



N° Réf :.....

Université Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

EN: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques appliquées

***Sur la stabilisation des systèmes fractionnaires par
l'approche d'une nouvelle extension de la méthode
directe de Lyapunov fractionnaire***

Préparé par

- Sarra BOULOUENINE
- Meryem BOUABDALLAH

Devant le jury :

Labed BOUDJEMAA (M.A.A)	C.U. Abelhafid Boussouf-Mila	Président
Smail KAOUACHE (M.C.B)	C.U. Abelhafid Boussouf-Mila	Rapporteur
Allel MEHAZZEM	C.U. Abelhafid Boussouf-Mila	Examineur

Année Universitaire : 2019/2020



DÉDICACE

Avec les sentiments d'amour et de gratitude je dédie ce modeste travail :

***A mon Père * TOUMI ***, en signe d'amour, de reconnaissance et de gratitude pour tous les soutiens et les sacrifices dont il a fait preuve à mon égard.*

***A ma Mère * AKILA ***, ma raison d'être, ma raison de vivre, la lanterne qui éclaire mon chemin et n'illumine de douceur et d'amour.*

A mes chères frères BILAL, ABD EL WAHED et ABD EL SSAMAD

A tous mes proches de la famille BOULOUDENINE et ATMAN

A tous mes amis sans exception et à tous mes collègues de classe.

****SERRA****

Dédicace

Je dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :

A mes très chers parents, qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffert et sacrifiés pour que je sois heureuse, pour leurs conseils, leur affection et leurs encouragements.

Je vous remercie pour tout vos efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège, et vous bénisse la vie.

A tous les membres de ma famille, ma soeurs "Lamia", et ses enfants "Akram", "Ghofran", "Ramla", amina", et : "KHalida"

A mon frère Youssef, en sign d'amour, de reconnaissance et de gratitude pour tous les soutiens et les sacrifices dont il a fait preuve à mon égard.

A tous mes amis et mes collègues avec qui j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.

A tous ma famille Bouabdallah, et à tous mes proches.

Meryem

Remerciements

*AVANT TOUT JE REMERCIE ALLAH LE TOUT PUISSANT
ET MISÉRICORDIEUX QUI M'A DONNÉ LA FORCE, LA
RÉUSSITE ET LA PATIENCE D'ACCOMPLIR CE MODESTE
TRAVAIL.*

*JE REMERCIE CHALEUREUSEMENT MONSIEUR SMAIL
KOUACHE, MAÎTRE DE CONFÉRENCES À L'UNIVERSITÉ
ABDELHAFID BOUSSOUF DE MILA POUR L'ATTENTION
QU'IL A MANIFESTÉ À MES TRAVAUX
DE RECHERCHES ET POUR M'AVOIR FAIT L'HONNEUR
D'ÊTRE RAPPORTEUR DE CE MÉMOIRE.*

*JE TIENS TOUT D'ABORD À REMERCIER LES MEMBRES DU
JURY QUI ME FONT L'HONNEUR DE PARTICIPER À
L'EXAMEN DE CE TRAVAIL.*

ملخص:

الهدف من هذه المدكرة هو دراسة استقرار الأنظمة ذوات رتب كسرية
باتباع امتداد جديد لطريقة ليابونوف المباشرة.

في الفصل الأول، وفي البداية، نذكر ببعض المفاهيم الأساسية الرئيسية
لحساب التفاضلي والتكامل الكسري. ثم، نكرس بقية هذا الفصل لدراسة
التعاريف الرياضية المختلفة المتعلقة بالاشتقاقات و التكاملات الكسرية
وكذلك بعض خصائصها.

الفصل الثاني، يهدف إلى معالجة مشكلة وجود ووحدانية حلول المعادلات
التفاضلية الكسرية بمفهوم كابوتو بينما نقوم في القسم الثاني من هذا الفصل
بالحل العددي لهذه المعادلات.

الفصل الثالث هو صميم موضوعنا. يتعلق هدف هذا الفصل بشكل أساسي
بدراسة الاستقرار المقارب للأنظمة الكسرية. في البداية، نقدم خاصية
جديدة للمشتقات الكسرية بمفهوم كابوتو التي ستسمح لنا في النهاية بإيجاد
دالة ليابونوف التي تقودنا لاستقرار الأنظمة الكسرية. لتوضيح نتائجنا
سنقوم بالاستشهاد بمثالين عدديين.

الكلمات المفتاحية:

نظام ترتيب كسري، مشتقة كابوتو، نظرية ليابونوف للاستقرار.

Résumé :

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la stabilisation des systèmes fractionnaires par l'approche d'une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapunov fractionnaire.

Dans le premier chapitre, et dans un premier temps, nous rappelons dans la première section les principales notions de base du calcul fractionnaire. Ensuite, nous consacrons le reste de ce chapitre aux études des différentes définitions mathématiques relatives aux dérivations et intégrations d'ordre fractionnaire ainsi que leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre, nous visons à aborder le problème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles fractionnaires de type de Caputo. Ensuite, nous consacrons la deuxième section de ce chapitre à la résolution numérique de ces équations.

Le troisième chapitre constitue véritablement l'objet de notre sujet. L'objectif de ce chapitre porte principalement sur la stabilisation asymptotique des systèmes fractionnaires. Dans un premier temps, nous présente une nouvelle propriété pour les dérivées fractionnaires au sens de Caputo, qui permet de trouver une fonction candidate de Lyapunov simple pour de nombreux systèmes d'ordre fractionnaire, et par conséquent la preuve de leur stabilité, en utilisant l'extension de la méthode directe de Lyapunov d'ordre fractionnaire. Deux exemples numériques sont utilisés dans ce chapitre pour illustrer nos résultats.

Mots-clés:

Système d'ordre fractionnaire, dérivée de Caputo, théorème de stabilité de Lyapunov.

Abstract:

The objective of this work is to study the stabilization of fractional systems by using a new extension of the direct fractional Lyapunov method.

In the first chapter, and first, we recall in the first section the main basic concepts of fractional calculation. Then we devote the rest of this chapter to the studies of the various mathematical dedefinitions relating to fractional derivations and integrations and their property.

In the second chapter, we aim to address the problem of the existence and uniqueness of the solutions of the fractional differential equations of Caputo type. Then we devote the second section of this chapter to the numerical resolution of these equations.

The third chapter really the subject of our subject. The focus of this chapter is to study the asymptotic stabilization of fractional systems. First, we present a new property for fractional derivatives in the sense of Caputo, which makes it possible to end a simple candidate function of Lyapunov for many fractional order systems, and therefore proof of their stability by using the extension of the direct fractional Lyapunov method. Two numerical examples are used in this chapter to illustrate our results.

Keywords:

Fractional-order system, derived from Caputo derivative, Lyapunov stability theorem

TABLE DES MATIÈRES

Table des figures	10
Introduction Générale	1
1 CALCUL FRACTIONNAIRE	3
1.1 Fonctions spéciales et transformée de Laplace	3
1.1.1 La fonction Gamma	3
1.1.2 La fonction Bêta	5
1.1.3 La fonction de Mittag-Leffler	6
1.1.4 Transformée de Laplace	8
1.2 Dérivation et intégration d'ordre fractionnaire	10
1.2.1 Dérivation et intégration au sens de Grünwald-Letnikov	10
1.2.2 Dérivation et intégration au sens de Riemann-Liouville	13
1.2.3 Dérivation au sens de Caputo	19
1.3 Propriétés générales des dérivées fractionnaires	22
2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES	24
2.1 Quelques résultats d'existence et d'unicité	24
2.1.1 Équation différentielle fractionnaire de type Caputo	24

2.2	Résolution analytique des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire	27
2.2.1	Cas d'une équation unidimensionnelle	28
2.2.2	Cas d'une équation multidimensionnelle	32
2.3	Résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire	35
3	STABILISATION DES SYSTÈMES FRACTIONNAIRES	38
3.0.1	Systèmes d'ordre fractionnaire par rapport systèmes d'ordre entier	39
3.0.2	Conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité	39
3.0.3	Méthode directe de Lyapounov fractionnaire basée sur les fonctions de classe $\mathcal{K}$	42
3.1	Fonctions candidates de Lyapounov à la stabilité des systèmes fractionnaires	50
	Bibliographie	58

TABLE DES FIGURES

1.1	Graphe de la fonction Γ	5
1.2	Fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre.	7
1.3	Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.	8
3.1	Régions de stabilité d'un système fractionnaire, où $0 < \alpha < 1$	41
3.2	L'évolution temporelle des états du système (3.76).	54
3.3	L'évolution temporelle des états du système (3.83).	55

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le calcul traditionnel étant basé sur la différentiation et l'intégration d'ordre entier. Le concept du calcul fractionnaire ayant le potentiel énorme de changer la manière dont nous voyons et modélisons la nature autour de nous. Avec une attention particulière des physiciens aussi bien que des ingénieurs, des activités de recherches remarquables ont été consacrées au calcul fractionnaire. Ils ont affirmé que l'usage des opérateurs de dérivations et d'intégrations fractionnaires sont souhaitable pour la description des propriétés de plusieurs matériaux. En effet, on a constaté que plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes thermiques (diffusion de la chaleur) [1], physiques (électricité) [2] et réologiques (viscoélasticité) [3] sont régis par des équations différentielles à dérivées fractionnaires.

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires, d'ordre entier, nous savons bien qu'un système est stable, si et seulement si, les racines du polynôme caractéristique sont à parties réelles négatives, c'est-à-dire situées sur la moitié gauche du plan complexe. Par ailleurs, la notion de la stabilité des systèmes fractionnaires linéaires est un peu différente de celle des systèmes classiques. En effet, on a bien constaté que les systèmes fractionnaires stables peuvent bien avoir des racines du polynôme caractéristique dans la moitié droite du plan complexe, ce qui montre que les systèmes

fractionnaires sont des systèmes à mémoire qui sont plus stables (lorsque l'ordre fractionnaire est inférieur à 1) comparés aux systèmes d'ordre entier, et par conséquent, ils affichent un comportement dynamique beaucoup plus sophistiquée, ce qui présente une grande importance notamment dans le domaine de la communication sécurisée.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la stabilisation des systèmes fractionnaires par l'approche d'une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapounov fractionnaire.

La suite de ce mémoire est organisée de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, et dans un premier temps, nous rappelons dans la première section les principales notions de base du calcul fractionnaire. Ensuite, nous consacrons le reste de ce chapitre aux études des différentes définitions mathématiques relatives aux dérivations et intégration d'ordre fractionnaire ainsi que leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre, nous visons à aborder le problème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles fractionnaires de type de Caputo. Ensuite, nous consacrons la deuxième section de ce chapitre à la résolution numérique de ces équations.

Le troisième chapitre constitue véritablement l'objet de notre sujet. L'objectif de ce chapitre porte principalement sur la stabilisation asymptotique des systèmes fractionnaires. Dans un premier temps, nous présentons une nouvelle propriété pour les dérivés fractionnaires au sens de Caputo, qui permet de trouver une fonction candidate de Lyapounov simple pour de nombreux systèmes d'ordre fractionnaire, et par conséquent la preuve de leur stabilité, en utilisant l'extension de la méthode directe de Lyapounov d'ordre fractionnaire. Deux exemples numériques sont utilisés dans ce chapitre pour illustrer nos résultats.

Enfin, ce mémoire est clôturée par une conclusion générale et quelques perspectives.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques concepts de base du calcul fractionnaire, nous commençons par les fonctions spéciales : la fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction Mittag-Leffler qui jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire, ensuite nous donnons trois approches de dérivées fractionnaires : Grünwald -Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo.

1.1 Fonctions spéciales et transformée de Laplace

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est l'une des fonctions du calcul fractionnaire qui généralise la factorielle $n!$.

Définition 1.1.1. La fonction Gamma d'Euler Γ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z > 0. \quad (1.1)$$

Propriétés de la fonction Gamma

- L'une des propriétés de base de la fonction *Gamma* est la suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z > 0. \quad (1.2)$$

Cette dernière égalité peut être facilement démontrer en utilisant l'intégration par partie, on a donc :

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [-e^{-t} t^z]_0^x + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

- La fonction *Gamma* généralise la factorielle ; c'est à dire $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$

En effet :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= \Gamma(1) = 1! \\ \Gamma(3) &= \Gamma(2) = 2! \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Par récurrence $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$.

