenté un exemple de la limite d'un mouvement Brownien standard :

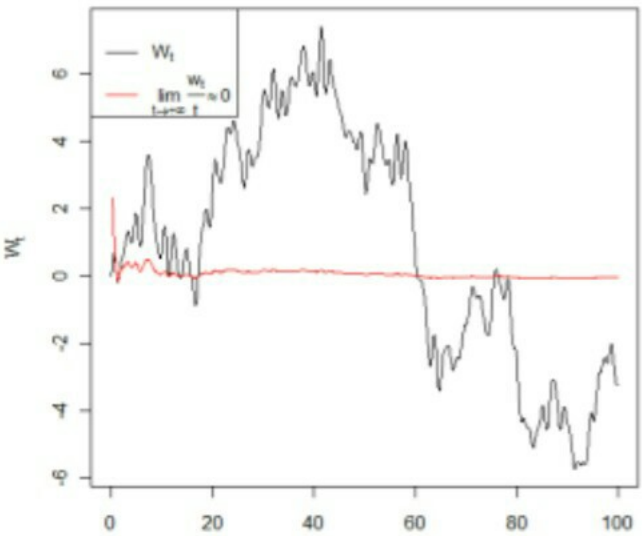

FIGURE 1.2 – La limite de mouvement brownien standard par rapport au temps.

Proposition 1.2 *Si $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien, alors il en est de même pour les processus suivants :*

1. *Auto similarité (propriété d'échelle). Pour $c > 0$ $X_t = \frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct}$ est un mouvement brownien standard.*

2. *Inversion du temps. Le X_t défini par $X_t = tB_{\frac{1}{t}}$ si $t \neq 0$ et $X_0 = 0$ est un mouvement brownien standard.*

3. *Retournement du temps. Le processus retourné l'instant T, $X_t = B_T - B_{T-t}$ est encore mouvement brownien sur [0,T].*

1.3 Intégrales stochastiques

On va parler maintenant sur l'intégrale stochastique et en particulier à l'intégrale d'Itô.

1.3.1 L'intégrale d'Itô

On considère une espace de probabilité (Ω, F, P) muni d'une filtration F_t, muni d'une suite de tribu croissantes pour l'inclusion. On appelle tribu des prévisibles sur $\Omega \times [0, +\infty[$ la plus petite tribu rendant mesurable tous les processus continus adaptés à la filtration F_t. Un processus ou un ensemble est prévisibles s'il est mesurable par rapport cette tribu. Supposons donné un processus de Wiener standard B_t, adapté à la filtration F_t et tel que pour tout $0 \leqslant s \leqslant t$ l'accroissement $B_t(w) - B_s(w)$ soit indépendant de F_t. Sur un intervalle de temps $[0, t]$, on note $\mathbb{H}^2$ l'ensemble des processus $f_t(w)$ définis pour $t \in [0, t]$, F_t-mesurable et de carré intégrable presque sûrement. Dans ces conditions, si f dans $\mathbb{H}^2$ et si $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = t$ est subdivision de l'intervalle $[0, t]$, alors f est indépendant des incréments $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$, en d'autre termes f est prévisible pour toute fonction f de $\mathbb{H}^2$. On définit l'intégrale stochastique d'Itô comme la limite dans $\mathbb{L}^2$ des accroissements ci-dessous (on notera que toutes les limites de cette section sont des limites quadratiques, i.e. dans $\mathbb{L}^2$). On définit ainsi l'intégrale stochastique comme la limite des sommes Riemann.

$$I_t(f) = \int_0^t f(t, w) dB(t, w) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} f(t_i, w)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}),$$

le but de l'intégrale stochastique est de donner un sens des équations de la forme.

$$\frac{dX_t}{dt} = b(X_t) + \sigma(X_t) \frac{dB_t}{dt}, \tag{1.4}$$

le problème est que, comme nous lavons mentionné, les trajectoires du processus de Wiener ne sont pas différentiables, ni même variations bornées.
Comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, on interprète une solution de l'équation différentielle (1.4) comme une solution de l'équation intégrale.

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s. \tag{1.5}$$

1.3.2 Processus d'Itô

Définition 1.10 *Soit B_t un mouvement brownien sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$ adapté à une filtration F_t. Un processus d'Itô est un processus stochastique X_t sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$ de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, w) ds + \int_0^t v(s, w) dB_s, \tag{1.6}$$

où v tel que

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t v^2(s,w)ds < \infty \text{ pour tout } t \geq 0\right) = 1,$$

on suppose de plus que u F_t- adapté et

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t |u(s,w)|ds < \infty \text{ pour tout } t \geq 0\right) = 1,$$

si X_t est un processus d'Itô de la forme (1.6), l'équation (1.6), s'écrit souvent sous la forme différentielle

$$dX_t = udt + vdB_t.$$

1.3.3 Formule d'Itô

Théoreme 1.2 *Soit (X_t) un processus d'Itô donné par*

$$dX_t = udt + vdB_t,$$

soit $g(t,X) \in C^2([0,\infty[,\mathbb{R})$, alors

$$Y_t = g(t,X_t),$$

est aussi un processus d'Itô, et

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial X}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t,X_t)(dX_t)^2,$$

où $(dX_t)^2$ se calcule suivant les formules

$$dt.dt = dt.dB_t = dB_t.dt = 0, dB_t.dB_t = dt.$$

On va donner quelques exemples :

Exemple 1.1

$$I = \int_0^t B_s dB_s,$$

on choisit $X_t = B_t$ et $g(t,X) = \frac{1}{2}X^2$ alors :

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial X}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(dX_t)^2 \\ &= B_t dB_t + \frac{1}{2}(dB_t)^2 \end{aligned}$$

$$= B_t dB_t + \frac{1}{2}dt,$$

ainsi

$$d\left(\frac{1}{2}B_t^2\right) = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt,$$

en d'autres termes

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}t.$$

1.4 Équations différentielles stochastiques

Dans cette partie on va étudier un équation différentielle ordinaire perturbée par un terme stochastique qu'il appelée équation différentielle stochastique.

1.4.1 Définitions

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \tag{1.7}$$

ou sous forme condensée

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t)d_t + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 &= x_0, \end{cases} \tag{1.8}$$

l'inconnue est le processus X. Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution. Il est utile de préciser les données.

Définition 1.11 *Soit b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données. On se donne également un espace (Ω, F, P) muni d'une filtration (F_t), et un mouvement brownien B sur cet espace. Une solution de (1.4) est un processus X continu (F_t) -adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ ont un sens et l'égalité (1.4) est satisfaite pour tout t, P p.s.*

Définition 1.12 *Rechercher une solution de l'équation (1.8) consistera rechercher un processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ satisfaisant l'équation intégrale (1.4) ou la seconde intégrale est une intégrale stochastique.*

Définition 1.13 *Quand les coefficients b et σ ne dépendent pas du temps et sont seulement des fonctions sur $\mathbb{R}$, on dit que l'équation est homogène.*

Le coefficient b est appelé le coefficient de dérive, tandis que σ est le coefficient de diffusion.
Un processus qui résout l'équation (1.5).

1.4.2 Existence et unicité des solutions d'une EDS

Théoreme 1.3 *Soit $T > 0$ et $b : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables satisfait sur $[0,T] \times \mathbb{R}$.*
1- *Condition de croissance : il existe une constante C telle que :*

$$|b(t,x)| + \sigma(t,x) \leqslant C(1+|x|).$$

2- *Condition de Lipschitz : il existe une constante K telle que :*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leqslant K|x-y|.$$

3- *X_0 est une variable aléatoire de $L^2(dP)$ indépendante de la tribu engendrée par $(B_s)_{s\geqslant 0}$. Alors l'équation différentielle stochastique d'Itô (1.3) admet une unique solution t-continue de $L^2(dP \times dt)$ adaptée à la filtration engendrée par X_0 et B_s.*

Chapitre 2

Estimation de la densité des retards

2.1 Introduction et définition

Dans ce partie de notre travaille nous intéressons à étudier un processus a partir d'un observation complètes de leur trajectoire. Ce modèle de 'type diffusion' $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon, t \in [-1, T])$ pour $\varepsilon \in]0, 1]$, défini sur un espace de probabilité complet $(\Omega, A, P, (F_t))$, et vérifié l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = (\int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon \mu(ds))dt + \varepsilon dB_t, & t \in [\delta, T] \\ X_s^\varepsilon = x_0 & si -1 \leq s < \delta, \end{cases} \tag{2.1}$$

B_t, $t \in \mathbb{R}^+$, (F_t) est un processus de Wiener adapté à la filtration $(F_t)_{t \geq 0}$ qui est définit sur l'espace $(\Omega, A, P, (F_t))$.
μ une mesure positive sur $[\delta, 1]$, $\delta > 0$.
x_0 est une constante strictement positive.
Nous associons à (2.1) l'équation différentielle déterministe suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dX_t^0}{dt} = \int_\delta^1 X_{t-s}^0 \mu(ds), & t \in [\delta, T] \\ X_s^0 = x_0 & si -1 \leq s < \delta, \end{cases} \tag{2.2}$$

pour ε petit l'équation (2.1) est considérée comme des petites perturbation de l'équation (2.2). Pour une mesure à variation finies, l'équation (2.1) admet une solution unique presque sûrement.
Notons par $(C_{[\delta,T]}, F)$ l'espace des fonctions réelles continue définies sur $[\delta, T]$, où
$F = \bigcup_{t \geq \delta} F_t$, $F_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ et $\mathbb{P}^\varepsilon$ la mesure induite dans $(C_{[\delta,T]}, F)$ par les processus

solutions de (2.1).
Dans ce partie, nous étudions le problème de l'estimation de la mesure μ dans le cas où elle admet une densité par rapport à la mesure de lebesgue admettant le développement suivante :

$$f(s) = \frac{d\mu}{ds}(s) = cg(s), \tag{2.3}$$

l'objectif du notre travaille est l'estimation paramétrique du paramètre $\theta = c \in \Theta =]0, D]$ où $D > 0$ par l'observation d'une trajectoire complète $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ de (2.1). Nous construisons les estimateurs du maximum de vraisemblance et nous étudions leurs propriétés asymptotiques qui est fondée sur des propriétés de la condition LAN (normalité asymptotique locale) et de convergence faible des processus du rapport de vraisemblance quand $\varepsilon \to 0$. Nous utilisons la théorie générale de Ibragimov-Hasminski([11], [14]) pour montrer que la famille des lois $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ induites par les processus solutions de (2.1) vérifient la condition LAN.

