

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Abd Elhafid Boussouf – Mila

Institut des Sciences
et Technologie

Département de Mathématiques
et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de
Master
En : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématique Appliquée**

Contrôle du chaos d'un circuit de Chua

Préparé par:

-Hamdouni Nassira
-Benlaribi Marwa

Devant le jury :

Boudjerida Nadjate	MAA	U. Abd Elhafid Boussouf	Président
Labeled Boudjema	MAA	U. Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur
Meskin Habiba	MAA	U. Abd Elhafid Boussouf	Examineur

Année Univaersitaire: 2019/2020

Remerciements

Nous remercions tout d'abord, **ALLAH** le tout puissant qui nous à donné la force, la volonté et le courage et nous à aidée à compléter ce travail.

Nous exprimons notre profonde gratitude à notre encadreur Dr. **Labed Boudjema** d'avoir dirigé ce travail et pour tout l'aide et les conseils éclairés qu'il nous a prodigués pour mener cette mémoire avec beaucoup de patience et d'indulgence.

Nous remercions également les membres de jury **Boudjerida Nadjate** pour avoir accepté de présider et **Mesquine Habiba** qui ont accepté d'examiner ce travail et pour l'honneur qu'ils nous font d'avoir assisté à notre soutenance.

Nous nos vifs remerciement aussi à tous nos enseignant de l'institut des sciences et de technologie qui ont contribué à notre formation.

Nous remercions toujours notre famille pour son soutien, et nos salutations profondes à nos mères pour leurs prières, leurs encouragements et leur soutien tout au long de notre travail.

Finalement, nous remercions tous ceux qui participé de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail même par un mot d'encouragement parmi mes enseignantes, mes amies, mes collègues.

Dédicace

Je dédie ce mémoire de fin d'étude :

- A ma chère mère "**Mouni**", et a me chère père "**Abd elhafid** " pour leurs conseils, leurs encouragements et leur soutien. Et je vous dédie ce travail avec tous mes meilleurs vœux de bonheurs, et longue vie et de santé.
- A mes chères sœurs, a mes chers frères, pour toute leur compréhension, encouragements et votre aide.
- A tous mes amis.
- A tous ceux qui sont chers.

Hamdouni

Nassira

Dédicace

Je dédie ce mémoire de fin d'étude :

- A mon très cher père "**Messaoud**" à qui je dois ce que je suis.
- A la meilleure maman du monde "**Nassira**" artisane de ma réussite. Puisse Dieu, le tout puissant, vous préserver et vous accordez santé, longue vie et bonheur.
- A mes frères pour votre aide ainsi que vos encouragements et votre fidélité.
- A mes fidèles amies.

Benlaribi

Marwa

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est la suppression du chaos des systèmes chaotiques. Pour réaliser cet objectif, nous avons utilisé " le contrôle adaptatif ".

Nous avons obtenu le contrôle du système de Chau par application de contrôle adaptatif et sa stabilité est prouvée avec la théorie de Lyapunov.

Les mots clés

Chaos, contrôle adaptatif, système de Chua, stabilité, la théorie de Lyapunov.

Abstract

The main objective of this thesis is the removal of chaos from dynamic systems, to achieve this goal we have used "adaptive control".

We got control the Chua system by application of adaptive control and its stability is proven with Lyapunov theory.

Keys words

Chaos, adaptive control, Chua system, stability, Lyapunov theory.

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه الأطروحة هو قمع الفوضى من الأنظمة الفوضوية، ولتحقيق هذا الهدف استخدمنا "التحكم التكيفي".

حققنا السيطرة على نظام شوا من خلال تطبيق التحكم التكيفي وتم إثبات استقراره من خلال نظرية ليابونوف.

الكلمات المفتاحية

الفوضى، التحكم التكيفي، نظام شوا، الاستقرار، نظرية ليابونوف.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction Générale	1
1 Système dynamique	3
1.1 Notion générale de système dynamique	3
1.1.1 Flot, Trajectoire (Orbite)	4
1.1.2 Portrait de Phase	5
1.1.3 Point d'équilibre	5
1.1.4 Ensemble Limite	6
1.2 Attracteurs	6
1.2.1 Les types d'attracteur	6
1.3 Cycle et Cycle limite	8
1.3.1 Classification des cycles limite	8
1.4 Étude de stabilité au temps continu	10
1.4.1 Notion de stabilité	10
1.5 Critère de Routh-Hurwitz	13
1.6 Généralités sur Bifurcation	14
1.6.1 Bifurcation de codimension un (I)	14
1.7 Système chaotique	18
1.7.1 Routes vers le chaotique	19
1.7.2 Exposants de Lyapunov	20
1.8 Dimensions fractales des attracteurs étranges	23
2 Théorie du contrôle	25
2.1 Contrôlabilité	25
2.1.1 Système de Contrôle	25

2.1.2	Contrôlabilité des systèmes linéaires	28
2.1.3	Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes	29
2.1.4	Contrôlabilité des systèmes linéaires non-autonomes	29
2.1.5	Contrôlabilité des systèmes non linéaires	30
2.2	Stabilisation des systèmes de contrôle	31
2.2.1	Stabilisation des systèmes linéaires	31
2.2.2	Stabilisation des systèmes non linéaires	32
3	Contrôle adaptatif du chaos dans le circuit de Chua	33
3.1	Introduction	33
3.2	Système de Chua	34
3.2.1	Modélisation du circuit de Chua	34
3.2.2	Etude de la diode de Chua	35
3.3	Propriétés du système de Chua	40
3.3.1	Calcul les points d'équilibres	40
3.3.2	Stabilité des points d'équilibre	42
3.3.3	Dissipativité	44
3.3.4	Exposant de Lyapunov et dimension de Kaplan-Yorke	46
3.4	Contrôle du chaos dans le circuit de Chua	47
3.4.1	Contrôle adaptatif	47
3.5	Conclusions	50
	conclusion générale	51
	Bibliographie	51

TABLE DES FIGURES

1.1	Portrait de phase.	5
1.2	Attracteurs réguliers.	7
1.3	Attracteurs étrange de Lorenz.	8
1.4	Le cycle limite.	9
1.5	Bifurcation nœud-col.	15
1.6	Bifurcation transcritique.	16
1.7	Bifurcation fourche sous critique.	16
1.8	Bifurcation fourche super critique.	17
1.9	Attracteur étrange de Rossler.	19
3.1	Le circuit de Chua.	34
3.2	Représentation de la fonction non linéaire $i_{NL} = h(v_1)$	35
3.3	L'attracteur chaotique du système de Chua dans 3-D.	38
3.4	Projection 2-D du système de Chua sur un plan (x,y).	38
3.5	Projection 2-D du système de Chua sur un plan (x,z).	39
3.6	Projection 2-D du système de Chua sur un plan (y,z).	40
3.7	Exposant de Lyapunov.	47

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La découverte de la dynamique chaotique des systèmes non linéaires remonte aux travaux de météorologue **Edward Lorenz** en 1963 pour étudier la nature chaotique des conditions météorologiques, où qu'il observa qu'une modification des données initiales pouvait changer ses résultats, et a découverte le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. A la fin du dix neuvième siècle, le mathématicien **Henri Poincaré** avait déjà mis en évidence ce phénomène. Les systèmes qui répondant à cette propriété sont appelés les systèmes chaotiques (déterministe) en étudiant la dynamique non linéaire, ainsi présent le terme chaos pour la premier fois et permettent de décrire le comportement des systèmes dynamiques chaotique régis par des lois déterministes et leurs évolution dans le temps est imprévisible [1].

En effet, il y a une divergence exponentielle des trajectoires du système (cela peut formellement être mesuré avec les exposants de Lyapunov). Une autre propriété intéressante des systèmes chaotiques sont les attracteurs étranges, l'attracteur à double spirale Chua a été introduit en 1984 [18]. La nature chaotique du circuit de Chua a été observée dans l'attracteur de Chua et ce circuit l'un des appareils électroniques les plus importants utilisés pour les études de chaos et de bifurcation, et est un système chaotique non linéaire largement étudié et bien compris.

De façon générale, on peut dire que notre ligne principale de travail s'articule autour du problème de contrôle dans le système de Chua 3-D, et l'étude de surveillance de ce système est liée à la théorie du chaos. Le terme "contrôle du chaos" est utilisé principalement pour dénoter la région d'interface d'étude entre la théorie du contrôle et la théorie du système de Chua 3-D étudiant les méthodes de contrôle des systèmes déterministe avec un comportement chaotique et été utilisée une approche de contrôle

adaptatif pour accomplir le contrôle, la stabilisation et conduire la trajectoire du système de Chua 3-D vers des trajectoires bien spécifiques (point d'équilibre stable).

Ce mémoire a pour objet l'étude de contrôle adaptative du chaos dans le circuit de Chua. Il contient trois chapitres :

- ▶ **Dans le premier chapitre**, nous donnons des notions de la théorie des systèmes dynamiques "notions de stabilité, de bifurcation, ainsi que des caractéristiques des systèmes chaotiques".
- ▶ **Au deuxième chapitre**, nous avons discuté dans cet axe de la possibilité de contrôler les systèmes dynamiques au moyen de la théorie du contrôle et des points les plus importants sur lesquels nous nous sommes concentrés sur "les définitions de système de contrôle, la contrôlabilité de système linéaire (autonome et non autonome) et la contrôlabilité de système non linéaire".
- ▶ **Le troisième chapitre**, nous avons étudié le système de Chua, puis on introduit le concept de la contrôle du Chua par la proposition de contrôle adaptative appliqué au système de Chua 3-D et sa stabilité est prouvée avec la théorie de Lyapunov.

CHAPITRE 1

SYSTÈME DYNAMIQUE

1.1 Notion générale de système dynamique

Définition 1.1.1. *En mathématique, un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système avec le temps. Le terme " système " fait référence à un ensemble de variable d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables.*

On défini un système dynamique par un triple (T, X, Φ) tel que : T est un temps défini un ensemble de nombre, X est un espace de l'état et Φ est le flot.

– Il ya deux types de système dynamique [2] :

Dans le cas continu ($T = \mathbb{R}$) un système dynamique est décrit par un système des équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, \mu), \quad (1.1)$$

$x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, et $\mu \in V \subseteq \mathbb{R}^p$ le vecteur des paramètres, $\mathbb{R}^n$ est appelée espace des phases ; $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé champs de vecteur sur Ω .

Dans le cas discret ($T = \mathbb{Z}$) un système dynamique est décrit par une itération de la forme :

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu), \quad n \in \mathbb{N}; \quad (1.2)$$

Si f dépend explicitement du temps t , on dit que le système (1.1) non autonome. Sinon autonome.

Lorsque f est non linéaire on dit que le système (1.1) non linéaire, et de même si f est linéaire alors le système (1.1) est linéaire.

1.1.1 Flot, Trajectoire (Orbite)

Considérons le système autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (1.3)$$

Pour assurer l'existence et l'unicité du flot du système (1.3) nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.1.1. (Théorème de Cauchy-Lipschitz, [3])

Soit l'équation différentielle (1.3), où f est une fonction localement lipschitzienne sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Alors, pour tout $x_0 \in \Omega$; il existe une solution maximale unique de (1.3) satisfaisant $x(0) = x_0$.

a. Flot :

Définition 1.1.2. [4].

La correspondance $\Phi_t : x_0 \mapsto x(t)$ qui associe à une donnée initiale x_0 la valeur de la solution maximale $x(t)$ au temps t , qui correspond à cette donnée initiale, est appelée le flot au temps t du champs de vecteurs f .

$$(t, x) \mapsto \Phi(t, x) = x(t).$$

Remarque 1.1.1. – Le flot est complet lorsque f est définie pour tout valeur $t \in \mathbb{R}$.

Propriétés de flot

Le flot satisfait les propriétés suivant :

- 1- Si f de classe C^r alors $\Phi_t(x_0)$ est de classe C^r .
- 2- $\Phi_0(x_0) = x_0$.
- 3- $\Phi_{t+s}(x_0) = \Phi_t(\Phi_s(x_0))$.

b. Trajectoire (Orbite) :

Définition 1.1.3. [5].

