



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid Boussof Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

**Sur une classe de controle stochastique
optimal singulier et application**

**Préparé par : Amal Benhamada
Chourouk Yahioune**

Soutenue devant le jury

Benaouicha Loubna	MAA	C. U. Abdelhafid Boussof, Mila	Président
Boukaf Samira	MCA	C. U. Abdelhafid Boussof, Mila	Rapporteur
Boularouk Yakoub	MCA	C. U. Abdelhafid Boussof, Mila	Examineur

Année universitaire: 2022/2023

REMERCIEMENTS

Avant tout, nous remercions **Allah** tout puissant de nous avoir donné la volonté et la courage de mener ce travail.

D'une façon toute particulière, on tient à remercier notre encadreur Dr **Boukaf Samira**, pour la l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené.

Je tiens à remercie les membres de jury, **Boularouk Yakoub** et **Benaouicha Loubna** et tous les enseignants du département de mathématique qui ont contribué la formation durant mon vie scolaire et tout les membres de centre universitaire **Abdelhafid Boussouf**.

Enfin, nous remercions toute personne ayant porté appui dans la réalisation de ce travail, et surtout notre famille.

Chourouk, Amal

DÉDICACE

Tous les mots ne sauraient exprimer l'amour, la gratitude, le respect, c'est tous simplement que : je dédie ce mémoire de master à :

À mon très chères parents, ma mère **Fatiha** et mon père **Achoure** Pour leur amour, leur encouragement, Merci pour faire l'impossible pour moi.

À mes chères sœurs **Hayat** et **Khadidja** et leurs maris **Walide** et **Houssame**.

À mes anges **Tadj Eddin**, **Midou**, **Siradj**, **Firase**, **Yanise**, que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

À mon frère **Marouane**, et ma grande mère **Hadda**.

À tous les membres de ma famille, mes oncles,tantes, cousins, cousines, et surtout : **Rima**, **Fatima**.

À mes plus proches copines, la cause de ma joie :**Chaima**, **Rahil**, **Yasmine**, **Rayane**, **Yassamine**, **Ibtissame**, **Aya**, **Amel**.

À tous les membre de ma promotion du master 2023, et ma binôme **Amal**.

À tout qui occupe une place dans ma vie.

Chourouk

DÉDICACE

Je dédie ce travail : À qui les mots ne pouvant remplir leur droit, à mon parents à ma chère mère **Kamla** et mon chère père **Ammar** qui n'ont jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études.

À ceux qui ont eu un profond impact sur de nombreux obstacles et difficultés pour mes frères **Karima** et **Bassma**, à mon cher frère **Ali**, et à mes neveux **Ritaje** et **Rahma**, **Adem**, à ma précieuse grand-mère **Aicha**.

À mon fiancé **Brahim** qui était un lien et m'a aidé.

À ceux qui ont travaillé dur avec moi pour terminer ce travail, ma binôme **Chourouk**.

À tous mes amis et à tous ceux qui se sont joints à moi et qui m'ont aidé avec tout ce qu'ils avaient. À mon meilleur ami **Souad**.

À toute ma famille de près ou de loin.

Amal

RÉSUMÉ

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude du problème de contrôle optimal singulier. Nous établissons une condition d'optimalité nécessaire pour le contrôle stochastique singulier sous la forme du principe du maximum de Pontryagin. Le domaine de contrôle considéré est supposé convexe.

Nous donnons dans le premier chapitre, un rappel sur quelques définitions qui nous avons utilisés.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution d'équations différentielles stochastiques, utilisant l'itération de Picard.

Dans le troisième chapitre, nous intéressons aux différentes classes de contrôle stochastique.

Le dernier chapitre, étudier le contrôle stochastique unique optimal pour les systèmes contrôlés par des équations différentielles stochastiques contrôlées non linéaires.

Mots-clés : les équations différentielles stochastiques, contrôle stochastique, un contrôle singulier optimal.

ABSTRACT

The main objective of this memory is the study of the singular problem of optimal control. We establish a necessary condition of optimity for singular stochastic control in the form of the principle of the maximum of Pontryagin. The area of control considered is presumed to be convex.

In the first chapter, we give a reminder of some of the definitions we used.

In the second chapter, we are looking at stochastic differential equations. We will mention the circumstances in which EDS recognizes a single solution, to prove it we will use the picard replication method.

In the third chapter, we are interested in the different classes of stochastic control.

In the last chapter, we examine the optimal single stochastic control for systems controlled by non-linear stochastic controlled differential equations.

Keywords : stochastic differential equations, stochastic control, optimal singular control.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو وضع الشرط الضروري لدالة التحكم العشوائي في الحالة الغير منتظمة المعروف بمبدأ الحد الأقصى لبونترياغين مع افتراض أن منطقة المراقبة محدبة.

نقدم في الفصل الأول بعض التعاريف الأساسية التي استخدمناها.

في الفصل الثاني، سنذكر الظروف التي تقبل فيها المعادلات التفاضلية حلاً واحداً، لإثبات ذلك سنستخدم طريقة التكرار لبيكارد.

في الفصل الثالث سنتعرض إلى الفئات المختلفة للتحكم العشوائي.

نقدم في الفصل الأخير، التحكم العشوائي غير المنتظم الوحيد و الأمثل للأنظمة التي تتحكم فيها المعادلات التفاضلية العشوائية غير الخطية.

الكلمات الأساسية : المعادلات التفاضلية العشوائية، التحكم العشوائي، التحكم الفريد الأمثل.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	x
1 Généralités sur le calcul stochastique	1
1.1 Rappels sur les probabilités	1
1.2 Processus stochastiques	2
1.3 Espérance conditionnelle	3
1.3.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle	3
1.4 Martingales	4
1.5 Mouvement brownien	5
2 Équations différentielles stochastiques	7
2.1 Les inégalités	8
2.1.1 Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy	8
2.1.2 lemme de Gronwall	8
2.1.3 Inégalité de Cauchy-Schwartz	9
2.2 Équations différentielles stochastiques	9
2.3 Existence et unicité	11
2.3.1 Notations et définitions	11
2.3.2 Théorème d'existence et d'unicité	12

2.4	Équations différentielles stochastiques linéaires	17
2.4.1	Cas où le mouvement Brownien est uni-dimensionnel	18
2.4.2	Le cas où le mouvement Brownien est d-dimensionnel	20
3	Classe de control optimal stochastique	22
3.1	Controle	22
3.1.1	Classes de controles	23
3.2	Critère de coût ou performance	26
3.3	Méthodes de résolution en controle stochastique	27
3.3.1	Le principe de programmation dynamique	27
3.3.2	Le principe du maximum de Pontryagin	29
4	le principe du maximum pour un controle singulier	32
4.1	Hypothèses et énoncé du problème de controle	33
4.2	Principe du maximum stochastique pour un controle singulier	36
	Conclusion	43

INTRODUCTION

Dans ce mémoire de master s'inscrit dans le cadre de la théorie de contrôle optimal stochastiques. Notre objectif dans ce travail est d'obtenir un principe du maximum stochastique pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques EDSs contrôlées. Les coefficients de EDSs et la fonction de coût sont contrôlés. Le domaine de contrôle est supposé convexe. Une méthode variationnelle est utilisée pour résoudre notre problème de contrôle.

Nous présentons dans ce travail quatre chapitres, les deux premiers chapitres sont introductifs et permettent d'introduire les outils essentiels pour le troisième chapitre, ces résultats de dernier chapitre ont été introduits par : [17].

Plus précisément, dans le premier chapitre, on s'intéresse aux éléments de calcul stochastique : processus stochastiques, filtrations, Formule d'Itô, Espérance conditionnelle, ...etc.

Dans le deuxième chapitre on s'intéresse aux équations différentielles stochastiques EDSs. Nous allons énoncer les conditions où un EDS admet une solution (existence) et cette solution est unique, pour prouver ça on va utiliser la méthode itérative de Picard, on va utiliser des lemmes comme Gronwall, Burkholder-Davis-Gundy, point fixe, Doob...etc.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse par les différentes classes de contrôle stochastique (contrôle admissible, contrôle optimal, contrôle relaxé, contrôle feed back,

contrôle singulier, ...).

Dans le quatrième chapitre, on a établi des conditions nécessaires d'optimalité pour des systèmes gouvernés par des équations différentielle stochastiques EDSs. Ces résultats ont été établit et prouvé par [17].

NOTATIONS

$(\Omega, \mathcal{F})$: espace mesurable.

$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$: filtration.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: espace probabilisé.

$L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$: l'ensemble des fonctions réelles.

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$: espace probabilisé filtré.

$\mathbb{R}^+$: l'ensemble des réelles positive.

$dt - p.p$: presque partout par rapport la mesure dt .

$P - p.s$: presque surement pour la mesure de probabilité P .

B_t : un mouvement Brownien.

$B^j(t)$: la $j^{\text{ième}}$ composante de $B(t)$.

$\mathbb{R}^d$: l'espace réel euclidien de dimension d .

$\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$: l'ensemble des matrices réelles $d \times d$.

I_d : matrice identité $d \times d$.

$\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^d$: l'ensemble des matrices réelles $n \times d$.

$\sigma^j(t, X)$: la $j^{\text{ième}}$ colonne de $\sigma(t, X)$.

$\mathcal{U}$: ensemble de controles admissibles.

$J(\cdot)$: la fonction de coût à minimiser.

u^* : controle optimal.

g_x : le gradient de g en x .

notations

$H(t, X_t, u_t, p_t)$: hamiltonien.

$\mathbb{A}$: un borélien de R^d .