Pour l'estimation du paramètre θ dans le modèle (2.1), nous suivons cette théorie.

2.1.1 Estimateur du maximum de vraisemblance

Pour $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ une observation d'une trajectoire complète de (2.1), l'éstimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_\varepsilon$ est solution de

$$L\left(\hat{\theta}_\varepsilon, \theta_0, X\right) = \sup_{\theta \in \bar{\Theta}} L(\theta, \theta_0, X), \tag{2.4}$$

où $L(\theta_\varepsilon, \theta_0, X)$ désigne le rapport de vraisemblance qui est définit par :

$$L(\theta, \theta_0, X) = \frac{d\mathbb{P}_\theta^\varepsilon}{d\mathbb{P}_{\theta_0}^\varepsilon}(X^\varepsilon), \theta \in \Theta, \tag{2.5}$$

avec θ_0 est une valeur fixée du paramètre θ et $\bar{\Theta}$ la fermeture de Θ dans $\mathbb{R}$, si (2.4) admet plusieurs solutions $\hat{\theta}_\varepsilon$ désigne l'une d'entre elles.

L'étude de la tension du processus de vraisemblance et sa convergence faible permet de montre la convergence des estimation de maximum de vraisemblance.

2.1.2 Processus de rapport de vraisemblance

Notons $Z_{\varepsilon,\theta}(u)$ le processus de rapport de vraisemblance calculé pour l'observation X^ε vérifiant (2.1) :

$$Z_{\varepsilon,\theta}(u) := \frac{d\mathbb{P}_{\theta+\Phi_\varepsilon(\theta)u}}{d\mathbb{P}_\theta}(X^\varepsilon), u \in \mathbb{R},$$

où $\theta \in \Theta$. Les valeurs $\theta + \Phi_\varepsilon(\theta)u$ correspondent aux autres valeurs possibles du paramètre pour une normalisation adéquate Φ_ε qui est une fonction dans $\mathbb{R}$ telle que $\theta + \Phi_\varepsilon(\theta)u \in \Theta$, le processus $(Z_{\varepsilon,\theta}(u), u \in \mathbb{R})$ est défini seulement pour tout u tel que :

$$u \in U_{\varepsilon,\theta} := \Phi_\varepsilon^{-1}(\Theta - \theta) \subset \mathbb{R}.$$

La condition de normalité asymptotique locale de le cam (LAN condition) est considéré comme une notion de base qui joue un rôle crucial dans notre étude.

2.1.3 Condition LAN

On dit que la famille de lois $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in]0, D])$ vérifie la condition LAN en un point $\theta_0 \in \Theta$ quand ε tend vers 0 si le rapport de vraisemblance admet, sous une normalisation adéquate $\Phi_\varepsilon(\theta_0)$, la représentation suivante :

$$Z_{\varepsilon,\theta}(u) = \exp\left\{u\Delta_\varepsilon(\theta_0, X^\varepsilon) - \frac{1}{2}u^2 + \lambda_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon)\right\}, u \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

où Δ_ε et λ_ε sont des variables aléatoires vérifiant sous $\mathbb{P}_\theta^\varepsilon$:

$$\Delta_\varepsilon(\theta_0, X^\varepsilon) \Longrightarrow N(0,1),$$

en loi dans $\mathbb{R}$ quand ε tend vers 0 et :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon) = 0 \quad \textit{en probabilité}.$$

Dans ce partie, nous rappelons les notations et hypothèses sur le modèle étudie.

2.2 Notations et Hypothèses

Nous considérons l'équation différentielle stochastique (2.1) dans le cas où la mesure admet une densité par rapport la mesure de Lebesgue de la forme (2.3). L'équation (2.1) se transforme en

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = \left(c\int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon g(s)ds\right)dt + \varepsilon dB_t & si\ \ t\in[\delta,T] \\ X_s = x_0 & si -1\leq s<\delta, \end{cases} \tag{2.7}$$

nous notons par $\theta = c$ le paramètre estimer appartenant l'espace paramétrique $\Theta =]0, D]$ où $D > 0$ et $\mathbb{P}_\theta^\varepsilon$ désigne la loi du processus de type diffusion $(X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ solution de (2.7) induite sur l'espace des trajectoires $(C_{[\delta,T]}, F)$. Pour θ une valeur fixée du paramètre dans Θ et une observation d'une trajectoire complète $X_t^\varepsilon = (X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ de (2.7), rappelons que l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) $\hat\theta_\varepsilon$ est défini comme une solution de l'équation

$$\frac{d\mathbb{P}_{\theta_\varepsilon}^\varepsilon}{d\mathbb{P}_{\theta_0}^\varepsilon}(X^\varepsilon) = \sup_{\theta\in\bar\Theta}\frac{d\mathbb{P}_{\theta}^\varepsilon}{d\mathbb{P}_{\theta_0}^\varepsilon}(X^\varepsilon), \tag{2.8}$$

où $\bar\Theta$ désigne la fermeture de Θ,
en notant $\mathbb{P}_{\theta_0}^\varepsilon = \mathbb{P}_0$ la loi du processus de Wiener et en posant :

$$R_t(X^\varepsilon,\theta) := \begin{cases} c\int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon g(s)ds & si\ \ t\in[\delta,T] \\ 0 & si\ \ t\in[0,\delta[, \end{cases}$$

la vraisemblance est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{P}_{\theta_\varepsilon}^\varepsilon}{d\mathbb{P}_{\theta_0}^\varepsilon}(X^\varepsilon) &= \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T R_t(X^\varepsilon,\theta)dX_t^\varepsilon - \tfrac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T (R_t(X^\varepsilon,\theta))^2dt\right) \\ &= \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon^2}\int_\delta^T R_t(X^\varepsilon,\theta)dX_t^\varepsilon - \tfrac{1}{2\varepsilon^2}\int_\delta^T (R_t(X^\varepsilon,\theta))^2dt\right), \end{aligned}$$

dans la suite, nous conservons la première forme la vraisemblance.
L'estimateur EMV $\hat\theta_\varepsilon$ vérifie l'équation suivante :

$$A_\varepsilon\hat\theta_\varepsilon = P_\varepsilon \Rightarrow \hat\theta_\varepsilon = \frac{P_\varepsilon}{A_\varepsilon},$$

où A_ε définie par :

$$A_\varepsilon = \int_\delta^T (V^\varepsilon(t))^2dt,$$

et
$$P_\varepsilon = \int_\delta^T V^\varepsilon(t)dt,$$
avec
$$V^\varepsilon(t) = \int_\delta^1 X^\varepsilon_{t-s} g(s)ds,$$
nous rappelons la propriété de la normalité asymptotique locale (LAN condition ou condition de LeCam) qui joue un rôle fondamental dans ce type de problème ([10], [11]). La famille des lois $(\mathbb{P}^\varepsilon_\theta, \theta \in]0, D])$ vérifie la condition LAN en un point $\theta \in]0, D]$ si le rapport de la vraisemblance
$$Z_{\varepsilon,\theta}(u) := \frac{d\mathbb{P}_{\theta+\Phi_\varepsilon(\theta)u}}{d\mathbb{P}_\theta}(X^\varepsilon), u \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$
admet la représentation suivante
$$Z_{\varepsilon,\theta}(u) = \exp\left\{u\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) - \frac{1}{2}u^2 + \lambda_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon)\right\}, u \in \mathbb{R}, \tag{2.10}$$
telle que sous $\mathbb{P}^\varepsilon_\theta$ on a :
$$\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) \Longrightarrow N(0, 1) \ \ dans \ \mathbb{R} \ \ quand \ \ \varepsilon \to 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon) = 0 \qquad en \ \ \mathbb{P}^\varepsilon_\theta - probabilit\acute{e},$$
si la famille de mesures $(\mathbb{P}^\varepsilon_\theta, \theta \in \Theta)$ est LAN en tout point $\theta \in \Theta$, on dit qu'elle est LAN sur Θ. La famille des lois $(\mathbb{P}^\varepsilon_\theta, \theta \in \Theta)$ vérifie la condition LAN uniforme si nous avons les relations précédentes pour tout compact $K \subset \Theta$, et pour toutes les suites $(\theta_n) \subset K$, $(u_n) \subset \mathbb{R}$, $u_n \to u$ vérifiant $(\theta_n + \Phi_\varepsilon(\theta_n)u_n) \in \Theta$.