Soit la condition initiale $x_0 \in \Omega$. On considère $x(t, x_0)$ est une solution de système (1.3)

passant au point x_0 lorsque $t = 0$. On la note par :

$$\gamma_{x_0} = \{x(t, x_0) \in \mathbb{R}^n; \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

1.1.2 Portrait de Phase

Il existe trois espaces d'état en orbite. Le portrait de phase d'un système est :

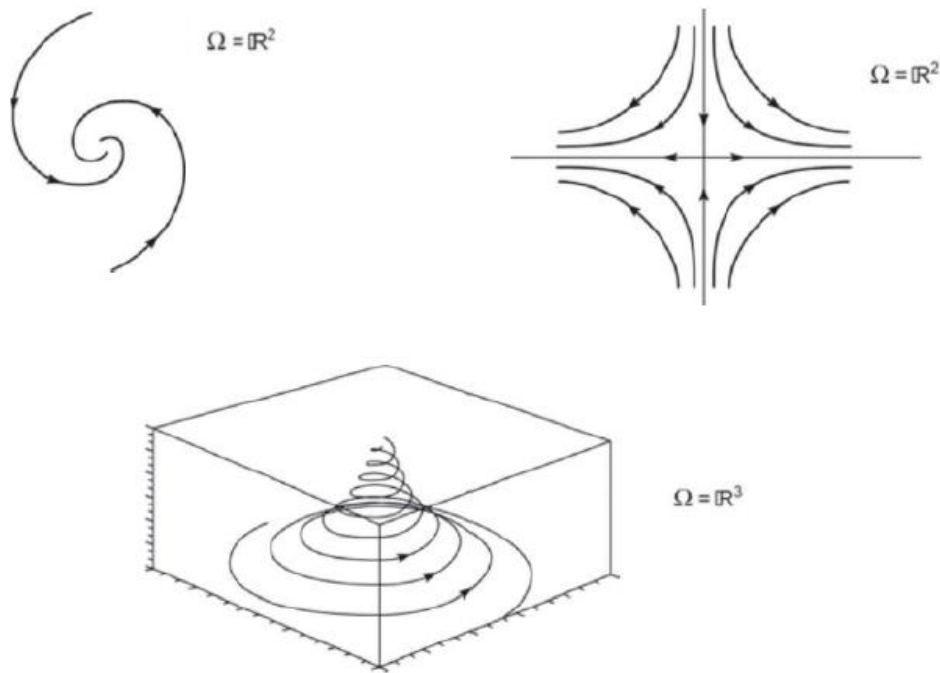


FIGURE 1.1 – Portrait de phase.

1.1.3 Point d'équilibre

Définition 1.1.4. ([5], [6]).

Un point x^* est dit point d'équilibre de système (1.1) s'il satisfait $f(x^*) = 0$ ou $\Phi(t, x^*) = x^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ sinon est un point ordinaire. Par fois, ces points sont appelés points stationnaire ou point fixe.

Définition 1.1.5. ([5], [6]).

- Si un point ordinaire a est dit périodique s'il existe $T > 0$ telle que $\Phi(T, a) = a$, sinon est dit récurrent si pour tout voisinage V de a et pour tout $T \in \mathbb{R}$, il existe $t > T$ tel que $\Phi(t, a) \in V$.
- Un ensemble $D \subset \Omega$ est dit invariant par le flot Φ_t sur Ω si $\forall x \in D$ et $t \in \mathbb{R}$ donc $\Phi(t, x) \in D$ est vérifier alors D est dite positivement invariant.

1.1.4 Ensemble Limite

Ensemble α -limite et ω -limite

Définition 1.1.6. [6].

Un point $a \in \Omega$ est le point ω -limite d'une trajectoire γ_{x_0} s'il existe une suite $t_k \rightarrow +\infty$ telle que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(t_k, x_0) = a.$$

De même, un point $b \in \Omega$ est le point α -limite d'une trajectoire γ_{x_0} s'il existe une suite $t_k \rightarrow -\infty$ telle que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(t_k, x_0) = b.$$

Définition 1.1.7. [6].

L'ensemble des points ω -limite (resp : α -limite) de γ_{x_0} est désigné par $\omega(x_0)$ (resp : $\alpha(x_0)$).

L'ensemble $\alpha(x_0) \cup \omega(x_0)$ est appelé l'ensemble limite de γ_{x_0} .

1.2 Attracteurs

Définition 1.2.1. [5].

La région de l'espace de phases vers laquelle convergent les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle attracteur est des formes géométriques que caractérise l'évolution à long terme des systèmes dynamiques.

Soit D un ensemble compact, ferme de l'espace de phase. On suppose que D est un ensemble invariant (i.e $\Phi_t(D) = D$ pour tout t).

On dit que l'ensemble D attracteur si :

- Pour tout voisinage U de D , il existe un voisinage V de D tel que toute solution $\Phi(x_0, t) = \Phi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$.
- $\bigcap_{t \geq 0} \Phi_t(V) = D, t \geq 0$.
- Il existe une orbite dense dans D .

1.2.1 Les types d'attracteur

Il y a deux types des attracteurs :

1. Attracteurs réguliers :

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques :

- a. **Le point fixe** : est un point de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires, c'est donc une solution stationnaire constante.
- b. **Le cycle limite (attracteur périodique)** : est une trajectoire fermée dans l'espace des phases tend vers les trajectoires, c'est donc une solution périodique du système.
- c. **Un tore** : représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois "mouvements quasi périodiques".

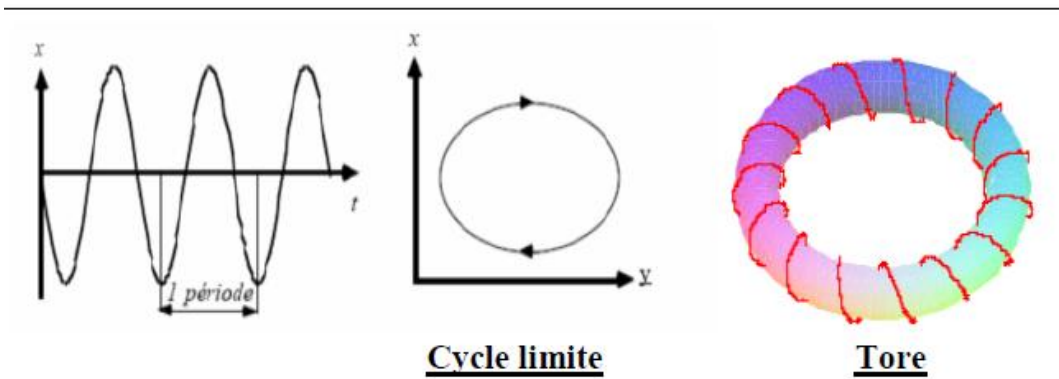


FIGURE 1.2 – Attracteurs réguliers.

2. Attracteurs étranges (chaotique) :

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques.

L'attracteur étrange se caractérise par :

- a. La dimension d de l'attracteur est fractale (non entière) avec $2 < d < n$, où n est la dimension de l'espace de phases, pour un système continue autonome.
- b. L'attracteur est de volume nul dans l'espace des phases.
- c. Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'écarter l'une de l'autre).

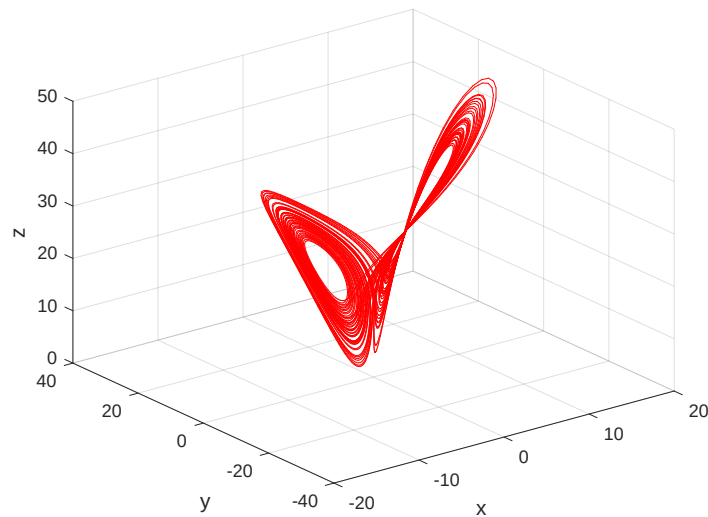


FIGURE 1.3 – Attracteurs étrange de Lorenz.

1.3 Cycle et Cycle limite

Définition 1.3.1. (*Définition de Cycle*)

On définit un cycle est dit orbite périodique γ_{x_0} tq :

$$\forall x_0 \in \gamma_{x_0}; \Phi_{t+T}(x_0) = \Phi_t(x_0).$$

Définition 1.3.2. (*Définition de Cycle limite*)

Un cycle limite est défini comme une trajectoire fermée dans plans de phase.

1.3.1 Classification des cycles limite

En fonction de l'évolution des trajectoires de phase au voisinage du cycle limite, ceux-ci peuvent être classés en trois catégories :

- **Cycle limites stables (ou cycle ω -limite)** : Toutes les trajectoires au voisinage du cycle convergent vers le cycle quand $t \rightarrow +\infty$.
- **Cycles limites instables (ou cycle α -limite)** : Toutes les trajectoires au voisinage du cycle limite divergent quand $t \rightarrow +\infty$.
- **Cycles limites semi- stables** : Certaines trajectoires divergentes d'autres convergent au voisinage du cycle limite quand $t \rightarrow +\infty$.

Exemple :

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.4)$$

L'origine $(0, 0)$ est le point d'équilibre de système (1.4).

En passant aux coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

On trouve :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

- Si $r < 1$ alors $\dot{r} > 0$ la trajectoire à l'intérieur du cercle unité diverge vers l'origine qui est instable et converge vers le cercle (cycle limite stable).
- Si $r > 1$ alors $\dot{r} < 0$ la trajectoire à l'extérieur du cercle unité converge vers l'origine qui est stable et diverge vers le cercle (cycle limite instable).

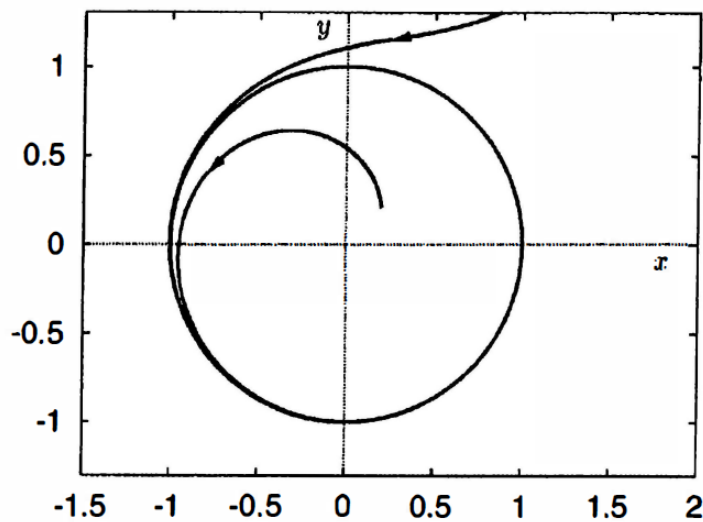


FIGURE 1.4 – Le cycle limite.

1.4 Étude de stabilité au temps continue

1.4.1 Notion de stabilité

La notion de stabilité a pour but de formaliser la propriété d'un système dynamique tel que le système reste proche d'un état dit d'équilibre.

Il ya deux type de stabilité différentes pour caractériser l'évolution d'un point vers son état stable :

a. Stabilité de système linéaire

Théorème 1.4.1. *Soit le système dynamique linéaire :*

$$\dot{x} = Ax(t). \quad (1.5)$$

* Si $\exists i, \operatorname{Re}\lambda_i < 0 \Rightarrow$ on dit que le point fixe est asymptotiquement stable.

* Si $\exists i, \operatorname{Re}\lambda_i > 0 \Rightarrow$ on dit que le point fixe instable.

* Si $\exists i, \operatorname{Re}\lambda_i \leq 0 \Rightarrow$ on dit que le point fixe stable.

Où : λ_i la valeur propre de A .

b. Stabilité de système non linéaire

Stabilité au sens de Lyapunov

1. Méthode direct :

Cette méthode basée sur l'utilisation de la fonction de Lyapunov.

Définition 1.4.1. *Soit le système dynamique :*

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.6)$$

où : $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $f \in C^r$.

On suppose que l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre du système (1.6) qui satisfait : $f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$.

◊ Le point d'équilibre $x = 0$ est dit **stable** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que : } \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t > 0.$$

Asymptotique stable si :

Le point est stable et que : $\exists \delta > 0$ tel que $\|x_0\| < \delta \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Théorème 1.4.2. (Fonction de Lyapunov)

On dit que $V : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est fonction de Lyapunov pour le système (1.6) en point d'équilibre $x = 0$ dans $\mathbb{U}$. Si pour tout $x \in \mathbb{U}$ on :

- $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour $x \neq 0$.
- Si $\dot{V}(x) \leq 0$ alors le point d'équilibre $x = 0$ stable.
- Si $\dot{V}(x) < 0$ le point d'équilibre $x = 0$ admet une fonction de Lyapunov strict alors est asymptotiquement stable.
- Si $\dot{V}(x) > 0$ alors le point d'équilibre $x = 0$ instable.

Où : $\dot{V}(X) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dV}{dx_i} f_i(x)$.

