



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid Boussof Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Résolution d'un problème d'optimisation par la méthode des points intérieurs

**Préparé par : Nada AYADI
Asma DJABOUB**

Soutenue devant le jury

Wahida FADEL	MAA	C. U. Abdelhafid Boussof, Mila	Président
Hanane BENHABILES	MAA	C. U. Abdelhafid Boussof, Mila	Rapporteur
Mourad AZI	MCB	C. U. Abdelhafid Boussof, Mila	Examineur

Année universitaire :2022/2023

Remerciement

Tout d'abord, je remercie le bon dieu,
tout puissant, de m'avoir donné la force, la patience et la volonté pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance envers
à notre encadreur **Benhabiles Hanane**,
qui a dirigé ce travail, pour suivi continuuel tout le long de la réalisation de ce mémoire, ses conseils, ses
encouragement.

Nous exprimons nos profonde reconnaissance à
Fadel Wahida
pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury.

Nos remerciements vont ensuite à
Mourad Azi
qui a accepté d'examiner ce travail.

Merci à tous nos professeurs et le directeur de Centre Université Abd elhafid Boussouf Mila.

Enfin, nous remercions toutes les personnes, famille, amis, qui
directement ou indirectement ont contribué
à la réalisation de ce travaille.



Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À ma chère mère,

À mon cher père,

*Qui n'ont jamais cessé, de formuler des
prières à mon égard, de me soutenir et de
m'épauler pour que je puisse atteindre mes
objectifs.*

*À mes frères : ishak, khawla, zaki, seyf
eddine,*

*À mon fiancé et tous mes amis, à ceux que
me donnent de l'amour et de la vivacité et à
ceux qui m'ont aidé et supporté dans les
moments difficiles.*

Merci



Nada.





Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À ma famille en général,

À ma mère, mon père,

À mes sœurs, mes frères,

À mon fiancé et mes amis,

*À tous ceux qui ont contribué à ce travail et
m'ont soutenu de près ou de loin*

Merci



Asma.



TABLE DES MATIÈRES

Notation et terminologie	1
Introduction	2
1 Préliminaires	4
1.1 Éléments d'analyse convexe	4
1.1.1 Ensembles affines	4
1.1.2 Notions de convexité	5
1.1.3 Convexité et dérivée	7
1.2 Programmation mathématique	8
1.2.1 Notions de base	9
1.2.2 Conditions d'optimalité	10
1.2.3 Existence et unicité	11
1.3 Programmation linéaire	11
1.3.1 Forme générale d'un programme linéaire	11
1.3.2 Forme standard	13
1.3.3 Forme canonique	14
1.3.4 Dualité en programmation linéaire	14
1.4 Résolution d'un programme linéaire	15

1.4.1	Un exemple de programme linéaire	15
1.4.2	Résolution graphique	16
1.4.3	Méthode du simplexe	18
1.4.4	méthodes de point intérieur	19
2	Méthode de trajectoire centrale pour la programmation linéaire	20
2.1	Définitions et propriétés	21
2.2	Méthode de trajectoire centrale primale-duale	22
2.2.1	Présentation de la méthode	22
2.2.2	Concept de proximité	24
2.2.3	Algorithme de la méthode	26
3	Méthode de Trajectoire Centrale via une fonction noyau	27
3.1	Présentation de la méthode	28
3.2	Fonction noyau avec terme barrière trigonométrique	30
3.2.1	Fonctions noyau et propriétés	30
3.2.2	Eligibilité de la nouvelle fonction noyau	36
3.2.3	Analyse de la complexité	42
	Conclusion	50

NOTATIONS ET TERMINOLOGIE

$\mathbb{R}^n$	:	L'ensemble des vecteurs avec n composants.
$\mathbb{R}_+^n$	:	L'orthant positif de l'espace $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	:	L'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(n \times m)$
$\mathbb{R}_{++}^n$	:	l'orthant strictement positif de l'espace $\mathbb{R}^n$.
$s.c$	:	Sous les contraintes.
x^*	:	La solution optimale du problème.
$\emptyset$	:	L'ensemble vide.
x^t	:	Le transposé du vecteur x de $\mathbb{R}^n$.
(PM)	:	Programme mathématique.
(PL)	:	Programme linéaire.
(DL)	:	Le problème dual de Programmation linéaire.
CPI	:	la condition de points intérieurs.
IPMs	:	les méthodes points intérieurs.
K.K.T	:	Karush-Kuhn-Tucker.
$\Delta x, \Delta y, \Delta s$	:	les directions de Newton.
e	:	le vecteur de $\mathbb{R}$, dont toutes les composantes sont égales à 1.
$\psi(t)$	:	Fonction noyau.
$\phi(v)$	$= \sum_{i=1}^n \psi(v_i)$	: La fonction barrière logarithmique de type primal-dual.