D'autre par, notons par $B_{e,2}$ l'espace des fonctions de perte b définies sur $\mathbb{R}$ continues symétriques non identiquement nulles vérifiant :
$b(0) = 0$.
pour tout $c > 0$ les ensembles $\{u/b(u) < u\}$ sont convexes.
$b(u) \leq \exp(\zeta u^2)$ pour $\zeta > 0$ quand $u \to \infty$.
Si la famille $(\mathbb{P}^\varepsilon_\theta, \theta \in \Theta)$ satisfait la condition LAN en tout point $\theta \in \Theta$ alors pour tout estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon$, et $b \in B_{e,2}$, nous avons l'inégalité suivante (dite aussi borne de Hàjek) :
$$\lim_{\delta\to 0}\liminf_{\varepsilon\to 0} \sup_{\|\theta-\theta_0\|<\delta} \mathbb{E}^\varepsilon_\theta\left[b\left(\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\left(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta\right)\right)\right] \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} b(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx, \tag{2.11}$$

les estimateurs qui réalisent l'égalité dans (2.11) sont dits asymptotiquement efficaces ([10])
D1. la fonction g est continue et d'intégrale positif ($\int_\delta^1 g(s)ds > 0$).

2.3 Théorèmes

Dans cette section, nous donnons des résultats sur la condition LAN la convergence des estimateur du maximum vraisemblance.

Théoreme 2.1 *Sous la condition D1, la famille des lois* $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ *solution* (2.7) *vérifie la condition LAN* (2.10) *avec* Φ_ε *définie par*

$$\Phi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon I^{-\frac{1}{2}}(\theta),$$

où

$$I(\theta) = \int_0^T (h_s(X^0))^2 ds,$$

$$h_s(X^0) = \frac{\partial R_s}{\partial \theta}(X^0, \theta),$$

et

$$\Delta_\varepsilon(\theta, X^0) = \int_0^T u h_t(X^0) dB_t,$$

la fonction risque admet la minoration suivante (Inégalité de Hàjek) : pour tout estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon, \theta_0 \in \Theta$ *et* $b \in B_{e,2}$

$$\lim_{\varrho\to 0} \liminf_{\varepsilon\to 0} \inf_{\tilde{\theta}_\varepsilon \|\theta-\theta_0\|<\varrho} \sup \mathbb{E}_\theta^\varepsilon \left[b\left(\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\left(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta\right)\right)\right] \geq \mathbb{E}(b(\zeta)),$$

où ζ *est une valeur aléatoire gaussien centré réduit dans* $\mathbb{R}$.
L'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ *est défini par* (2.8). *Le théorème suivant donne la convergence, la normalité asymptotique et la convergence des moments de tout ordre de cet estimateur.*

Preuve 2.1 ***: (du théorème 2.1)***
Soit $u \in \mathbb{R}$ *pour montrer le théorème on utilise comme dans [11], le changement de variable* $u = I^{\frac{1}{2}}(\theta)v$ *où* $I(\theta)$ *vérifie la condition* ***D1***. *La condition LAN* (2.9) *se transforme donc*

$$\begin{aligned} Z_{\varepsilon,\theta}(u) &= \frac{d\mathbb{P}_{\theta+\Phi_\varepsilon(\theta)u}}{d\mathbb{P}_\theta}(X^\varepsilon) = \frac{d\mathbb{P}_{\theta+\varepsilon\upsilon}}{d\mathbb{P}_\theta} \\ &= exp\left[\upsilon I^{\frac{1}{2}}(\theta)\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) - \frac{1}{2}\upsilon^2 I(\theta) + \Psi_\varepsilon(\theta, I^{\frac{1}{2}}(\theta)\upsilon, X^\varepsilon)\right], \end{aligned}$$

telle que sous $\mathbb{P}^\varepsilon_\theta$,

$$I^{\frac{1}{2}}(\theta)\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) \Rightarrow N(0, I(\theta)) \ dans \ \mathbb{R} \ quand \ \varepsilon \to 0,$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Psi_\varepsilon(\theta, I^{\frac{1}{2}}(\theta)\upsilon, X^\varepsilon) = 0 \ \ en \ \ probabilité,$$

par suite l'observation X^ε *vérifie* (2.7)*, le théorème de Girsanov([15].chap 7) donne*

$$\begin{aligned} &Z_{\varepsilon,\theta}(u) = \frac{d\mathbb{P}_{\theta+\varepsilon\upsilon}}{d\mathbb{P}_\theta}(X^\varepsilon) \\ &= exp\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T (R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon, \theta))dX^\varepsilon_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T (R_t^2(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t^2(X^\varepsilon, \theta))dt\right), \end{aligned}$$

où

$$R_t(X^\varepsilon, \theta) = c\int_\delta^1 X^\varepsilon_{t-s} g(s)ds,$$

et

$$R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) = (c+\varepsilon u)\int_\delta^1 X^\varepsilon_{t-s} g(s)ds,$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \ln Z_{\varepsilon,\theta} &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T (R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon, \theta))dX^\varepsilon_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T (R_t^2(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t^2(X^\varepsilon, \theta))dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T (R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon, \theta))[dX^\varepsilon_t - R_t(X^\varepsilon, \theta))dt] - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T (R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) \\ &\quad - R_t(X^\varepsilon, \theta))^2 dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon, \theta))dB_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T (R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon, \theta))^2 dt \\ &:= A_{1,\varepsilon} - A_{2,\varepsilon}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

nous pouvons écrire

$$A_{1,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon,\theta) - u\varepsilon h_t(X^0))dB_t + \int_0^T uh_t(X^0)dB_t,$$

où $h_t(X^0) = \dfrac{\partial R_t}{\partial \theta}(X^0,\theta)$ *et* X^0 *la solution du système déterministe*(2.2)*, posons*

$$\Delta(\theta, X^0) = \int_0^T uh_t(X^0)dB_t,$$

alors la variable $\Delta(\theta, X^0)$ *est gaussien de variance*

$$I(\theta) = \int_0^T h_s(X^0)^2 ds,$$

écrivons

$$A_{1,\varepsilon} := \Upsilon_\varepsilon(u) + \Delta(\theta, X^0),$$

où

$$\Upsilon_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T (R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon,\theta) - u\varepsilon h_t(X^0))dB_t,$$

montrons que sous $\mathbb{P}_\theta^\varepsilon$ *la variable aléatoire* $\Upsilon_\varepsilon(u)$ *tend vers 0 quand* $\varepsilon \to 0$,
pour $\beta > 0$, $\eta > 0$, *par l'inégalité de Lenglart, nous avons ([15])*

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon(|\Upsilon_\varepsilon(u)|> \beta) \leq \frac{\eta}{\beta^2} + \mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T (R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon,\theta) - u\varepsilon h_t(X^0))^2 dt > \eta\right),$$

pour le second terme ci-dessus, nous allons appliquer l'inégalité de Markov.
D'une part, on a

$$\begin{aligned} &R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon,\theta) - u\varepsilon h_t(X^0) \\ &= [R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^0, \theta+\varepsilon u)] - [R_t(X^\varepsilon,\theta) - R_t(X^0,\theta)] \\ &\quad + [R_t(X^0, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^0,\theta)] - u\varepsilon h_t(X^0), \end{aligned}$$

comme

$$V^{\varepsilon}(t) = \int_{\delta}^{1} X_{t-s}^{\varepsilon} g(s)ds, \quad V^{0}(t) = \int_{\delta}^{1} X_{t-s}^{0} g(s)ds,$$

nous en déduisons

$$R_t(X^{\varepsilon}, \theta + \varepsilon u) - R_t(X^0, \theta + \varepsilon u) = (c + \varepsilon u)[V^{\varepsilon}(t) - V^0(t)], \tag{2.13}$$

et

$$R_t(X^{\varepsilon}, \theta) - R_t(X^0, \theta) = c[V^{\varepsilon}(t) - V^0(t)], \tag{2.14}$$

la différence entre le expressions (2.10) *et* (2.11) *est égale à*

$$\varepsilon u[V^{\varepsilon}(t) - V^0(t)],$$

par le changement de variable $v = t - s$, *nous obtenons*

$$\begin{array}{rcl} V^{\varepsilon}(t) - V^0(t) & = & \int_{\delta}^{1} (X_{t-s}^{\varepsilon} - X_{t-s}^{0}) g(s)ds \\ & = & \int_{t-1}^{t-\delta} (X_v^{\varepsilon} - X_v^0) g(t-v)dv, \end{array}$$

en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1, l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, *les propriété du processus de Wiener et la condition* ***D1***, *nous obtenant pour tout* $t \in [0, T]$ *:*

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{E}_{\theta} \left(R_t(X^{\varepsilon}, \theta + \varepsilon u) - R_t(X^{\varepsilon}, \theta) - u\varepsilon h_t(X^0) \right)^2 \\ = & \mathbb{E}_{\theta} \left[\varepsilon u (V^{\varepsilon}(t) - V^0(t)) + (R_t(X^0, \theta + \varepsilon u) - R_t(X^0, \theta)) - u\varepsilon h_t(X^0) \right] \\ = & \mathbb{E}_{\theta} \left[\varepsilon u \int_{t-1}^{t-\delta} (X_v^{\varepsilon} - X_v^0) g(t-v)dv - \varepsilon \zeta_{\varepsilon}(t) \right]^2 \\ \leq & \varepsilon_{\theta}^2 \mathbb{E}_{\theta} \left[sup_{0 \leq v \leq T} |(X_v^{\varepsilon} - X_v^0)| U \int_{t-1}^{t-\delta} g(t-v)dv - \zeta_{\varepsilon}(t) \right]^2 \\ \leq & \varepsilon_{\theta}^2 \mathbb{E}_{\theta} \left[K_{1\varepsilon} \sup_{0 \leq v \leq T} |B_t| u \int_{t-1}^{t-\delta} g(t-v)dv - \zeta_{\varepsilon}(t) \right]^2 \\ \leq & \varepsilon^2 (\varepsilon^2 K_2 + 2\zeta_{\varepsilon}^2(t)), \end{array}$$

où $\zeta_{\varepsilon}(t) \to 0$ *est le reste de formule de Taylor,* $K_1 > 0$ *et* $K_2 > 0$
donc

$$\sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E}_{\theta} \left[R_t(X^{\varepsilon}, \theta + \varepsilon u) - R_t(X^{\varepsilon}, \theta) - u\varepsilon h_t(X^0) \right]^2 \leq \varepsilon^2 \rho_{\varepsilon},$$

où $\rho \to 0$ car $\zeta_\varepsilon(t) \to 0$ avec ε et $K_2 > 0$ on déduit que