Exemple :(Fonction de Lyapunov)

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x - xy^2, \\ \dot{y} &= -y + 3x^2y. \end{cases}$$

Le point fixe :

$$\begin{cases} \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - xy^2 = 0, \\ -y + 3x^2y = 0. \end{cases}$$

Alors un point fixe unique est $(0, 0)$.

Soit $V(x, y) = 3x^2 + y^2$.

D'après la fonction de Lyapunov on a :

$$V(0, 0) = 0, V(x, y) > 0, (x, y) \neq (0, 0),$$

et

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= 6x\dot{x} + 2y\dot{y}, \\ &= 6x(-x - xy^2) + 2y(-y + 3x^2y), \\ &= -(3x^2 + y^2) < 0. \end{aligned}$$

Donc le point d'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

2. Méthode indirect :

Cette méthode basée sur la linéarisation de la fonction f . Pour étudier la stabi-

lité autour d'un point d'équilibre x_0 . Consiste à étudier le système linéaire avec :

$$\dot{x} = Jx, \quad (1.7)$$

telle que : J est une matrice jacobienne de f en point équilibre (x_0) c'est-à-dire :

$$J = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j} \right).$$

On suppose λ_i la valeur propre de J alors :

- a. Si $\lambda_i \in \mathbb{R}$
 - * $\lambda_i < 0 \Rightarrow$ le point d'équilibre est asymptotiquement stable.
 - * $\lambda_i > 0 \Rightarrow$ le point d'équilibre est instable.
 - * S'il existe i et j tel que : $\lambda_i < 0$ et $\lambda_j < 0$, le point d'équilibre est nœud stable sinon nœud instable.
 - * S'il existe i et j tels que $\lambda_i < 0$ et $\lambda_j > 0$, le point d'équilibre est point selle.
- b. Si $\lambda_i \in \mathbb{C}$.
 - * $\text{Re}\lambda_i < 0 \Rightarrow$ le point d'équilibre est foyer stable (puits) .
 - * $\text{Re}\lambda_i > 0 \Rightarrow$ le point d'équilibre est foyer instable (source) .
 - * Si $\text{Re}\lambda_i \neq 0$ donc le point d'équilibre est point hyperbolique.

Exemple :

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + x^3, \\ \dot{y} &= -y. \end{cases}$$

Le point fixe :

$$\begin{cases} \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + x^3 &= 0, \\ -y &= 0. \end{cases}$$

Alors il existe trois points d'équilibre est $(0, 0), (1, 0), (-1, 0)$.

D'après la matrice de jacobienne :

$$A = Df(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La valeur propre de A est $\lambda = -1$ (double) et $\text{Re}\lambda < 0$ alors $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

$$B = Df(1,0) = Df(-1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La valeur propre de B est $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ et $Re\lambda_1 < 0, Re\lambda_2 > 0$ alors $(1,0), (-1,0)$ est instable.

1.5 Critère de Routh-Hurwitz

Considérons le système dans $\mathbb{R}^3$:

$$\dot{x} = H(x),$$

avec :

$$H(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0.$$

avec les déterminants de Routh-Hurwitz sont :

$$d_1 = \det |A| = A;$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} A & 1 \\ C & B \end{vmatrix} = AB - C;$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} A & C & 0 \\ 1 & B & 0 \\ 0 & A & C \end{vmatrix} = Cd_2;$$

Ainsi les conditions de stabilité du point d'équilibre sont :

$$A > 0, AB - C > 0, C > 0.$$

Alors les parties réelles de toutes les valeurs propres sont négatives. Donc le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

1.6 Généralités sur Bifurcation

Définition 1.6.1. Une bifurcation est un changement dans les points d'équilibres, des orbites périodique ou dans les propriétés de stabilité d'un système non linéaire quand un paramètre du système varie, ce paramètre est appelé paramètre de bifurcation. Les valeurs auxquelles les changements qualitatif du comportement du système se produisent sont appelées point de bifurcation μ .

Soit un système d'équation différentielle :

$$\dot{x} = f(x, \mu); \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ où } \mu, x \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

1.6.1 Bifurcation de codimension un (I)

Les bifurcations de codimension un sont quatre types de bifurcations correspondant tous des comportements génériques.

1. Bifurcation nœud-col :

C'est une bifurcation qui correspond à la collision entre un col et un nœud quand la valeur d'un paramètre du système change.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 - \mu, \\ \dot{y} &= -y. \end{cases} \quad (1.9)$$

Alors :

- Si $\mu < 0$ le système (1.9) n'est pas admet une solution donc on n'a pas de point d'équilibre.
- Si $\mu > 0$ le système (1.9) admet deux solutions donc par conséquence on a deux points d'équilibres, le point d'équilibre $(-\sqrt{\mu}, 0)$ nœud stable et le point d'équilibre $(\sqrt{\mu}, 0)$ instable (col).
- Si $\mu = 0$ alors : $(0, 0)$ est un seul point d'équilibre instable.

2. Bifurcation transcritique :

Dans une bifurcation transcritique les points d'équilibres sont persistants quand le paramètre de bifurcation varie, mais leur propriété de stabilité change.

Soit le système suivant :

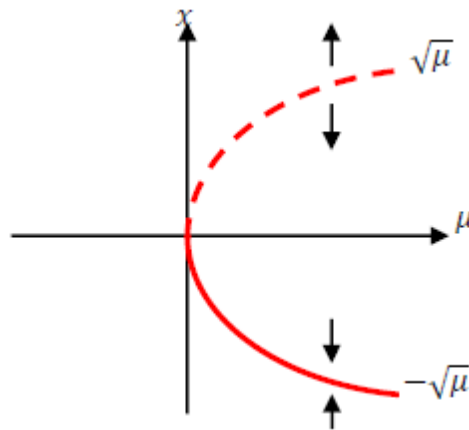


FIGURE 1.5 – Bifurcation nœud-col.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - \mu x, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Il ya deux point d'équilibre $(0, 0)$ et $(\mu, 0)$.

D'après la matrice de jacobienne en point d'équilibre on a :

- Si $\mu < 0$ on a dit que le point d'équilibre $(0, 0)$ est instable (col) et le point d'équilibre $(\mu, 0)$ est nœud stable.
- Si $\mu > 0$ on a dit que le point d'équilibre $(0, 0)$ est nœud stable et le point d'équilibre $(\mu, 0)$ est instable.

On remarque un échange de stabilité en $\mu = 0$:

- pour $\mu = 0$ le premier point d'équilibre passe col à un nœud stable alors que le deuxième passe d'un nœud stable à col cependant, le système garde toujours deux point d'équilibre si un stable et l'autre instable.

3. Bifurcation fourche (pitchfork) :

Cette bifurcation correspond à un changement dans le nombre des points d'équilibre à la valeur de bifurcation. Il ya deux type :

♦ Bifurcation de fourche sous critique :

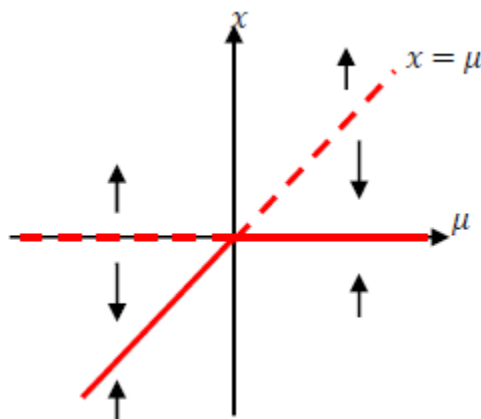


FIGURE 1.6 – Bifurcation transcritique.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + x^3, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

- Si $\mu > 0$, il existe trois point d'équilibre : un nœud stable en $(0,0)$ et deux col en $(\pm \sqrt{\mu}, 0)$.
- Si $\mu \leq 0$, il n'existe plus qu'un seul point d'équilibre à l'origine $(0,0)$ qui est un col.

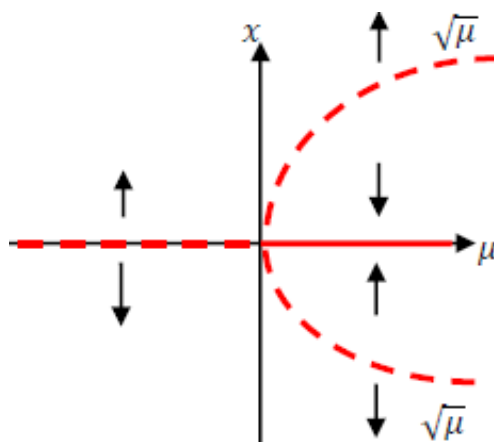


FIGURE 1.7 – Bifurcation fourche sous critique.

◇ **Bifurcation de fourche super critique :**

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Étude la stabilité d'après la matrice jacobienne en point d'équilibre :

- Si $\mu > 0$, il existe trois points d'équilibres : $(0, 0)$, $(\pm \sqrt{\mu}, 0)$ tel que : $(0, 0)$ est un col et $(\pm \sqrt{\mu}, 0)$ est nœud stable.
- Si $\mu < 0$, il existe un seul point d'équilibre à l'origine $(0, 0)$ est nœud stable.

On remarque un échange dans le nombre des point d'équilibre et dans stabilité en $\mu = 0$.

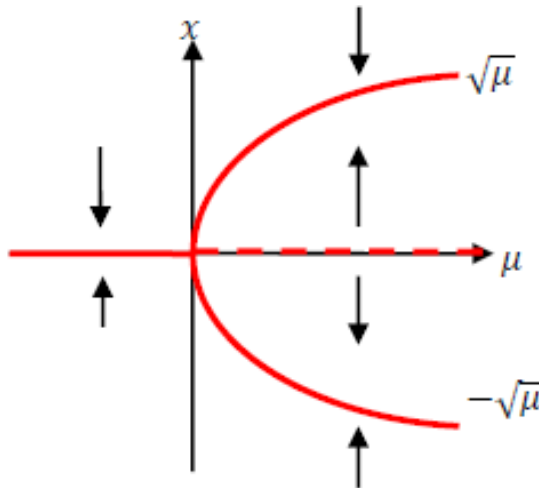


FIGURE 1.8 – Bifurcation fourche super critique.

4. **Bifurcation de Hopf :**

Dans une bifurcation de Hopf, un foyer changé de type de stabilité à la valeur critique de bifurcation. La paire de valeurs propres conjuguées du linéarisé tangent traverse alors l'axe imaginaire.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\mu - x^2 - y^2) - y, \\ \dot{y} = y(\mu - x^2 - y^2) + x. \end{cases}$$

En coordonnées polaires elle s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{r} &= \mu r - r^3, \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases}$$

- Si $\mu < 0$ l'origine est un foyer stable.
- Si $\mu > 0$ l'origine est un foyer instable.

1.7 Système chaotique

Le chaos est défini par un comportement lié à l'instabilité et à la non-linéarité dans des systèmes dynamiques. La relation entre l'instabilité et la chaoticité est alors que le système manifeste une très haute sensibilité aux changements de conditions, il peut arriver que de petites différences initiales engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux et la prédiction devient impossible.

On dit qu'un système dynamique chaotique est un système qui dépend de plusieurs paramètres et caractérisés par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Il n'est pas déterminé ou modélisé par des systèmes d'équations linéaires ni par les lois de la mécanique classique ; cependant les systèmes chaotiques ne sont pas aléatoires [10].

Notons quelques propriétés importantes des systèmes chaotiques :

▷ **La non-linéarité :**

Si un système dynamique non linéaire est chaotique, sinon est non chaotique.

▷ **Le déterminisme :**

La notion de déterminisme signifie la capacité de "**prédire**" le futur d'un phénomène à partir d'un événement passé ou présent. L'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique qui contient des règles fondamentales déterministes et non probabilistes, il est généralement régi par des équations différentielles non linéaires qui sont connues.

▷ **Sensibilité aux conditions initiales :**

Certains phénomènes dynamiques chaotiques non linéaires sont si sensibles aux conditions initiales et aux perturbations que, même s'ils sont régis par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes, les prédictions exactes sont impossibles.

L'un des premiers chercheurs à s'en être aperçu fut "Edward Lorenz" venait de découvrir que différences dans les conditions initiales engendraient à la longue des trajectoires totalement différentes [11].

Alors des propriétés une essentielles du chaos et donc bien cette sensibilité aux

conditions initiales que l'on peut caractériser en mesurant des taux de divergence des trajectoires.

Exemple :

Soit le système chaotique donne par Rossler :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + \alpha y, \\ \dot{z} = \beta + z(x - \gamma), \end{cases}$$

où (x, y, z) est le vecteur d'état et α, β, γ sont des constantes (paramètres de bifurcation) tel que : $\alpha = 0.2$ et $\beta = 0.2$ et $\gamma = 5.7$ sont fixes. Avec les conditions initiales $x(0) = y(0) = z(0) = 0.01$.