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LE CALCUL STOCHASTIQUE

1.1 Rappels sur les probabilités

Définition 1.1.1 Une *tribu* ou σ -algèbre $\mathcal{F}$ sur Ω , ensemble quelconque non vide, est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $\mathcal{F}$ est stable par complémentarité $\left[\forall i \in I, \forall A_i \in \mathcal{F} \implies A_i^c \in \mathcal{F} \right]$,
3. $\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable $\left[\forall i \in I, \forall A_i \in \mathcal{F}, \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F} \right]$.

Définition 1.1.2 (I ensemble dénombrable).

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est dit *espace mesurable* ou *espace probabilisable*, les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés les ensembles mesurables.

Définition 1.1.3 Soit $\mathcal{A}$ une partie quelconque de $\mathcal{P}(\Omega)$. On appelle **tribu engendrée** par $\mathcal{A}$ l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$, notée $\sigma(\mathcal{A})$.

Définition 1.1.4 Soit (Ω, τ) un espace topologique. On appelle **tribu borélienne** sur Ω , la tribu engendrée par τ , i.e., $\sigma(\tau)$, notée $\mathcal{B}(\Omega)$.

Définition 1.1.5 Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On appelle **mesure** sur $\mathcal{F}$ toute fonction d'ensemble μ définie sur $\mathcal{F}$ positive telle que :

1. $\forall A \in \mathcal{F}, \mu(A) < \infty$,
2. Si (A_n) sont deux à deux disjoints ($A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$) alors

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est alors appelé **espace mesuré**.

Notons que si $\mu(\Omega) = 1$, alors μ est dite mesure de probabilité et $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est dit **espace probabilisé**.

Définition 1.1.6 Soient $(\Omega, \mathcal{F})$, (E, Σ) deux espaces mesurables. Une application $f : \Omega \rightarrow E$ est dite $(\mathcal{F}, \Sigma)$ mesurable si :

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}, A \in \Sigma.$$

Dans le cas où Σ est une tribu borélienne, on écrira simplement $\mathcal{F}$ – mesurable.

Définition 1.1.7 On appelle **filtration** $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$, une famille croissante de sous tribu de $\mathcal{F}$ i.e. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \forall s \leq t$.

1.2 Processus stochastiques

Définition 1.2.1 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires, définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans (E, Σ) , noté par $(X(t), t \in I)$, où I

est un ensemble ordonné quelconque :

$$\begin{aligned} X : \Omega \times I &\longrightarrow E \\ (\omega, t) &\mapsto X(\omega, t). \end{aligned}$$

Pour $\omega \in \Omega$ fixé, l'application $t \mapsto X_\omega(t)$ de I dans E est appelée **trajectoire du processus**.

Définition 1.2.2 Le processus $(X_t)_{t \in T}$ est dit **adapté à la filtration** $(\mathcal{F})_{t \in T}$ si pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

1.3 Espérance conditionnelle

Notons $L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$ l'ensemble des fonctions réelles $\mathcal{F}$ -mesurable et intégrables par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

Définition 1.3.1 Soit $X \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. On définit l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$, l'unique variable aléatoire $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ $\mathcal{G}$ -mesurable sur Ω telle que :

$$\int_B X d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) d\mathbb{P}, \forall B \in \mathcal{G}.$$

1.3.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Soient $X, Y \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, presque sûrement on a :

1. Linéarité : Si $X, Y \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$, $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}$ alors :

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y | \mathcal{G}) = \lambda \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) + \mu \mathbb{E}(Y | \mathcal{G}).$$

2. Monotonie : Si $X, Y \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$ alors :

$$X \geq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(Y | \mathcal{G}),$$

en particulier

$$X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \geq 0.$$

3. Si X est $\mathcal{G}$ -mesurable alors :

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = X.$$

4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, si Y est $\mathcal{G}$ -mesurable alors :

$$\mathbb{E}(XY | \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X | \mathcal{G}),$$

en particulier

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G})Y | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{G})\mathbb{E}(Y | \mathcal{G}).$$

5. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$ alors :

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X).$$

6. Si $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ alors :

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}_2) | \mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(X | \mathcal{G}_1).$$

1.4 Martingales

Définition 1.4.1 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, i.e.,

$$\forall t, s \in \mathbb{R}^+, s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ est dit **espace probabilisé filtré**.

- Un processus $(X(t), t \geq 0)$ est dit **adapté** si pour tout $t \geq 0$:

$$X(t) \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable.}$$

- On appelle **filtration naturelle** $(\mathcal{F}_t^X, t \geq 0)$ d'un processus stochastique $(X(t), t \geq 0)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ la filtration définie par :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X(s), 0 \leq s \leq t\}.$$

- Un processus $(X(t), t \geq 0)$ est dit **processus progressivement mesurable**, i.e. :

$$X(., .) : \mathcal{B}([\alpha, \beta]) \otimes \mathcal{F}_t \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

est mesurable.

Remarque 1.4.1 *Le processus $X(t)$ est $\mathcal{F}_t$ -progressivement mesurable $\Rightarrow X(t)$ est $\mathcal{F}_t$ -adapté et mesurable.*

Définition 1.4.2 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. Un processus stochastique $(X(t), t \geq 0)$, $\mathcal{F}_t$ -adapté tel que $\mathbb{E}(X(t)) < \infty$, est dit :*

- Martingale si :

$$\mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_s) = X(s), \forall t, s \in I, s \leq t.$$

- Sous martingale si :

$$\mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_s) \geq X(s), \forall t, s \in I, s \leq t.$$

- Sur martingale si :

$$\mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_s) \leq X(s), \forall t, s \in I, s \leq t.$$

1.5 Mouvement brownien

Définition 1.5.1 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré $t \geq 0$ un processus stochastique $X(t)$ $\mathcal{F}_t$ -adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est dit $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien sur $[0, +\infty[$ si $\forall 0 \leq s \leq t$, $X(t) - X(s)$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et est normalement distribué de moyenne 0 et covariance $(t - s)I_n$.*

Théorème 1.5.1 (Formule d'Itô)

Si les processus $X_1(t), \dots, X_n(t)$ possèdent des différentielles stochastiques sur $[a, b]$:

$$dX_k(t) = a_k(t)dt + \sum_{j=1}^m b_{kj}dw_j(t), \quad k = 1, \dots, n,$$

et si $u(t, X_1, \dots, X_n)$ est une fonction continue possédant aussi des dérivées continues $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial X_k},$
 $k = \{1, \dots, n\}, \frac{\partial^2 u}{\partial X_i \partial X_j}, i, j = \{1, \dots, n\}$, alors la fonction $\eta = u(t, X_1, \dots, X_n)$ possède aussi une différentielle stochastique :

$$\begin{aligned} d\eta(t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, X_1(t), \dots, X_n(t)) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial X_k}(t, X_1(t), \dots, X_n(t))a_k(t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial X_i \partial X_k}(t, X_1(t), \dots, X_n(t)) \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)b_{kj}(t)dt \\ &+ \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial X_k}(t, X_1(t), \dots, X_n(t)) \right) b_{kj}(t)dw_j(t). \end{aligned}$$

CHAPITRE 2

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

Le but de ce chapitre est d'étudier les équations différentielles aléatoires dans le cas normal, ce qui est le cas lorsque les coefficients de dérive b et de diffusion σ sont lipschitzien. Nous commençons par présenter les principaux résultats du contrôle stochastique en général.

Tout d'abord, nous allons énumérer tous les outils mathématiques qui nous permettront de mieux comprendre le problème qui est le principe du maximum dans le cas singulier. Le lemme fondamental de Gronwall et quelques inégalités que nous allons utiliser tout au long de ce travail.

La deuxième partie consiste à introduire le concept équations différentielles stochastiques, EDS abrégé ainsi que la preuve de l'existence et l'unicité.

2.1 Les inégalités

2.1.1 Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy

Pour tout $m > 0$, il y a C_m tel que pour tout temps d'arrêt τ on a :

$$E \left[\sup_{t \leq \tau} \left| \int_0^t f(s) dB_s \right|^m \right] \leq C_m E \left[\left(\int_0^t |f(s)|^2 ds \right)^{\frac{m}{2}} \right].$$

En particulier pour $m = 2$ et $\tau = T$ on a :

$$E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s) dB_s \right|^2 \right] \leq CE \left[\int_0^t |f(s)|^2 ds \right].$$

2.1.2 lemme de Gronwall

Lemme 2.1.1 Soient ϕ et f deux fonctions continues sur $[0, T]$ non négatives, c_0 une constante positive, si :

$$\phi(t) \leq c_0 + \int_0^t f\phi(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

alors :

$$\phi(t) \leq c_0 \exp \int_0^t f ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Preuve.

Soit :

$$\Phi(t) = c_0 + \int_0^t f\phi(t) ds,$$

alors :

$$\Phi'(t) = f\phi(t) \leq f\Phi(t),$$

et donc :

$$\begin{aligned} \left(\exp - \int_0^t f \, d\Phi(t) \right)' &= (\Phi'(t) - f\Phi(t)) \exp - \int_0^t f \, ds \\ &\leq (f\phi(t) - f\phi(t)) \exp - \int_0^t f \, ds = 0, \end{aligned}$$

donc :

$$\Phi \exp - \int_0^t f \, ds \leq \Phi(0) \exp - \int_0^t f \, ds = c_0,$$

et alors :

$$\phi(t) \leq \Phi(t) \leq c_0 \exp - \int_0^t f \, ds.$$

2.1.3 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Soient f, g deux fonction de carré intégrable, alors on a :

$$E(fg) \leq (E(f^2)E(g^2))^{\frac{1}{2}}.$$

2.2 Équations différentielles stochastiques

Le but des équations différentielles stochastiques est de fournir un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire. Une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$X'(t) = b(X(t)),$$

ou encore sous forme différentielle :

$$dX_t = b(X_t)dt.$$

Cette équation est utilisée pour décrire l'évolution d'un système physique. Si l'on prend en compte les perturbations aléatoires, on ajoute un terme de bruit, qui sera de la forme σdB_t , où B_t désigne un mouvement brownien et σ est pour l'instant une constante qui correspond à l'intensité du bruit. On arrive à une équation différentielle stochastique de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (2.1)$$

ou encore en forme intégrale, la seule qui ait un sens mathématique :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s) ds + \sigma B_t.$$

Généralement cette équation en autorisant σ à dépendre de l'état au moment t :

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (2.2)$$

ou encore sous forme intégrale :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s.$$

Notant que le sens donné à cette équation dépend de la théorie de l'intégrale stochastique qui est un très beau outil mathématique. Cette notion était déjà utilisée dans le contrôle stochastique ou la finance en particulier.