INTRODUCTION

La programmation mathématique, également connue sous le nom d'optimisation mathématique, est un domaine des mathématiques appliquées qui vise à résoudre des problèmes d'optimisation. Ces problèmes consistent à trouver la meilleure solution parmi un ensemble de solutions possibles, en respectant un ensemble de contraintes.

La programmation linéaire est une branche de la programmation mathématique qui traite des problèmes d'optimisation linéaire. Dans ce type de problème, la fonction objectif ainsi que les contraintes sont toutes linéaires. La fonction objectif est une fonction linéaire que l'on cherche à maximiser ou à minimiser, tandis que les contraintes sont des équations ou des inéquations linéaires qui définissent les limites et les conditions du problème.

La première méthode de résolution efficace du problème de programmation linéaire, la méthode du simplexe, a été créée par G.B. Dantzig en 1947, qui est le plus utilisé depuis longtemps.

D'autres méthodes ont également émergé au fil du temps, les plus significatives sont parmi elles les méthodes des points intérieurs, un point intérieur est défini comme celui qui satisfait toutes les contraintes et, en particulier, satisfait strictement toutes les contraintes d'inégalité, et les années qui ont suivi 1984 ont vu un développement et une expansion rapides de ce nouveau domaine qui se poursuivent encore aujourd'hui.

Au début des années 1990, une sous- classe de méthodes de points intérieurs connues sous le nom de méthodes primales- duales s'était distinguée comme les approches pratiques les plus efficaces et s'est avérée être de puissants concurrents de la méthode du simplexe sur de grands problèmes.

Où il a été posé une méthode primale-duale à points intérieurs pour les problèmes d'optimisation linéaire, basée sur une nouvelle fonction noyau efficace avec un terme de barrière trigonométrique. Nous dérivons les bornes de complexité pour les méthodes de grande et petite mise à jour, respectivement. Nous obtenons la meilleure borne de complexité connue pour les mises à jour importantes, ce qui améliore considérablement les résultats de complexité obtenus jusqu'à présent sur la base d'une fonction de noyau trigonométrique donnée par Peyghami et al[14].

Le mémoire est présentée en trois chapitres :

Le premier chapitre se concentre sur une présentation générale de quelques notions fondamentales qui seront nécessaires par la suite, la programmation mathématique et programmation linéaire, ainsi que des notions de base de l'analyse convexe.

Dans le deuxième chapitre, nous examinons en détail la méthode de la trajectoire centrale, qui est considérée comme la méthode la plus populaire parmi ces différentes méthodes. Nous étudions ses principes, son fonctionnement et ses avantages par rapport aux autres approches utilisées dans la résolution de problèmes d'optimisation linéaire.

Le troisième chapitre présente en détail l'article publié par **M.Bouafia**, **A. Yassine** et **D. Benterki** [14], donner la fonction noyau avec un terme trigonométrique de :

$$\psi(t) = \frac{t^2 - 1}{2} + \frac{4}{\pi p} [\tan^p h(t) - 1], \quad h(t) = \frac{\pi}{2t + 2}, \quad p \geq 2.$$

Ils ont montré que l'algorithme correspondent converge avec complexité :

$$O\left((p + 1)n^{\frac{p+2}{2(p+1)}} \log \frac{n}{\epsilon}\right) \text{ itérations pour les méthodes à grand-pas ,}$$

et

$$O\left(p^2 \sqrt{n} \log \frac{n}{\epsilon}\right) \text{ itérations pour les méthodes à petit-pas.}$$

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous allons introduire certaines notions fondamentales de la programmation mathématique et programmation linéaire, ainsi que des notions de base de l'analyse convexe.

1.1 Éléments d'analyse convexe

1.1.1 Ensembles affines

Définition 1.1.1 [10] *Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ est dit affine si :*

$$\forall x, y \in D, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda x + (1 - \lambda)y \in D.$$

Les ensembles affines élémentaires sont : $\emptyset$, avec $x \in \mathbb{R}^n$ et chaque sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

1.1.2 Notions de convexité

La notion de convexité a de nombreuses applications, dont : l'optimisation et la programmation linéaire. Elle prend deux formes : un ensemble convexe et une fonction convexe.

a) Ensembles convexes

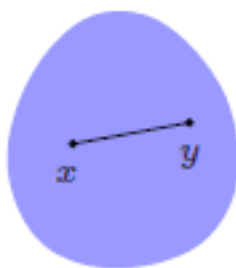
Définition 1.1.2 [3] Un ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si

$$\forall x, y \in C : \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

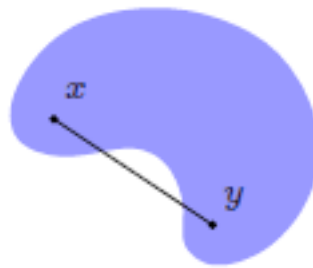
Autrement dit, un ensemble convexe contient toujours le "segment" joignant deux de ses points x et y .

sachant que

$$[x, y] = \{(1 - \lambda)y + \lambda x, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$



convexe



non convexe

Définition 1.1.3 [4] C est un polyèdre convexe s'il est de la forme :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^t x \leq b_i, i = 1, \dots, m\},$$

où a_i est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et b_i un scalaire pour $i = 1, \dots, m$.