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T (R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon, \theta) - u\varepsilon h_t(X^0))^2 dt > \eta\right) \leq \frac{1}{\eta^2} T\rho_\varepsilon,$$

suite, par l'inégalité de Lenglart, on déduit que $\Upsilon_\varepsilon(u) \to 0$ en probabilité quand $\varepsilon \to 0$ pour $A_{2,\varepsilon}$ définie dans (2.12) , on a

$$A_{2,\varepsilon} := \frac{1}{2}(K_{\varepsilon,u}(X^\varepsilon) + u^2 I(\theta)),$$

où

$$K_{\varepsilon,u}(X^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T \left((R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon, \theta))^2 dt - u^2 I(\theta)\right),$$

montrons que $K_{\varepsilon,u}(X^\varepsilon) \to 0$ en probabilité. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T \left[(R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon, \theta))^2 - u^2\varepsilon^2 h_t^2(X^0)\right] dt\right) \\
&\leq \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}_\theta\left(\int_0^T ((R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon, \theta)) - u\varepsilon h_t(X^0))^2 dt\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}_\theta\left(\int_0^T ((R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon, \theta)) + u\varepsilon h_t(X^0))^2 dt\right)\right]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

la premier facteur ci-dessus a été étudié précédement et tend vers 0 avec ε. Pour le deuxième facteur, nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}_\theta\left(\int_0^T ((R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon, \theta)) + u\varepsilon h_t(X^0))^2 dt\right) \\
&= \mathbb{E}_\theta\left(\int_0^T \left(\left(\frac{R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon, \theta)}{\varepsilon}\right) + u h_t(X^0)\right)^2 dt\right) \\
&= \mathbb{E}_\theta\left(\int_0^T \left(\frac{1}{\varepsilon}(R_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - R_t(X^\varepsilon, \theta)) + u h_t(X^0)\right)^2 dt\right) \\
&\leq \mathbb{E}_\theta\left(\int_0^T \left(\frac{1}{\varepsilon}(c\varepsilon V^\varepsilon(t)) + u h_t(X^0)\right)^2 dt\right) \\
&\leq \mathbb{E}_\theta\left(\int_0^T \left(2(cV^\varepsilon(t))^2 + 2u^2 h_t^2(X^0)\right) dt\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \mathbb{E}_\theta \left(\int_0^T \left(2(cV^\varepsilon(t)) - V^0(t) + V^0(t))^2 + 2u^2 h_t^2(X^0) \right) dt \right)$$

$$\leq \mathbb{E}_\theta \left(\int_0^T \left(2c^2(2(V^\varepsilon(t) - V^0(t))^2 + 2(V^0(t))^2) + 2u^2 h_t^2(X^0) \right) dt \right)$$

$$\leq C_1 \int_0^T \left(c^2 \left(\mathbb{E}_\theta((V^\varepsilon(t) - V^0(t))^2 + 2(V^0(t))^2 \right) + 2u^2 h_t^2(X^0) \right) dt$$

$$\leq C_3 \varepsilon^2 + C_4,$$

où $C_3, C_4 > 0$ *et on a utilisé le fait que*

$$\mathbb{E}_\theta (V^\varepsilon(t) - V^0(t))^2 \leq C' \varepsilon^2,$$

et

$$V^0(t) < \infty \;\; sur \;\; [0, T],$$

par conséquent

$$\mathbb{E}_\theta |K_{\varepsilon,u}(X^\varepsilon)| \leq \rho_\varepsilon \times (C_2 \varepsilon^2 + C_3),$$

et comme $\rho_\varepsilon \to 0$ *donc* $K_{\varepsilon,u}(X^\varepsilon) \to 0$ *en probabilité quand* $\varepsilon \to 0$*, par la suite on en déduit que*

$$Z_{\varepsilon,\theta}(u) = exp \left\{ u\Delta(\theta, X^0) - \frac{1}{2} u^2 I(\theta) + \lambda_{\varepsilon,\theta}(u) \right\},$$

où

$$\forall u \in \mathbb{R}, \lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_{\varepsilon,\theta}(u) = 0 \;\; en \;\; probabilité,$$

d'où la condition LAN pour la famille des lois $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon)_{\theta \in \Theta}$ *induite par la solution de* (2.7) *la minoration du risque est une conséquence directe de théorème 12.1 p 162 dans ([11]).* ■

Théoreme 2.2 *Sous la condition D1, l'estimateur du maximum de vraisemblance* $\hat{\theta}_\varepsilon$ *vérifie sous* $\mathbb{P}_{\theta_0}^\varepsilon$ *et uniformément sur tout compact* K *de* Θ*, les propriétés suivantes :*

1. $\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{\theta}_\varepsilon = \theta_0$ *en probabilité plus précisément,* $\forall \alpha > 0$

$$\sup_{\theta_0 \in K_0} \mathbb{P}_{\theta_0}^\varepsilon \left(|\hat{\theta}_\varepsilon - \theta_0| > \alpha \right) \leq C_1 \exp\left(-\frac{C_2 \alpha}{\varepsilon^2} \right),$$

où $C_1 > 0$ *et* $C_2 > 0$.

2. $$\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta\right)_{\varepsilon\to 0} \Rightarrow \zeta, \qquad \text{Où } \zeta \to N(0,1) \text{ dans } \mathbb{R}.$$

3. *Pour tout* $d > 0$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}_\theta^\varepsilon |\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta\right)^d| = \mathbb{E}|\zeta|^d.$$

4. *L'estimateur* $\hat{\theta}_\varepsilon$ *est asymptotique efficace.*
Pour montrer ces deux théorèmes, nous suivons ([11]) et (chap.2 de ([13])). Pour cela nous avons besoin d'établir les lemmes suivants qui montrent que la famille des processus de vraisemblance $(Z_{\varepsilon,\theta}, u \in \mathbb{R})$ *est tendue dans* $C_0(\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions continues tendant vers 0 l'infini.*

Preuve 2.2 *: **(du théorème 2.2)***
Pour la démonstration de ce théorème, nous suivons le théorème 1.1 .p174 de ([11]). Soit K *compact de* Θ*. Dans la suite on note* θ *pour* θ_0*. Posons* $\hat{u} = \Phi_\varepsilon^{-1}(\theta)\left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta\right)$*. De la définition de* $\hat{\theta}_\varepsilon$ *et des équivalences des lois induites par les solutions de* (2.1)*,* $\hat{u}$ *vérifie :*

$$Z_{\varepsilon,\theta}(\hat{u}) = \sup_{u\in U_{\varepsilon,\theta}} Z_{\varepsilon,\theta}(u),$$

les relations du processus $(Z_{\varepsilon,\theta}(u), u \in \mathbb{R})$ *sont dans* $C_0(\mathbb{R})$ *(cf.([11])).*
Notons par $\mu_{\varepsilon,\theta}$ *la loi du processus* $Z_{\varepsilon,\theta}(.)$ *induite sur cet espace. On déduit de la condition LAN, la convergence des lois de dimension finies du processus* $Z_{\varepsilon,\theta}(.)$ *uniformément par rapport à* θ *dans* K*. Des lemmes (2.1) et (2.2), on en déduit que la famille des processus* $\mu_{\varepsilon,\theta}, \theta \in \Theta$ *est relativement compact dans* $C_0(\mathbb{R})$ *uniformément pour* $\theta \in K$ *(cf. ([11])). Donc*

$$\mu_{\varepsilon,\theta} \Rightarrow \mu_\theta \text{ quand } \varepsilon \to 0,$$

où μ_θ *est la loi du processus défini par*

$$Z_\theta(u) = \exp\left[u\zeta - \frac{1}{2}u^2\right],$$

avec la loi de la variable ζ *est normal* $N(0,1)$*. la convergence est uniforme par rapport* $\theta \in K$*.*

1)Convergence en probabilité :
D'une part, des lemmes (2.1) et (2.2), on déduit comme dans (([11]) ; p :433), pour tout

$n > 0$
$$\sup_{\theta\in K}\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(\sup_{|u|\geq n} Z_{\varepsilon,\theta}(u) > \exp\left(\left(-\frac{\eta}{4}\right)n^2\right)\right) \leq C\exp\left(\left(-\frac{\eta}{8}\right)n^2\right), \tag{2.15}$$
où $\eta > 0$ et $C > 0$. Il il en résult des formules (2.14) et (2.15) et $Z_{\varepsilon,\theta}(0) = 1$ pour tout $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}
&\sup_{\theta\in K}\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left[|\hat{\theta}_\varepsilon - \theta| > \alpha\right]\\
&= \sup_{\theta\in K}\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left[|\Phi_\varepsilon(\theta)\hat{u}| > \alpha\right]\\
&= \sup_{\theta\in K}\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left[\sup_{|u|>\alpha|\Phi_\varepsilon(\theta)|^{-1}} Z_{\varepsilon,\theta}(u) > \sup_{|u|<\alpha|\Phi_\varepsilon(\theta)|^{-1}} Z_{\varepsilon,\theta}(u) \geq Z_{\varepsilon,\theta}(0)\right]\\
&\leq \sup_{\theta\in K}\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left[\sup_{|u|>\alpha|\Phi_\varepsilon(\theta)|^{-1}} Z_{\varepsilon,\theta}(u) > 1\right]\\
&\leq C_1\exp\left(-\tfrac{\eta}{8}\alpha^2|\Phi_\varepsilon(\theta)|^{-2}\right)\\
&\leq C_1\exp\left(-\tfrac{\eta}{8}\alpha^2\frac{|I(\theta)|}{\varepsilon^2}\right)\\
&\leq C_1\exp\left(\frac{-C_2}{\varepsilon^2}\alpha\right),
\end{aligned}$$

le majorant ci-dessus tend vers 0 quand ε tend vers 0, d'où la convergence de l'éstimateur.