- **Prolongement de $\Gamma(z)$ pour z négative.**

De la relation (1.2), on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma(z-1) &= \frac{\Gamma(z)}{z-1}, \quad -1 < z-1 < 0. \\ \Gamma(z-2) &= \frac{\Gamma(z-1)}{z-2}, \quad -2 < z-2 < -1. \end{aligned}$$

En procédant cette manière, on trouve

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad -n < z < -(n-1).$$

Par conséquent la fonction *Gamma* est définie aussi pour toutes les valeurs négatives sauf $\{-1, -2, \dots\}$ par la relation (1.2).

La Figure 1.1 représente le graphe de la fonction Gamma d'Euler.

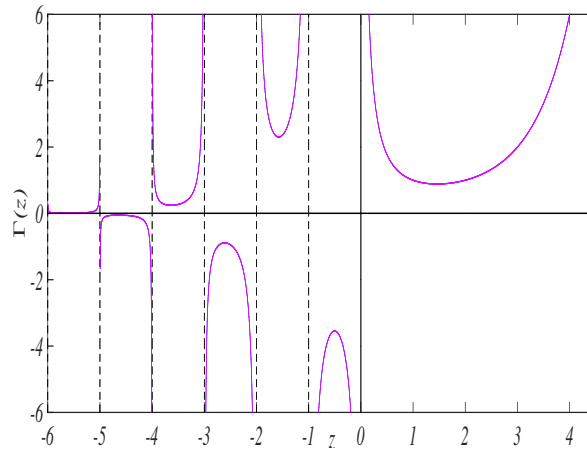


FIGURE 1.1 – Graphe de la fonction Γ .

1.1.2 La fonction Bêta

Définition 1.1.2.

La fonction Bêta d'Euler est généralement définie par la relation suivante :

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad (z > 0, w > 0). \quad (1.3)$$

- La relation entre la fonction Gamma d'Euler et la fonction Bêta d'Euler est donnée par

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \quad (1.4)$$

- La fonction Bêta est symétrique $\beta(z, w) = \beta(w, z)$

1.1.3 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est une généralisation de la fonction exponentielle, elle est souvent employée dans la résolution des problèmes physiques décrits par des équations à dérivée fractionnaire. La fonction de Mittag-Leffler [4] à un seul paramètre est définie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (\alpha > 0). \quad (1.5)$$

En particulier, si $\alpha = 0, 1, 2$ on a

$$E_0(Z) = \frac{1}{1-Z}, |Z| < 1, \quad E_1(z) = e^z, \quad E_2(z) = \cosh(\sqrt{z}).$$

La dérivée d'ordre n , $n = 0, 1, 2, \dots$ de la fonction Mittag-Leffler à un paramètre est donnée par

$$E_\alpha^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)! z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \alpha n + 1)}. \quad (1.6)$$

On peut aussi représenter la fonction Mittag-Leffler par l'intégrale de la forme suivante

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{t^{\alpha-1} e^t}{t^\alpha - z} dt. \quad (1.7)$$

La Figure 1.2 illustre le comportement de la fonction de Mittag-Leffler pour différentes valeurs de α .

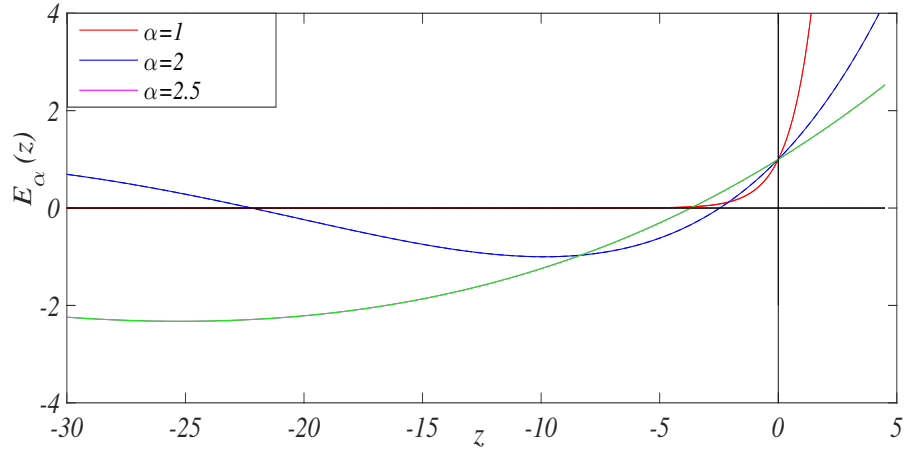


FIGURE 1.2 – Fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre.

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres [5] est définie par la relation suivante

$$E_{\alpha,\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (1.8)$$

Il s'ensuit de la définition (1.8), les cas particuliers suivants

$$\begin{aligned} E_{1,1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \\ E_{1,2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{(k+1)}}{k+1!} = \frac{e^z - 1}{z}. \\ E_{1,m} &= \frac{1}{z^{m-1}} \left[e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right]. \end{aligned}$$

La dérivée d'ordre n , $n = 0, 1, 2, \dots$ de la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres est donné par :

$$E_{\alpha,\beta}^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)! z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \alpha n + \beta)}. \quad (1.9)$$

La Figure 1.3 illustre le comportement de la fonction de Mittag-Leffler, pour différentes valeurs de α et β .

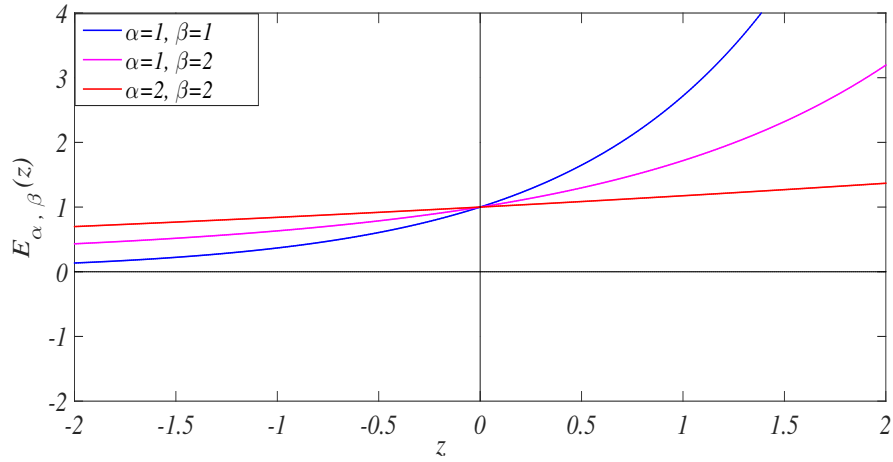


FIGURE 1.3 – Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.

1.1.4 Transformée de Laplace

Ici nous présentons la définition et quelques propriétés de la transformée de Laplace.

Définition 1.1.3.

Soit f une fonction d'ordre exponentiel α (c'est-à-dire qu'il existe deux constantes positives M et T telles que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pour $t > T$), alors la fonction de la variable complexes est définie par

$$F(s) = L\{f(t), s\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (1.10)$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction f .

• L'inverse de la transformée de Laplace est définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ par la formule suivante :

$$f(t) = L^{-1}\{F(s), t\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (\gamma = \Re(s) > \gamma_0), \quad (1.11)$$

où γ_0 est l'indice de convergence de l'intégrale (1.11).

Quelques propriétés de la transformée de Laplace

- La transformée de Laplace et son inverse sont des opérateurs linéaires, c'est à- dire, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t), s\} = \alpha L\{f(t), s\} + \beta L\{g(t), s\} = \alpha F(s) + \beta G(s).$$

$$L^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s), t\} = \alpha L^{-1}\{F(s), t\} + \beta L^{-1}\{G(s), t\} = \alpha f(t) + \beta g(t).$$

- Le produit de convolution de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ est donné par

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau. \quad (1.12)$$

- La transformée de Laplace de produit de convolution est donnée par :

$$L\{(f(t) * g(t)), s\} = F(s)G(s). \quad (1.13)$$

- La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier n de $f(t)$ est donnée par

$$L\{f^{(n)}(t), s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \quad (1.14)$$

Exemple 1.1.1.

Considérons la fonction $g(t) = t^{p-1}$.

La transformée de Laplace de la fonction g est :

$$L\{g(t), s\} = L\{t^{p-1}, s\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{p-1} dt.$$

Une intégration par partie p -fois, on obtient

$$L\{t^{p-1}, s\} = \frac{(p-1)!}{s^p} = \Gamma(p)s^{-p}.$$

1.2 Dérivation et intégration d'ordre fractionnaire

Dans ce mémoire, les symboles d'une dérivée fractionnaire ont été normalisés comme suit [6] :

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{(dt)^\alpha}, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \int_a^t d\tau^{(-\alpha)}, & \alpha < 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

où ${}_a D_t^\alpha$ désigne l'opérateur de dérivation d'ordre α , a et t sont respectivement des limites inférieure et supérieure de cet opérateur.

Il existe plusieurs définitions pour des intégrales et des dérivées fractionnaires. Malheureusement toutes les définitions considérées, en générale ne sont pas toutes équivalentes. Nous rappelons dans ce travail celles qui sont les plus célèbres.

1.2.1 Dérivation et intégration au sens de Grünwald-Letnikov

L'approche de Grünwald-Letnikov consiste à exprimer la dérivée d'ordre entier p si p est positif et l'intégrale itéré $(-p)$ fois si p est négatif d'une fonction f . Dans cette section nous présentons la définition de l'intégrale et de la dérivée au sens de Grünwald-Letnikov.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On définit la dérivée d'ordre 1 de la fonction f par

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \quad (1.16)$$

De même, la dérivée d'ordre 2 de f est

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

De (1.16) et (1.17), on obtient

$$f^{(3)}(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f^{(n)}(t) &= \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), \end{aligned} \quad (1.19)$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}, \quad (1.20)$$

est la notation pour le coefficient binomial.

Donc la dérivée et l'intégrale d'une fonction f au sens de Grünwald-Letnikov est donnée par la formule générale suivante

$${}_a^G D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{p}{k} f(t - kh), \quad (1.21)$$

qui représente la dérivée d'ordre entier p si $(0 < p < n)$ et l'intégrale répétée $(-p)$ fois si $(-n < p < 0)$ avec $nh = t - a$.

La généralisation de cette formule pour p non entier (avec $0 \leq n-1 < p < n$)

$$(-1)^k \binom{p}{k} = \frac{-p(1-p)(2-p) \cdots (k-p-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(-p)\Gamma(k+1)}$$

est

$${}_a^G D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(-p)\Gamma(k+1)} f(t - kh), \quad (1.22)$$

et

$${}_a^G D_t^{-p} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(p)\Gamma(k+1)} f(t - kh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.23)$$

Si $f \in \mathbb{C}^n$, en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$${}_a^G D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+p+1)} (t-a)^{k+p} + \frac{1}{\Gamma(n+p)} \int_a^t (t-\tau)^{n+p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (1.24)$$

et

$${}_a^G D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} (t-a)^{k-p} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \quad (1.25)$$

Exemple 1.2.1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov

En générale, la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est nulle ni constante.