On continue à généraliser l'équation tout en autorisant b et σ à dépendre du temps t , on se place donc dans un cadre vectoriel. Elle se représente sous la forme suivante :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T.$$

2.3 Existence et unicité

2.3.1 Notations et définitions

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet, $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien à valeur dans $\mathbb{R}^d$ et X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^n$ indépendante de $(B_t)_{t \geq 0}$.

On pose : $\mathcal{F}_t = \sigma(X, B_s, s \leq t)$.

$T > 0$ et les fonctions soient mesurables et limitées :

$$b : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

$$\sigma : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow M^{n \times m}. \quad (2.4)$$

L'objectif est de résoudre l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (2.5)$$

Elle peut être écrite sous forme intégrale :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s, \text{ pour } 0 \leq t \leq T. \quad (2.6)$$

Le coefficient b s'appelle la dérive et σ est appelé diffusion.

Définition 2.3.1 Soit d et m des entiers positifs, et soient b et σ deux fonctions mesurables localement bornées définies sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ et à valeurs respectivement en $M^{d \times m}$ et $\mathbb{R}^d$, où $M^{d \times m}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $d \times m$ à coefficients réels.

On note : $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m}$ et $b = (b_i)_{1 \leq i \leq d}$.

La solution de l'équation :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases}$$

est la donnée d'un processus $\mathcal{F}_t$ -adapté continu $X = (X^1, \dots, X^d)$ à des valeurs en $\mathbb{R}^d$, telles que :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s, \text{ pour } 0 \leq t \leq T.$$

Ou encore, coordonnée par coordonnée, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$:

$$X_t^i = x^i + \int_0^t b_i(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s) dB_s^j, \text{ pour } 0 \leq t \leq T.$$

La question qui se pose : quelles conditions doivent être appliquées sur b et σ pour avoir l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDS (2.6).

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur b et σ pour avoir l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation (2.6).

2.3.2 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 2.3.1 *d'existence et d'unicité*

Soit b et σ deux fonctions borélienne. On suppose qu'il existe une constante L telle que :
pour tout $t \in [0, T]$ pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$:

$$|b(t, x) - b(t, x')| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, x')| \leq L |x - x'|, \quad (2.7)$$

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq L(1 + |x|), \quad (2.8)$$

$$E(|X_0|^2) < +\infty. \quad (2.9)$$

Il existe donc une solution unique X de l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Preuve.

Notons par H^2 l'espace de Banach constitué des processus X_t progressivement mesurables, tels que :

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2\right) < +\infty,$$

muni de la norme :

$$\|X\| = \left[E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2\right) < +\infty \right]^{\frac{1}{2}}.$$

H_c^2 est le sous-espace de H^2 formé par des processus continus.

1-L'existence : nous construisons la solution par la méthode itérative de Picard.

On pose :

$$\begin{aligned} X_t^0 &= x, \\ X_t^1 &= x + \int_0^t b(s, x) ds + \int_0^t \sigma(s, x) dB_s, \\ X_t^n &= x + \int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s. \end{aligned}$$

Les intégrales stochastiques sont bien définies car il est clair par récurrence que pour chaque n , X_t^n est continu et adapté, donc le processus $\sigma(s, X_s^{n-1})$ aussi.

Fixons un réel $T \geq 0$, et raisonnons sur l'intervalle $[0, T]$. Vérifions d'abord par récurrence sur n qu'il existe une constante C_n telle que pour tout $t \in [0, T]$:

$$E\left[(X_t^n)^2\right] \leq C_n. \quad (2.10)$$

Cette majoration si $n = 0$. Ensuite, si elle est vraie à l'ordre $n - 1$, on utilise les majorations :

$$|\sigma(s, y)| \leq K' + K|y|, \forall s \in [0, T], y \in \mathbb{R},$$

pour écrire

$$\begin{aligned} E[(X_t^n)^2] &\leq 3 \left(|x|^2 + E \left[\left(\int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds \right)^2 \right] + E \left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s \right)^2 \right] \right) \\ &\leq 3 \left(|x|^2 + tE \left[\int_0^t b(s, X_s^{n-1})^2 ds \right] + E \left[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds \right] \right) \\ &\leq 3 \left(|x|^2 + 4(1 + T)E \left[\int_0^t (K'^2 + K^2 (X_s^{n-1})^2) ds \right] \right) \\ &\leq C_n \text{ avec } C_n = 3(|x|^2 + 4T(1 + T)(K'^2 + K^2 C_{n-1})). \end{aligned}$$

Pour justifier le calcul du moment d'ordre deux de l'intégrale stochastique. On a utilisé le fait que $E \left[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds \right] \leq \infty$.

Ce qui découle de l'augmentation ci-dessus pour σ et de l'hypothèse de récurrence.

La majoration (2.7), et l'hypothèse sur σ entraînent que la martingale locale $\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s$ est pour chaque n une vraie martingale bornée dans L^2 sur l'intervalle $[0, T]$. Nous utilisons cette remarque pour majorer par récurrence :

$$E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2 \right].$$

On a :

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})) ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})) dB_s,$$

en utilisant l'inégalité de Doob, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right] \\
 & \leq 2E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s (b(r, X_r^n) - b(r, X_r^{n-1})) dr \right|^2 + \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s (\sigma(r, X_r^n) - \sigma(r, X_r^{n-1})) dB_r \right|^2 \right] \\
 & \leq 2 \left(4E \left[\left(\int_0^t (b(r, X_r^n) - b(r, X_r^{n-1})) dr \right)^2 \right] + 4E \left[\left(\int_0^t (\sigma(r, X_r^n) - \sigma(r, X_r^{n-1})) dB_r \right)^2 \right] \right) \\
 & \leq 2 \left(4C E \left[\int_0^t (b(r, X_r^n) - b(r, X_r^{n-1}))^2 dr \right] + 4T E \left[\int_0^t (\sigma(r, X_r^n) - \sigma(r, X_r^{n-1}))^2 dr \right] \right) \\
 & \leq 8(C + T)K^2 E \left[\int_0^t |X_t^{n+1} - X_t^n|^2 du \right] \\
 & \leq C_T E \left[\int_0^t \sup_{0 \leq u \leq r} |X_u^n - X_u^{n-1}|^2 dr \right].
 \end{aligned}$$

En notons $C_T = 8(C + T)K^2$. Si $g_n(u) = E \left[\sup_{0 \leq u \leq r} |X_u^n - X_u^{n-1}|^2 \right]$, on voit donc que :

$$g_{n+1} \leq C_T \int_0^t g_n(u) du.$$

D'autre part, (2.10) et les intégrales précédentes montrent que chacune des fonctions g_n est bornée sur $[0, T]$. En particulier, il existe une constante C'_T telle que $g_0(t) \leq C'_T$ pour $t \in [0, T]$. Une répétition simple utilisant (2.10) montre alors que pour tous $n \geq 0, t \in [0, T]$,

$$g_n(t) \leq C'_T (C_T)^n \frac{T^n}{n!}$$

Selon cette dernière inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left\| \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n| \right\|_{L^1} &\leq \sum_{n \geq 0} \left\| \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n| \right\|_{L^2} \\ &\leq \sqrt{C'_T} \sum_{n \geq 0} \frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n}} < \infty. \end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} |X_t^{n+1} - X_t^n|$ converge P-p.s. et X^n converge uniformément sur $[0, T]$ vers un processus $\hat{X}$ continue. Plus $X \in H_c^2$ puisque la convergence se produit dans H^2 . On vérifie que X est une solution de l'équation (2.6).

En passant la limite dans l'équation de récurrence pour X^n , on trouve que X est solution (forte) de (2.6) sur $[0, T]$.