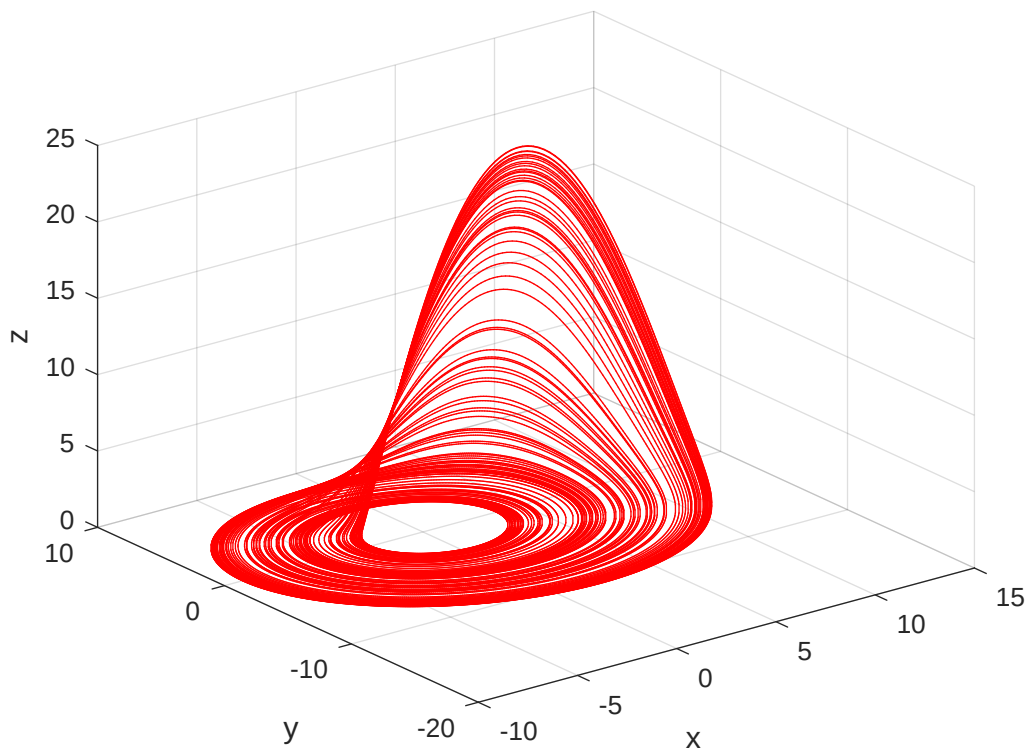


FIGURE 1.9 – Attracteur étrange de Rossler.

1.7.1 Routes vers le chaotique

1. L'intermittence vers le chaos :

Ce scénario via les intermittences se caractérise par l'apparition erratique de bouffées chaotique dans un système qui oscille de manière régulière.

Le système conserve pendant un certain laps de temps un régime périodique, et

il se déstabilise pour donner lieu à une sorte d'explosion chaotique, il se stabilise de nouveau en suite pour donner une nouvelle bouffée.

2. Le doublement de période :

Ce scénario de transition vers le chaos est sans doute le plus connu par augmentation du paramètre de contrôle de l'expérience, la fréquence du régime périodique double puis est multipliée par 2, 8, 16 ,...

Les doublements étant de plus en plus rapprochés, on tend vers un point d'accumulation auquel on obtiendrait hypothétiquement une fréquence infinie, c'est à ce moment que le système devient chaotique.

3. La quasi-périodicité :

Ce troisième scénario fait intervenir pour un système périodique l'apparition d'une autre période dont le rapport avec la première n'est pas rationnel.

1.7.2 Exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov permettant de caractériser le chaos temporel et plus particulièrement la sensibilité aux conditions initiales que peut présenter la divergence de trajectoire sur l'attracteur étrange est rapide. Pour cette raison on essaie si c'est possible de mesurer la quantité est appelée "Exposant de Lyapunov" qui caractérise le taux de divergence entre l'évolution de trajectoire issues de conditions initiales proches au sein de cet espace borné qu'est l'attracteur étrange, qui est souvent utilisé pour déterminer si un système est chaotique ou non.

1. Cas d'une application unidimensionnelle :

Soit f une application discrète de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivant :

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad (1.10)$$

tel que : k itérations, il existe un réel λ et soit deux points initiaux x_0 et $x_0 + \varepsilon$ l'exposant de Lyapunov $\lambda(x_0)$ est défini par l'équation :

$$\varepsilon e^{k\lambda(x_0)} = |f^k(x_0 + \varepsilon) - f^k(x_0)|,$$

où

$$k\lambda(x_0) = \ln \frac{|f^k(x_0 + \varepsilon) - f^k(x_0)|}{\varepsilon},$$

et pour $\varepsilon \rightarrow 0$ et $k \rightarrow \infty$ on :

$$\begin{aligned}\lambda(x_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k} \ln \frac{|f^k(x_0 + \varepsilon) - f^k(x_0)|}{\varepsilon}, \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left| \frac{df^k(x_0)}{dx_0} \right|.\end{aligned}$$

Notons $x_i = f^i(x_0)$ et rappelons que $f^k(x_0) = f(f^{k-1}(x_0))$, nous en déduisons, par la règle de la chaîne :

$$\frac{df^k(x_0)}{dx_0} = f'(x_{k-1})f'(x_{k-2})\dots f'(x_1)f'(x_0).$$

Par conséquent, l'équation précédente s'écrit :

$$\lambda(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln |f'(x_i)|,$$

λ est appelé exposant de Lyapunov il indique le taux moyen de divergence.

- Si $\lambda > 0$ alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.
- Si $\lambda < 0$ les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

2. Cas d'une application à multidimensionnelle :

On a les trajectoires multidimensionnelle du type :

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x_{k+1} &= f(x_k).\end{aligned}$$

Pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'il existe au moins λ est positif et leurs somme est négative. Un attracteur étrange possède toujours au moins trois λ , il est admet un au moins positif.

- Tel que : λ est exposant de Lyapunov.

Soient $A(x)$ la matrice jacobienne de f ; les valeurs propres de $A(f^k(x))$ sont $\Lambda_i(f^k(x))$ tel que : $i = 1 \dots m$. Ordonnées dans l'ordre décroissant suivant leur module. Alors les m exposants de Lyapunov orbite $f^k(x), k = 0, 1, 2, \dots$, sont définies par :

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \ln |\Lambda_i(f^N(x))| \right); \quad i = 1, \dots, m.$$

3. Cas d'un système différentiel :

Soit le système d'équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \dot{x} &= f(x). \end{aligned}$$

L'exposant de Lyapunov dans la direction j donné par ϑ_j :

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\vartheta_j(t)\|}{\|\vartheta_j(t_0)\|}; \quad j = 1, \dots, m.$$

$A(x)$ est la matrice jacobienne de f au point x , avec les vecteurs $\vartheta_j(t)$ se transforment d'après la formule :

$$\dot{\vartheta}_j(t) = A(x)\vartheta_j(t); \quad j = 1, \dots, m.$$

Les vecteurs $\vartheta_j; j = 1, \dots, m$ sont définis par :

$$\begin{aligned} \vartheta_1(t) &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ \vartheta_2(t) &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \vartheta_m(t) &= (0, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Pour éviter la divergence, à chaque itération, les vecteurs $\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)$ seront ortho-normés par le procédé de Gram-Schmidt :

$$\begin{aligned}\vartheta'_1 &= \frac{\vartheta_1}{\|\vartheta_1\|}, \\ \vartheta'_2 &= \frac{\vartheta_2 - (\vartheta_2, \vartheta'_1)\vartheta'_1}{\|\vartheta_2 - (\vartheta_2, \vartheta'_1)\vartheta'_1\|}, \\ &\vdots \\ \vartheta'_m &= \frac{\vartheta_m - (\vartheta_m, \vartheta'_{m-1})\vartheta'_{m-1} - \dots - (\vartheta_m, \vartheta'_1)\vartheta'_1}{\|\vartheta_m - (\vartheta_m, \vartheta'_{m-1})\vartheta'_{m-1} - \dots - (\vartheta_m, \vartheta'_1)\vartheta'_1\|}.\end{aligned}$$

1.8 Dimensions fractales des attracteurs étranges

Une dimension fractionnaire (fractale) est une simple extension de ce que l'on conçoit dans un espace à 3 dimension, il existe plusieurs définition pour la dimension fractale, ceux qui définissent la dimension d'un ensemble, cet ensemble peut être un sous ensemble d'un espace métrique quelconque, un attracteur ou non.

Habituellement on dit qu'on définit la dimension fractale d'un attracteur, il existe plusieurs type de dimension pour les attracteurs chaotique parmi celle ci [2] :

a. Dimension de Mori

Soient m_0 le nombre des exposants de Lyapunov qui sont nuls, m_+ le nombre d'exposants positifs, $\bar{\lambda}_+$ la moyenne des exposants positifs, $\bar{\lambda}_-$ la moyenne des exposants négatifs.

La dimension de Mori est donnée par la relation suivante :

$$D_{M_0} = m_0 + m_+ \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_+}{|\bar{\lambda}_-|} \right).$$

b. Dimension de Kaplan et Yorke

La dimension de Kaplan et Yorke défini par la relation :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|}.$$

où j_0 un entier positif qui satisfait :

$$\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i < 0.$$

Etat stable	Attracteur	Dimension	Exposants de Lyapunov
Point d'équilibre	Point	0	$\lambda_m \leq \dots \leq \lambda_1 < 0$
Périodique	Cercle	1	$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_m \leq \dots \leq \lambda_2 < 0$
Période d'ordre 1	Tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_m \leq \dots \leq \lambda_3 < 0$
Période d'ordre K	K-Tore	k	$\lambda_1 = \dots = \lambda_K = 0, \quad \lambda_m \leq \dots < \lambda_{K+1} < 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$
Hyper chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$

TABLE 1.1 – Exposants de Lyapunov et Dimensions.

CHAPITRE 2

THÉORIE DU CONTRÔLE

En mathématiques, le contrôle désigne la théorie qui vise à comprendre la façon dont une commande permet aux humains d'agir sur un système qu'ils souhaitent maîtriser. Cette définition recouvre naturellement de très nombreux champs d'applications ; un ingénieur pourra vouloir contrôler un système mécanique en lui appliquant des forces.....

La théorie du contrôle est une branche de la théorie des systèmes qui a pour objet l'étude du comportement des systèmes dynamiques, le but étant alors d'amener le système d'un état initial à un état final, en respectant un certain cahier des charges (stabilité, rapidité, performances).

2.1 Contrôlabilité

Le problème de la contrôlabilité est le suivant :
étant donnés deux états $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ existe-t-il un temps T et un contrôle admissible u tel que la trajectoire $x_u(t)$ associée à ce contrôle joigne $x_0 = x(0)$ à $x_1 = x(T)$? c'est le problème de contrôlabilité.

2.1.1 Système de Contrôle

Un système de contrôle est un système dynamique différentiel dépendant d'un paramètre appelé contrôle de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)); \quad x(t) \in H, \quad u(t) \in V. \quad (2.1)$$

telle que H est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $x(t)$ est un vecteur des états appartient à une variété différentielle H et $u(t)$ le contrôle appartiennent à un ensemble de contrôles admissibles V , qui est un ensemble de fonctions localement intégrables définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^m$.

On suppose que f est le champ du vecteur est suffisamment régulier de sorte que pour toute condition initiale $x_0 \in H$ et tout contrôle admissible $u(.) \in V$. Le système (2.1) admet une solution unique $x(t)$ avec $x(0) = x_0$. On notera cette solution $x(t, x_0, u(0))$ est définie sur $[0, +\infty[$.

Définition 2.1.1. [14].

Soit $A \in C_m^0(M_n(\mathbb{R}), [0, T])$ et $B \in C_m^0(M_{n,m}(\mathbb{R}), [0, T])$, et la condition initiale x_0 dans $H = \mathbb{R}^n$ d'un état $x(t)$. La fonction $u \in L^2(0, T; U)$ est appelée contrôle du système (2.2). En déduire un système de contrôle défini sur $[0, T]$, tel que $T > 0$ on a :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

la solution de système du contrôle dépend de la donnée initiale et du second membre et peut s'exprimer par la formule :

$$x(t, x_0, u) = F(t, 0)x_0 + \int_0^t F(t, s)B(s)u(s)ds, \quad t \in [0, T].$$

Où F est la matrice résolvante du système :

$$\begin{cases} \frac{dF}{dt}(t, s) &= A(t)F(t, s), \\ F(s, s) &= I. \end{cases}$$

Définition 2.1.2. [14].

On dira que le Contrôle u transfère un état " b " à un état " c " au temps $T > 0$ si :

$$x(T; b, u) = c.$$

On dit aussi que l'état " c " est atteignable à partir de " b " au temps T .

Définition 2.1.3. [14].