Soit $f(t) = c$ et soit p un nombre non entier. On a donc $f^{(k)}(t) = 0$, pour $k = 1, 2, \dots, n$, cependant dans le cas fractionnaire, on a

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^p f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} (t-a)^{k-p} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{c(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} (t-a)^{k-p}}_{=0} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau}_{=0} \\ &= \frac{c(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)}. \end{aligned}$$

Exemple 1.2.2. La dérivée de la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ au sens de Grünwald-Letnikov

Soit p un nombre non entier ($0 < n-1 < p < n$) et soit $\beta > n-1$, alors on a $f^{(k)}(a) = 0$, pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$\text{et } f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (\tau-a)^{\beta-n}, \text{ d'où}$$

$${}_a^G D_t^p (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\beta-n} d\tau$$

En utilisant le changement de variable $\tau = a + x(t - a)$, on obtient

$$\begin{aligned}
 {}^G_a D_t^p (t - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n-p-1} (\tau - a)^{\beta-n} d\tau \\
 &= \frac{\Gamma(\beta + 1)(t - a)^{\beta-p}}{\Gamma(n - p)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_0^1 (1 - x)^{n-p-1} x^{\beta-n} dx \\
 &= \frac{\Gamma(\beta + 1)\beta(n - p, \beta - n + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\beta - n + 1)} (t - a)^{\beta-p} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - p + 1)} (t - a)^{\beta-p}.
 \end{aligned}$$

Transformée de Laplace de la dérivée au sens de Grünwald-Letnikov

Soit f une fonction qui possède la transformée de Laplace $F(s)$, pour $0 \leq p \leq 1$ on a :

$${}^G_a D_t^p f(t) = \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t - \tau)^{-p} f'(\tau) d\tau,$$

alors

$$L[{}^G_a D_t^p f(t)](s) = \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}} [sF(s) - f(0)] = s^p F(s).$$

1.2.2 Dérivation et intégration au sens de Riemann-Liouville

Dans cette section nous présentons la définition de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaires au sens de Riemann-Liouville d'une fonction.

a - Intégrale d'ordre fractionnaire

On commence par de la formule de Cauchy

$${}_a D_t^{-n} f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.26)$$

Si on remplace l'entier n par le réel p , on obtient

$${}_a^R D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.27)$$

Dans (1.26) l'entier n doit vérifier la condition $n \geq 1$, cette condition devient plus faible pour p dans (1.27), pour assurer l'existence de l'intégrale de Riemann- Liouville (1.27), on doit avoir $p > 0$.

Proposition 1.2.1. *Soit f une fonction continue et soit p un réel positif, on a alors.*

$$\lim_{p \rightarrow 0} ({}_a^R D_t^{-p} f(t)) = f(t).$$

Proposition 1.2.2. *Soient $f \in C^0([a, b])$, $p > 0, q > 0$, alors l'intégrale de Riemann- Liouville possède la propriété du semi-groupe suivante*

$${}_a^R D_t^{-p} ({}_a^R D_t^{-q} f(t)) = {}_a^R D_t^{-(p+q)} f(t) = {}_a^R D_t^{-q} ({}_a^R D_t^{-p} f(t)). \quad (1.28)$$

Preuve.

Par définition on a :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^{-p} ({}_a^R D_t^{-q} f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} ({}_a^R D_\tau^{-q} f(\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} d\tau \left(\int_a^\tau (\tau - x)^{q-1} f(x) dx \right). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on obtient

$${}_a^R D_t^{-p} ({}_a^R D_t^{-q} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t f(x) dx \int_x^t (t - \tau)^{p-1} (\tau - x)^{q-1} d\tau.$$

En effectuant le changement de variable $\tau = x + y(t - x)$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_x^t (t - \tau)^{p-1} (\tau - x)^{q-1} d\tau &= (t - x)^{p+q-1} \int_0^1 (1 - y)^{p-1} y^{q-1} dy \\ &= (t - x)^{p+q-1} \beta(p, q) \\ &= (t - x)^{p+q-1} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}. \end{aligned}$$

Donc

$${}_a^R D_t^{-p}({}_a^R D_t^{-q} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_a^t (t-x)^{p+q-1} f(x) dx = {}_a^R D_t^{-p-q} f(t)$$

Évidemment on peut interchanger p et q , nous avons alors :

$${}_a^R D_t^{-p}({}_a^R D_t^{-q} f(t)) = {}_a^R D_t^{-(p+q)} = {}_a^R D_t^{-q}({}_a^R D_t^{-p} f(t)).$$

□

Exemple 1.2.3.

Considérons la fonction $f(t) = t^q$, on a alors :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^{-p} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{(p-1)} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{(p-1)} \tau^q d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant le changement $\tau = xt$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{(p-1)} \tau^q d\tau &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 (1-x)^{(p-1)} t^{p-1} x^q t^{q+1} dx \\ &= \frac{t^{p+q}}{\Gamma(p)} \int_0^1 (1-x)^{(p-1)} x^q dx \\ &= \frac{t^{p+q}}{\Gamma(p)} \beta(p, q+1) \\ &= t^{p+q} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}. \end{aligned}$$

Si $f(t) = c$ on a alors : ${}_a^R D_t^{-p} f(t) = \frac{c}{\Gamma(p+1)} t^p$.

b- Dérivation d'ordre arbitraire

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann - Liouville d'ordre p ($n-1 \leq p \leq n$) d'une fonction intégrable f est donnée par

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^p f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} ({}_a^R D_t^{-(n-p)} f(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{(n-p-1)} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.29)$$

- Si $p = n - 1$, alors nous avons une dérivée conventionnelle d'ordre $n - 1$:

$$\begin{aligned} {}^R D_t^{n-1} f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} ({}_a^R D_t^{-(n-(n-1))} f(t)) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} ({}_a^R D_t^{-1} f(t)) \\ &= f^{(n-1)}(t). \end{aligned} \quad (1.30)$$

c- Quelques propriétés des dérivées fractionnaires au sens de Riemann- Liouville

1. l'une des propriétés très importantes de la dérivée au sens de Riemann- Liouville, pour $p > 0$ et $t < a$ est

$${}_a^R D_t^p ({}_a^R D_t^{-p} f(t)) = f(t). \quad (1.31)$$

2. Si la dérivée fractionnaire ${}_a^R D_t^p f(t)$, $(n - 1 \leq p < n)$ d'une fonction f est intégrable, alors

$${}_a^R D_t^{-p} ({}_a^R D_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^n [{}_a^R D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}, \quad p > 0, t > a. \quad (1.32)$$

3. La dérivée n -ième de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann- Liouville d'ordre p pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ est donnée par :

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a^R D_t^p f(t)) = {}_a^R D_t^{n+p} f(t), \quad (1.33)$$

mais la dérivée fractionnaire d'ordre p de la n -ième dérivée d'une fonction f est donnée par :

$${}_a^R D_t^p \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}_a^R D_t^{n+p} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p-n}}{\Gamma(j+1-p-n)}. \quad (1.34)$$

Donc l'opérateur de la dérivation fractionnaire ${}_a^R D_t^p$ de Riemann-Liouville commute avec $\frac{d^n}{dt^n}$ si et seulement si $f^{(j)}(a) = 0$, $(j = 0, 1, \dots, n-1)$.

Exemple 1.2.4. La dérivée d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville

En générale, la dérivée non entière d'une fonction constante $f(t) = c$ au sens de Riemann-Liouville n'est nulle ni constante, cependant

$${}_a^R D_t^p f(t) = \frac{c(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)}.$$

Exemple 1.2.5. La dérivée de la fonction $f(t) = (t - a)^q$ au sens de Riemann-Liouville. Considérons la fonction $f(t) = (t - a)^q$.

$${}_a^R D_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n} ({}_a^R D_t^{-(n-p)} f(t)), \quad (n-1 \leq p < n)$$

On a :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^{-(n-p)} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^q d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $\tau = a + x(t-a)$, on obtient :

$$\begin{aligned} {}_a^R D^{-(n-p)} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^1 (t-a)^{n-p-1} (1-x)^{n-p-1} x^q (t-a)^{q+1} dx \\ &= \frac{(t-a)^{n-p+q}}{\Gamma(n-p)} \int_0^1 (1-x)^{n-p-1} x^q dx \\ &= \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(n-p+q+1)} (t-a)^{n-p+q} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^p f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \left((t-a)^{n-p+q} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(n-p+q+1)} \right) \\ &= \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-p+1)} (t-a)^{q-p}. \end{aligned}$$

d- Transformée de Laplace de la dérivée au sens de Riemann-Liouville

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut également s'écrire comme le produit de convolution de la fonction $g(t) = \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)}$ et $f(t)$, on a alors

$$\begin{aligned} {}_0^R D_t^{-p} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} (t^{p-1} * f(t)). \end{aligned} \tag{1.35}$$

Et comme la transformée de Laplace de la fonction $g(t) = \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)}$ est donnée par

$$G(s) = L\left\{\frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)}, s\right\} = s^{-p},$$

alors en utilisant la formule (1.13), on obtient la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

$$L\{ {}^R D_t^{-p} f(t), s \} = s^{-p} F(s). \quad (1.36)$$

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$, posons ${}^R D_t^p f(t) = g^{(n)}(t)$, on a alors

$$g(t) = {}^R D_t^{-(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau, \quad (n-1 \leq p < n).$$

L'utilisation de la formule (1.1.4) donne

$$L\{ {}^R D_t^p f(t), s \} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0), \quad (1.37)$$

où

$$G(s) = s^{-(n-p)} F(s). \quad (1.38)$$

A partir de la définition de la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville, il vient

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}^R D_t^{-(n-p)} f(t) = {}^R D_t^{p-k-1} f(t). \quad (1.39)$$

En substituant (1.38) et (1.39) dans (1.37), nous obtenons l'expression finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville suivante

$$L\{ {}^R D_t^p f(t), s \} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}^R D_t^{(p-k-1)} f(t)]_{t=0}, \quad (n-1 \leq p < n). \quad (1.40)$$

e- Relation entre la dérivée au sens de Riemann-liouville et la dérivée au sens de Grünwald-Letnikov

Si f est de classe C^n , en faisant des intégrations par parties et des différentiations répétées, on obtient

$${}^R D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} (t-a)^{k-p} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau = {}^G D_t^p f(t). \quad (1.41)$$

Dans ce cas, l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

1.2.3 Dérivation au sens de Caputo

Dans cette section nous présentons la définition et quelques propriétés de la dérivation et de l'intégration au sens de Caputo.

Définition 1.2.1. Soient $f \in C^n([a, b])$ et $p > 0$. La dérivée fractionnaire de la fonction f au sens de Caputo est définie par

$$\begin{aligned} {}^C_a D_t^p f(t) &= {}_a D_t^{-(n-p)} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{p-n+1}} d\tau, \end{aligned} \quad (1.42)$$

où $n-1 < p < n$ et $t > a$.

La relation entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et Caputo

La relation entre la dérivée au sens de Caputo et la dérivée au sens de Riemann-Liouville est donnée par :

$${}^C_a D_t^p f(t) = {}^R_a D_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} (t-a)^{k-p}.$$

Lemme 1.2.1. Soit $p > 0$

1. Si $f \in C([a, b])$ alors :

$${}^C_a D_t^p ({}_a D_t^{-p} f(t)) = f(t).$$

2. Si $f \in C^n([a, b])$ alors :

$${}_a D_t^{-p} ({}^C_a D_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k.$$

Quelques propriétés des dérivées fractionnaires au sens de Caputo

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < n-1 < p < n$

$$\lim_{p \rightarrow n} ({}^C_a D_t^p f(t)) = f^{(n)}(t).$$

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n - 1 < p < n$

$${}_a^C D_t^p ({}_a D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^{p+m} f(t).$$

4.

$${}_a D_t^m ({}_a^C D_t^p f(t)) = {}_a^C D_t^{m+p} f(t) + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - (p+m) + 1)} (t-a)^{k-(p+m)},$$

En particulier, si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = n, n+1, \dots, n+m-1$, on a alors

$${}_a D_t^m ({}_a^C D_t^p f(t)) = {}_a^C D_t^p ({}_a D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^{p+m} f(t).$$

Preuve.