2-L'unicité : Supposons que $X, \hat{X}$ solutions de l'équation (2.6), pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$X(t) - \hat{X}(t) = \int_0^t \sigma(s, X_s) - \sigma(s, \hat{X}_s) dB_s + \int_0^t b(s, X_s) - b(s, \hat{X}_s) ds.$$

Comme $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on peut estimer :

$$E \left(|X(t) - \hat{X}(t)|^2 \right) \leq 2E \left(\left| \int_0^t \sigma(s, X_s) - \sigma(s, \hat{X}_s) dB_s \right|^2 \right) + 2E \left(\left| \int_0^t b(s, X_s) - b(s, \hat{X}_s) ds \right|^2 \right).$$

D'après l'inégalité de Cauchy - Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} E \left(\left| \int_0^t b(s, X_s) - b(s, \hat{X}_s) ds \right|^2 \right) &\leq TE \left(\int_0^t |b(s, X_s) - b(s, \hat{X}_s)|^2 ds \right) \\ &\leq L^2 T \int_0^t E \left(|X_s - \hat{X}_s|^2 \right) ds \quad (d'après la condition de Lipschitz). \end{aligned}$$

D'une manière similaire :

L'isométrie d'Itô nous donne :

$$E \left(\left| \int_0^t \sigma(s, X_s) - \sigma(s, \hat{X}_s) dB_s \right|^2 \right) = E \left(\int_0^t |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, \hat{X}_s)|^2 ds \right) \\ \leq L^2 \int_0^t E(|X_s - \hat{X}_s|^2) ds \text{ (d'après la condition de Lipschitz).}$$

Pour une constante c , on a :

$$E |X(t) - \hat{X}(t)|^2 \leq c \int_0^t E(|X_s - \hat{X}_s|^2) ds, \text{ pour tout } 0 \leq t \leq T.$$

Soit $\phi(t) = E(|X(t) - \hat{X}(t)|^2)$, alors :

$$\phi(t) \leq c \int_0^t \phi(s) ds, \forall 0 \leq t \leq T.$$

En utilisant le lemme de Gronwall, avec $c_0 = 0$ implique $\phi \equiv 0$. Ainsi $X(t) = \hat{X}(t)$ p.s., pour tout $0 \leq t \leq T$, et $X(r) = \hat{X}(r)$ pour tout rationnel $0 \leq r \leq T$, pour des ensembles de probabilité zéro.

X et $\hat{X}$ sont des trajectoires continues presque sûrement :

$$P \left(\max_{0 \leq t \leq T} |X(t) - \hat{X}(t)| > 0 \right) = 0.$$

2.4 Équations différentielles stochastiques linéaires

Dans cette partie, nous allons étudier quelques propriétés relatives aux EDS linéaires, notamment l'inversibilité de la solution fondamentale d'une équation différentielle stochastique linéaire et l'équation vérifiée par le contraire.

2.4.1 Cas où le mouvement Brownien est uni-dimensionnel

On considère l'EDS linéaire suivante :

$$\begin{cases} dX_t = [A(t)X_t + b(t)] dt + [C(t)X(t) + \sigma(t)] dB_t \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (2.11)$$

Où B_t est un mouvement Brownien uni-dimensionnel et soit :

$$\begin{cases} A(\cdot), C(\cdot) \in L^\infty[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ b(\cdot), \sigma(\cdot) \in L^2[0, T] \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Selon le théorème (2.3.1) cette équation admet une solution forte unique $X(\cdot)$ représentée par :

$$X_t = \Phi_t x + \Phi_t \int_0^t \Phi_s^{-1} [b(s) - C(s)\sigma(s)] ds + \Phi_t \int_0^t \Phi_s^{-1} \sigma(s) dB_s, t \in [0, T]. \quad (2.12)$$

Où $\Phi_t(\cdot)$ est la solution unique de l'équation suivante :

$$\begin{cases} d\Phi_t = A(t)\Phi_t dt + C(t)\Phi_t dB_t \\ \Phi_t(0) = I. \end{cases} \quad (2.13)$$

Elle admet un inverse $\Phi_t^{-1} = \Psi_t$ qui satisfait :

$$\begin{cases} d\Psi_t = \Psi_t [-A(t) + C(t)^2] dt - \Psi_t C(t) dB_t \\ \Psi_t(0) = I. \end{cases} \quad (2.14)$$

Preuve. D'après le théorème (2.3.1), on voit que (2.13) admet une solution unique $\Phi_t(\cdot)$. Pour montrer que l'inverse Φ_t^{-1} existe, c'est-à-dire $\Psi_t(\cdot)$ la solution unique de (2.14) et elle existe aussi selon le théorème (2.3.1). En appliquant la formule d'Itô à $\Phi_t \Psi_t$ on

obtient :

$$\begin{aligned}
 d(\Phi_t \Psi_t) &= \Phi_t d\Psi_t + \Psi_t d\Phi_t + d\langle \Phi, \Psi \rangle_t \\
 &= \Phi_t \left[\Psi_t \left(-A(t) + C(t)^2 \right) dt - \Psi_t C(t) dB_t \right] \\
 &\quad + \Psi_t [A(t)\Phi_t dt + C(t)\Phi_t dB_t] \\
 &\quad - \Phi_t \Psi_t C^2(t) dt \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

donc : $\Phi_t \Psi_t = I$, cela nous donne :

$$\Psi_t = \Phi_t^{-1}.$$

Maintenant, en appliquant la formule d'Itô à $\Psi_t X_t$ où X_t est la solution unique de (2.12), nous aurons :

$$\begin{aligned}
 d(\Psi_t X_t) &= \Psi_t dX_t + X_t d\Psi_t + d\langle \Psi, X \rangle_t \\
 &= \Psi_t [(A(t)X_t + b(t)) dt + (C(t)X_t + \sigma(t)) dB_t] \\
 &\quad + X_t \left[\left(-A(t) + C(t)^2 \right) \Psi_t dt - \Psi_t C(t) dB_t \right] \\
 &\quad - C^2(t) \Psi_t X_t dt + \sigma(t) C(t) \Psi_t dt \\
 &= \Psi_t (b(t) - C(t)\sigma(t)) dt + \Psi_t \sigma(t) dB_t,
 \end{aligned}$$

on obtient alors (2.12), en utilisant le fait que : $\Psi_t = \Phi_t^{-1}$.

2.4.2 Le cas où le mouvement Brownien est d-dimensionnel

Nous allons maintenant parler du cas où $B(\cdot)$ est de dimension d .

Dans ce cas, on peut écrire l'équation différentielle comme suit :

$$\begin{cases} dX_t = [A(t)X_t + b(t)] dt + \sum_{j=1}^d [C^j(t)X_t + \sigma^j(t)] dB_t^j \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (2.15)$$

Soit Φ la solution de l'équation :

$$\begin{cases} d\Phi_t = A(t)\Phi_t dt + \sum_{j=1}^d C^j(t)\Phi_t dB_t^j \\ \Phi(t_0, t_0) = I_d, \end{cases} \quad (2.16)$$

en notant par $\Phi(T, t_0)$ la solution de (2.16) valeurs dans $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ avec la condition initiale $\Phi(t_0, t_0) = I_d$.

En voie que $\Phi(T, t)$ représente la résolvante de l'équation (2.15).

D'autre part, la résolvante $\Phi(T, s)$ vérifiée la propriété suivante :

$$\Phi(t, s)\Phi(s, t_0) = \Phi(t, t_0), \forall t \geq s \geq t_0.$$

Similairement, on peut démontrer que Φ^{-1} existe, et elle est la solution de :

$$\begin{cases} d\Psi_t = \Psi_t \left[-A(t) + \sum_{j=1}^d C^j(t)^2 \right] dt - \sum_{j=1}^d \Psi_t C^j(t)^2 dB_t^j \\ \Psi(t_0, t_0) = I_d, \end{cases} \quad (2.17)$$

cette équation (à l'inverse) a été obtenue par J.M. Bismut.

Théorème 2.4.1 La solution $\Phi(T, s)$ de l'équation (2.16) est inversible et son inverse $\Psi(T, s)$

est donné par l'équation suivante :

$$d\Psi_t = -\Psi_t A(t)dt + \sum_{j \leq d} \Psi_t C^j(t)^2 dt - \sum_{j \leq d} \Psi_t C^j(t)^2 dB_t^j.$$

Preuve. Il suffit de démontrer que :

$$d(\Phi_t \Psi_t) = d(\Psi_t \Phi_t) = 0.$$

D'après la formule d'Itô, on a :

$$\begin{aligned} d(\Phi_t \Psi_t) &= \Psi_t d\Phi_t + \Phi_t d\Psi_t + d\langle \Phi, \Psi \rangle_t. \\ d(\Phi_t \Psi_t) &= \Psi_t \left[A(t)\Phi_t dt + \sum_{i \leq d} C^i(t)\Phi_t dB_t^i \right] \\ &\quad + \Phi_t \left[-\Psi_t A(t)dt + \sum_{i \leq d} \Psi_t C^i(t)^2 dt - \sum_{i \leq d} \Psi_t C^i(t) dB_t^i \right] \\ &\quad - \sum_{i \leq d} C^i(t)\Phi_t \Psi_t C^i(t) dt \\ &= A(t)\Phi_t \Psi_t dt + \sum_{j \leq d} C^j(t)\Phi_t \Psi_t dB_t^j - \Phi_t \Psi_t A(t)dt \\ &\quad + \sum_{j \leq d} \Phi_t \Psi_t C^j(t)^2 dt - \sum_{j \leq d} \Phi_t \Psi_t C^j(t) dB_t^j \\ &\quad - \sum_{j \leq d} C^j(t)^2 \Phi_t \Psi_t dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

La solution forte X_t de (2.12) est représentée par :

$$X_t = \Phi_t x + \Phi_t \int_0^t \Psi_s \left[b(s) - \sum_{j=1}^d C^j(s) \sigma^j(t) \right] ds + \sum_{j=1}^d \Phi_t \int_0^t \Psi_s \sigma^j(s) dB_s^j.$$

CHAPITRE 3

CLASSE DE CONTROL OPTIMAL STOCHASTIQUE

La théorie du contrôle stochastique a de nombreuses applications en gestion et en finance. En effet, dans ces domaines, on considère des systèmes dynamiques (c'est à dire évoluant au cours du temps) en avenir incertain et sur lesquels on peut agir en vue d'optimiser un certain critère économique.

Dans ce chapitre, on va parler des problèmes de contrôle stochastiques sous forme standard. Ensuite, nous pensons aux deux principales façons d'étudier les systèmes de contrôle optimaux : les principes de programmation dynamique et le principe de cap.

3.1 Contrôle

Un contrôle est un processus $(u_t)_t$ adapté par rapport à une filtration, et prend ses valeurs dans un espace de contrôle A .