Si pour tout $b \in H$ et tout $c \in H$, il existe une fonction de contrôle $u \in L^2(0, T; U)$, telle que :

$$x(T; b, u) = c.$$

Donc le système (2.2) est contrôlable au temps $T > 0$, on dit aussi que la paire (A, B) est

contrôlable au temps $T > 0$.

Considérons sur $(0, T)$ le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) &= 0, \end{cases}$$

la solution peut s'écrire pour tout $t \in [0, T]$:

$$x(t, u) = L_t u,$$

où L_t est l'opérateur linéaire borné défini par :

$$L_t : \begin{cases} L^2(0, t; U) &\rightarrow H, \\ u &\rightarrow \int_0^t F(t, s)B(s)u(s)ds. \end{cases}$$

Proposition 2.1.1. Le système (2.2) est contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si l'opérateur L_T est surjectif.

Preuve 2.1.1. Soit $b, c \in H$ deux états quelconques, l'équation en u suivant :

$$x(T, b, u) = c, \tag{2.3}$$

b une solution dans $L^2(0, T; U)$ si et seulement si l'équation :

$$L_T u = c - F(T, 0)b, \tag{2.4}$$

b une solution dans $L^2(0, T; U)$.

Donc d'après Équivalence des équations (2.3) et (2.4) entraîne la proposition.

• **L'opérateur adjoint de L_T :**

L'opérateur adjoint de L_T est défini par :

$$L_T^* : \begin{cases} H &\rightarrow L^2(0, T; U), \\ y &\rightarrow L_T^* y = v, \end{cases}$$

où v est défini par :

$$\langle L_T^* y, u \rangle = (y, L_T u); \quad \forall u \in L^2(0, T; U), \forall y \in H.$$

Où $\langle, \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(0, T; U)$ et $(,)$ désigne le produit scalaire dans H .

On a :

$$\begin{aligned}
 (y, L_T u) &= \left(y, \int_0^T F(T, s) B(s) u(s) ds \right) \\
 &= \int_0^T (y, F(T, s) B(s) u(s)) ds \\
 &= \int_0^T (B^*(s) F^*(T, s) y, u(s)) ds \\
 &= \langle B^*(\cdot) F^*(T, \cdot) y, u(\cdot) \rangle,
 \end{aligned}$$

où $B^*(t)$ (resp : $F^*(t, s)$) est la matrice adjointe de $B(t)$ (resp : $F(t, s)$). Alors :

$$L_T^* = B^*(\cdot) F^*(T, \cdot).$$

D'abord on calcule $F^*(T, s)y = w(s)$ qui est, par définition de F^* .

La solution du système différentiel :

$$\begin{cases} w' &= -A^*(s)w, & s \in (0, T), \\ w(T) &= y. \end{cases}$$

Ainsi :

$$v = L_T^* y \Leftrightarrow \begin{cases} v = B^*(\cdot)w & (0, T), \\ \begin{cases} w' &= -A^*(s)w, & s \in (0, T), \\ w(T) &= y. \end{cases} \end{cases}$$

2.1.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Les théorèmes d'existence de solutions d'équation différentielle nous assurent que, pour tout contrôle u l'existence sur I d'une unique solution $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de système (2.2) absolument continue tel que :

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^t F(t)F^{-1}(s)(B(s)u(s))ds,$$

pour tout $t \in I$, où $F(t) \in F_n(\mathbb{R})$ et la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, définie par :

$$\begin{cases} \dot{F}(t) &= A(t)F(t), \\ F(0) &= Id. \end{cases}$$

Définition 2.1.4. [15] (*Ensemble accessible*)

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $T > 0$ est défini par :

$$\text{Acc}(x_0, T) = \{x_u(T) | u \in L^\infty([0, T], U)\}.$$

Où $x_u(\cdot)$ est la solution associée au contrôle u du système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Autrement dit $\text{Acc}(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (2.5) au temps T .

Définition 2.1.5. [15] (La contrôlabilité)

Le système contrôlé $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ est dit contrôlable en temps T si $\text{Acc}(x_0, T) = \mathbb{R}^n$. i.e. pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps T .

2.1.3 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Le critère de Kalman

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t .

Théorème 2.1.1. [15]

Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est contrôlable en temps T si et seulement si :

$$\text{rang} C = \text{rang}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n. \quad (2.6)$$

La matrice C d'ordre $n \times nm$ est appelée matrice de Kalman, et la condition $\text{rang} C = n$ est appelée condition de Kalman.

Remarque 2.1.1. La condition de Kalman dépend de A et B mais pas de $T > 0$. Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

2.1.4 Contrôlabilité des systèmes linéaires non-autonomes

Théorème 2.1.2. Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.7)$$

avec les application $A \in C^{n-2}(M_n(\mathbb{R}), [0, T])$ et $B \in C^{n-1}(M_{n,m}(\mathbb{R}), [0, T])$. Définissons par récurrence :

$$B_0(t) = B(t) \text{ et } B_{k+1}(t) = A(t)B_k(t) - \frac{dB_k(t)}{dt}.$$

– Si il existe un intervalle $[a, b] \subset [0, T]$ ($a < b$) tel que :

$$\text{rang} C(t) = \text{rang}[B_0(t), B_1(t), \dots, B_{n-1}(t)] = n; \quad t \in [a, b].$$

Alors le système de contrôle (2.7) est contrôlable sur $[0, T]$.

2.1.5 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Soit le système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Définition 2.1.6. On dit que le système non linéaire est contrôlable en temps $T > 0$ si :

$$\text{Acc}(x_0, T) = \mathbb{R}^n.$$

Théorème 2.1.3. [16]

Supposons qu'il existe $u_0 \in \mathbb{R}^m$ et $f(x_0, u_0) = 0$. On note

$$A = \frac{df}{dx}(x_0, u_0) \quad \text{et} \quad B = \frac{df}{du}(x_0, u_0).$$

Si $\text{rang}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n$.

Alors le système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ est contrôlable donc le système non linéaire (2.8) est localement contrôlable en x_0 .

Notre que la contrôlabilité du linéarisé n'est pas une condition nécessaire de contrôlabilité du système non linéaire.

En fait pour les systèmes non linéaires, il existe un critère simple rappelant le critère de Kalman, qui permet d'abord questions de contrôlabilité.

2.2 Stabilisation des systèmes de contrôle

2.2.1 Stabilisation des systèmes linéaires

Définition 2.2.1. [17]

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, A \in M_n(\mathbb{R}), B \in M_{n,m}(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (2.9)$$

Est dit stabilisable par retour d'état linéaire (feedback), s'il existe $K \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ tel que le système par le feedback $u(t) = Kx(t)$ i.e :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t).$$

Soit asymptotiquement stable, i.e :

$$\forall \lambda \in \text{Spec}(A + BK), \quad \text{Re}(\lambda) < 0.$$

Théorème 2.2.1. [17] (Théorème de placement de pôles, pole-shifting théorème)

Si le paire (A, B) satisfait la condition de Kalman ($\text{rang}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n$), alors pour tout polynôme réel P unitaire de degré n , il existe $K \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ tel que le polynôme caractéristique de $A + BK$ est égale à P .

Corollaire 2.2.1. [16]

Si le système de contrôle (2.9) est contrôlable alors il est stabilisable.

Exemple :

Soit le système écrit par l'équation :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons $n = 2$ états et $m = 2$. Ce système est-il contrôlable et stabilisable ?

on a :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et la matrice de contrôlabilité du système est :

$$C = [B, AB] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et on a $\det C = 1 \neq 0$. Alors $\text{rang} C = 2$ donc le système est contrôlable.

Par conséquence le système est stabilisable.

2.2.2 Stabilisation des systèmes non linéaires

Considérons le système de contrôle non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

et soit $(x_\varepsilon, u_\varepsilon)$ un point d'équilibre pour lequel $f(x_\varepsilon, u_\varepsilon) = 0$. Le système linéarisé en ce point est :

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bv(t),$$

où

$$A = \frac{df}{dx}(x_\varepsilon, u_\varepsilon) \quad \text{et} \quad B = \frac{df}{du}(x_\varepsilon, u_\varepsilon).$$

Théorème 2.2.2. [17]

Si le système linéarisé est stabilisable par le feedback $v = Ky$ alors $(x_\varepsilon, u_\varepsilon)$ est localement asymptotiquement stable pour le système bouclé :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), K(x(t) - x_\varepsilon) + u_\varepsilon).$$

CHAPITRE 3

CONTRÔLE ADAPTATIF DU CHAOS DANS LE CIRCUIT DE CHUA

3.1 Introduction

Au cours des dernières décennies, beaucoup d'efforts ont été consacrés à l'étude des systèmes chaotiques non linéaires. Alors que de plus en plus de connaissances sont acquises sur la nature du chaos, les intérêts récents se concentrent désormais sur le contrôle d'un système chaotique, c'est-à-dire amener l'état chaotique à un point d'équilibre ou à un petit cycle limite.

Après le travail de pionnier sur le contrôle du chaos, il y a eu de nombreuses autres tentatives pour contrôler les systèmes chaotiques. Ces tentatives peuvent être classées en deux flux principaux : le premier est la perturbation des paramètres, et le second est le contrôle adaptatif sur un système chaotique original.

En 1983, l'ingénieur **Leon Ong Chua** a mis au point le plus simple circuit électronique [18], et le circuit de Chua a été étudié de manière approfondie en tant que système électronique prototypique. **Chen et Dong** [19] ont appliqué le contrôle de rétroaction linéaire pour guider la trajectoire chaotique du système de circuits à un cycle limite. **Hwang et al** [20] a proposé un contrôle de rétroaction sur un circuit modifié de Chua pour faire glisser la trajectoire chaotique vers ses points fixes. **He et al** [21] a proposé un contrôle de suivi adaptatif pour une classe de systèmes chaotiques de Chua. Dans le même temps, la technologie de contrôle adaptatif pour les systèmes de chaos a connu des développements rapides.

Pour réaliser une étude de contrôle du système de Chua, il existe de nombreuses façons de trouver des lois pour contrôler afin de déterminer la stabilité. Dans ce chapitre, nous étudions et expliquons les propriétés de base du système de Chua, qui est un simple système autonome 3D. Nous dérivons ensuite la loi de contrôle adaptatif pour prouver la stabilité asymptotique avec la théorie de Lyapunov, et le système peut être entraîné vers l'un des ses trois points d'équilibre instables.

3.2 Système de Chua

3.2.1 Modélisation du circuit de Chua

Le circuit de Chua est un système électronique non linéaire, qu'affiche des phénomènes de bifurcation et de chaos. De ce fait, on l'a utilisé pour sécuriser les communications.

Ce circuit électronique respecte certaines conditions pour montrer un comportement chaotique, appelés critères chaotiques, montrés à la figure (3.1). Il doit contenir :

- Une inductance L .
- Deux condensateurs (capacités) C_1 et C_2 .
- Une résistance linéaire R et une résistance non linéaire N_L appelée diode de Chua.

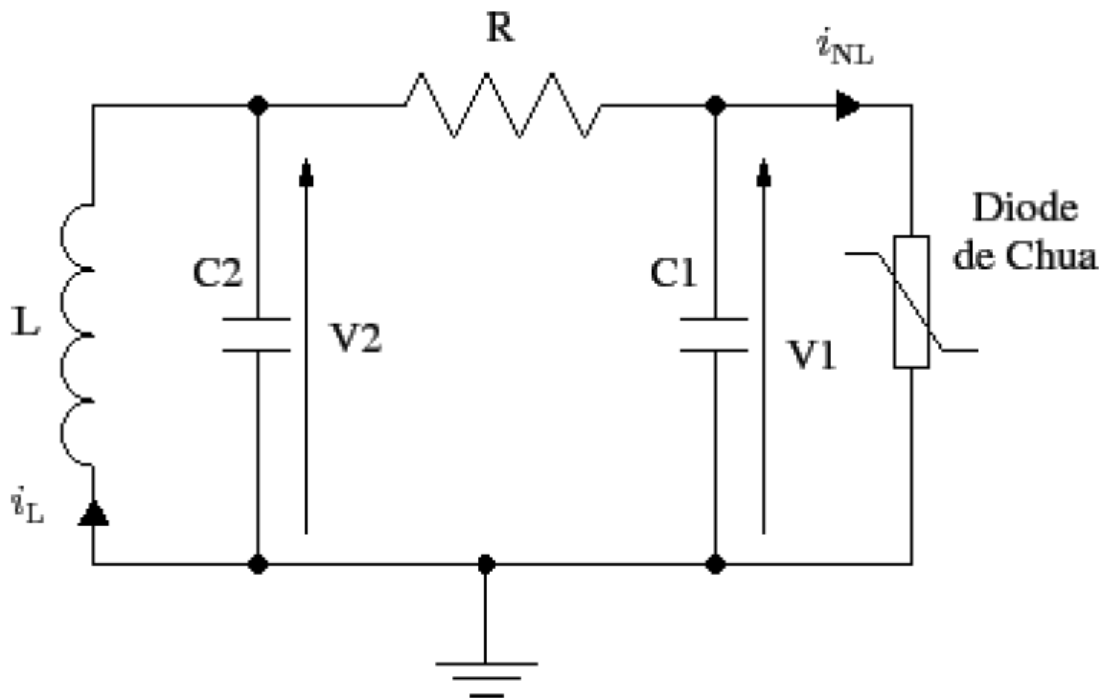


FIGURE 3.1 – Le circuit de Chua.