1. Si $f(t) = c \Rightarrow f^{(n)}(t) = 0$, donc :

$${}_a^C D_t^p c = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{p-n+1}} d\tau = 0.$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow n} {}_a^C D_t^p f(t) &= \lim_{p \rightarrow n} [{}_a^R D_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} (t-a)^{k-p}] \\ &= \lim_{p \rightarrow n} \frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-p}}{\Gamma(n-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \\ &= f^{(n)}(t). \end{aligned}$$

3. Montrons que : ${}_a^C D_t^p ({}_a D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^{p+m} f(t)$

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^p ({}_a D_t^m f(t)) &= {}_a D_t^{-(n-p)} {}_a D_t^n ({}_a D_t^m f(t)) \\ &= {}_a D_t^{-(n-p)} {}_a D_t^{n+m} f(t) \\ &= {}_a^C D_t^{p+m} f(t). \end{aligned}$$

4. Montrons que : ${}_a D_t^m ({}_a^C D_t^p f(t)) = {}_a^C D_t^{m+p} f(t)$

$$\begin{aligned}
 {}_a D_t^m ({}_a^C D_t^p f(t)) &= {}_a D_t^m [{}_a^R D_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} (t-a)^{k-p}] \\
 &= {}_a^R D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} {}_a D_t^m (t-a)^{k-p} \\
 &= {}_a^R D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)} (t-a)^{k-(p+m)} \\
 &= {}_a^R D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)} (t-a)^{k-(p+m)} \\
 &\quad - \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)} (t-a)^{k-(p+m)} \\
 &\quad + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)} (t-a)^{k-(p+m)} \\
 &= {}_a^R D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)} (t-a)^{k-(p+m)} \\
 &\quad + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)} (t-a)^{k-(p+m)} \\
 &= {}_a^C D_t^{m+p} f(t) + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)} (t-a)^{k-(p+m)},
 \end{aligned}$$

alors

$${}_a D_t^m ({}_a^C D_t^p f(t)) = {}_a^C D_t^{m+p} f(t),$$

si et seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = n, n+1, \dots, n+m-1$.

□

Exemple 1.2.6. (La dérivée de la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$
au sens de Caputo)

Considérons la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ tel que $\beta > p$.

On a :

$${}_a^C D_t^p f(t) = {}_a^R D_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} (t-a)^{k-p},$$

et

$$f^{(k)} = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Donc

$$\begin{aligned} {}^C D_t^p (t-a)^\beta &= {}^R D_t^p (t-a)^\beta, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-p+1)} (t-a)^{\beta-p}, \end{aligned}$$

et si $\beta < p$, alors

$${}^C D_t^p (t-a)^\beta = 0.$$

La transformation de Laplace de la dérivée au sens de Caputo

De la relation (1.42), la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est :

$$L\{{}^C D_t^p f(t), s\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 \leq p \leq n). \quad (1.43)$$

1.3 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

Dans cette section nous présentons quelques propriétés générales des dérivées fractionnaires.

a- La linéarité

La différentiation fractionnaire est une opération linéaire, c'est-à-dire

$$D^p(\lambda f(t) + \beta g(t)) = \lambda D^p f(t) + \beta D^p g(t),$$

où D^p désigne n'importe quelle mutation de la différentiation fractionnaire considérée dans ce mémoire.

b- La règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires

Soit $f(t)$ et $\varphi(t)$ deux fonctions. Nous commençons d'abord par la règle de Leibniz pour évaluer la n -ième dérivée du produit $f(t)\varphi(t)$ on a :

$$\frac{d^n}{dt^n}(\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(t) f^{(k)}(t). \quad (1.44)$$

La règle de Leibniz pour la dérivée fractionnaire est la suivante :

Si f est continue dans $[a, t]$ et $\varphi(t)$ admet $(n+1)$ dérivées continues dans $[a, t]$,

Alors la dérivée fractionnaire du produit $\varphi(t)f(t)$ est donnée par :

$${}_0D_t^p(\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_aD^{(p-k)}f(t) - R_n^p(t),$$

où $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)}{k!}, n \geq (p+1)$ et

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} f(\tau) d\tau \int_\tau^t \varphi^{(n+1)}(\xi) (\tau-\xi)^n d\xi,$$

Avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^p(t) = 0.$$

Si f et φ sont de classe $C^1([a, t])$, alors la règle de Leibniz pour la dérivation fractionnaire est donnée par

$${}_0D_t^p(\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_aD^{(p-k)}f(t). \quad (1.45)$$

CHAPITRE 2

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES

Le but de ce chapitre est de présenter quelques éléments sur la théorie des équations différentielles fractionnaires. Nous commençons par quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution d'un problème à valeurs initiales pour une équation différentielle fractionnaire, puis la résolution explicite des équations différentielles fractionnaires linéaires, et nous terminons ce chapitre par la présentation d'une méthode numérique nécessaire à la résolution des équations différentielles fractionnaires.

2.1 Quelques résultats d'existence et d'unicité

Dans cette partie, on va présenter quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Caputo.

2.1.1 Équation différentielle fractionnaire de type Caputo

Soit α un réel positive, tel que $n - 1 < \alpha < n$, et soit ${}_0^C D_t^\alpha$ l'opérateur de dérivation au sens de Caputo.

Le problème de Cauchy aux conditions initiales est donné par :

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \\ {}^C_0D_t^j y(0) = y_0^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Lemme 2.1.1. [7]

Si f est continue, alors le problème aux conditions initiales (2.1) est équivalent à l'équation intégrale de Volterra du seconde type suivante :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (2.2)$$

Preuve.

Premièrement supposons que y est solution de (2.2), on peut écrire cette équation sous la forme réduite :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + {}_0D_t^{-\alpha} f(t, y(t)).$$

En appliquant l'opérateur de différentiation ${}_0^C D_t^\alpha$ sur les deux cotés de cette relation on obtient :

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^C D_t^\alpha t^k}{k!} + {}_0^C D_t^\alpha {}_0D_t^{-\alpha} f(t, y(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^C D_t^\alpha t^k}{k!} + f(t, y(t)), \end{aligned}$$

et puisque $k < \alpha$ donc ${}_0^C D_t^\alpha t^k = 0$.

alors y est une solution de l'équation différentielle (2.1).

Appliquons maintenant l'opérateur ${}_0^C D_t^j$, $0 \leq j \leq n-1$ sur l'équation de Volterra (2.2) on obtient :

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^j y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^C D_t^j t^k}{k!} + {}_0^C D_t^j {}_0D_t^{-\alpha} f(t, y(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^C D_t^j t^k}{k!} + {}_0D_t^{-(\alpha-j)} f(t, y(t)), \end{aligned}$$

et puisque

$${}_0^C D_t^j t^k = \begin{cases} 0 & \text{si } j > k \\ \Gamma(k+1) & \text{si } j = k \\ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-j+1)} t^{k-j} & \text{si } j < k \end{cases}$$

Donc

$${}_0^C D_t^j t^k|_{t=0} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > k \\ \Gamma(k+1) & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j < k \end{cases}$$

et comme $\alpha - j \geq 1$, l'intégrale ${}_0 D_t^{-(\alpha-j)} f(t, y(t))|_{t=0}$ est nulle, par suite ${}_0^C D_t^j y(0) = y_0^{(j)}$.

Deuxièmement supposons que y est une solution de l'équation (2.1) et montrons que y est solution de (2.2).

On définit $z(t) = f(t, y(t))$ alors $z \in C[0, h]$. On écrit l'équation (2.1) de la forme :

$$\begin{aligned} z(t) &= f(t, y(t)) = {}_0^C D_t^\alpha y(t) = {}_0^R D_t^\alpha y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\ &= {}_0^R D_t^\alpha y(t) - {}_0^R D_t^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} \\ &= {}_0^R D_t^\alpha (y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!}) \\ &= {}_0^R D_t^\alpha (y - T_{n-1}[y, 0])(t) \\ &= {}_0 D_t^n {}_0 D_t^{-(n-\alpha)} (y - T_{n-1}[y, 0])(t), \end{aligned}$$

tel que $T_{n-1}[y, 0](t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)}$ est le polynôme de Taylor de degré $n-1$ pour la fonction y autour de 0.

En appliquant l'opérateur ${}_0 D_t^{-n}$ sur les deux membres de cette relation elle devient :

$${}_0 D_t^{-n} z(t) = {}_0 D_t^{-(n-\alpha)} (y - T_{n-1}[y, 0])(t) + q(t), \quad \deg q \leq n-1.$$

Comme z est continue, la fonction ${}_0 D_t^{-n} z$ a un zéro d'ordre au moins n à l'origine.

En outre la différence $y - T_{n-1}[y, 0]$ a la même propriété par construction.

Et donc la fonction ${}_0D_t^{-(n-\alpha)}(y - T_{n-1}[y, 0])$ doit avoir un zéro d'ordre n aussi.

Par suite le polynôme q a la même propriété mais comme il est de degré ne dépassant pas $n - 1$ il en résulte que $q = 0$, par conséquent :

$${}_0D_t^{-n}z(t) = {}_0D_t^{-(n-\alpha)}(y - T_{n-1}[y, 0])(t).$$

En appliquant l'opérateur de dérivation ${}_0D_t^{n-\alpha}$ sur les deux membres de cette équation on obtient :

$$y(t) - T_{n-1}[y, 0](t) = {}_0D_t^{-\alpha}z(t),$$

En substituant $z(t)$ et $(y - T_{n-1}[y, 0])(t)$ on retrouve l'équation de Volterra :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

□

Théorème 2.1.1.

Soit $K > 0, h^* > 0$ et $y_0^{(i)} \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n - 1$. On définit $G = [0, h^*] \times \mathbb{R}$

et soit la fonction continue $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, satisfaisant la condition de Lipchitz par rapport à y suivante :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| < L|y_1 - y_2|.$$

Posons

$$h = \min\{h^*, (K\Gamma(\alpha + 1)/M)^{1/\alpha}\},$$

avec

$$M = \sup_{t, z \in G} |f(t, z)|,$$

alors il existe une unique solution y du problème (2.1) tel que $y \in C[0, h]$.

2.2 Résolution analytique des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire

Pour résoudre une équation différentielle fractionnaire linéaire, on peut donner une expression explicite de la solution,

pour cela en utilisant la fonction de Mittag-Leffler E_α .

2.2.1 Cas d'une équation unidimensionnelle

Théorème 2.2.1. [8]

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la solution générale du problème :

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha y(t) &= \lambda y(t) + q(t), \\ y^{(k)}(0) &= y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \end{cases} \quad (2.3)$$

où $q \in C[0, h]$ est de la forme :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} u_k(t) + \tilde{y}(t), \quad (2.4)$$

avec

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} {}_0 D_t^{-\alpha} q(t) & \text{si } \lambda = 0 \\ \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) u'_0(\tau) d\tau & \text{si } \lambda \neq 0, \end{cases}$$

où

$$u_k(t) = D^{-k} e_\alpha(t) \text{ tel que } e_\alpha(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Preuve.

- Si $\lambda = 0$ le problème (2.3) devient

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha y(t) &= q(t), \\ y^{(k)}(0) &= y_0^{(k)}, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \end{cases}$$

On a $e_\alpha(t) = E_\alpha(0) = 1$, alors $u_k(t) = \frac{t^k}{k!}$ quelque soit k .

D'après la relation entre Riemann-Liouville et Caputo on obtient

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) = {}_0^R D_t^\alpha y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} = q(t).$$

Donc

$${}_0^R D_t^\alpha y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} + q(t),$$

On applique l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α sur les deux cotés, on trouve

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-\alpha} {}^R D_t^\alpha y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0) {}_0D_t^{-\alpha} t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + {}_0D_t^{-\alpha} q(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0) t^k}{k!} + {}_0D_t^{-\alpha} q(t). \end{aligned}$$

Donc

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0) u_k(t) + \tilde{y}(t), \quad \text{où} \quad \tilde{y}(t) = {}_0D_t^{-\alpha} q(t).$$

• Si $\lambda \neq 0$: la preuve se fait en deux étapes (a) et (b) :

a) La fonction u_k satisfait l'équation différentielle homogène, c'est à dire :

${}_0^C D_t^\alpha u_k = \lambda u_k, \forall k = 1, \dots, n-1$ et vérifie les conditions initiales $u_k^{(j)}(0) = \delta_{kj}$ (delta de Kronecker) pour $j, k = 0, \dots, n-1$.

b) La fonction $\tilde{y}$ est une solution de l'équation différentielle non homogène avec les conditions initiales homogènes.