3.1.1 Classes de controles

Controle optimal

On dit que le controle u^* est optimal si :

$$J(u^*) \leq J(u), \forall u \in U. \quad (3.1)$$

Controle presque optimal

u^ε est un controle presque optimal (ou ε -optimal) si pour tout contrle $u \in U$ on a :

$$J(u^\varepsilon) \leq J(u) + \varepsilon, \forall u \in U, \text{ et } \varepsilon > 0. \quad (3.2)$$

Controle admissible

On a une controle admissible tout processus u_t où $t \in [0, T]$ mesurable et $\mathcal{F}_t$ -adapté à valeur dans un borélienne A de $\mathbb{R}^n$. Notons par U l'ensemble de tous les controle admissible :

$$U = \{u : [0, T] \times \Omega \rightarrow A, \text{ tel que } u \text{ est mesurable et } \mathcal{F}_t\text{-adapté}\}. \quad (3.3)$$

Controle relaxé

Soit V l'ensemble des mesures de Radon sur $[0, T] \times A$ dont la projection sur $[0, T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue dt muni de la topologie de la convergence stable des mesures. L'espace V est muni de sa tribu borélienne, qui est la plus petite tribu telle que l'application $q \rightarrow \int f(s, a) q(ds, da)$ soit mesurable pour toute fonction f mesurée, limitée et continue en a .

Un controle relaxé q est une variable aléatoire $q(w, dt, da)$ à valeur dans V telle que pour chaque t , $\mathbf{1}_{[0, t]}$ q est $\mathcal{F}_t$ -mesurable ($\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$). Tout controle relaxé peut

être intégré en $q(w, dt, da) = dtq(w, t, da)$ où $q(t, da)$ est un processus progressivement mesurable à valeurs dans l'espace des mesures de probabilités.

Controle feed-back

Soit u_t un controle $\mathcal{F}_t$ -adapté, et soit $\{\mathcal{F}_t^X\}$ la filtration naturelle engendrée par le processus X . Si u_t adapté par rapport la filtration $\{\mathcal{F}_t^X\}$ On dit que u_t est feed-back controle. On dit aussi qu'un controle u est feed-back si et seulement si u dépend de X .

Arrêt optimal

Généralement, dans les modèles de controles en finance, l'horizon du problème est fixé, soit fini soit infini. Il existe de nombreuses applications où le controleur a aussi la possibilité de décider l'horizon de son objectif. La décision de stopper le processus est modélisée par un temps d'arrêt et le problème d'optimisation est appelé problème d'arrêt optimal. Dans la formulation générale de tels problèmes, le controle est mixte, constitué du couple controle-temps d'arrêt (u, τ) et la fonctionnelle à optimiser s'écrit :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\tau f(t, X_t, u_t) dt + g(X_\tau) \right].$$

Ces problèmes interviennent dans la finance typiquement dans la valorisation des options américaines où, en plus des options européennes, le détenteur de l'option peut exercer son droit et donc recevoir le aux associé à tout moment avant l'échéance.

Controle ergodique et controle risk-sensible

Certains systèmes stochastiques peuvent présenter sur le long terme un comportement stationnaire caractérisé par une mesure invariante. Cette mesure, si elle existe, est obtenue en calculant la moyenne de l'état du système sur le long terme. Un problème de controle ergonomique consiste alors à optimiser sur le long terme un certain critère

en tenant compte de cette mesure invariante.

Formulation standard résultant des critères étudiés précédemment consiste à optimiser sur les controles u_t une fonctionnelle de la forme :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\int_0^T f(t, x_t, u_t) dt \right],$$

ou encore

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{T} \ln \mathbb{E} \left[\exp \int_0^T f(t, x_t, u_t) dt \right].$$

Cette dernière formulation est appelée controle risque-sensible dans la littérature et a récemment été utilisée dans plusieurs travaux en mathématiques financiers comme un critère pour la gestion de portefeuille à long terme.

Un autre critère basé sur le comportement de type grandes déviations du système : $\mathbb{P}[X_T |_{T \geq c}] \simeq \exp(-I(c)T)$ quand T tend vers l'infini, consiste à maximiser sur les controles u une fonctionnelle de la forme :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{T} \ln \mathbb{P} \left[\frac{1}{T} \geq c \right].$$

Ce problème de controle des grandes déviations est interprété en finance comme la version asymptotique (ergodique) du critère combien consistant à maximiser la probabilité que la valeur terminale X_T du portefeuille soit au-dessus d'un certain indice.

Controle singulier

Un controle admissible est un couple $(u(.), \eta(.))$ de processus mesurables $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$, $\mathcal{F}_t$ -adaptés, de sorte que :

1. $\eta(.)$ est de variation bornée, continue à gauche limite à droite et $\eta(s) = 0$.
2. $\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [s, T]} |u(t)|^2 + |\eta(T)|^2 \right] < \infty$.

Nous désignons $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, l'ensemble des controles admissibles. Nous notons que puisque $d\eta(t)$ peut être singulier par rapport à Lebesgue mesure dt , nous appelons $\eta(\cdot)$ la partie singulière du controle et le processus $u(\cdot)$ sa partie absolument continue.

On désigne par $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}^2([s, T], \mathbb{R}) = \{\Phi(\cdot) = \Phi(t, w)\}$ est un $\mathcal{F}_t$ -adaptés $\mathbb{R}$ processus mesurable sur $[s, T]$ tel que $\mathbb{E} \left(\int_s^T |\Phi(t)|^2 dt \right) < \infty$. Nous dénotons par $\mathcal{X}_{\mathcal{R}}$ la fonction indicateur de $\mathcal{R}$. Dans ce qui suit, C représente une constante générique, qui peut se différencier d'une ligne à l'autre.

3.2 Critère de coût ou performance

Le but de controle optimal est de minimiser (ou de maximiser s'il s'agit d'un gain) une fonctionnelle $J(u) = E \left[\int_0^T \ell(t, X_t, u_t) dt + g(X_T) \right]$ sur l'ensemble de tout les controles admissibles.

La fonction ℓ est la fonction coût intégrale, g est le coût final ou terminal. On définit alors la fonction valeur :

$$V(t, x) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(t, x, u). \quad (3.4)$$

Généralement, le coût est donné par :

$$J(u) = E(g(X_T)). \quad (3.5)$$

La fonction de valeur associée à ce problème de controle stochastique est donnée par :

Pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ et $\forall u \in \mathcal{U}$:

$$V(t, x) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(t, x, u). \quad (3.6)$$

Lorsqu'on cherche à maximiser un gain, au lieu de minimiser un coût, alors on

écrira :

$$V(t, x) = \sup_{u \in U} J(t, x, u) = - \inf_{u \in U} J(-(t, x, u)). \quad (3.7)$$

Un controle admissible $u^* \in U$ est dit optimal si :

$$V(t, x) = J(t, x, u^*). \quad (3.8)$$

3.3 Méthodes de résolution en controle stochastique

Dans ce paragraphe, on propose de rappeler les deux célèbres approches dans la résolution des problèmes de controle stochastique :

Les principes de la programmation dynamique de Bellman qui a une version infinitésimale de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman et du maximum de Pontryagin qui sera au centre de notre intérêt dans ce travail qui consiste à chercher les conditions nécessaires d'optimalité satisfaites par un controle optimal u^* .

3.3.1 Le principe de programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique a été initié dans les années 50 par R.Bellman qui est un principe fondamental pour la théorie du controle stochastique.

Dans le contexte de processus de diffusion et même plus généralement pour des controles de processus de Markov.

L'idée basique de ce principe est de considérer une famille de problèmes de controle à différents états initiaux et établir des relations entre les fonctions valeurs associées.

L'équation de la programmation dynamique conduit à une équation aux dérivées partielles(EDP) parabolique fortement non linéaire du second ordre, appelée Hamilton-Jacobi-Bellman(*HJB* en abrégé).

L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)

L'équation d'HJB est la version infinitésimale du principe de la programmation dynamique. Supposant que la fonction valeur V est de classe C^2 .

La dérivation formelle de l'équation d'HJB est donnée par :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \inf_{u \in U} [\mathcal{L}_u V(t, x) + f(t, x, u)] = 0, \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \quad (3.9)$$

où $\mathcal{L}_u$ est l'opérateur associé à l'EDS contrôlées (2.6), il est défini par :

$$\mathcal{L}_u V = b(x, u)D_x(V) + \frac{1}{2} \text{tr} a [\sigma(x, u)\bar{\sigma}(x, u)D_x^2(V)]. \quad (3.10)$$

Cependant, lorsqu'on cherche à maximiser un gain, l'EDP (3.9) devient sous la forme :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) - \sup_{u \in U} [\mathcal{L}_u V(t, x) + f(t, x, u)] = 0, \quad (3.11)$$

on réécrit souvent cette EDP (3.9) sous la forme :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - H(t, x, D_x v(t, x), D_x^2(V)) = 0, \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \quad (3.12)$$

où $(t, x, p, M) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S_n$ (où S_n est l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques).

$$H(t, x, p, M) = \sup_{u \in U} \left[b(x, u)p_t + \frac{1}{2} \text{tr} a [\sigma \sigma^*(t, x, u)M + f(t, x, u)] \right], \quad (3.13)$$

cette équation (3.12) est appelée équation de la programmation dynamique ou équation d'HJB.

La fonctionnelle H s'appelle l'hamiltonien associé au problème de controle.

A l'EDP (3.9) on ajoute la condition terminale :

$$V(T, x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

et elle vient immédiatement d'après la fonction valeur (3.6).

Généralement, l'EDP n'est pas facile à résoudre donc il faut supposer que la solution soit de classe C^2 , ce qui n'est pas nécessairement le cas même pour des fonctions simples.