2) Normalité asymptotique :

Soit D un pavé borné de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon(\hat{u} \in \partial D) = 0,$$

où ∂D est la frontière de D. Considérons les fonctionnelles L_D et $L_{\partial D}$ définies sur $C_0(\mathbb{R})$ par :

$$L_D(h) = \sup_D h(x) \quad \text{et} \quad L_{D^c}(h) = \sup_{D^c} h(x),$$

L_D et $L_{\partial D}$ sont continues par rapport la métrique uniforme sur $C_0(\mathbb{R})$. Comme le processus $Z_\theta(.)$ atteint son maximum au point $\zeta \hookrightarrow N(0,1)$, alors

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon(L_D(Z_\theta) - L_{D^c}(Z_\theta) = 0) = \mathbb{P}_\theta^\varepsilon(\zeta \in \partial D) = 0,$$

soit A_ε les points de $\mathbb{R}$ où le processus $Z_{\varepsilon,\theta}(.)$ atteine son maximum, puisque $Z_{\varepsilon,\theta} \Longrightarrow Z_\theta$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta^\varepsilon(A_\varepsilon \subset D) &= \mathbb{P}_\theta^\varepsilon(L_D(Z_\theta) - L_{D^c}(Z_\theta) > 0)\\
&= \mathbb{P}_\theta^\varepsilon(\zeta \in D),
\end{aligned}$$

or le diamètre de A_ε tend vers 0 en probabilité avec ε, donc

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon(\hat{u} \in D) \longrightarrow \mathbb{P}_\theta(\zeta \in D),$$

d'où la convergence en loi.

3) Convergence des moments :

On a pour tout $d > 0$

$$\begin{aligned}\sup_{\varepsilon\in]0,1]}\sup_{\theta\in K}\mathbb{E}_\theta^\varepsilon\,|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta)\left(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta\right)|^d &\le \sup_{\varepsilon\in]0,1]}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^d\times\sup_\theta^\varepsilon\left[|\hat{\theta}-\theta||\Phi_\varepsilon^{-1}|>n\right]\\ &\le [1+C\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^c]\exp\left(\dfrac{-\eta}{8}n^2\right)\\ &< \infty,\end{aligned}$$

donc la famille des variables aléatoires $(|\hat{u}|^d, \varepsilon\in]0,1[)$ *est uniformément intégrables où* $\hat{u} = \Phi_\varepsilon^{-1}(\theta)\left(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta\right)$*. Le résultat se réduit de la normalité asymptotique obtenue précédemment et de ([2]) p.32.*

4) Efficacité asymptotique :

Les estimateurs qui réalisent l'inégalité dans le théorème ci-dessus (borne de Hàjek) pour tout $\theta_0 \in \Theta$*, sont dites asymptotiquement efficaces. Pour l'étude du risque quadratique, on considère les fonctions* b *de la forme* $b(x) = |x|^d, d > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}$*. Comme la famille des lois* $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ *est LAN en tout point de* Θ *pour montrer l'efficacité des estimateurs il suffit de prouver qu'il existe* κ *dans* $]0,1]$ *tel que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{|\theta-\theta_0|<|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)|^\kappa}\mathbb{E}_\theta^\varepsilon\left|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\left(\widehat{\theta}_\varepsilon-\theta\right)\right|^d = \mathbb{E}|\zeta|^d, \tag{2.16}$$

(cf. ([13])p.77). Pour tout $\theta_0 \in \Theta$*, on a l'identité suivante :*

$$\sup_{|\theta-\theta_0|<\left|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\right|^\kappa}\mathbb{E}_\theta^\varepsilon\left|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\left(\widehat{\theta}_\varepsilon-\theta\right)\right|^d,$$

$$= \sup_{|\theta-\theta_0|<|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)|^\kappa}\mathbb{E}_\theta^\varepsilon\left[\left|\left(\frac{\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)}{\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)}+1-1\right)\left(\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\left(\widehat{\theta}_\varepsilon-\theta\right)\right)\right|^d\right],$$

donc pour montrer(2.16), il suffit de vérifier les deux affirmations suivantes :

i)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{|\theta-\theta_0|<|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)|^\kappa}\left|\Phi_\varepsilon(\theta)\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)-1\right| = 0,$$

or ceci découle du fait que $\Phi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon I^{-\frac{1}{2}}(\theta)$ *et que* $I(\theta)$ *est uniformément continu sur*

le compact K.
ii)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{|\theta-\theta_0|<|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)|^\kappa}\mathbb{E}_\theta^\varepsilon\left|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\left(\widehat{\theta}_\varepsilon-\theta\right)\right|^d=\mathbb{E}|\zeta|^d,$$

qui n'est autre que la convergence des moments établie en 3) . D'où le théorème. ■

lemme 2.1 *Sous la condition D1, pour tout compact K de $\bar{\Theta}$, $\forall m>L$ et $H>0$ on a*

$$\sup_{\theta\in K}\sup_{\{u_1,u_2\in U_{\theta,\varepsilon}:\|u_j\|<H,j=1,2\}}|u_1-u_2|^{-m}\mathbb{E}_\theta|Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2)-Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_1)|\leq C(1+H^m),$$

où $U_{\theta,\varepsilon}=\Phi_\varepsilon^{-1}(\Theta-\theta)$.

Preuve 2.3 *: **(du lemme 2.1)***
Soit K compact de Θ posons $\theta_i=\theta+\varepsilon u_i (i=1,2)$ où $u_i\in\mathbb{R}$ et $\theta=c$, $\theta_i\in K$ posons

$$\begin{aligned}\Delta X_t^\varepsilon=R_t(X^\varepsilon,\theta_1)-R_t(X^\varepsilon,\theta_2) &= (\theta+\varepsilon u_1)V^\varepsilon(t)-(\theta+\varepsilon u_2)V^\varepsilon(t)\\ &= \varepsilon(u_1-u_2)V^\varepsilon(t),\end{aligned}$$

le rapport de vraisemblance pour deux valeurs θ_1 et θ_2 du paramètre est

$$\frac{d\mathbb{P}_{\theta_1}^\varepsilon}{d\mathbb{P}_{\theta_2}^\varepsilon}(X^\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\Delta X_t^\varepsilon dB_t-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T(\Delta X_t^\varepsilon)^2dt\right),$$

soit $m>1$ Posons $V(T)=\left(\frac{d\mathbb{P}_{\theta_1}^\varepsilon}{d\mathbb{P}_{\theta_2}^\varepsilon}\right)^{\frac{1}{m}}$ de la définition de $Z_{\varepsilon,\theta}(u)$ on a

$$\begin{aligned}V(T)=\left(\frac{d\mathbb{P}_{\theta_1}^\varepsilon}{d\mathbb{P}_{\theta_2}^\varepsilon}\right)^{\frac{1}{m}} &= \left(\frac{d\mathbb{P}_{\theta+\varepsilon u_1}^\varepsilon}{d\mathbb{P}_\theta^\varepsilon}\times\frac{d\mathbb{P}_\theta^\varepsilon}{d\mathbb{P}_{\theta+\varepsilon u_2}^\varepsilon}\right)^{\frac{1}{m}}\\ &= \left(\frac{Z_{\varepsilon,\theta}(u_1)}{Z_{\varepsilon,\theta}(u_2)}\right)^{\frac{1}{m}},\end{aligned}$$

écrivons $V(t)=\exp(Y(t))$ où le processus $Y(t)$ est tel que $Y(0)=0$. La formule Itô pour $V(t)=f(t,Y(t))$ donne

$$dV(t)=\left[f_t'(t,Y(t))+f_y'(t,Y(t))\left(-\frac{1}{2m\varepsilon^2}(\Delta X_t^\varepsilon)^2\right)+\frac{1}{2}f_{yy}''(t,Y(t))\left(\frac{1}{m^2\varepsilon^2}(\Delta X_t^\varepsilon)^2\right)\right]dt$$

$$+f_y'(t,Y(t))\left(-\frac{1}{m\varepsilon}(\Delta X_t^\varepsilon)\right)dB_t,$$

donc

$$dV(t) = \left[\left(-\frac{1}{2m\varepsilon^2}(\Delta X_t^\varepsilon)^2\right)e^{Y(t)} + \left(\frac{1}{2m^2\varepsilon^2}(\Delta X_t^\varepsilon)^2 e^{Y(t)}\right)\right]dt$$
$$+\left(\frac{1}{m\varepsilon}(\Delta X_t^\varepsilon)\right)e^{Y(t)}dB_t,$$

comme $V(0) = 1$, *on en déduit*

$$V(T) = 1 + \frac{1-m}{2m^2\varepsilon^2}\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2 V(t)dt + \frac{1}{m\varepsilon}\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)V(t)dB_t,$$

d'une part, nous avons

$$\mathbb{E}_\theta \left|Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_1)\right|^m = \mathbb{E}_\theta \left|Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2)\left(1 - \frac{Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_1)}{Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2)}\right)\right|^m,$$