3.2.2 Etude de la diode de Chua

Il y a plusieurs exemples des résistances non linéaires utilisés dans ce circuit, mais elles ont toutes la même fonction courant tension. Bien que la fonction $h(v_1)$ soit en fonction de la tension aux bornes de la résistance non linéaire N_L , que présente la caractéristique volt-ampère suivant :

$$G = \frac{1}{R} = \frac{i}{u} = \begin{cases} m_1, & |u| < E, \\ m_0, & |u| > E, \end{cases} \quad (3.1)$$

où, u et i respectivement, sont la tension aux bornes de N_L et le courant passant par N_L et E une constante positive. La caractéristique de N_L est illustrée à la figure (3.2).

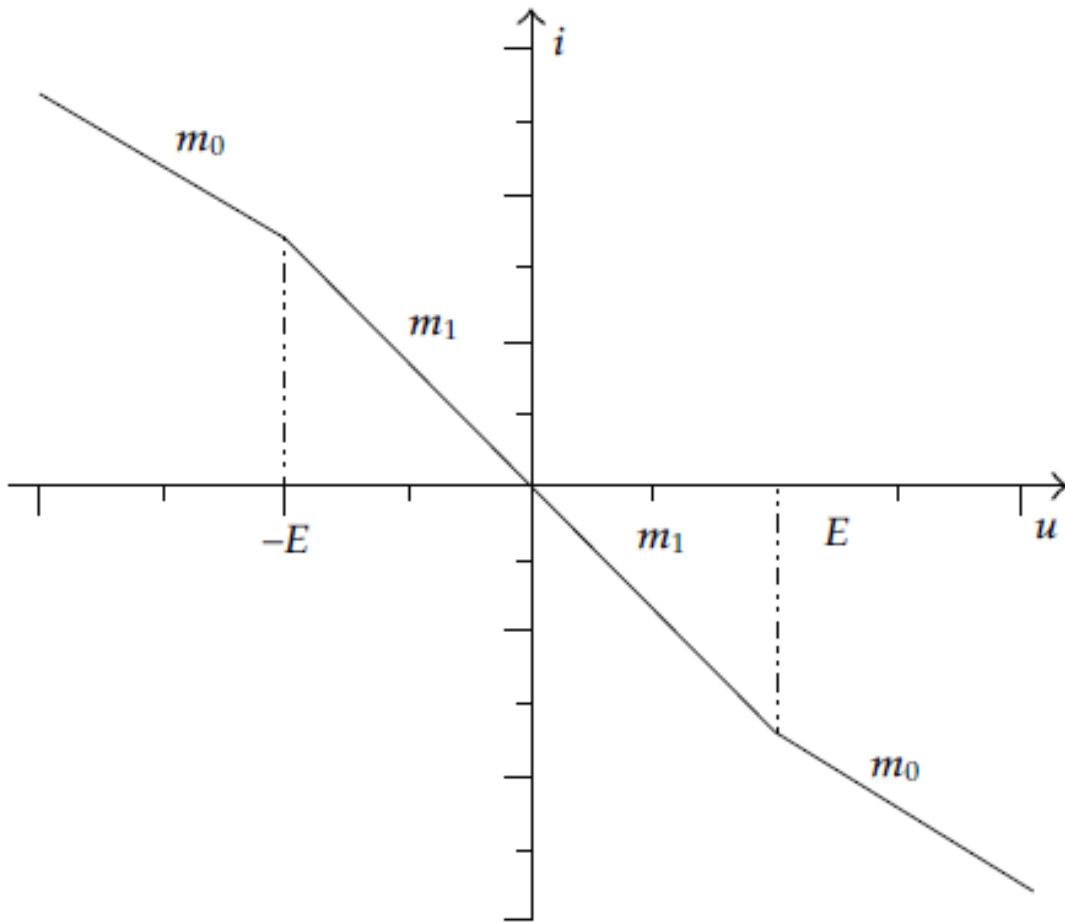


FIGURE 3.2 – Représentation de la fonction non linéaire $i_{N_L} = h(v_1)$.

Cette fonction non linéaire est donnée par la formule suivante :

$$i_{N_L} = h(v_1) = \begin{cases} m_0 v_1 + E(m_1 - m_0), & v_1 > E, \\ m_1 v_1, & |v_1| \leq E, \\ m_0 v_1 - E(m_1 - m_0), & v_1 < -E. \end{cases} \quad (3.2)$$

D'après la loi de Kirchoff :

$$\sum I_{\text{entrée}} = \sum I_{\text{sortie}} \quad (\text{la loi des nœuds}).$$

Où :

$$\begin{cases} i_L &= i_{c_2} + i_R, \\ i_R &= i_{c_1} + i_{N_L}. \end{cases}$$

Donc l'étude du comportement du circuit revient à étudier la variation de ces grandeurs. On obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} i_{C_1} &= C_1 \frac{dv_1}{dt}, \\ i_{C_2} &= C_2 \frac{dv_2}{dt}. \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} i_{C_1} &= \frac{(v_2 - v_1)}{R} - h(v_1), \\ i_{C_2} &= \frac{(v_1 - v_2)}{R} + i_L. \end{cases}$$

La tension aux bornes de l'inductance est donnée comme suit :

$$v_L = -v_{c_2} \Rightarrow L \frac{di_L}{dt} = -v_2.$$

Donc la dynamique des systèmes de circuit de Chua peut être obtenue par les trois équations données par :

$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{(v_2 - v_1)}{R} - h(v_1), \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{(v_1 - v_2)}{R} + i_L, \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_2, \end{cases} \quad (3.3)$$

où v_1 et v_2 sont les tension aux bornes de C_1 et C_2 , respectivement, et i_L est le courant traversant l'inductance L .

Afin de simplifier la notation, on pose $x = v_1, y = v_2, z = Ri_L$.

D'où, le circuit de Chua peut être représenté par l'ensemble des équations non linéaires

suivantes :

$$\begin{cases} C_1 \frac{dx}{dt} = \frac{(y-x)}{R} - h(x), \\ C_2 \frac{dy}{dt} = \frac{(x-y)}{R} + \frac{z}{R}, \\ \frac{L}{R} \frac{dz}{dt} = -y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{RC_1}(y-x) - \frac{h(x)}{C_1}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{RC_2}(x-y+z), \\ \frac{dz}{dt} = -\frac{R}{L}y. \end{cases}$$

Lors de l'intégration du système, la variable temporelle est en fonction du paramètre de chargement du condensateur C_2 . On obtient les formules suivant :

$$\begin{cases} RC_2 \frac{dx}{dt} = \frac{C_2}{C_1}(y-x - Rh(x)), \\ RC_2 \frac{dy}{dt} = x-y+z, \\ RC_2 \frac{dz}{dt} = -\frac{R^2 C_2}{L}y. \end{cases}$$

On pose $p = \frac{C_2}{C_1}$, $q = \frac{R^2 C_2}{L}$, $a = m_1 R$, $b = m_0 R$, et $\tau = \frac{t}{RC_2}$.

Le modèle de système du circuit de Chua devient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = p(y-x-f(x)), \\ \frac{dy}{d\tau} = x-y+z, \\ \frac{dz}{d\tau} = -qy, \end{cases} \quad (3.4)$$

où la différentiel est par rapport à la variable τ et $f(x)$ est fonction non linéaire comme :

$$f(x) = \begin{cases} bx + E(a-b), & x > E, \\ ax, & |x| \leq E, \\ bx - E(a-b), & x < -E. \end{cases} \quad (3.5)$$

Attracteur du circuit de Chua :

Pour tracé les attracteurs étranges de système du circuit de Chua (3.4), nous avons pris les valeurs des paramètres comme $p = 10$, $q = \frac{100}{7}$, $a = \frac{-8}{7}$ et $b = \frac{-5}{7}$ avec les conditions initiales comme $x(0) = 0.7$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 0$ on ajoute dans les équations (3.4) le système de Chua montre un comportement chaotique.

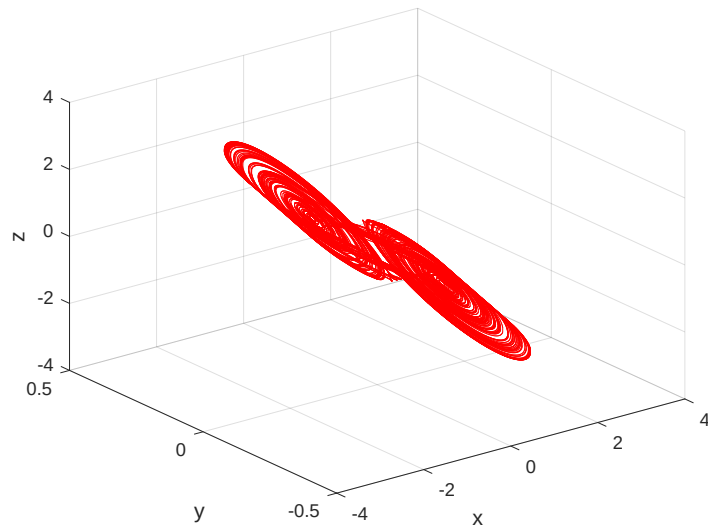


FIGURE 3.3 – L'attracteur chaotique du système de Chua dans 3-D.

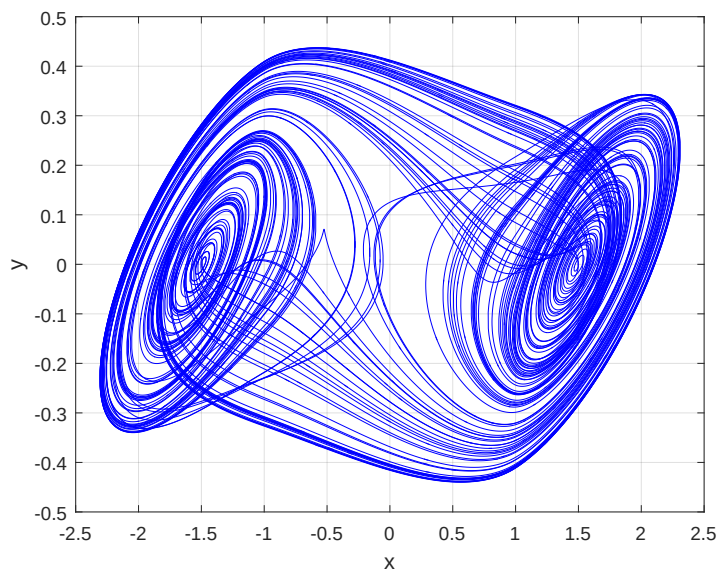


FIGURE 3.4 – Projection 2-D du système de Chua sur un plan (x, y) .

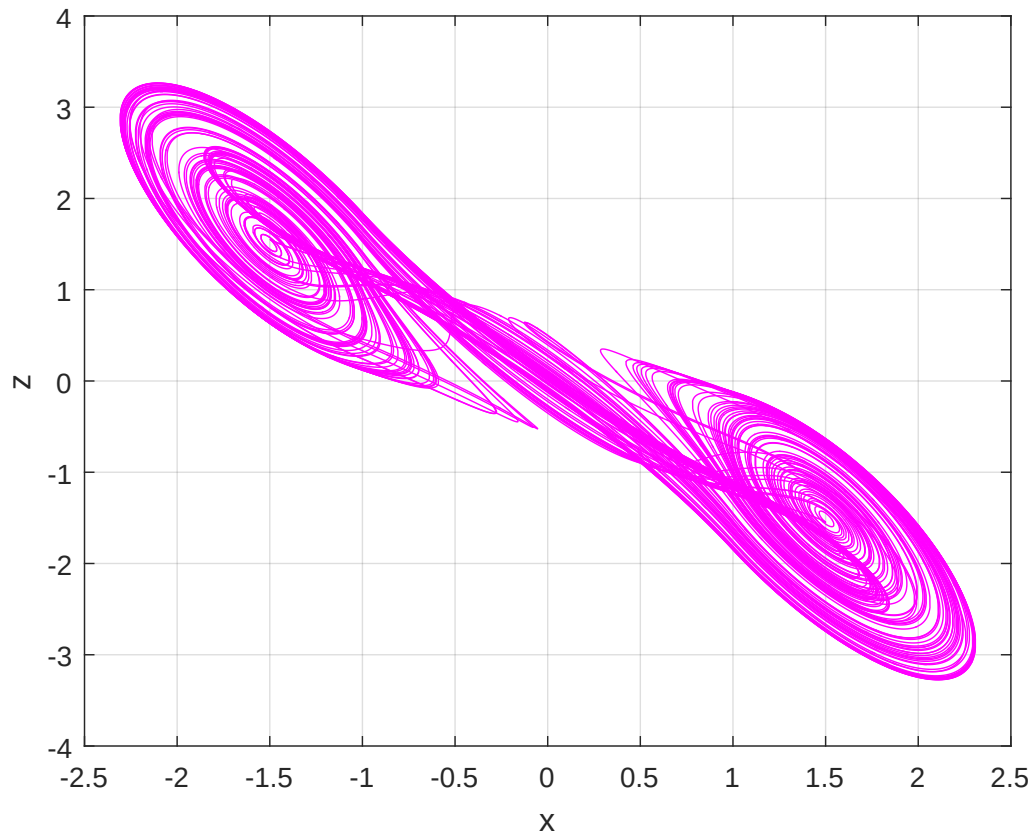


FIGURE 3.5 – Projection 2-D du système de Chua sur un plan (x, z) .