Crandall et Lions ont introduit dans les années 80 la notion de solutions de viscosité du premier ordre. Elle était après généralisée aux équations du second ordre. Ce qui a donné une formulation rigoureuse à l'équation d'HJB pour des fonctions supposées seulement localement bornées.

3.3.2 Le principe du maximum de Pontryagin

Le principe du maximum de Pontryagin a été utilisé dans la théorie du controle optimal.

Il fournit les conditions nécessaires d'optimalité pour minimiser une fonctionnelle coût $J(u)$ tout en utilisant l'approche de Lagrange en calcul des variations. La dérivée de la fonctionnelle $J(u)$ par rapport à un certain paramètre de perturbation doit être positive. Ceci entraîne que $\frac{dJ(u_\theta)}{d\theta}|_{\theta=0} \geq 0$.

Ce principe consiste à introduire un processus adjoint $p(t)$ solution d'une certaine équation différentielle stochastique rétrograde et d'une inégalité variationnelle.

Cas du controle déterministe

Le principe du maximum dans le cas du controle déterministe ($\sigma = 0$), a été formulé par le mathématicien soviétique Lev Semionovitch Pontryaguin [11] en 1950.

Des résultats récents pour l'étude du controle optimal dans le cas déterministe ont été traités par Fleming [21], où l'auteur présente des résultats fondamentaux dans la théorie du controle.

La problématique générale du controle optimal est considérée comme un système

différentiel gouverné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt, t \in [0, T] \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (3.14)$$

Pour tout controle $u \in U$ avec U est l'ensemble des controles admissibles sur $[0, T]$, c'est -à-dire l'ensemble des controles telles que les trajectoires associées soient bien définies sur $[0, T]$.

On définit donc le coût de la trajectoire associée par :

$$J(u) = \int_0^T \ell(s, X_s, u_s)ds + g(X_T). \quad (3.15)$$

L'objectif est de minimiser la fonction $J(u)$ sur un ensemble U de tous les controles admissibles. Alors un controle u^* est optimal si :

$$J(u^*) = \min \{J(u), u \in U\}, \quad (3.16)$$

sous les hypothèse suivantes :

(1) $b, \ell : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^d$:

$$|b(t, x, u) - b(t, y, u)| \leq K|x - y|, \quad (3.17)$$

$$|b(t, x, u)| + |\ell(t, x, u)| \leq c(1 + |x|), \quad (3.18)$$

telles que $b(t, x, \cdot), \ell(t, x, \cdot)$ de $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^d$ sont continues en u et uniformément en (t, x) .

(2) b, ℓ et g sont de classes C^1 en x .

Le Hamiltonien de ce système est donné par :

$$H(t, X_t, u_t, p_t) \triangleq p_t b(t, X_t, u_t) - \ell(t, X_t, u_t). \quad (3.19)$$

On a donc le théorème suivante :

Théorème 3.3.1 Principe de Pontryagin[11]

Soit (X^*, u^*) la solution optimale de (3.4) et (3.5), alors il existe un processus $p(t)$ est $\mathcal{F}_t$ -adapté, solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} dp_t = -H_x(t, x_t, u_t, p_t)dt, \\ p(T) = -g_x(X_T), \end{cases}$$

telle que :

$$H(t, X_t^*, u_t^*, p_t) = \max_{u \in U} H(t, X_t^*, u, p_t). \text{ P-p.s. et dt-p.p.}$$

Cas du controle stochastique

Dans le cas stochastique, plusieurs formes de principe du maximum de Pontryagin.

Le premier résultat a été établi par Kushner en 1973 dans le cas où l'ensemble de controles admissibles est formé de processus adaptés à une filtration fixée à l'avance et l'utilisation des solutions trajectorilles de l'équation d'état, ces résultats ont été développés en 1976 par Hausmann [19].

Lorsque le coefficient de diffusion σ dépend explicitement du controle, le problème de principe du maximum stochastique a été abordé par Bensoussan [1, 2] et Peng [18].

Le problème d'obtention des conditions nécessaires d'optimalité pour les controles adaptés à une filtration plus petite que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ (c'est-à-dire le système est partiellement observable) a été abordé par Hausmann [19] et Bensoussan [1, 2] et Zhoo [8, 22, 23]

CHAPITRE 4

LE PRINCIPE DU MAXIMUM POUR UN CONTROLE SINGULIER

Dans ce chapitre, nous étudions un problème de contrôle optimal stochastique singulier pour les systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques contrôlées non linéaires de la forme :

$$\begin{cases} dx^{u,\eta}(t) = f(t, x^{u,\eta}(t), u(t))dt + \sigma(t, x^{u,\eta}(t), u(t))dW(t) + G(t)d\eta(t), \\ x^{u,\eta}(s) = \zeta, \end{cases} \quad (4.1)$$

le coût minimiser est donné par :

$$J^{s,\zeta}(u(\cdot), \eta(\cdot)) = \mathbb{E} \left[h(x^{u,\eta}(T)) + \int_s^T \ell(t, x^{u,\eta}(t), u(t))dt + \int_{[s,T]} K(t)d\eta(t) \right], \quad (4.2)$$

où les temps initiaux s et l'état initial ζ le système est fixé. Tout controle admissible $(u * (.), \eta * (.))$ satisfaisant

$$J^{s,\zeta}(u^*(.), \eta^*(.)) = \min_{(u(.), \eta(.)) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2} J^{s,\zeta}(u(.), \eta(.)), \quad (4.3)$$

est appelé un controle singulier optimal. Le processus d'état correspondant, solution de EDS-(4.1), est indiqué par $x^*(.) = x^{u^*, \eta^*}(.)$.

Le principe du maximum stochastique pour le controle singulier a été considéré par de nombreux auteurs, voir par exemple [9], [10], [17], [3], [5], [6], [16], [20]. Cadenillas et al, [3], ont obtenu la première version du principe maximum pour les problèmes de controle stochastiques singuliers. Le principe du maximum stochastique dans un domaine convexe a été étudié dans [17]. Dans [5], les auteurs ont dérivé principe stochastique maximum où la partie singulière a une forme linéaire. Des conditions suffisant pour l'existence d'un controle singulier optimal ont été étudiées dans Dufour et al, [6]. Hafayed et al, [16], ont obtenu les conditions nécessaires pour un controle singulier quasi optimal. Pour ce type de problème, le lecteur peut consulter les articles de Haussmann et al, [20] et la liste des références qu'ils contiennent.

Notre objectif principal dans ce chapitre est de dériver un ensemble de conditions nécessaires pour le controle stochastique singulier optimal du problème (4.1) et (4.2).

4.1 Hypothèses et énoncé du problème de controle

Nous considérons un problème de controle stochastiques singulier. Soit T : un nombre réel strictement positif, et soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [s, T]}, \mathbb{P})$ être un espace de probabilité modifié satisfaisant aux conditions habituelles dans lesquelles un mouvement brownien d dimensionnel $W(t) = \{W(t) : s \leq t \leq T\}$ et $W(s) = 0$ est défini.

Soit $\mathbb{A}_1$ est un sous-ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{A}_2 = [0, \infty[$. Que $\mathcal{U}_1$ soit la classe des processus mesurables et $\mathcal{F}_t$ -adaptés $u(.) : [s, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{A}_1$ et $\mathcal{U}_2$ est la classe des processus mesurables et $\mathcal{F}_t$ -adaptés $\eta(.) : [s, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{A}_2$.

L'objectif de ce chapitre est d'établir des conditions nécessaires d'optimalité sous

forme d'un principe du maximum stochastique de Pontryagin. Le controle étudié est singulier. Nous donnons ici la définition précise de la partie singulière d'un controle admissible.

Conditions.

Nous supposons ce qui suit :

(H1) Les fonctions $f, \sigma, \ell : [s, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{R}$, et $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continument différentiables en ce qui concerne (x, u) . En outre, f, σ, h et ℓ et tous leurs dérivées par rapport à (x, u) sont continus et bornés.

(H2) La fonction $G : [s, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $K : [s, T] \rightarrow [0, \infty[$, pour chaque $t \in [s, T]$: G est continue et bornée, K est également continue.

Selon les hypothèses ci-dessus, le EDS-(4.1) a une solution unique forte $x^{u,\eta}(t)$ qui est donnée par :

$$\begin{aligned} x^{u,\eta}(t) = & \zeta + \int_s^t f(r, x^{u,\eta}(r), u(r)) dr \\ & + \int_s^t \sigma(r, x^{u,\eta}(r), u(r)) dW(r) \\ & + \int_{[s,t]} G(r) d\eta(r). \end{aligned}$$

En outre, par des arguments standard, il est facile de montrer que pour tout $p > 0$, il maintient que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [s, T]} |x^{u,\eta}(t)|^p \right] < C_p, \quad (4.4)$$

où C_p est une constante dépendant seulement de p et le $J^{s,\zeta}$ fonctionnel, est bien défini. Nous définissons le hamiltonien habituel associé au problème de controle stochastique (4.1) et (4.2) comme suit :

$$H(t, x, u, \Psi(t), Q(t)) = \Psi(t)f(t, x, u) + Q(t)\sigma(t, x, u) + \ell(t, x, u), \quad (4.5)$$

où $(t, x, u) \times [s, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{A}_1$, x est une variable aléatoire telle que $x \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ et $(\Psi(\cdot), Q(\cdot)) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ donnée par BEDS-(4.6).

Équations adjointes.