de $(a+b)^m \leq 2^{m-1}(a^m + b^m)$ *l'inégalité de Holder avec les exposants* m *et* $\dfrac{m}{m-1}$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta \left|Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_1)\right|^m \\
&= \mathbb{E}_\theta \left|\left(\frac{d\mathbb{P}_{\theta_2}^\varepsilon}{d\mathbb{P}_\theta^\varepsilon}\right)^{\frac{1}{m}}(1 - V(T))\right|^m \\
&= \mathbb{E}_\theta |(1 - V(T))|^m \left|\frac{d\mathbb{P}_{\theta_2}^\varepsilon}{d\mathbb{P}_\theta^\varepsilon}\right| \\
&= \mathbb{E}_{\theta_2}|(1 - V(T))|^m \\
&= \mathbb{E}_{\theta_2}\left|\frac{1-m}{2m^2\varepsilon^2}\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2 V(t)dt + \frac{1}{m\varepsilon}\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)V(t)dB_t\right|^m \\
&\leq 2^{m-1}\left[\mathbb{E}_{\theta_2}\left(\left|\left(\frac{1-m}{2m^2\varepsilon^2}\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2 V(t)dt\right)^m\right| + \left(\frac{1}{m\varepsilon}\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)V(t)dB_t\right)^m\right)\right] \\
&\leq 2^{m-1}\left(\frac{1-m}{2m^2\varepsilon^2}\right)\mathbb{E}_{\theta_2}\left(T^{m-1}\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m}V^m(t)dt\right) \\
&+2^{m-1}\left(\frac{1}{m\varepsilon}\right)\mathbb{E}_{\theta_2}\left(T^{m-1}\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^m V^m(t)dt\right) \\
&\leq \frac{C_1}{\varepsilon^{2m}}\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2}\left((\Delta X_t^\varepsilon)^{2m}V^m(t)\right)dt + \frac{C_2}{\varepsilon^m}\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2}\left((\Delta X_t^\varepsilon)^m V^m(t)\right)dt,
\end{aligned}$$

où $C_1, C_2 > 0$. *Pour le premier terme de l'inégalité ci-dessus, du fait que le processus* $(V^m(t), t \in [0,T])$ *est une martingale par rapport à la tribu* F_t, *nous en déduisons que*

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2}\left((\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} V^m(t)\right) dt &= \mathbb{E}_{\theta_2} \textstyle\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} \left(\mathbb{E}_{\theta_2} V^m(T)/F_t\right) dt \\
&= \textstyle\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2}\mathbb{E}_{\theta_2}\left((\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} V^m(T)/F_t\right) dt \\
&= \textstyle\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2}\left((\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} V^m(T)\right) dt \\
&= \mathbb{E}_{\theta_2}\left(V^m(T) \textstyle\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m}\right) dt \\
&= \mathbb{E}_{\theta_1}\left(\textstyle\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} dt\right),
\end{aligned}$$

en faisant le même calcul pour le second terme, nous arrivons à :

$$\mathbb{E}_\theta \left| Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_1) \right|^m \leq \frac{C_1}{\varepsilon^{2m}} \int_0^T \mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} dt + \frac{C_2}{\varepsilon^m} \int_0^T \mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta X_t^\varepsilon)^m dt,$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} &= \mathbb{E}_{\theta_1}(\varepsilon(u_1 - u_2)V^\varepsilon(t))^{2m} \\
&= \varepsilon^{2m}\mathbb{E}_{\theta_1}\left((u_1-u_2)^{2m} V^\varepsilon(t)^{2m}\right) \\
&= \varepsilon^{2m}(u_1-u_2)^{2m}\mathbb{E}_{\theta_1}\left(V^\varepsilon(t)^{2m}\right),
\end{aligned}$$

et en appliquant l'inégalité de hölder avec les exposants $\dfrac{2m}{2m-1}$ *et* $2m$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_1}\left(V^\varepsilon(t)^{2m}\right) &= \mathbb{E}_{\theta_1}\left(\textstyle\int_\delta^1 X_{t-s} g(s) ds\right)^{2m} \\
&\leq \mathbb{E}_{\theta_1}\left[\left(\textstyle\int_\delta^1 X_{t-s}^{2m} ds\right)^{\frac{1}{2m}} \left(\textstyle\int_\delta^1 g^{\frac{2m}{2m-1}}(s)\right)^{\frac{2m-1}{2m}}\right]^{2m} \\
&\leq \mathbb{E}_{\theta_1}\left(\textstyle\int_\delta^1 X_{t-s}^{2m} ds\right)\left(\textstyle\int_\delta^1 g^{\frac{2m}{2m-1}}(s)\right)^{2m-1} \\
&\leq K_1 \textstyle\int_\delta^1 \sup_{\theta\in K}\sup_{0\leq s\leq T} \mathbb{E}_{\theta_1}|X_s|^{2m} ds = K_2,
\end{aligned}$$

par suite

$$\mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} \leq K_2 \varepsilon^{2m}|u_1-u_2|^{2m},$$

de même, de l'inégalité

$$\mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} \leq K_3 \varepsilon^{m}|u_1-u_2|^{m},$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta \left| Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_1) \right|^m &\leq \acute{C}_1|u_1-u_2|^m + \acute{C}_2|u_1-u_2|^m \\
&\leq K_4|u_1-u_2|^m(1+H^m),
\end{aligned}$$

finalement

$$\sup_{\theta\in\Theta_{\{u_1u_2\in U_{\theta,\varepsilon}:\|u_j\|<H,j=1,2\}}} \sup |u_1-u_2|^{-m}\mathbb{E}_\theta \left| Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_1) \right| \leq C(1+H^m),$$

où $C>0$. *D'où le lemme.* ■

lemme 2.2 *Sous la condition D1, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall u \in U_{\theta,\varepsilon}$ et pour tout compact K de Θ, on a*

$$\sup_{\theta \in K} \mathbb{P}_\theta^\varepsilon \left(Z_\varepsilon(u) \geq e^{-\eta u^2} \right) \leq C e^{-\eta u^2},$$

où $\eta > 0$ et $C > 0$.
Le théorème (2.1) implique la convergence des lois de dimensions finies du processus de vraisemblance $(Z_{\varepsilon,\theta}(u), u \in \mathbb{R})$. Par suite, des Lemmes (2.1) et (2.2) le processus $(Z_{\varepsilon,\theta}(u), u \in \mathbb{R})$ converge faiblement dans $C_0(\mathbb{R})$ vers un processus $(Z_\theta(u), u \in \mathbb{R})$.

Preuve 2.4 *: **(du lemme 2.2)***
Soit a vérifiant $0 < a < \frac{1}{2}$, $b > 0$ et $u \in \mathbb{R}$. Notons $\theta_i = \theta + \varepsilon u_i$, $i = 1, 2$
Par l'inégalité de Markov et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(Z_\varepsilon(u) \geq e^{-\eta u^2} \right) \\
&\leq e^{\beta \eta u^2} \mathbb{E}_\theta (Z_\varepsilon(u))^\beta \\
&\leq e^{\beta \eta u^2} \mathbb{E}_\theta \left[exp \left(\frac{\beta}{\varepsilon} \textstyle\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon) dB_t - \frac{\beta}{2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2 dt \right) \right] \\
&\leq e^{\beta \eta u^2} \mathbb{E}_\theta \left[exp \left(\frac{\beta}{\varepsilon} \textstyle\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon) dB_t - \frac{b}{2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2 dt + \frac{(b-a)}{2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2 dt \right) \right] \\
&\leq e^{\beta \eta u^2} \mathbb{E}_\theta \left[exp \left(\frac{\beta}{\varepsilon} \textstyle\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon) dB_t - \frac{b}{2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2 dt \right) \times exp \left(\frac{(b-a)}{2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2 dt \right) \right] \\
&\leq e^{\beta \eta u^2} \mathbb{E}_\theta \left[exp \left(\frac{2\beta}{\varepsilon} \textstyle\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon) dB_t - \frac{b}{\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2 dt \right) \right]^{\frac{1}{2}} \times exp \mathbb{E} \left[\left(\frac{(b-a)}{\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2 dt \right) \right]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

où $\Delta X_t^\varepsilon = R_t(X^\varepsilon, \theta_1) - R_t(X^\varepsilon, \theta_2)$. Par le théorème 6.1 p216 de [15], on a :

$$\mathbb{E}_\theta \left[exp \left(\int_0^T \left(\frac{2\beta}{\varepsilon} \Delta X_t^\varepsilon \right) dB_t - \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{2a}{\varepsilon} \Delta X_t^\varepsilon \right)^2 dt \right) \right] \leq 1,$$

si on choisit $b = 2a^2$; on aura donc

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon \left(Z_\varepsilon(u) \geq e^{-\eta u^2} \right) \leq e^{\beta \eta u^2} \left[\mathbb{E}_\theta \left(exp \left(\frac{-a(1-2a)}{\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2 dt \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

posons $A = \Delta X_t^\varepsilon$ et $G = \Delta X_t^0$. En utilisant l'inégalité $-A^2 \leq -G^2 + 2|G||G - A|$, nous obtenons