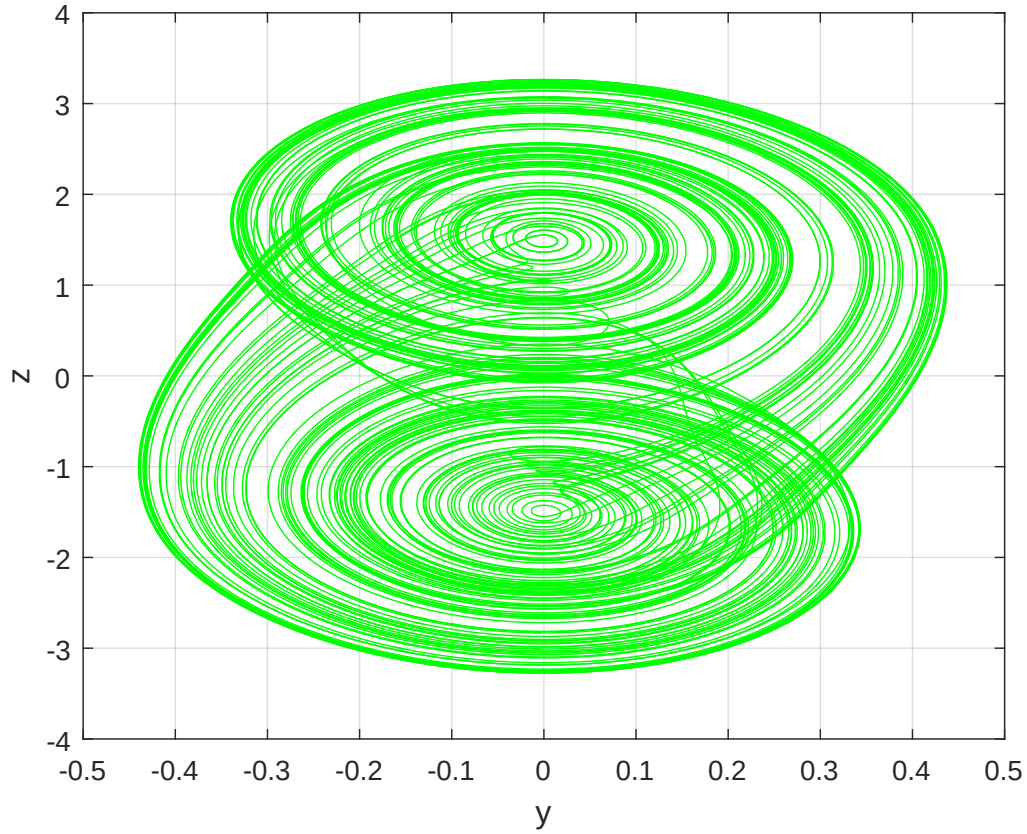


FIGURE 3.6 – Projection 2-D du système de Chua sur un plan (y,z) .

Théorème 3.2.1. [22] Pour le système de circuit de Chua décrit par (3.4) et (3.5), son premier exposant Lyapunov est un nombre réel positif, c'est-à-dire que la trajectoire du système a des comportements chaotiques.

3.3 Propriétés du système de Chua

3.3.1 Calcul les points d'équilibres

Pour calcul les points d'équilibres de système du Chua (3.4), on pose $E = 1$ et résoudre le système suivante :

$$\begin{cases} p(y - x - f(x)) = 0, & (3.6) \\ x - y + z = 0, & (3.7) \\ -qy = 0, & (3.8) \end{cases}$$

avec :

$$f(x) = \begin{cases} bx + a - b, & x > 1, \\ ax, & |x| \leq 1, \\ bx - a + b, & x < -1. \end{cases}$$

De la relation (3.8) nous trouvons :

$$y = 0.$$

On remplace y dans (3.7) et (3.6) on a :

$$z = -x,$$

et

$$p(-x - f(x)) = 0.$$

- Si $x > 1$:

$$\begin{aligned} p(x(-1 - b) - a + b) = 0 & \implies x(-1 - b) - a + b = 0, \\ & \implies x = \frac{b - a}{1 + b}, \end{aligned}$$

$$\text{on pose : } c = \frac{b - a}{1 + b}.$$

Donc le point d'équilibre est : $(c, 0, -c)$.

- Si $|x| \leq 1$:

$$\begin{aligned} p(x(-1 - a)) = 0 & \implies x(-1 - a) = 0, \\ & \implies \begin{cases} x = 0, \\ \text{ou} \\ -1 - a = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

* Si $x = 0 \implies z = 0, y = 0$.

* Si $-1 - a = 0 \implies a = -1$ (rejetée).

Donc le point d'équilibre est : $(0, 0, 0)$.

- Si $x < -1$:

$$\begin{aligned} p(x(-1 - b) + a - b) = 0 & \implies x(-1 - b) + a - b = 0, \\ & \implies x = -\frac{b - a}{1 + b} = -c. \end{aligned}$$

Donc le point d'équilibre est : $(-c, 0, c)$.

Par conséquence il y a trois points d'équilibre : $E_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ -c \end{bmatrix}, E_3 \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{bmatrix}.$

3.3.2 Stabilité des points d'équilibre

La matrice jacobienne du système (3.4) en x est donnée par :

$$J(x) = \begin{bmatrix} -p(m+1) & p & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -q & 0 \end{bmatrix},$$

avec :

$$m = \begin{cases} a, & |x| \leq 1, \\ b, & |x| > 1. \end{cases}$$

Stabilité de l'origine

La matrice jacobienne chez E_1 est donne par :

$$J_1 = \begin{bmatrix} -p(a+1) & p & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -q & 0 \end{bmatrix},$$

nous considérons les paramétrés suivants : $p = 10, q = \frac{100}{7}, a = \frac{-8}{7}$ alors la matrice Jacobienne est obtenu sous la forme :

$$\begin{aligned}
 J_1 = J(E_1) &= \begin{bmatrix} 1.4286 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -14.2857 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \det(J_1 - \lambda I) \\
 &\Rightarrow P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1.4286 - \lambda & 10 & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & 1 \\ 0 & -14.2857 & -\lambda \end{vmatrix} \\
 &\Rightarrow P(\lambda) = (1.4286 - \lambda) \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ -14.2857 & -\lambda \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

donc :

$$P(\lambda) = -(\lambda^3 - 0.4286\lambda^2 + 2.8571\lambda - 20.4086).$$

On pose $A = -0.4286, B = 2.8571, C = -20.4086$.

D'après le critère de Routh-Hurwitz on a :

$$\begin{cases} A = -0.4286 < 0, \\ C = -20.4086 < 0, \\ AB - C = 19.1840 > 0, \end{cases}$$

donc les parties réelles des racines de ce polynôme n'est pas négative, c'est à dire le point d'équilibre E_1 est instable.

Stabilité des deux autres points d'équilibre

La matrice jacobienne chez deux point d'équilibre E_2 et E_3 est donne par :

$$J_2 = J_3 = \begin{bmatrix} -p(b+1) & p & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -q & 0 \end{bmatrix},$$

nous considérons les paramétrés suivants : $p = 10, q = \frac{100}{7}, b = \frac{-5}{7}$ alors la matrice Jacobienne est obtenu sous la forme :

$$J_2 = J(E_2) = J(E_3) = \begin{bmatrix} -2.8571 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.2857 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \det(J_2 - \lambda I)$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \begin{vmatrix} -2.8571 - \lambda & 10 & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & 1 \\ 0 & -14.2857 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = (-2.8571 - \lambda) \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ -14.2857 & -\lambda \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix},$$

donc :

$$P(\lambda) = -(\lambda^3 + 3.8571\lambda^2 + 7.1428\lambda + 40.8157).$$

On pose $A = 3.8571, B = 7.1428, C = 40.8157$.

D'après le critère de Routh-Hurwitz on a :

$$\begin{cases} A = 3.8571 > 0, \\ C = 40.8157 > 0, \\ AB - C = -13.2652 < 0, \end{cases}$$

donc les parties réelles des racines de ce polynôme n'est pas négative, c'est à dire le point d'équilibre E_2 et E_3 est instable.

3.3.3 Dissipativité

En notation vectorielle, on peut exprimer le système (3.4) par :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

où

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = p(y - x(1 + m)), \\ f_2(x, y, z) = x - y + z, \\ f_3(x, y, z) = -qy. \end{cases} \quad (3.10)$$

La divergence du système de circuit de Chua (3.4) est facilement trouvée comme :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}, \\ &= -p(1 + m) - 1 = -(p(1 + m) + 1) = -\mu < 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Où

$$\mu = p(1 + m) + 1 > 0. \quad (3.12)$$

Comme p et m sont des paramètres positifs.

Soit Ω n'importe quelle région de $\mathbb{R}^3$ avec une limite lisse et aussi $\Omega(t) = \Phi_t(\Omega)$, où Φ_t est le flux de f .

De plus, notons $V(t)$ le volume de $\Omega(t)$.

Selon le théorème de Liouville (Green-Ostrogradski)[21], nous avons :

$$\frac{dV}{dt} = \int_{\Omega(t)} (\nabla \cdot f) dx dy dz. \quad (3.13)$$

En substituant (3.11) en (3.13), on obtient le premier ordre ODE :

$$\frac{dV}{dt} = -\mu V(t). \quad (3.14)$$

En intégrant (3.14), nous obtenons la solution unique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{V(t)} dV &= -\mu dt \implies \int \frac{1}{V(t)} dV = \int -\mu dt, \\ &\implies \ln V(t) = -\mu t + v_0, \\ &\implies V(t) = \exp(-\mu t + v_0), \\ &\implies V(t) = \exp(-\mu t) V(0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Puisque $\mu > 0$, il s'ensuit que $V(t) \rightarrow 0$ exponentiellement comme $t \rightarrow \infty$.

Cela montre que le système de Chua (3.4) est dissipatif.

3.3.4 Exposant de Lyapunov et dimension de Kaplan-Yorke

Nous prenons les valeurs des paramètres du système de Chua (3.4) comme dans le cas chaotique ie : $a = \frac{-8}{7}$, $b = \frac{-5}{7}$, $p = 10$, et $q = \frac{100}{7}$.

Nous choisissons les valeurs initiales de l'état comme : $x(0) = 0.7$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

Alors les exposants de Lyapunov du système (3.4) sont obtenus en utilisant MATLAB en tant que :

$$L_1 = 0.2, L_2 \simeq 0, L_3 = -4.3. \quad (3.16)$$

L'eq (3.16) montre que le système (3.4) est chaotique, car il à un exposant de Lyapunov positif L_1 . Puisque la somme de l'exposant de Lyapunov est négatif ($L_1 + L_2 + L_3 = -4.1 < 0$), le système de circuit de Chua (3.4) est un système chaotique dissipatif.

La dimension Kaplan-Yorke du système de Chua (3.4) est calculée comme suit :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} L_i > 0}{|\sum_{i=1}^{j_0+1} L_i < 0|}.$$

D'apre la relation (3.16) $j_0 = 2$.

$$\begin{aligned} D_{KY} &= 2 + \frac{L_1 + L_2}{|L_3|}, \\ D_{KY} &= 2.046 \end{aligned}$$

La dynamique du l'exposant de Lyapunov est représentée sur la figure (3.7).