L'équation adjointe s'avère être un BEDS linéaire. Donc pour tout $(u(\cdot), \eta(\cdot)) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ et la trajectoire d'état correspondante $x(t) = x^{u, \eta}(t)$, nous considérons l'équation adjointe suivante :

$$\begin{cases} -d\Psi(t) = \{f_x(t, x(t), u(t))\Psi(t) + \sigma_x(t, x(t), u(t))Q(t) \\ \quad + \ell_x(t, x(t), u(t))\}dt \\ \quad - Q(t)dW(t), \\ \Psi(T) = h_x(x(T)). \end{cases} \quad (4.6)$$

Si nous dénotons par :

$$H(t) = H(t, x(t), u(t), \Psi(t), Q(t)),$$

alors l'équation adjointe (4.6) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{cases} -d\Psi(t) = \{H_x(t)\} dt - Q(t)dW(t) \\ \Psi(T) = h_x(x(T)). \end{cases} \quad (4.7)$$

Comme il est bien connu que sous conditions **(H1)** et **(H2)** l'équation adjointe (4.6), admet une seule et unique couple de solutions $\mathcal{F}_t$ -adaptées $(\Psi(\cdot), Q(\cdot)) \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}^2([s, T], \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathcal{F}}^2([s, T], \mathbb{R})$.

Nous notons que puisque les dérivées $f_x, \sigma_x, \ell_x, h_x$, sont bornée, par des hypothèses **(H1)**, nous avons les estimations suivantes :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t \leq T} |\Psi(t)|^2 + \int_s^T |Q(t)|^2 dt \right] \leq C. \quad (4.8)$$

4.2 Principe du maximum stochastique pour un controle singulier

Notre objectif dans cette section est d'établir un principe stochastique maximum pour un controle stochastique singulier optimal pour les systèmes gouvernés par des EDS controlés non linéaires. Puisque le domaine de controle est supposé convexe, la preuve de notre résultat basé sur la perturbation convexe pour les parties continues et singulières du processus de controle. Le principal résultat de ce document est indiqué dans le théorème suivant.

Théorème 4.2.1 (*principe du maximum pour un controle singulier*). Soit les conditions **(H1)** et **(H2)** sont vérifient, il existe un couple unique de processus $\mathcal{F}_t$ -adaptés $(\Psi^*(.), Q^*(.))$ telle que pour tous $(u, \eta) \in \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\int_s^T H_u(t, x^*(t), u^*(t), \Psi^*(t), Q^*(t))(u(t) - u^*(t))dt \right] \\ & + \mathbb{E} \left[\int_{[s,T]} (K(t) + G(t)\Psi^*(t))d(\eta - \eta^*)(t) \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Où $(\Psi^*(.), Q^*(.))$ est la solution de l'équation adjointe (4.6) correspondant à $(u^*(.), \eta^*(.), x^*(.))$.

Corollaire 4.2.1 (*Principe du maximum stochastique pour un controle singulier*). Dans les conditions du théorème (4.2.1), il existe alors un couple unique de processus $\mathcal{F}_t$ -adaptés $(\Psi^*(.), Q^*(.))$ solution de EDS(4.6) telle que pour tous $(u, \eta) \in \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$:

$$\begin{aligned} & H_u(t, x^*(t), u^*(t), \Psi^*(t), Q^*(t))(u(t) - u^*(t))dt \\ & + \mathbb{E} \left[\int_{[s,T]} K(t) + G(t)\Psi^*(t))d(\eta - \eta^*)(t) \right] \geq 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$\mathbb{P}$ -a.s., a.e. $t \in [s, T]$,

Pour prouver Théorème (4.2.1) et Corollaire (4.2.1) nous avons besoin des résultats suivants que nous devons traduire à notre problème singulier.

Que $(u^*(.), \eta^*(.), x^*(.))$ soit la solution optimale du problème de controle (4.1),(4.2).

Nous déduisons l'inégalité variationnelle (4.9) en plusieurs étapes, du fait que

$$J^{s,\zeta}(u^\varepsilon(\cdot), \eta^\varepsilon(\cdot)) - J^{s,\zeta}(u^*(\cdot), \eta^*(\cdot)) \geq 0, \quad (4.11)$$

Où $(u^\varepsilon(\cdot), \eta^\varepsilon(\cdot))$ est ce qu'on appelle la perturbation convexe de $(u^*(\cdot), \eta^*(\cdot))$, définie comme suit : $t \in [s, T]$

$$(u^\varepsilon(t), \eta^\varepsilon(t)) = (u^*(t), \eta^*(t)) + \varepsilon [(u(t), \eta(t)) - (u^*(t), \eta^*(t))], \quad (4.12)$$

Où $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit et $(u(\cdot), \eta(\cdot))$ est un élément arbitraire de $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$. Nous soulignons que la convexité de $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$ a pour conséquence $(u^\varepsilon(t), \eta^\varepsilon(t)) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$.

Que $x^\varepsilon(\cdot) = x^{(u^\varepsilon, \eta^\varepsilon)}(\cdot)$ soit les solutions de EDS-(4.1) correspondant au controle admissible $(u^\varepsilon(t), \eta^\varepsilon(t))$.

Lemme 4.2.1 Soit (H1) et (H2) sont vérifier alors on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}(\sup_{s \leq t \leq T} |x^\varepsilon(t) - x^*(t)|^2) = 0.$$

Preuve. Des estimations standard et de l'inégalité Burkholder-Davis-Gundy nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\sup_{s \leq r \leq t} |x^\varepsilon(r) - x^*(r)|^2) \\ & \leq \int_s^t |f(r, x^\varepsilon(r), u^\varepsilon(r)) - f(r, x^*(r), u^*(r))|^2 dr \\ & \quad + \int_s^t |\sigma(r, x^\varepsilon(r), u^\varepsilon(r)) - \sigma(r, x^*(r), u^*(r))|^2 dr \\ & \quad + \left| \int_{[s,t]} G(r) d(\eta^\varepsilon - \eta^*)(r) \right|^2, \end{aligned}$$

en appliquant l'hypothèse **(H2)** et les conditions de Lipschitz sur les coefficients f , σ par rapport à x, u nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\sup_{s \leq t \leq T} |x^\varepsilon(t) - x^*(t)|^2) \\ & \leq C_T \mathbb{E} \int_s^t |x^\varepsilon(r) - x^*(r)|^2 dr + C_T \varepsilon^2 \mathbb{E} \int_s^t |u^\varepsilon(r) - u^*(r)|^2 dr \\ & \quad + C_T \varepsilon^2 \mathbb{E} |\eta^\varepsilon(T) - \eta^*(T)|^2, \end{aligned}$$

D'après la définition de controle singulier et lemme de Gronwall, le résultat obtenu.

Lemme 4.2.2 Soit $Z(t)$ être la solution du EDS linéaire suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} dZ(t) = \{f_x(t, x^*(t), u^*(t))Z(t) \\ \quad + f_u(t, x^*(t), u^*(t))(u(t) - u^*(t))\}dt \\ \quad + \{\sigma_x(t, x^*(t), u^*(t))Z(t) \\ \quad + \sigma_u(t, x^*(t), u^*(t))(u(t) - u^*(t))\}dW(t) \\ \quad + G(t)d(\eta - \eta^*)(t), \\ Z(s) = 0. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Alors l'estimation suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t \leq T} \left| \frac{x^\varepsilon(t) - x^*(t)}{\varepsilon} - Z(t) \right|^2 \right] = 0. \quad (4.14)$$

Preuve. Notant que dans les conditions **(H1)** et **(H2)** alors EDS-(4.13) linéaire a une solution unique.

on pose :

$$\gamma^\varepsilon = \frac{x^\varepsilon(t) - x^*(t)}{\varepsilon} - Z(t), t \in [s, T]. \quad (4.15)$$

Par de simples calculs nous montrons que :

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^\varepsilon(t) - x^*(t)}{\varepsilon} \\
 = & \int_s^t \int_0^1 f_x(r, x^*(r) + \mu\varepsilon(\gamma^\varepsilon(r) + Z(r)), u^\varepsilon(r))(\gamma^\varepsilon(r) + Z(r)) d\mu dr \\
 & + \int_s^t \int_0^1 \sigma_x(r, x^*(r) + \mu\varepsilon(\gamma^\varepsilon(r) + Z(r)), u^\varepsilon(r))(\gamma^\varepsilon(r) + Z(r)) d\mu dr \\
 & + \int_s^t \int_0^1 f_u(r, x^*(r), u^*(r) + \mu\varepsilon(u(r) - u^*(r)))(u(r) - u^*(r)) d\mu dr \\
 & + \int_s^t \int_0^1 \sigma_u(r, x^*(r), u^*(r) + \mu\varepsilon(u(r) - u^*(r)))(u(r) - u^*(r)) d\mu dr \\
 & + \int_{[s,t]} G(r) d(\eta - \eta^*)(r),
 \end{aligned}$$

Puis de l'équation ci-dessus et (4.15) nous concluons que $\gamma^\varepsilon(t)$ est indépendant de la partie singulière, alors nous pouvons utiliser la méthode similaire développée dans Bensoussan pour le reste de la preuve.