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(Z_\varepsilon(u) \geq e^{-\eta u^2}\right)$$
$$\leq e^{\beta\eta u^2}\left[\mathbb{E}_\theta\left(exp\left(\frac{-a(1-2a)}{\varepsilon^2}\int_0^T(\Delta X_t^0)^2dt + \frac{2a(1-2a)}{\varepsilon^2}\int_0^T|\Delta X_t^0||\Delta X_t^\varepsilon - \Delta X_t^0|dt\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq e^{\beta\eta u^2}\left[\mathbb{E}_\theta\left(\exp\left(\frac{-a(1-2a)}{\varepsilon^2}\int_0^T(\Delta X_t^0)^2dt\right)\times\exp\left(\frac{2a(1-2a)}{\varepsilon^2}\int_0^T|\Delta X_t^0||\Delta X_t^\varepsilon - \Delta X_t^0|dt\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.17}$$

pour majorer le membre de droite (2.17) *, on minore et on majore* $|\Delta X_t^0||\Delta X_t^\varepsilon - \Delta X_t^0|$. *Minorons maintenant* $\Delta X_t^0 = R_t(X^0,\theta_1) - R_t(X^0,\theta_2)$. *Pour* $0 \leq t \leq T$ *et* $u = u_1 - u_2 \in U_{\theta,\varepsilon}$ *, on applique la formule de Taylor à l'ordre 1 pour avoir*

$$\Delta X_t^0 = \varepsilon u R(\hat{\theta}, X^0),$$

donc

$$(\Delta X_t^0)^2 = \varepsilon^2\left(uR(\hat{\theta},X^0)\right)^2 = \varepsilon^2u^2I(\hat{\theta}),$$

où $\hat{\theta} \in B(\theta,\varepsilon|u|)$*(boule dans* $\mathbb{R}$ *de centre* θ *et de rayon* $\varepsilon|u|$*)et* R *est la dérivée de* R *par rapport à* θ*. La condition* D_1 *implique que* $I(\theta)$ *est positive (cf.([1]) lemme* (2.3) *de l'annexe page 40), il existe donc* $\alpha > 0$ *tel que*

$$(\Delta X_t^0)^2 \geq \varepsilon^2\alpha u^2,$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} exp\left(\frac{-a(1-2a)}{\varepsilon^2}\int_0^T(\Delta X_t^0)^2dt\right) &\leq exp\left(\frac{-a(1-2a)}{\varepsilon^2}\varepsilon^2\alpha u^2\right) \\ &\leq exp\left(L_a u^2\right), \end{aligned}$$

majorons maintenant $|\Delta X_t^0|$ *et* $|\Delta X_t^\varepsilon - \Delta X_t^0|$. *Pour* $0 \leq t \leq T$ *et* $u \in U_{\theta,\varepsilon}$. *Comme la fonction* $g(s)$ *est continue sur* $[\delta, 1]$ *donc bornée par* M*, on en déduit que*

$$\begin{aligned} X_t^0 &= x_0 + \int_0^t\left(c\int_\delta^1 X_{v-s}^\varepsilon g(s)ds\right)dv \\ &\leq x_0 + \int_0^t\left(c\int_\delta^1 X_{v-s}^\varepsilon g(s)ds\right)dv \\ &\leq x_0 + Mc\int_0^t\left(c\int_{t-1}^{\delta-1} X_u^\varepsilon du\right)dv \\ &\leq x_0 + M_1\int_0^t X_u^\varepsilon du, \end{aligned}$$

où $M_1 = MTc$*. Par suite, le lemme de Granwall (cf.([15])) donne*

$$X_t^0 \leq x_0e^{M_1t},$$

*la fonction $X_t^0 = x_0$ pour $t < \delta$. Alors pour tout $t \in [\delta, 2\delta]$ et $s \in [\delta, 1], X_{t-s}^0 = x_0$. Par conséquent, de la condition **D1** on en déduit*

$$\frac{dX_t^0}{dt} = x_0 c \int_\delta^1 g(s)ds > 0,$$

par introduction X_t^0 est strictement croissante $[\delta, T]$(cf.preuve du lemme en annexe). Par suite

$$x_0 \leq X_t^0 \leq x_0 e^{M_1 t},$$

alors

$$\begin{array}{rcl} |\Delta X_t^0| & = & |R_t(X^0, \theta + \varepsilon u) - R_t(X^0, \theta)| \\ & = & |(c + \varepsilon u) \int_\delta^1 X_{t-s}^0 g(s)ds - c \int_\delta^1 X_{t-s}^0 g(s)ds| \\ & = & |\varepsilon u \int_\delta^1 X_{t-s}^0 g(s)ds| \\ & \leq & \varepsilon |u| \int_{t-1}^{\delta-1} |X_u^0 g(t-s)| du \\ & \leq & \varepsilon M |u| \int_0^T X_u^0 du \\ & \leq & \varepsilon x_0 M |u| \int_0^T e^{M_1 t} du = \varepsilon M_2 |u|, \end{array} \tag{2.18}$$

d'autre part, nous avons

$$\begin{array}{rcl} |\Delta X_t^\varepsilon - \Delta X_t^0| & = & \left| \varepsilon u \int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon g(s)ds - \varepsilon u \int_\delta^1 X_{t-s}^0 g(s)ds \right| \\ & \leq & \varepsilon |u| \int_\delta^1 |X_{t-s}^\varepsilon - X_{t-s}^0 \; g(s)ds \\ & \leq & \varepsilon |u| \int_\delta^1 \sup_{\delta \leq u \leq t} |X_u^\varepsilon - X_u^0| g(t-u)du \\ & \leq & \varepsilon |u| \left(C\varepsilon \sup_{\delta \leq u \leq t} |B_t| \right) M_3 \\ & \leq & \varepsilon^2 M_4 \sup_{\delta \leq u \leq t} |B_t| |u|, \end{array} \tag{2.19}$$

en utilisant la majoration suivant (cf. p.18 de [14])

$$\mathbb{E}_\theta \left(exp \left(l \sup_{0 \leq t \leq T} |B_t| \right) \right) \leq 2(1 + Tl^2) exp \left(\frac{1}{2} T l^2 \right),$$

et les relation (2.19)*et*(2.18) *, on obtient*

$$\begin{array}{l} \mathbb{E}_\theta \left(\exp \left(\dfrac{2a(1-a)}{\varepsilon^2} \int_0^T |\Delta X_t^0| |\Delta X_t^\varepsilon - \Delta X_t^0| dt \right) \right) \\ \leq \mathbb{E}_\theta \left(\exp \left(2a(1-a) \varepsilon M_2 M_4 T |u| \sup_{0 \leq t \leq T} |B_t| \right) \right) \\ \leq \mathbb{E}_\theta \left(\exp \left(\varepsilon M_a T |u| \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| \right) \right) \\ \leq 2(1 + T\varepsilon^2 M_a^2 u^2) \exp \left(\dfrac{1}{2} T \varepsilon^2 M_a^2 u^2 \right) \\ \leq 2 \exp \left(\dfrac{1}{2} T \varepsilon^2 M_a^2 u^2 \right), \end{array}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Z_\varepsilon(u) \geq e^{-\eta u^2}\right) &\leq 2e^{\beta\eta u^2} e^{-L_a u^2} \left(2e^{\frac{3}{2}T\varepsilon^2 M_a^2 u^2}\right) \\ &\leq 2e^{u^2(\beta\eta - L_a + \frac{3}{2}T\varepsilon^2 M_a^2)},\end{aligned}$$

si on choisit β *et* η *tels que* $L_a \geq 2T\varepsilon^2 M_a^2, 0 \leq \eta \leq \dfrac{1}{4(a+1)} L_a$, *nous arrivons à*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Z_\varepsilon(u) \geq e^{-\eta u^2}\right) &\leq 2e^{u^2(\beta\eta - L_a + \frac{3}{2}L_a)} \\ &\leq 2e^{u^2(\beta\eta - L_a + \frac{3}{2}L_a)} \\ &\leq 2e^{u^2(\beta\eta - \frac{1}{4}L_a)} \\ &\leq 2e^{u^2(\beta\eta - (a+1)\eta)} \\ &\leq 2e^{\eta u^2},\end{aligned}$$

d'où lemme. ■

Chapitre 3

Simulations

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous simulons des trajectoires de processus de diffusion par la méthode d'Euler-Maruyama ([3],[4],[5]). Pour l'analyse statistique des estimateurs nous utilisons le logiciel **R** à l'aide du package **Sim.DiffProc** (Simulation of Diffusion Processus). Nous simulons des trajectoires du mouvement brownien à l'aide de la bibliothèque "far" développée par J.Damons et S.Guillas (Modelisation for Functional Autoregressive processus package : far Version : 0.6-0 (2005-01-10)License : LGPL-2.1 version 2.14.0(31-10-2011)du logiciel R). Plus précisement, elle utilise la décomposition de Karhunen Loéve du mouvement brownien sur l'intervalle $[\delta, T]$:

$$B_u = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{2T} Y_j^* \frac{sin[(j - \frac{1}{2})\frac{\pi\mu}{T}]}{\pi(j - \frac{1}{2})}, u \in [\delta, T]$$

où Y_j^* sont des variables aléatoires i.i.d N(0, 1) et où les sommes infinies sont approximées par des sommes finies ([12]). Par la suite, à l'aide de la méthode d'Euler-Maruyama nous simulons des trajectoires de processus de diffusions définies par les EDS ci dessous.Les graphes sont obtenus par le Logiciel **R** qui possède des possibilités pour explorer les données et illustrer les comportements des estimateurs.