On commence par (a), nous savons que

$$e_\alpha(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + 1)}.$$

Donc

$$u_k = D^{-k} e_\alpha(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{\alpha j + k}}{\Gamma(\alpha j + 1 + k)}.$$

Montrons maintenant que u_k est une solution de l'équation différentielle homogène.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha u_k(t) &= {}_0^C D_t^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{\alpha j + k}}{\Gamma(\alpha j + 1 + k)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha j + 1 + k)} {}_0^C D_t^\alpha t^{\alpha j + k} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha(j-1) + 1 + k)} t^{\alpha(j-1) + k} \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha j + 1 + k)} t^{\alpha j + k} \\ &= \lambda u_k(t). \end{aligned}$$

Donc u_k est une solution de l'équation homogène.

Et Pour $j = k$ on a :

$$u_k^{(k)}(0) = D^k D^{-k} e_\alpha(0) = e_\alpha(0) = 1.$$

Pour $j < k$ on a

$$u_k^{(j)}(0) = D^j D^{-k} e_\alpha(0) = D^{-(k-j)} e_\alpha(0) = 0,$$

Car e_α est une fonction continue.

Pour $j > k$ on a

$$u_k^{(j)}(0) = D^j D^{-k} e_\alpha(0) = D^{(j-k)} e_\alpha(0) = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) u_0'(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) e_\alpha'(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t) e_\alpha'(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Cette intégrale existe quelque soit t , car (q est une fonction continue et e_α' intégrable) , et $\tilde{y}(0) = 0$.

De plus, pour $\alpha > 1$ (i.e $n \geq 2$) d'après la règle standard de la différentiation d'une intégrale qui dépend d'un paramètre on a :

$$D\tilde{y}(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t) e_\alpha''(t-\tau) d\tau + \frac{1}{\lambda} q(t) \underbrace{e_\alpha'(0)}_{=0}.$$

De la même manière comme ci dessus (la continuité de q et la singularité faible de e_α'') on voit que $\tilde{y}'(0) = 0$.

De la même manière :

$$D^k \tilde{y}(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) e_\alpha^{(k+1)}(t-\tau) d\tau, \quad \text{pour } k = 0, \dots, n-1.$$

Donc : $D^k \tilde{y}(0) = 0$.

Alors $\tilde{y}$ satisfait toutes les conditions initiales homogènes, et il reste à montrer que $\tilde{y}$ résout l'équation différentielle non homogène. Pour ce la on écrit

$$e'_\alpha(u) = \frac{d}{du} e_\alpha(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j u^{\alpha j-1}}{\Gamma(\alpha j)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) e'_\alpha(t-\tau) d\tau = \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j (t-\tau)^{\alpha j-1}}{\Gamma(\alpha j)} d\tau \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha j)} \int_0^t q(\tau) (t-\tau)^{\alpha j-1} d\tau = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{(j-1)} {}_0D_t^{-\alpha j} q(t), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} {}^C_0D_t^\alpha \tilde{y}(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} {}^C_0D_t^\alpha {}_0D_t^{-\alpha j} q(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} {}_0D_t^{-\alpha(j-1)} q(t) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j {}_0D_t^{-\alpha j} q(t) = q(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j {}_0D_t^{-\alpha j} q(t) \\ &= q(t) + \lambda \tilde{y}(t). \end{aligned}$$

□

Exemple 2.2.1.

On considère le problème

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\alpha y(t) = \sqrt{2}y(t) - 2, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$

On a : $\lambda = \sqrt{2}$ et $q(t) = -2$

$y(t) = \sum_{k=0}^1 y_0^{(k)} u_k(t) + \tilde{y}(t)$ tel que

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) u'_0(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t -2u'_0(\tau) d\tau \\ &= -2/\sqrt{2} [E_\alpha(\sqrt{2}\tau^\alpha)]_0^t \\ &= -\sqrt{2} [E_\alpha(\sqrt{2}t^\alpha) - 1] \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{2}E_\alpha(\sqrt{2}t^\alpha), \end{aligned}$$

et

$$\sum_{k=0}^1 y_0^{(k)} u_k(t) = y(0)E_\alpha(\sqrt{2}t^\alpha) + y'(0) \int_0^t E_\alpha(\sqrt{2}\tau^\alpha) d\tau = 0,$$

Donc la solution générale est :

$$y(t) = \sqrt{2} - \sqrt{2}E_\alpha(\sqrt{2}t^\alpha).$$

2.2.2 Cas d'une équation multidimensionnelle

On considère l'équation différentielle fractionnaire [8]

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) = Ay(t) + q(t). \quad (2.5)$$

Avec $0 < \alpha < 1$, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ et $q : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Pour résoudre le problème (2.5) on commence par le problème homogène correspondant (i.e $q(t) = 0 \forall t \in [0, h]$).

Donc

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) = Ay(t). \quad (2.6)$$

• Si A admet des valeurs propres simples

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et $v_1, v_2, \dots, v_n$ les vecteurs propres associés. Alors la solution de (2.6) est de la forme

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k v_k E_\alpha(\lambda_k t^\alpha). \quad (2.7)$$

où $c_k \in \mathbb{R}, \forall k = 1, \dots, n$.

• Si A admet des valeurs propres multiples, par exemple λ de degré de multiplicité k donc on a deux cas :

* Si le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à λ est égale à k dans ce cas la solution de (2.6) est de la forme (2.7).

* Si le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à λ est égale à m (où $m < k$) dans ce cas les autres $(k - m)$ solutions qui sont linéairement indépendantes sont données par :

$$y_{(i)}(t) = \sum_{j=m}^i u^{(j)} t^{(i-j)\alpha} E_{\alpha}^{(i-j)}(\lambda t^{\alpha}); \quad \text{pour } i = m+1, \dots, k.$$

tel que les vecteurs propres $u^{(j)}$ sont les solutions du système linéaire non homogène

$$(A - \lambda I)u^{(j+1)} = u^{(j)}.$$

Remarque 2.1.

Soient $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$ la solution du problème homogène (2.7), alors la solution du problème non homogène (2.6) avec la condition initiale $y(0) = y_0$ est $(Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t))^T$ tel que :

$$Y_i(t) = y_i(t) + \int_0^t y_i(t - \tau) q_i(\tau) d\tau, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Exemple 2.2.2.

1 On considère le système suivant

$${}_0^C D_t^{\alpha} y(t) = Ay(t) \text{ tel que } y(t) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

- Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -8$ et $\lambda_2 = 1$
- Les vecteurs propres de A sont $v_1 = (-1, 1)^T$ associés $\lambda_1 = -8$ et $v_2 = (1, 2)^T$ associés à $\lambda_2 = 1$
- La solution générale de ce système est

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} E_{\alpha}(-8t^{\alpha}) + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} E_{\alpha}(t^{\alpha})$$

Si $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $c_1 = 1/3$ et $c_2 = 1/3$.

Donc

$$y(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha(-8t^\alpha) + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} E_\alpha(t^\alpha)$$

2 On considère le système ${}_0^c D_t^\alpha y(t) = Ay(t)$ tel que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ (double) et $\lambda_2 = 2$ (simple)
 - Les vecteurs propres de A sont $v_1 = (1, 1, 0)^T$ associés $\lambda_1 = 1$ et $v_2 = (1, 0, 1)^T$ associés à $\lambda_2 = 2$
- et puisque le nombre de vecteurs propres associé à $\lambda_1 = 1$ est égale à $(m = 1)$ inférieur à $(k = 2)$ le degré de multiplicité, alors les autres $(k - m)$ solutions qui sont linéairement indépendantes sont données par

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= \sum_{j=1}^i u^{(j)} t^{(i-j)\alpha} E_\alpha^{(i-j)}(\lambda t^\alpha) \\ &= u^{(1)} t^\alpha E'_\alpha(t^\alpha) + u^{(2)} E_\alpha(t^\alpha) \end{aligned}$$

avec $u^{(1)} = (1, 1, 0)^T$

On a $(A - \lambda I)u^{(2)} = u^{(1)}$, on suppose que $u^{(2)} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ alors

$$\begin{cases} \gamma = 1 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow u^{(2)} = (0, 0, 1)^T$$

- Donc la solution générale de ce système est

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} E_\alpha(t^\alpha) + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha(2t^\alpha) + c_3 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^\alpha E'_\alpha(t^\alpha) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha(t^\alpha) \right]$$

2.3 Résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire

En général pour résoudre des équations différentielles non linéaire d'ordre fractionnaire on utilise des méthodes numériques, car la résolution analytique dans ce cas est généralement impossible. Il existe plusieurs méthodes numériques pour la résolution d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire comme la méthode des différences fractionnaires de Grünwald-Letnikov, la méthode d'Adams-Basheforth-Moulton, la méthode d'itération variationnelle (VIM) et la méthode de décomposition d'Adomian (ADM). Dans notre travail nous allons présenter la méthode d'Adams-Basheforth-Moulton fractionnaire qui appelée aussi méthode de prédiction correction (PECE).

La méthode d'Adams-Basheforth-Moulton généralisée

La méthode d'Adams-Basheforth-Moulton est une méthode numérique introduite par Diethelm et Freed [8], basée sur l'équation de Volterra (2.2). On suppose que y_k est l'approximation de $y(t_j)$ pour $j = 1, \dots, k$ dans l'intervalle $[0, T]$.

Pour obtenir y_{k+1} on remplace l'intégrale dans l'équation de Volterra (2.2), en utilisant la formule de produit de quadrature des trapèzes où les noeuds t_j pour $j = 0, \dots, k+1$ s'en prennent respectivement à la fonction $(t_{k+1} - \cdot)^{\alpha-1}$.

Premièrement on obtient l'approximation

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} g(t_j),$$

où

$$a_{j,k+1} = \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} \phi_{j,k+1} d\tau. \quad (2.8)$$

Et

$$\phi_{j,k+1} = \begin{cases} \frac{\tau - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} & \text{si } t_{j-1} < \tau < t_j. \\ \frac{t_{j+1} - \tau}{t_{j+1} - t_j} & \text{si } t_j < \tau < t_{j+1}. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Et comme $t_j = jh$ pour $j = 0, \dots, N$, alors

$$\phi_{j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}(k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha) & \text{si } j = 0. \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}((k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}) & \text{si } 1 \leq j \leq k. \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} & \text{si } j = k+1. \end{cases}$$

Donc on trouve l'équation implicite de la méthode à un pas d'Adams-Moulton

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}) \right). \quad (2.10)$$

Le problème avec cette formule est que l'inconnue y_{k+1} apparait dans les deux membres de l'équation, et à cause du caractère non-linéaire de f , on ne peut généralement pas la résoudre pour y_{k+1} d'une manière directe. En insérant une valeur préliminaire approchée de y_{k+1} dans le membre de droite. L'approximation préliminaire y_{k+1}^p , appelée le terme prédiction, est obtenue d'une manière similaire, en remplaçant la formule de trapèze par une formule du rectangle

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^p) \right). \quad (2.11)$$

Pour déterminer y_{k+1}^p on utilise la méthode d'Adams-Bashforth à un pas (de la même manière pour la formule de correction), mais on remplace l'intégrale par la règle de produit des rectangles.

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} g(t_j),$$

où

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha), \quad (2.12)$$

Alors

$$y_{k+1}^p = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, y_j). \quad (2.13)$$

Finalement, les expressions (2.11) et (2.13) avec $a_{j,k+1}$ et $b_{j,k+1}$ qui sont calculées à partir de (2.8) et (2.12) respectivement forment la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton fractionnaire.

Cette méthode est dite de type PECE (Predict, Evaluate, Correct, Evaluate) car on commence d'abord par calculer le prédicteur par (2.13), puis on évalue $f(t_{k+1}, y_{k+1}^p)$, qu'on va utiliser pour calculer le correcteur via (2.11), et finalement évaluer $f(t_{k+1}, y_{k+1})$.

CHAPITRE 3

STABILISATION DES SYSTÈMES FRACTIONNAIRES

On considère un système non linéaire à dérivée fractionnaire comme :

$$D^\alpha x = f(x), \quad (3.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ ($0 < \alpha_i < 1, i = 1, 2, \dots, n$) et D^α est l'opérateur de dérivation au sens de Caputo.