Lemme 4.2.3 *Pour tout $(u(\cdot), \eta(\cdot)) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ nous avons :*

$$\begin{aligned}
 0 \leq & \mathbb{E}[h_x(x^*(T))]Z(T) + \int_s^T [\ell_x(t, x^*(t), u^*(t))Z(t) \\
 & + (u(t) - u^*(t))\ell_u(t, x^*(t), u^*(t))]dt \\
 & + \mathbb{E} \int_{s,T} K(t) d(\eta - \eta^*)(t).
 \end{aligned}$$

Preuve. De (4.2) et (4.11), nous avons :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq J^{s,\zeta}(u^\varepsilon(\cdot), \eta^\varepsilon(\cdot)) - J^{s,\zeta}(u^*(\cdot), \eta^*(\cdot)) \\
 &= \mathbb{E}[h(x^\varepsilon(T)) - h(x^*(T))] \\
 &\quad + \mathbb{E} \int_s^T [\ell(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) - \ell(t, x^*(t), u^\varepsilon(t))] dt \\
 &\quad + \mathbb{E} \int_s^T [\ell(t, x^*(t), u^\varepsilon(t)) - \ell(t, x^*(t), u^*(t))] dt \\
 &\quad + \mathbb{E} \int_{[s,T]} K(t) d(\eta^\varepsilon - \eta^*)(t) \\
 &= \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_4.
 \end{aligned}$$

De (4.12), nous obtenons pour tout $\eta(\cdot) \in \mathbb{I}_2$:

$$\eta^\varepsilon(t) - \eta^*(t) = \varepsilon(\eta(t) - \eta^*(t)),$$

alors nous pouvons facilement prouver que :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{I}_4 &= \mathbb{E} \int_{[s,T]} K(t) d(\eta^\varepsilon - \eta^*)(t) \\
 &= \varepsilon \mathbb{E} \int_{[s,T]} K(t) d(\eta - \eta^*)(t).
 \end{aligned}$$

Enfin, nous concluons que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{I}_4 = 0$, qui complète la preuve de Lemme (4.2.3).

Preuve. En appliquant la formule d'Itô à $\Psi^*(t)Z(t)$ et en prenant l'attente, où $Z(s) = 0$, alors un calcul simple montre que :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\Psi^*(T)Z(T)) &= \mathbb{E} \int_s^T \Psi^*(t) dZ(t) + \mathbb{E} \int_s^T Z(t) d\Psi^*(t) \\
 &\quad + \mathbb{E} \int_s^T Q^*(t) [\sigma_x(t)Z(t) \\
 &\quad + \sigma_u(t)(u(t) - u^*(t))] dt \\
 &= \mathbb{J}_1 + \mathbb{J}_2 + \mathbb{J}_3,
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

où

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}_1 &= \mathbb{E} \int_s^T \Psi^*(t) dZ(t) \\
 &= \mathbb{E} \int_s^T \Psi^*(t) [f_x(t)Z(t) + f_u(t)(u(t) - u^*(t))] dt \\
 &\quad + \mathbb{E} \int_s^T \Psi^*(t) G(t) d(\eta - \eta^*)(t) \\
 &= \mathbb{E} \int_s^T \Psi^*(t) f_x(t) Z(t) \\
 &\quad + \mathbb{E} \int_s^T \Psi^*(t) f_u(t) (u(t) - u^*(t)) dt + \mathbb{E} \int_{[s,T]} \Psi^*(t) G(t) d(\eta - \eta^*)(t).
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}_2 &= \mathbb{E} \int_s^T Z(t) d\Psi^*(t) \\
 &= -\mathbb{E} \int_s^T Z(t) \{f_x(t)\Psi^*(t) + \sigma_x(t)Q^*(t) \\
 &\quad + \mathbb{E}(\sigma_{\bar{x}}(t)Q^*(t)) + \ell_x(t)\} dt \\
 &= -\mathbb{E} \int_s^T Z(t) f_x(t) \Psi^*(t) dt \\
 &\quad - \mathbb{E} \int_s^T Z(t) \sigma_x(t) Q^*(t) dt \\
 &\quad - \mathbb{E} \int_s^T Z(t) \ell_x(t) dt.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Et

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}_3 &= \mathbb{E} \int_s^T Q^*(t) [\sigma_x(t)Z(t) + \sigma_u(t)(u(t) - u^*(t))] dt \\
 &= \mathbb{E} \int_s^T Q^*(t) \sigma_x(t) Z(t) dt \\
 &\quad + \mathbb{E} \int_s^T Q^*(t) \sigma_u(t) (u(t) - u^*(t)) dt,
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

où $b_\rho(t) = \frac{\partial b}{\partial \rho}(t, x^*(t), \mathbb{E}(x^*(t)), u^*(t))$ pour $b = f, \sigma, \ell$ et $\rho = x, u$.

Combinaison (4.16) (4.19) et le fait que $\Psi^*(T) = h_x(x^*(T))$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \{ [h_x(x(T))] Z(T) \} \\
 &= \mathbb{E} \int_s^T \Psi^*(t) f_u(t) (u(t) - u^*(t)) dt + \mathbb{E} \int_s^T Q^*(t) \sigma_u(t) (u(t) - u^*(t)) dt \\
 &\quad - \mathbb{E} \int_s^T Z(t) \ell_x(t) dt + \mathbb{E} \int_{[s,T]} \Psi^*(t) G(t) d(\eta - \eta^*)(t).
 \end{aligned}$$

Enfin, appliquer Lemme (4.2.3) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \mathbb{E} \int_s^T \Psi^*(t) f_u(t) (u(t) - u^*(t)) dt + \mathbb{E} \int_s^T Q^*(t) \sigma_u(t) (u(t) - u^*(t)) dt \\
 &\quad + \mathbb{E} \int_s^T \ell_u(t) (u(t) - u^*(t)) dt \\
 &\quad + \mathbb{E} \int_{[s,T]} K(t) d(\eta - \eta^*)(t) + \mathbb{E} \int_{[s,T]} \Psi^*(t) G(t) d(\eta - \eta^*)(t) \\
 &= \mathbb{E} \int_s^T H_u(t, x^*(t), u^*(t), \Psi^*(t), Q^*(t)) (u(t) - u^*(t)) dt \\
 &\quad + \mathbb{E} \int_{[s,T]} (K(t) + \Psi^*(t) G(t)) d(\eta - \eta^*)(t).
 \end{aligned}$$

Cela complète la preuve du théorème (4.2.1).

CONCLUSION

Dan ce travail, nous avons présenté le principe du maximum stochastique pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastique, Ces résultats ont été prouvés par Bahlalil et Chala (2005).

Cette théorie généralisent les travaux généralise le principe du maximum de Bensoussan (1982). Ce principe conduit à établir des conditions nécessaires d'optimalité (sous forme d'un principe du maximum) où le domaine de controle est supposé convexe.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Bensoussan, Lectures on stochastic contr. In Lect. Notes in Math.972, Springer-Varlag, pp. 1-62 (1983).
- [2] A. Bensoussan, Stochastic maximum principle for distributed parametre system, J Franklin Inst., 315, pp. 387-406 (1983).
- [3] A. Cadenillas, U. Haussman, The stochastic maximum principle for singular control problem, Stochastics, Stochastics rep., (49), N 3-4, 211-237 (1994).
- [4] B. Øksendal, A. Sulem, Applied Stochastic Control of Jump Diffusions, Springer, Berlin, (2004).
- [5] F. Dufour, B. Miller, Maximum principle for singular stochastic control problem. Siam J. Control Optim, (45)-2, 668-698 (2006).
- [6] F. Dufour, B. Miller, Singular stochastic control problem. J.Siam Control Optim, Vol. (43)-2. 705-730 (2004).
- [7] H. Pham, Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance.Vol. 61, Springer Verlage (2005).
- [8] J. Yong, X. Y. Zhou, Stochastic controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer Verlag (1999).

- [9] L. H. R. Alvarez, A class of solvable singular stochastic control problems, *Stochastics, Stochastics Rep.*, (67), 83-122 (1999).
- [10] L. H. R. Alvarez, Singular stochastic control linear diffusion and optimal stopping : A class of solvable problems, *SIAM J. Contr. Optim.*, (39), 1697-1710 (2001).
- [11] L. S. Pontryagin, V. G. Boltanski, R. V. Gamkrelidze, *The mathematical theory of optimal processes*. Interscience N.Y (1962).
- [12] M. Jeanblanc. *Cours de calcul stochastique*. Master 2IF EVRY. Lecture Notes (2006).
- [13] M. Hafayed, S. Abbas, On Stochastic Near-optimal Singular Controls for Jumps Diffusions : Necessary and Sufficient Conditions, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Springer 19(4), 503-517, (2013).
- [14] M. Hafayed, S. Abbas, On Near-optimal Mean-field stochastic singular controls : necessary and sufficient conditions for near-optimality. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Springer, Doi 10.1007/s10975-013-0361-1,.Vol 160, 778–808 (2014).
- [15] M. Hafayed, *Gradient généralisés et controle stochastique*, Université Mohamed khider Biskra, pp 102 (2009).
- [16] M.Hafayed, S.Abbas, P.Veverka, On necessary and sufficient conditions for near-optimal singular stochastic controls. *Optimization Letters*, Springer, *Optim. Lett.* (7)5, 949-966, (2013).
- [17] S. Bahlali, A. Chala, The stochastic maximum principle in optimal control of singular diffusions with non linear coefficients. *Random Oper. Stoch. Equ. (ROSE)*, 13, 1–10 (2005).
- [18] S. Peng, A general stochastic maximum principle for optimal control problems *SIAM J. Contr. Optim.* 28, N° 4, pp. 966-979 (1990).
- [19] U. G. Haussmannn, *A stochastic maximum principle for optimal of diffusions*. Pitman Reseearch Notes in Math. Series 151. New York (1986).
- [20] U. G. Haussmann, W. Suo, Singular optimal control I, II, *J. SIAM Contr. Optim.*, (33)-3, 916-936,937-959.(1995).

- [21] W. H. Fleming, H. M. Soner, Controlled Markov processes and viscosity solution. Springer Verlag. New York (1992).
- [22] X. Y. Zhou, Maximum principle, dynamic programming and their connection in deterministic control, Journal of optimisation theory and applications. Vol. 65, 363-373 (1990).
- [23] X. Y. Zhou, The connexion between the maximum principle and dynamic programming in stochastic control. Stoch. Rep., 31, pp. 1-13 (1990).