3.2 Estimation d'un paramètre

Nous simulons les trajectoires de processus de diffusion vérifiant l'équation différentielle stochastique suivante (ces simulations sont présentés dans la thèse de doctorat de

M Benyahia (voir [1])) :

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = \left(c_1 \int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon g(s)ds\right) dt + \varepsilon dB_t \ \ , t \in [\delta, T] \\ X_s^\varepsilon = x_0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad si - 1 \leq s < \delta, \end{cases} \tag{3.1}$$

on choisit $c_1 = 0.5$, $\delta = 0.1$, $x_0 = 2$, T=2 et posons $g(s) = cos((\frac{pi}{2}) * s)$.
La figure suivante présente une trajectoire observée de $(X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ pour $\varepsilon = 0,99$

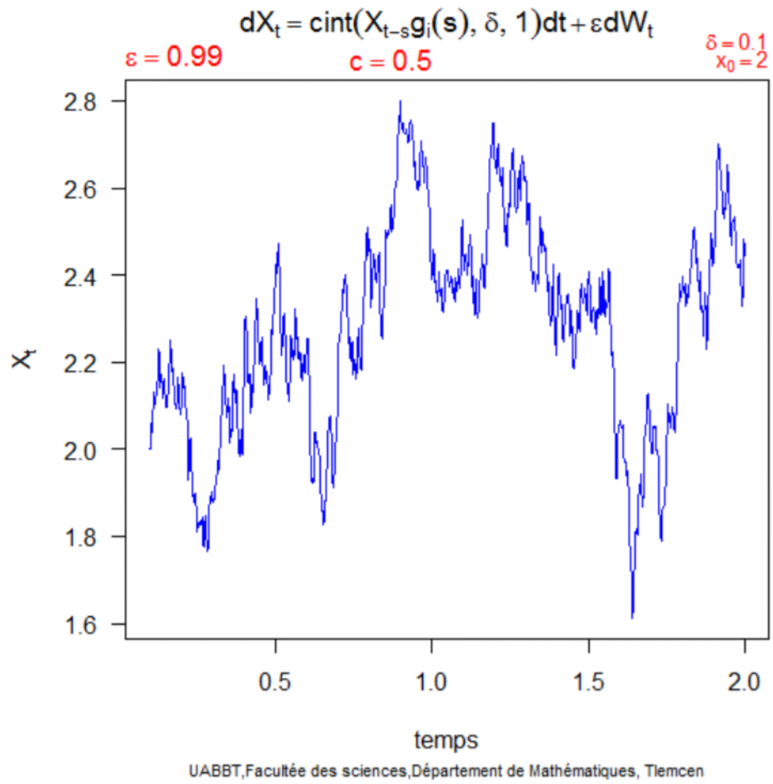

FIGURE 3.1 –

La figure suivante présente une trajectoire observée de $(X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ pour $\varepsilon = 0,01$

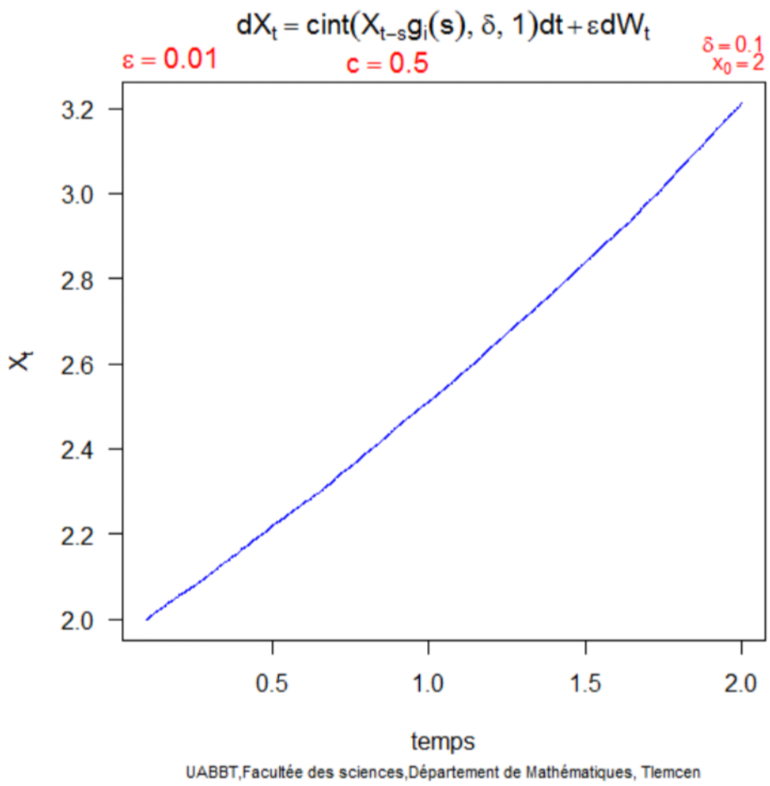

Figure 3.2 –

3.2.1 Comportement de l'estimateur EMV

La figure 3 présente le comportement de l'estimateur EMV $\hat{c}_1$ du coefficient $c_1 = 0,5$ quand ε tend vers 0

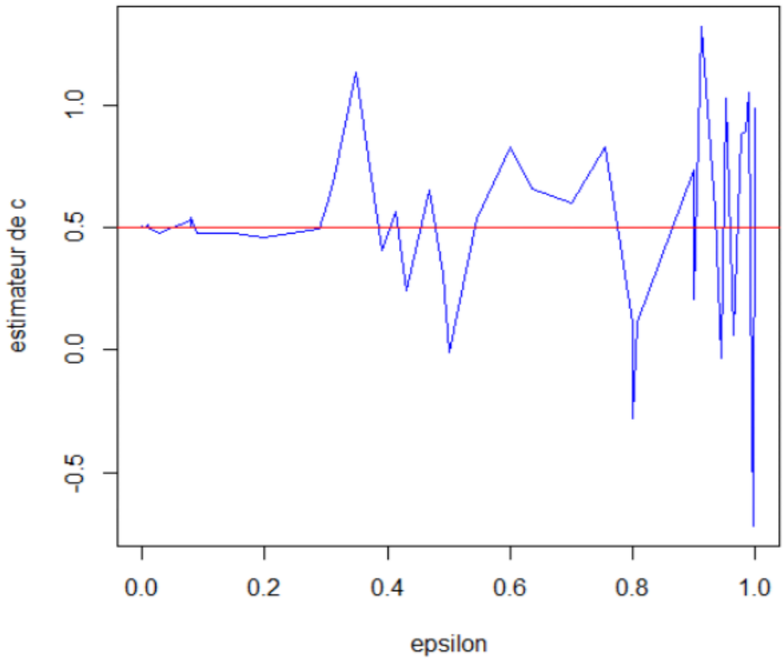

FIGURE 3.3 –

3.2.2 Conclusion

Nous remarquons que la simulation il y'a un bon comportement des estimateurs quand ε tend vers 0.

Conclusion

Nous avons étudiés l'éstimation paramétrique d'une cas particulier sur un processus de type diffusion avec une mesure des retards qu'elle est admet une densité par la théorie générale de Ibragimov-Hasminski ([11]) et Y.Kutoyants ([13]). Nous avons étudié les éstimateur des maximum de vraissemble et leur propriété asymptotique. Nous avons aussi présenté des examples sur des simulations numériques pour illustrer le comportement de cet estimer.

Bibliographie

[1] Benyahia Wahiba.Estimation paramétrique de la densité des ratard dans un processus de diffusion, Thèse de doctorat en sciences Mathématique, 2012.

[2] Billingsley P, Convergence of probability Measures,Wiley, New York, 1968.

[3] Boukhetala. K-Guidoum. A, Sim.Diff Proc, Simulation of Diffusion processes, 2011. R,package version 2.0.

[4] Carletti.M, Numerical solution of stochastic differential problems in the biosciences. Journal of Computational and Applied Mathematics 185, 2006, 422-440..

[5] Chengui.Y -Xuerong.M, Convergence of the Euler-Maruyama method for stochastic differential equations with Markovian switching. Mathématics and Computers in Simulation 64, 2004, 223-235.

[6] CHibane.R, Bouraine.L, 2016, Mouvement Brownien et Intégrale stochastique, Mémoire de fin d'étude de Master, Université de Béjaia, Faculté des Sciences Exactes, Département de Mathématique.

[7] Christophe Breton.J, 2009,Processus stochastiques M2 mathématique,Université de Rennes 1.

[8] Jeamblanc.M, cours de calcul stochastique, Edition de Minuit.

[9] Hadjou Belaid.A, Benyahia.W, 2015, Estimation paramétrique dans une petit diffusion, Mémoire en vue de l'obtention du *diplôme* du Master, Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen Faculté des sciences,département de Mathématiques.

[10] Hàjek J,Local asymptotique minimax and admissibility in estimation. In 6-th Proc Berkeley Symp. Math. Statist. and probab.,1972, 1, 175-194.

[11] Ibragimov I.A-Hasminski R.Z, Statistical Estimation, Asymptotic theory. Springer,New York, 1981.

[12] Pumo. B :Prediction of continuous time processes by C(0. 1)-valued autoreghressive process. Statist. Inf. Stoch. Proc. I, 1998, 139-153.

[13] Kytoyants Yu, Parameter Estimation For Stochastic Processus.Berlin, Heldermann, 1984.

[14] Kutoyants Yu, Identication of Dynamical Systems with small noise.Kluwer, Dordrecht, 1994.

[15] Lipster R.S-Shiryaev A.N, statistics of Random Processus, vol. 1, Springer, New York, 2000.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est l'estimation de la densité de la mesure des retards dans un processus de type diffusion en estimant ces coefficients dans un système de fonctions par la méthode du maximum de vraisemblance EMV dans l'asymptotique des petites diffusions, nous donnons aussi un exemple des simulations numériques sur les estimateurs EMV.

Abstract

The objective of this thesis is the estimation of the density of the measurement of delays in a diffusion-type process by estimating these coefficients in a system of functions by the method of maximum likelihood EMV in the asymptotics of small diffusions. we also give an example of numerical simulations on estimators EMV.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو تقدير كثافة قياس التأخير في عملية من نوع الإنتشار من خلال تقدير هذه المعاملات في نظام من الوظائف من خلال طريقة أقصى إحتمال في تقارب الإنتشار الصغير MEV. وقد أعطينا مثالا للمحاكاة العددية على مقدرات MEV.