Les points d'équilibre du système (3.1) sont calculés par la résolutions de l'équation suivante

$$D^\alpha x = 0. \quad (3.2)$$

Remarque 3.1. Si $x = 0$ est un point d'équilibre du système (3.1) et lorsqu'il existe $t_1 \geq 0$ satisfaisant $x(t_1) = 0$, alors $x(t) = 0$, pour tout $t \geq t_1$.

Remarque 3.2. Dans l'équation (3.1), qui décrit la dynamique d'un système non linéaire d'ordre non entier, deux types de systèmes seront présentés : les systèmes commensurables (ou d'ordres commensurables) et les systèmes non commensurables (ou d'ordres non commensurables).

Définition 3.0.1.

On dit que le système est commensurable, si tous les ordres de dérivations $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ du système (3.1) sont égaux. Dans le cas contraire, le système est dit non commensurable.

3.0.1 Systèmes d'ordre fractionnaire par rapport systèmes d'ordre entier

Considérons les deux systèmes suivants :

$$\dot{x}(t) = \beta t^{\beta-1}, 0 < \beta < 1, x(0) = x_0 \quad (3.3)$$

$$D^\alpha x(t) = \beta t^{\beta-1}, 0 < \beta < 1, 0 < \alpha < 1 \text{ et } x(0) = x_0 \quad (3.4)$$

Les solutions des systèmes (3.3) et (3.4) sont respectivement données par :

$$x(t) = t^\beta + x_0, \quad (3.5)$$

$$x(t) = \frac{\beta \Gamma(\beta) t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} + x_0. \quad (3.6)$$

On peut voir facilement, que la solution du système d'ordre entier (3.3) est asymptotiquement stable, pour tout $0 < \beta < 1$. Cependant, la solution du système fractionnaire (3.4) est asymptotiquement stable, lorsque $0 < \beta < 2 - \alpha$. Ce qui montre que les systèmes fractionnaires admettent des caractéristiques différentes de celles des systèmes d'ordre entier.

3.0.2 Conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires d'ordre entier, nous savons bien qu'un système est stable si toutes les racines du polynôme caractéristique sont à parties réelles strictement négatives, c'est-à-dire situées sur la moitié gauche du plan complexe. Tandis que, dans le cas des systèmes fractionnaires linéaires, la définition de la stabilité est strictement différente de celle des systèmes classique.

En effet, dans les systèmes fractionnaires, on peut avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables.

Les théorèmes suivants, nous permettent d'affirmer les conditions nécessaires et suffisantes, pour la stabilité des systèmes fractionnaires.

Théorème 3.0.1. [9,10]

Considérons le système non linéaire fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x &= f(x), \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (3.7)$$

où $x \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < 1$ et $f \in \mathbb{R}^n$ une fonction non linéaire continue.

- 1. Supposons que le système (3.7) est commensurable. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice jacobienne $\frac{\partial f}{\partial x}$ associée à f au point d'équilibre.

Alors, le système (3.7) est asymptotiquement stable, si et seulement si :

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

- 2. Supposons maintenant que le système (3.7) est non commensurable, c'est-à-dire $\alpha_i \neq \alpha_j$, pour tout $i \neq j$, et soit m le plus petit multiple commun des dénominateurs u_i de α_i , tel que :

$$\alpha_i = \frac{u_i}{v_i}, (u_i, v_i) = 1, u_i, v_i \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.9)$$

Posons $\gamma = \frac{1}{m}$, et soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de l'équation caractéristique :

$$\det(\text{diag}(\lambda^{m\alpha_1}, \lambda^{m\alpha_2}, \dots, \lambda^{m\alpha_n}) - \frac{\partial f}{\partial x}) = 0. \quad (3.10)$$

Alors, le système non commensurable (3.7) est asymptotiquement stable, si et seulement si :

$$|\arg(\lambda_i)| > \gamma \frac{\pi}{2}, \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.11)$$

Remarque 3.3. Si le système étudié est linéaire, les conditions de stabilité dans les théorèmes précédents restent vrais, juste en remplaçant la matrice Jacobienne de f par sa partie linéaire. La Figure 3.1, illustre les différentes régions de stabilité d'un système fractionnaire, où $0 < \alpha < 1$.

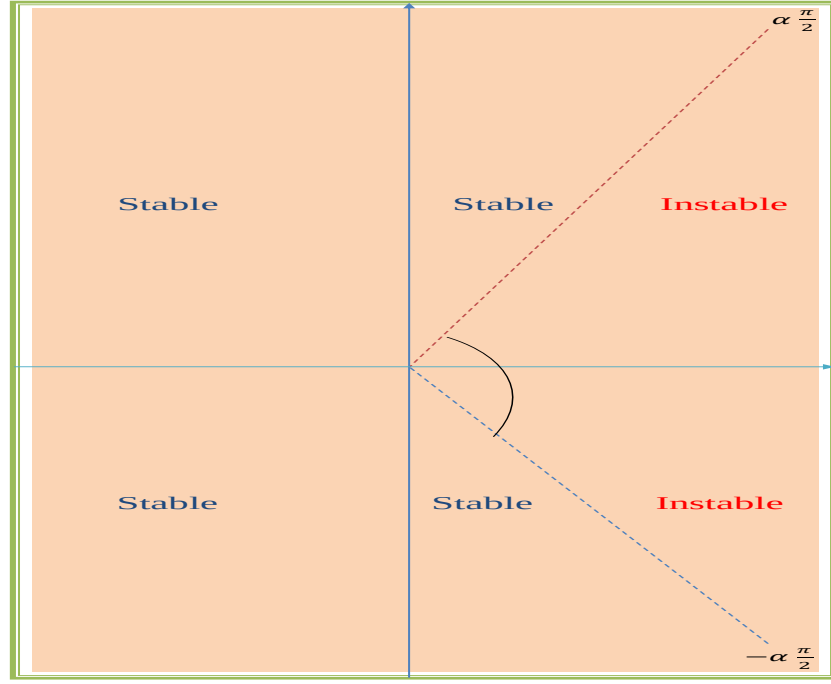


FIGURE 3.1 – Régions de stabilité d'un système fractionnaire, où $0 < \alpha < 1$.

Exemple 3.0.1.

Considérons le système non linéaire fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x &= -xy^2 + y, \\ D^\alpha y &= xy^2 - 4y + 3, \end{cases} \quad (3.12)$$

où D^α est l'opérateur de dérivation de Caputo.

Les points d'équilibre de ce système sont les solutions de l'équation :

$$\begin{cases} -xy^2 + y = 0, \\ xy^2 - 4y + 3 = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Le seul point d'équilibre du système (3.12) est $M = (1, 1)$.

La matrice Jacobienne du système, associée au point d'équilibre M est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique correspondant est :

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 3. \quad (3.14)$$

Les valeurs propres associées au point M sont données par :

$$\lambda_1 = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ et } \lambda_2 = \frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Lorsque $\alpha = 0.3$, on peut voir facilement que :

$$|\arg(\lambda_{1,2})| = 0.523 > \frac{\alpha\pi}{2} = 0.471.$$

D'après Théorème 3.0.1, le point d'équilibre M est asymptotiquement stable. Cependant, dans le cas entier, le point d'équilibre M est stable.

3.0.3 Méthode directe de Lyapounov fractionnaire basée sur les fonctions de classe $\mathcal{K}$

Le concept de la méthode directe de Lyapounov, consiste à trouver une fonction de Lyapounov associée à un problème non linéaire. Lorsque cette fonction existe, le système est stable. Cette méthode est difficile à mettre en œuvre, cependant elle est d'une portée beaucoup plus générale. Notons que cette méthode nous permet de donner une condition suffisante de stabilité, c'est-à-dire, on peut démontrer la stabilité

d'un système, même devant l'impossibilité de trouver une fonction de Lyapounov, puisqu'il n'y a pas de règle générale qui nous permet de trouver une telle fonction de Lyapounov. Cependant, dans les problèmes de physiques, l'énergie est souvent un bon candidat. Dans cette partie, nous étendons la méthode directe de Lyapounov des systèmes fractionnaire, en utilisant les fonctions de classe $\mathcal{K}$, pour étudier la stabilité asymptotique des solutions du système suivant :

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad (3.15)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ représente une fonction non linéaire, $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $\alpha \in (0,1)$. Pour atteindre cet objectif, nous regroupons un ensemble de définitions sur le thème des fonctions de classe $\mathcal{K}$ [11], et nous rappelons quelques résultats de la stabilité au sens de Lyapounov.

Définition 3.0.2. [11]

Une fonction continue $\varphi : [0, \rho) \rightarrow \mathbb{R}_+ (\rho > 0)$ est dite de classe $\mathcal{K}$, si et seulement si elle est strictement croissant et vérifiée $\varphi(0) = 0$.

Définition 3.0.3. [11]

Une fonction $V(t, x)$ définie sur $T_q \times S_\rho$, où :

$$S_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq \rho\} \text{ et } T_q = \{q^n, q \in]0, 1[\text{ et } n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}, \quad (3.16)$$

est dite définie positive, si et seulement si $V(t, 0) = 0$, pour tout $t \in T_q$, et il existe $\varphi(r) \in \mathcal{K}$, telle que :

$$\varphi(r) \leq V(t, x), \|x\| = r, (t, x) \in T_q \times S_\rho. \quad (3.17)$$

Définition 3.0.4. [11]

Une fonction $V(t, x)$ définie sur $T_q \times S_\rho$, est dite décroissante, si et seulement si $V(t, 0) = 0$, pour tout $t \in T_q$ et il existe $\varphi(r) \in \mathcal{K}$, telle que :

$$V(t, x) \leq \varphi(r), \|x\| = r, (t, x) \in T_q \times S_\rho. \quad (3.18)$$

Lemme 3.0.1.

Si $D^\alpha x(t) \geq D^\alpha y(t)$, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, et si $x(0) = y(0)$, alors $x(t) \geq y(t)$

Preuve.

Supposons que $D^\alpha x(t) \geq D^\alpha y(t)$, alors il existe une fonction $n(t) \geq 0$ satisfaisant :

$$D^\alpha x(t) = n(t) + D^\alpha y(t). \quad (3.19)$$

En appliquant la transformée de Laplace de l'équation (3.19), on obtient :

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) = N(s) + s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1}y(0). \quad (3.20)$$

Puisque $x(0) = y(0)$, l'égalité (3.20) peut s'écrire sous la forme :

$$X(s) = s^{-\alpha}N(s) + Y(s). \quad (3.21)$$

En appliquant la transformée inverse de Laplace de l'équation (3.21), on obtient l'égalité suivante :

$$x(t) = D^{-\alpha}n(t) + y(t). \quad (3.22)$$

Puisque $n(t) \geq 0$, donc :

$$x(t) \geq y(t).$$

□

Théorème 3.0.2. [12]

Supposons qu'ils existent une fonction de Lyapounov V et des fonctions $\varphi_i, i = 1, 2, 3$ de classe $\mathcal{K}$ satisfaisant :

$$\varphi_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \varphi_2(\|x\|), \quad (3.23)$$

et

$$D^\alpha V(t, x) \leq -\varphi_3(\|x\|), \quad (3.24)$$

où $\alpha \in [0, 1]$. Alors la solution du système fractionnaire (3.15) est asymptotiquement stable.

Preuve.

Sous les hypothèses (3.23) et (3.24), l'inégalité suivante est bien vérifiée :

$$D^\alpha V \leq -\varphi_3(\varphi_1^{-1}(V)). \quad (3.25)$$

A partir du lemme 3.0.1, V est majorée par la solution de l'équation différentielle suivante :

$$D^\alpha g(t) = -\varphi_3(\varphi_1^{-1}(g(t))), g(0) = V(0, x(0)). \quad (3.26)$$

Ce qui implique que $g(t) = 0$, pour tout $t \geq 0$, si $g(0) = 0$, car $\varphi_3\varphi_1^{-1}$ est une fonction de classe $\mathcal{K}$.