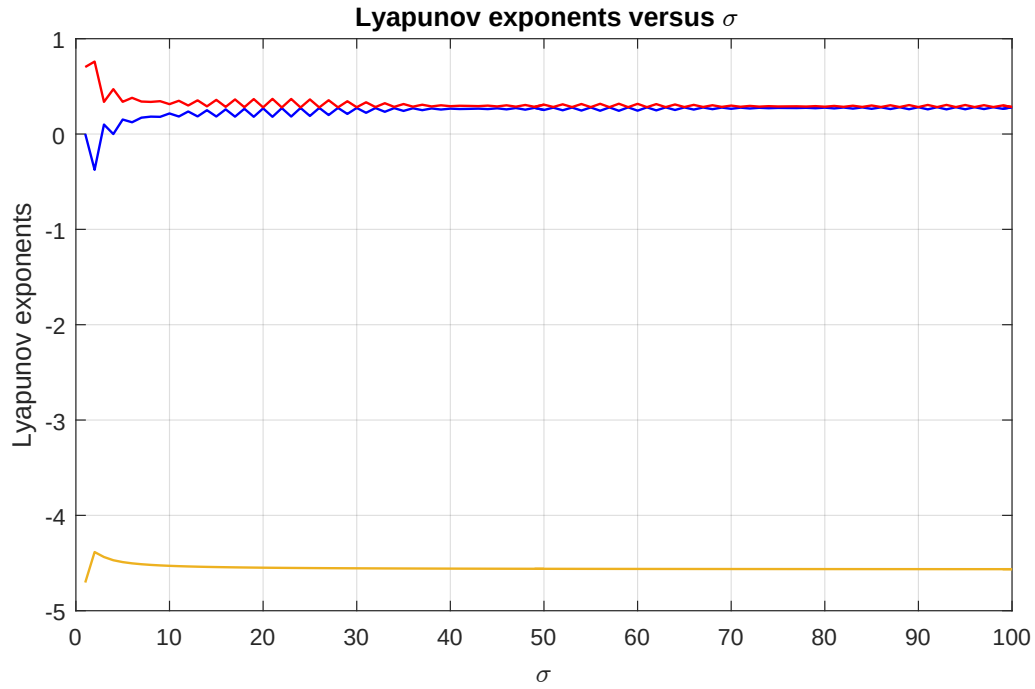


FIGURE 3.7 – Exposant de Lyapunov.

3.4 Contrôle du chaos dans le circuit de Chua

Lorsque le contrôle adaptative est ajoutée au système (3.4), le système de circuit contrôlé de Chua en boucle fermée peut être écrit comme :

$$\begin{cases} \dot{x} = p(y - x - f(x)) + u_1, \\ \dot{y} = x - y + z + u_2, \\ \dot{z} = -qy + u_3, \end{cases} \quad (3.17)$$

où p, q sont des paramètres constants inconnus, et u_1, u_2, u_3 sont des contrôles adaptatifs calculées en fonction des états du système. Il est souhaitable que les contrôles adaptatifs puissent faire glisser la trajectoire chaotique du système de circuits de Chua (3.4) vers l'un de ses trois points d'équilibres instables. C'est-à-dire que les entrées peuvent changer trois points d'équilibres instables du système en boucle ouverte (3.4) en points d'équilibres stables du système de circuits de Chua en boucle fermée (3.17).

3.4.1 Contrôle adaptatif

Dans cette section, nous dérivons une loi de contrôle adaptative pour stabiliser globalement le système du circuit de Chua en boucle fermée (3.17) avec paramètres

système inconnus. La théorie de la stabilité de Lyapunov est appliquée pour établir le résultat principal de cette section.

Nous considérons le contrôle adaptatif définie par :

$$\begin{cases} u_1 &= -\widehat{p}(t)(y - x - f(x)) - k_1x, \\ u_2 &= -x + y - z - k_2y, \\ u_3 &= \widehat{q}(t)y - k_3z, \end{cases} \quad (3.18)$$

où k_1, k_2, k_3 sont des constantes de gain positives et $\widehat{p}(t), \widehat{q}(t)$ sont d'estimation des paramètres inconnus p, q respectivement.

Le système en boucle fermé est obtenu en remplaçant (3.18) par (3.17) comme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= p(y - x - f(x)) - \widehat{p}(t)(y - x - f(x)) - k_1x, \\ \dot{y} &= x - y + z - x + y - z - k_2y, \\ \dot{z} &= -qy + \widehat{q}(t)y - k_3z. \end{cases} \quad (3.19)$$

Alors :

$$\begin{cases} \dot{x} &= (p - \widehat{p}(t))(y - x - f(x)) - k_1x, \\ \dot{y} &= -k_2y, \\ \dot{z} &= -(q - \widehat{q}(t))y - k_3z. \end{cases} \quad (3.20)$$

Nous définissons les erreurs des estimations des paramètres comme suit :

$$\begin{cases} e_1(t) &= (p - \widehat{p}(t)), \\ e_2(t) &= (q - \widehat{q}(t)). \end{cases} \quad (3.21)$$

En différenciant (3.21) par rapport à t , on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) &= -\frac{d\widehat{p}(t)}{dt}, \\ \dot{e}_2(t) &= -\frac{d\widehat{q}(t)}{dt}. \end{cases} \quad (3.22)$$

En utilisant (3.21), nous récrivons le système en boucle fermée (3.20) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} &= e_1(y - x - f(x)) - k_1x, \\ \dot{y} &= -k_2y, \\ \dot{z} &= -e_2y - k_3z. \end{cases} \quad (3.23)$$

Nous considérons la fonction de Lyapunov quadratique donnée par :

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + e_1^2 + e_2^2), \quad (3.24)$$

ce qui est définie positive sur $\mathbb{R}^5$.

Théorème 3.4.1. *Le système de circuit du Chua (3.17) avec paramètres inconnus stabilisés globalement et de manière exponentielle par la loi de contrôle adaptative (3.18) et le paramètre loi de mise à jour (3.27), où k_1, k_2, k_3 sont des constantes positives.*

Preuve 3.4.1. *D'après la théorie de la stabilité de Lyapunov.*

Nous considérons la fonction de Lyapunov quadratique V définie par (3.24), ce qui est positif et défini sur $\mathbb{R}^5$.

En différenciant V le long de la trajectoire de (3.23) et (3.22), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} + e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 \\ &= x(e_1(y - x - f(x)) - k_1x) + y(-k_2y) + z(-e_2y - k_3z) + e_1\left(-\frac{d\widehat{p}(t)}{dt}\right) \\ &\quad + e_2\left(-\frac{d\widehat{q}(t)}{dt}\right) \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1 \left[x(y - x - f(x)) - \frac{d\widehat{p}(t)}{dt} \right] + e_2 \left[-yz - \frac{d\widehat{q}(t)}{dt} \right] \\ &\quad - k_1x^2 - k_2y^2 - k_3z^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pour la dérivé de la fonction de Lyapunov négative nous considérons :

$$\begin{cases} x(y - x - f(x)) - \frac{d\widehat{p}(t)}{dt} = 0, \\ -yz - \frac{d\widehat{q}(t)}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Alors de (3.26), nous prenons la loi de mise à jour des paramètres comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{p}(t)}{dt} = x(y - x - f(x)), \\ \frac{d\widehat{q}(t)}{dt} = -yz. \end{cases} \quad (3.27)$$

Substitution de la loi mise à jour des paramètres (3.27) à (3.25), on obtient $\dot{V}$ comme :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -k_1x^2 - k_2y^2 - k_3z^2, \\ &= -(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2) < 0,\end{aligned}\tag{3.28}$$

puisque k_1, k_2, k_3 sont défini positive et $V > 0$ donc le système (3.17) est asymptotiquement stable.

3.5 Conclusions

L'avantage de l'utilisation du contrôle adaptatif est que l'on peut amener l'état du système loin du mouvement chaotique et dans n'importe quel point d'équilibre souhaité. Dans ce chapitre, nous avons proposé un système de Chua 3-D, les propriétés qualitatives du Chua ont été discutées. L'exposant Lyapunov du système de Chua 3-D a été obtenu au fur et à mesure que la dimension Kalpan-Yorke du système de Chua 3-D a été dérivée car le contrôleur adaptatif pour contrôler le chaos dans le circuit de Chua avec des paramètres inconnus. La théorie de Lyapunov montre que, dans le système en boucle fermée, l'état du système converge asymptotiquement vers le point d'équilibre souhaité.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le contrôle du chaos fait référence à la manipulation du comportement dynamique du système chaotique pour le but la suppression du chaos. Et le travail développe dans le cadre de cette mémoire a en pour objectif l'étude de contrôle adaptatif du chaos dans le circuit de Chua.

Nous avons présenté dans **le première chapitre**, les principales définitions mathématiques relatives aux systèmes dynamiques, notamment des notions préliminaires pour l'analyse du comportement chaotique.

Le deuxième chapitre traite de la théorie du contrôle, qui a pour but de rendre le système insensible à tout inconvénient et d'obtenir ainsi un système stable et ce à travers "les définitions de système de contrôler et la contrôlabilité de système (linéaire et non linéaire)".

La dernière chapitre du travail, c'est une application pour étudier le système du Chua 3-D, nous avons aussi proposé les plus faibles des méthodes de contrôle du système de Chua 3-D par la conception de contrôle adaptative pour objectif la stabilité globale et conduire les trajectoires de système du Chua 3-D à converge vers le point d'équilibre.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. N. Lorenz, Deterministic non-periodic flow. Journal of the Atmospheric Sciences, v. 20, N. 2, (1963), pp. 130–141.
- [2] M. S. Abdelouahab ; les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires, Mémoire de magistère, Université Mentouri-Constantine 1, (2009).
- [3] J. L. Pac ; Systèmes dynamiques : Cours et exercices corrigés, ISBN 978-2-10-074477-0, Dunod, Paris, (2016).
- [4] H. Dang-Vu, C. Delcarte ; Bifurcations et chaos : Introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathématica, Ellipses, (2000).
- [5] M. S. Abdelouahab ; cour théorie de bifurcation et chaos, Centre Universitaire de Mila, (2017).
- [6] T. Menacer ; Synchronisation des systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires, Thèse de Doctorat, Univ Mentouri-Constantine 1, (2014).
- [7] T. Hamaizia ; Systèmes Dynamiques et Chaos "Application à l'optimisation à l'aide d'algorithme chaotique", Thèse pour l'obtention de Doctorat, Université de Constantine, (2003).
- [8] J. P. Françoise ; oscillations en biologie : Analyse qualitative et modèles, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, (2005).
- [9] L. Perko ; Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, (2006).
- [10] C. Benhabib ; Étude d'un système chaotique pour la sécurisation des communications optiques, Mémoire de master, l'Université de Tlemcen, (2014), pp. 5-11.
- [11] M. Ouerdia ; Étude et réalisation d'un système sécurisé à base de système chaotiques, Mémoire de magistère, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, (2013).

- [12] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, et J. A. Vastano ; Determining Lyapunov Exponents from a time Series. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 16, (1985), pp .285-317.
- [13] G. C. Layek ; An introduction to dynamical systems and chaos, Springer, India, (2015).
- [14] A. K. Farid ; Une introduction à la théorie du contrôle, IUFM et Université de Franche-Comté, Septembre (2005).
- [15] E. Trelat ; Controle Optimal : Théorie et Applications, Vuibert, avril (2005).
- [16] C. Lobry, T. Sati ; Une introduction 'a la théorie du contrôle, (2004).
- [17] C. Bennani ; Stabilisation et Estimation de l'état des Systèmes Dynamiques non Linéaires et Applications, Mémoire de magister, Universite mouloud mammeri Tisi-aouzou, (2011).
- [18] L. O. Chua, Komuro, M, Matsumoto, T. (1986). The double scroll family. *IEEE Transactions Circuits and systems*.CAS-33(11), pp. 1073-1118.
- [19] G. Chen, X. Dong ; From Chaos to ordre : perspectives and méthodologies in controlling chaotic nonlinear dynamical system, *International journal of bifurcation and Chaos*, V.3, N. 6, (1993), pp .1363-1369.
- [20] C. C. Hwang, J. Y. Hsieh, and R. S. Lin ; A linear continuous feedback control of Chua's circuit, *Chaos, Solitons and Fractals*, V. 8, N. 9, (1997), pp. 1507-1515.
- [21] N. He, Q. Gao, C. Gong, Y. Feng, and C. Jiang ; Adaptive tracking control for a class of Chua's chaotic systems, in *Proceedings of the Chinese Control and Decision Conference*, (2009), pp. 4241-4243.
- [22] M. A. Ouadah, N. Hamed Khodja ; Étude de la dynamique non linéaire générée par l'association de deux (au plusieurs) générateurs de chaos, Mémoire de master, Université Akli Mohand Oulhadj-Bouira, (2017).
- [23] W. Guo, D. Liu ; Adaptive Control of Chaos in Chua's Circuit, *Institute of Computer Science and Technology, China*, (2011).
- [24] E. BELORIZKY, OUTILS MATHÉMATIQUES, EDP sciences, 2007. ÅÅ.
- [25] V. Sundarapandian, R. Karthikeyan ; Analysis, Control, Synchronization and Lab-view Implementation of a Seven-Term Novel Chaotic System, (2016), pp. 151-174.