Si non, la fonction g vérifiée : $g(t) \geq 0$, pour $t \in [0, +\infty[$.

Il vient alors d'après l'équation (3.26) que $D^\alpha g(t) \leq 0$.

Toujours, d'après le lemme 3.0.1 ci-dessus, nous avons :

$$g(t) \leq g(0), \text{ pour tout } t \in [0, +\infty[. \quad (3.27)$$

Alors la stabilité asymptotique du système (3.26) est démontré par contradiction.

Cas 1 : Supposons qu'il existe $t_1 \geq 0$ satisfaisant :

$${}_0D_{t_1}^\alpha g(t) = -\varphi_3(\varphi_1^{-1}(g(t_1))) = 0. \quad (3.28)$$

On rappelle que l'opérateur de dérivation de Caputo $D^\alpha g(t) = {}_0D_t^\alpha g(t)$, ce qui implique :

$$D^\alpha g(t) = {}_0D_t^\alpha g(t) = {}_{t_1}D_t^\alpha g(t) = -\varphi_3(\varphi_1^{-1}(g(t))), \text{ pour tout } t \geq t_1. \quad (3.29)$$

Il est claire que $g(t) = 0$ est le point d'équilibre du système précédent.

En tenant compte de la Remarque 3.1 et de la relation (3.28), $g(t) = 0$, pour $t \geq t_1$, si et seulement si $g(t_1) = 0$.

Cas 2 : Supposons qu'il existe une constante $\epsilon \geq 0$, tel que :

$$g(t) \geq \epsilon, \text{ pour tout } t \geq 0. \quad (3.30)$$

En utilisant (3.27) et (3.30) donne :

$$\epsilon \leq g(t) \leq g(0), \text{ pour tout } t \geq 0. \quad (3.31)$$

En exploitant les inégalités précédentes, (3.26) devient :

$$-\varphi_3(\varphi_1^{-1}(g(t))) \leq -\varphi_3(\varphi_1^{-1}(\epsilon)) = -rg(0) \leq -rg(t), \quad (3.32)$$

où $r = \frac{\varphi_3(\varphi_1^{-1}(\epsilon))}{g(0)} > 0$. Par suite :

$$D^\alpha g(t) \leq -rg(t). \quad (3.33)$$

En tenant compte de la propriété précédente, il existe une fonction $M(t) > 0$ satisfaisant :

$$D^\alpha g(t) + M(t) = -rg(t). \quad (3.34)$$

En appliquant la transformé de Laplace de l'équation (3.34), on obtient l'égalité suivante :

$$s^\alpha g(s) - g(0)s^{\alpha-1} + M(s) = -rg(s). \quad (3.35)$$

Cette dernière est équivalente à :

$$g(s) = \frac{g(0)s^{\alpha-1} - M(s)}{s^\alpha + r}. \quad (3.36)$$

On rappelle que la transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffer à deux paramètres est donnée par :

$$L\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\beta}(-rt^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + r}. \quad (3.37)$$

En appliquant maintenant la transformée inverse de Laplace de l'équation (3.36), on obtient l'égalité suivante :

$$g(t) = g(0)E_\alpha(-rt^\alpha) - M(t) * \left[t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-rt^\alpha)\right]. \quad (3.38)$$

Puisque les deux fonctions $t^{\alpha-1}$ et $E_{\alpha,\alpha}(-rt^\alpha)$ sont définies positives, il en résulte de l'équation (3.38), l'inégalité suivante :

$$g(t) \leq g(0)E_\alpha(-rt^\alpha), \quad (3.39)$$

ce qui contredit l'hypothèse $g(t) \geq \epsilon$.

Selon les discussions des deux cas précédents, on peut alors conclure sur la convergence de g vers zéro, quand $t \rightarrow \infty$

. En outre, puisque V est définie positive et est majorée par g , il vient que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, x) = 0$.

Enfin, on vérifié bien à partir de l'inégalité (3.23) que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, ce qui implique que la solution du système fractionnaire est asymptotiquement stable. Ceci termine la preuve du théorème. $\square$

Théorème 3.0.3. [13]

Supposons qu'il existe une fonction positive $V(t, x) \in C[T_q \times S_\rho, R_+]$ satisfaisant :

$$D^\alpha V(t, x(t)) \leq -\psi(V(t, x)), \text{ pour tout } t_0 \in T_q \text{ et } (t, x) \in T_q \times S_\rho, t \geq t_0, \quad (3.40)$$

où $\psi \in K$, alors la solution du système fractionnaire (3.15) est asymptotiquement stable.

Preuve.

Soit $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ une solution du système (3.15), et soit $V(t, x)$ une fonction définie positive. Par définition, il existe $\varphi \in K$, telle que :

$$\varphi(\|x\|) \leq V(t, x), \text{ pour tout } (t, x) \in T_q \times S_\rho. \quad (3.41)$$

Soit maintenant $\epsilon > 0, 0 < \epsilon < \rho$, on peut trouver alors $\sigma = \sigma(t_0, \epsilon)$, tel que :

$$\|x\| < \sigma \Rightarrow V(t_0, x_0) < \varphi(\epsilon). \quad (3.42)$$

Ce choix est possible, car $V(t_0, 0) = 0$ et $V(t_0, x)$ est continue par rapport à x .

On rappelle aussi que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville de la fonction V sont reliées par :

$$D^\alpha V(t, x(t)) = {}^R D^\alpha V(t, x(t)) - \frac{(t - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} V(t_0, x_0), \text{ pour tout } t \geq t_0 \text{ et } \alpha \in]0, 1[, \quad (3.43)$$

et l'intégrale de Riemann de la fonction $(t - t_0)^\beta$ est donnée par :

$${}^R D^{-\alpha} (t - t_0)^\beta = \frac{\Gamma(1 + \beta)}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)} (t - t_0)^{\beta + \alpha}, \beta \in]-1, +\infty[\text{ et } \alpha \in]0, 1[. \quad (3.44)$$

En particulier, si $\beta = -\alpha$, on a :

$${}^R D^{-\alpha} (t - t_0)^{-\alpha} = \Gamma(1 - \alpha). \quad (3.45)$$

Alors de l'inégalité $D^\alpha V(t, x(t)) \leq -\psi(V(t, x)) \leq 0$, et de la formule (3.45), il vient :

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0), \text{ pour tout } t \geq t_0 \text{ et } x \in S_\rho. \quad (3.46)$$

En utilisant les relations (3.41), (3.42) et (3.46), on trouve alors :

$$\varphi(\|x\|) \leq V(t, x) \leq V(t_0, x_0) \leq \varphi(\epsilon). \quad (3.47)$$

Puisque $\varphi \in K$, nous avons donc :

$$\|x(t)\| < \epsilon, \text{ pour tout } t \in T_q, \text{ et } t \geq t_0. \quad (3.48)$$

Ce qui montre que la solution du système (3.15) est stable.

Montrons maintenant que $x(t)$ est asymptotiquement stable.

Pour cela, supposons également que $D^\alpha V(t, x(t)) \leq -\psi(V(t, x))$. Toujours, d'après l'inégalité (3.46), on trouve :

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0), \text{ pour tout } t \geq t_0 \text{ et } x \in S_\rho.$$

Ce qui assure que $V(t, x(t))$ est décroissante et tend vers V_0 , quand $t \rightarrow +\infty$, et de plus $V_0 = 0$.

En effet, si on suppose le contraire, c'est-à-dire que $V(t, x) \geq V_0 > 0$. Nous avons donc :

$$D^\alpha V(t, x(t)) < -\psi(V_0) = -C, \quad (3.49)$$

où C est une constante strictement positive.

En introduisant l'intégrale de Riemann sur les deux cotés de cette dernière égalité, et en utilisant la formule (3.44) avec $\beta = 0$, on trouve :

$$V(t, x(t)) - V(t_0, x_0) \leq \frac{-C}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - t_0)^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.50)$$

En passant à la limite, quand $t \rightarrow +\infty$, on obtient alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, x(t)) = -\infty. \quad (3.51)$$

Ce qui contredit le fait que $V(t, x(t))$ est définie positive. On a alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, x(t)) = V_0 = 0. \quad (3.52)$$

Par conséquent :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(x(t))\| = 0. \quad (3.53)$$

Et finalement :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0. \quad (3.54)$$

Maintenant, on peut en venir à un autre théorème de la stabilité au sens de Lyapounov.

□

Théorème 3.0.4. [14]

Lorsqu'il existe une fonction de Lyapounov positive $V(x)$, telle que $D^\alpha(V(x)) < 0$ pour tout $t \geq t_0$, alors la solution de système (3.15) est asymptotiquement stable.

Preuve.

La preuve de ce théorème se déroule, en démontrant, la propriété suivante :

$$D^\alpha(V(x)) < 0 \Leftrightarrow D^\alpha(V(x)) \leq -\Psi(V(x)), \quad \Psi \in K, \quad (3.55)$$

ainsi que l'utilisation du Théorème 3.0.4.

En effet, soit $\Psi \in K$, telle que $D^\alpha(V(x)) \leq -\Psi(V(x))$.

Puisque $V(x)$ est définie positive, et $\Psi \in K$, on trouve alors $\Psi(V(x)) > 0$. Par conséquent :

$$D^\alpha(V(x)) \leq -\Psi(V(x)) < 0. \quad (3.56)$$

Supposons maintenant que :

$$D^\alpha(V(x)) < 0. \quad (3.57)$$

En tenant compte de la propriété précédente, il existe alors une fonction définie positive $m(x)$, satisfaisant :

$$D^\alpha(V(x)) = -m(x). \quad (3.58)$$

Puisque $m(x)$ et $V(x)$ sont définies positives, les inégalités suivantes sont bien vérifiées :

$$m(x) \geq \varphi_1 \|x\|, \quad \varphi_1 \in k, \quad (3.59)$$

et

$$V(x) \geq \varphi_2 \|x\|, \quad \varphi_2 \in k. \quad (3.60)$$

En exploitant les inégalités (3.59) et (3.60), (3.57) devient :

$$D^\alpha V \leq -\varphi_1(\varphi_2^{-1}(V(x))) = -\psi(V(x)), \quad \psi \in K. \quad (3.61)$$

Enfin, en tenant compte de la propriété (3.55) et du théorème 3.0.3, l'énoncé du théorème 3.0.4 a été prouvée. $\square$

3.1 Fonctions candidates de Lyapounov à la stabilité des systèmes fractionnaires

Cette partie présente une nouvelle propriété pour les dérivés fractionnaires au sens de Caputo, lorsque $0 < \alpha < 1$, qui permet de trouver une fonction candidate de Lyapounov simple pour de nombreux systèmes d'ordre fractionnaire, et par conséquent la preuve de leur stabilité, en utilisant l'extension de la méthode directe de Lyapounov d'ordre fractionnaire.

Lemme 3.1.1. [15]

Soit $x(t) \in \mathbb{R}$ une fonction dérivable au sens de Caputo. Alors, pour tout $t > t_0$,

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) \leq x(t)D^\alpha x(t), \quad \alpha \in (0,1). \quad (3.62)$$

Preuve.

Par définition, on a :

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (3.63)$$

De même :

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x(\tau)\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (3.64)$$

Nous avons donc :

$$x(t)D^\alpha x(t) - \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{[x(t) - x(\tau)]\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (3.65)$$

En utilisant le changement de variable $y(\tau) = x(t) - x(\tau)$, l'équation (3.65), peut se réécrire sous la forme :

$$x(t)D^\alpha x(t) - \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y(\tau)\dot{y}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (3.66)$$

Faisons l'intégration par parties, en posant :

$$\begin{cases} du &= y(\tau)\dot{y}(\tau)d\tau, \\ v &= \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \end{cases} \quad (3.67)$$

on trouve :

$$\begin{aligned} x(t)D^\alpha x(t) - \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) &= \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{-y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} + \frac{y^2(t_0)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^\alpha} \\ &+ \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau. \end{aligned} \quad (3.68)$$

D'autre part, en utilisant la règle de l'hôpital, on trouve :

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \frac{-y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{2y(\tau)\dot{y}(\tau)}{2\alpha\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha-1}} = 0. \quad (3.69)$$

Et enfin :

$$\begin{aligned} x(t)D^\alpha x(t) - \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) &= \frac{y^2(t_0)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^\alpha} \\ &+ \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau, \text{ pour tout } t \geq t_0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

□

Remarque 3.4. Le lemme précédent reste vrai, si $x(t) \in \mathbb{R}^n$, et dans ce cas :

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^T(t)x(t) \leq x^T(t)D^\alpha x(t), \text{ pour tout } \alpha \in (0,1) \quad (3.71)$$

Corollaire 3.1.1. Considérons le système fractionnaire suivant :

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad (3.72)$$

où $\alpha \in (0,1)$. Soit $x = 0$, le point d'équilibre de ce système. Si la condition suivante est satisfaite.

$$x(t)f(x(t)) \leq 0, \forall x, (\text{resp. } x(t)f(x(t)) < 0, \text{ pour tout } x \neq 0,) \quad (3.73)$$

alors le point d'équilibre 0 est stable (resp. asymptotiquement stable).

Preuve.

Considérons la fonction de Lyapounov suivante :

$$V(x(t)) = \frac{1}{2}x^2(t) \quad (3.74)$$

En utilisant le lemme précédent, on trouve :

$$D^\alpha V(x(t)) \leq x(t)D^\alpha x(t) = x(t)f(x(t)) \leq 0, \forall x (\text{resp. } < 0, \forall x \neq 0), \quad (3.75)$$

Alors, d'après le théorème 3.0.4, le point d'équilibre 0 est stable (resp. asymptotiquement stable). □

Exemple 3.1.1. Considérons le système fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = -\sin^2(t)x(t) - \sin(t)\cos(t)y(t), \\ D^\alpha y(t) = -\sin(t)\cos(t)x(t) - \cos^2(t)y(t), \end{cases} \quad (3.76)$$

Considérons également la fonction de Lyapounov suivante :

$$V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}(x^2(t) + y^2(t)). \quad (3.77)$$

En utilisant la propriété suivante :

$$\dot{x}(t) = D^{1-\alpha} D^\alpha x(t), \quad (3.78)$$

le système (3.76), peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -D^{1-\alpha}(-\sin^2(t)x(t) - \sin(t)\cos(t)y(t)), \\ \dot{y}(t) = -D^{1-\alpha}(\sin(t)\cos(t)x(t) - \cos^2(t)y(t)). \end{cases} \quad (3.79)$$

Si on utilise la dérivée classique de la fonction de Lyapounov, on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), y(t)) &= x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) \\ &= -x(t)D^{1-\alpha}(\sin^2(t)x(t) - \sin(t)\cos(t)y(t)) \\ &\quad - y(t)D^{1-\alpha}(\sin(t)\cos(t)x(t) - \cos^2(t)y(t)). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Comme nous le voyons très bien dans l'équation (3.80), il est difficile de reconnaître le signe de la première dérivée de la fonction de Lyapounov (3.77), et par conséquent, on ne peut pas conclure sur la stabilité. Cependant, lorsque le lemme 3.1.1 est employé, la dérivée fractionnaire de la fonction de Lyapounov (3.77), satisfaisant :

$$D^\alpha V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) + \frac{1}{2}D^\alpha y^2(t) \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} &\leq x(t)D^\alpha x(t) + y(t)D^\alpha y(t) \\ &= -[x(t)\sin(t) + y(t)\cos(t)]^2 \\ &< 0, \text{ pour tout } (x, y) \neq (0, 0) \end{aligned} \quad (3.82)$$

De l'inégalité (3.82), la dérivée fractionnaire de la fonction de Lyapounov est définie négative sur $\mathbb{R}^2$, ce qui montre la stabilité asymptotique du système (3.76).

La Figure (3.2) illustre l'évolution temporelle des états du système (3.76), avec la condition initiale $(x, y) = (-1, -2)$ et l'ordre de dérivé fractionnaire $\alpha = 0.90$.

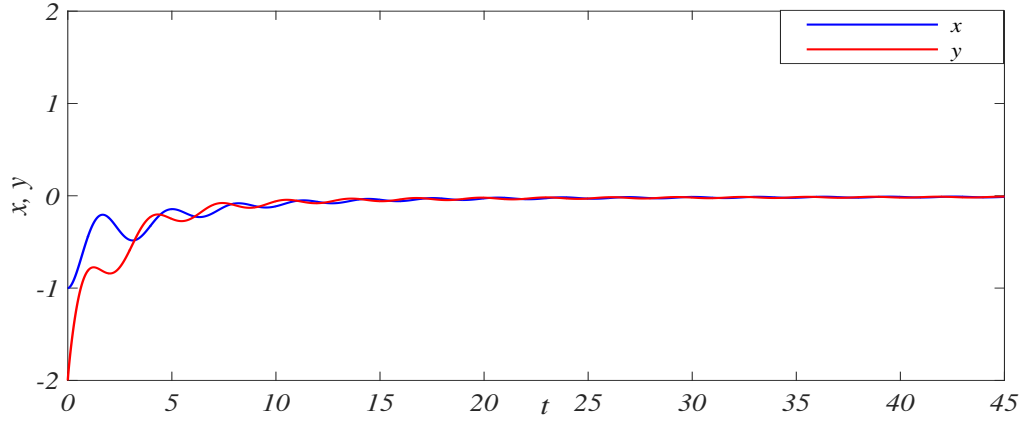


FIGURE 3.2 – L'évolution temporelle des états du système (3.76).

Exemple 3.1.2. Considérons le système fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = -x(t) + y^3(t), \\ D^\alpha y(t) = -x(t) - y(t), \end{cases} \quad (3.83)$$

Considérons également la fonction de Lyapounov :

$$V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{4}y^4(t). \quad (3.84)$$

D'autre part, l'utilisation du Lemme(3.1.1) donne :

$$\begin{aligned} D^\alpha V(x(t), y(t)) &= \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) + \frac{1}{4}D^\alpha y^4(t) \\ &\leq x(t)D^\alpha x(t) + \frac{1}{2}y^2(t)D^\alpha y^2(t) \\ &\leq x(t)D^\alpha x(t) + y^3(t)D^\alpha y(t) \\ &\leq -x^2(t) - y^4(t) \\ &< 0, \text{ pour tout } (x, y) \neq (0, 0) \end{aligned} \quad (3.85)$$

Comme nous pouvons voir dans l'inégalité (3.85), la dérivée fractionnaire de la fonction de Lyapounov est définie négative sur $\mathbb{R}^2$,

ce qui montre la stabilité asymptotique du système (3.83).

La Figure (3.3) illustre l'évolution temporelle des états du système (3.83), avec la condition initiale $(x, y) = (3, -3)$ et l'ordre de dérivé fractionnaire $\alpha = 0.95$.

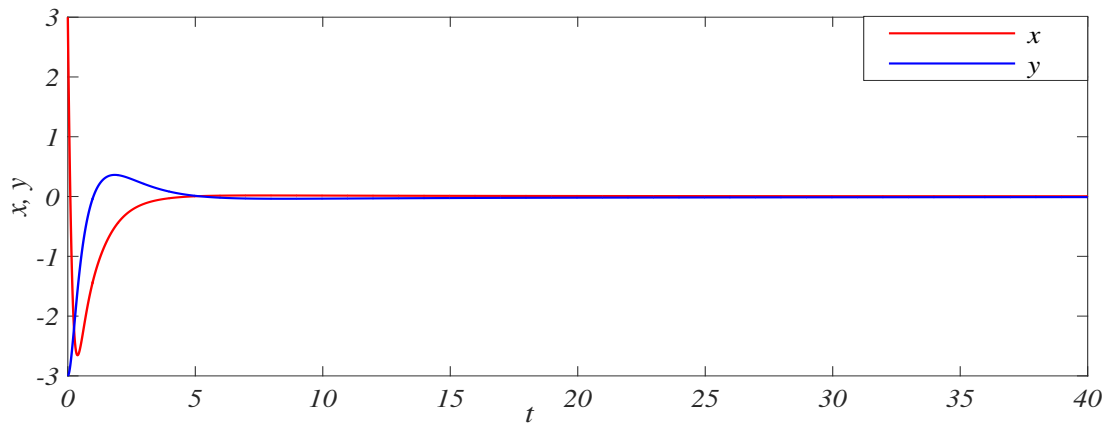


FIGURE 3.3 – L'évolution temporelle des états du système (3.83).

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail de mémoire, nous avons présenté la stabilisation des systèmes fractionnaires par l'approche d'une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapounov fractionnaire.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté quelques notions de base du calcul fractionnaire, qui nous semblent utiles pour la bonne compréhension de notre travail présenté dans ce mémoire. Nous avons exhibé quelques notions la théorie de la dérivation fractionnaire à partir de quelques rappels sur les fonctions de Gamma d'Euler et de Mittag-Leffler et sur les différentes définitions et les propriétés de la dérivée fractionnaire.

Dans le deuxième chapitre, nous avons abordé le problème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles fractionnaires de type de Caputo. Ensuite, nous avons présenté dans la deuxième section de ce chapitre la résolution numérique de ces équations.

Dans le troisième chapitre,, nous avons présenté la stabilisation des systèmes fractionnaires par l'approche d'une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapounov d'ordre fractionnaire. L'utilisation de cette nouvelle approche a nous permis de montrer sous certaines hypothèses adéquates la démonstration de la stabilisation asymptotique de tels systèmes.

Bien que le travail présenté dans ce mémoire se limite à l'accès simple, nos résultats fondamentaux pourraient donc donner lieu à des études complémentaires dans les directions suivantes :

- * L'application de la nouvelle extension de la méthode directe de Lyapounov des systèmes fractionnaire pour le contrôle et à la synchronisation du chaos des systèmes fractionnaires.

- * Une extension des ces approches sur la stabilité des systèmes perturbés.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Jesus, I.S and Machado, J.T. Fractional control of heat diffusion systems. *Nonlinear Dynamics* **54** (3) (2008) 263–282.
- [2] Schmidt, V.H. and Drumheller, J.H. Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate. *Physical Review B* **4** (1971) 4582–4597.
- [3] Bagley, R.L. and Calico, R.A. Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *Journal of Guid Control Dyn.* **14** (2) (1991) 304–311.
- [4] Mittag-Leffler, G.M. Sur la représentation analytique d’une branche uniforme d’une fonction homogène. *Acta Mathematica* **29** (1905) 101–182.
- [5] Agarwal, R.P. A propos d’une note de M. Pierre Humbert. *C.R. Académie des Sciences*, (1953).
- [6] Podlubny, I Fractional Differential Equations. *Academic Press. San Diego*, (1999).
- [7] Weilbeer, M. Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their Analytical Background. Thèse de Doctorat, *Carl-Friderich-Gauss Facultat fur Mathematik und Informatik, der Technischen Universitat Braunschweig*, (2005).
- [8] Diethelm, K. The Analysis of Fractional Differential Equations. *Springer, Verlag Berlin Heideberg*, (2010).

- [9] Sabattier, J., Moze, M., and Farges, C. LMI stability conditions for fractional order system. *Computers and Mathematics with Applications* **59** (5) (2010) 1594–1609.
- [10] Thavazoei, M.S. and Haeri, M.A note on the stability of fractional order system. *Mathematics and Computers in Simulation* **79** (5) (2009) 1566–1576.
- [11] Hassan K. Khalil, *Nonlinear Systems, third ed., Prentice Hall*, (2002).
- [12] Li, Y., Chen, Q and Podlubny, I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized Mittag Leffler stability. *Computers and Mathematics with Applications* **59** (2010) 1810–1821.
- [13] Jarad, F., Abdeljawad, Th and Baleanu, D. Stability of q -fractional non-autonomous systems. *Nonlinear Analysis : Real World Applications* **14** (2013) 780–784.
- [14] Chen, D., Zhang, R., Liu, X., Ma, X., Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, (2014), doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.05.005>
- [15] Aguila-Camacho, N., Duarte-Mermoud, M.A. and Gallegos, J.A. Lyapunov functions for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **19** (9) (2014) 2951–2957.