Définition 1.1.4 [4] C peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\},$$

où A est une matrice de $\mathbb{R}^{m \times n}$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

b) Fonctions convexes

Définition 1.1.5 [12] Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

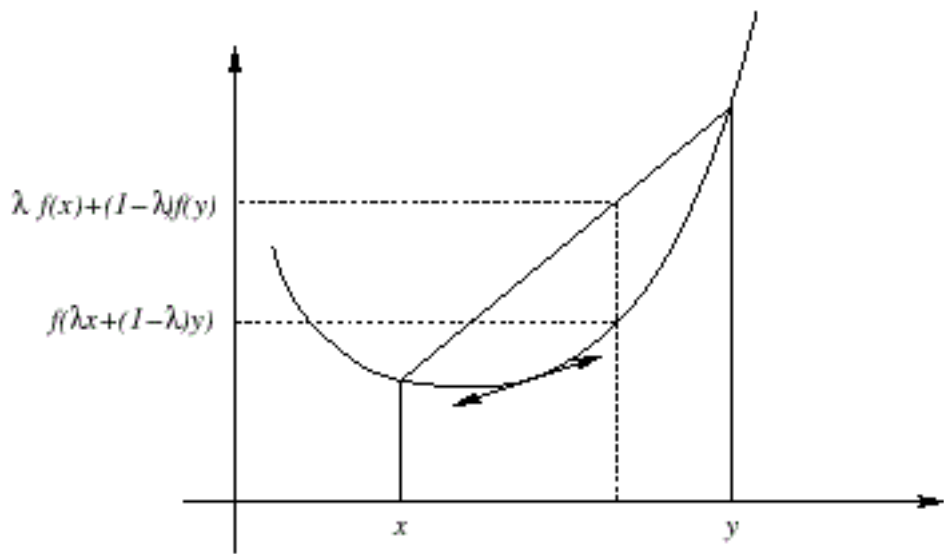


FIGURE 1.1 – Courbe représentative d'une fonction convexe

Définition 1.1.6 [12] Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite strictement convexe si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

1.1.3 Convexité et dérivée

Définition 1.1.7 [12](gradient)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable. La fonction notée $\nabla f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelée le gradient de f et est définie par

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Elle peut ne pas exister pour certains $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.8 [12] (Matrice hessienne)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable. La fonction notée $\nabla^2 f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ est appelée matrice Hessienne de f et est définie par

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

La matrice Hessienne est toujours symétrique.

Exemple 1.1.1 Soit $f(x_1, x_2) = e^{2x_2} - x_1^2 x_2 - 3x_2$. Le gradient et la matrice Hessienne de f est donné par

$$\nabla f(x) = (-2x_1 x_2, 2e^{2x_2} - x_1^2 - 3)^T,$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 4e^{2x_2} \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.1.1 [16](Caractérisation différentielle de la convexité)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Les propositions suivantes sont équivalentes

(a) f est convexe.

(b) Ses hyperplans tangents sont des minorants :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

(c) Le gradient de f est un opérateur monotone :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0.$$

Proposition 1.1.1 [3] Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continument différentiable sur un domaine convexe S .

• f est une fonction convexe sur S si et seulement si la matrice Hessienne $\nabla^2 f(x)$ est semi-définie positive, c'est-à-dire :

$$\forall x \in S, y^t \nabla^2 f(x) y \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

ou encore toutes les valeurs propres de $\nabla^2 f(x)$ sont positives.

• f est une fonction strictement convexe sur S si et seulement si la matrice Hessienne $\nabla^2 f(x)$ est définie positive, c'est-à-dire :

$$\forall x \in S, y^t \nabla^2 f(x) y > 0, \forall y \neq 0 \in \mathbb{R}^n,$$

ou encore toutes les valeurs propres de $\nabla^2 f(x)$ sont strictement positives.

1.2 Programmation mathématique

La programmation mathématique est un domaine vaste dans l'optimisation et l'analyse numérique. Elle est définie comme un ensemble de méthodes et processus mathématiques qui visent à résoudre des problèmes par la détermination -parmi un grand

nombre de solutions - celle qui donne le meilleur rendement. Plus précisément, elle cherche à trouver la solution qui satisfait le plus l'ensemble de contraintes qui maximise ou minimise la fonction donnée.

Un programme mathématique est en général défini comme suit :

$$(PM) \left\{ \begin{array}{l} \min f(x) \text{ ou } \max f(x) \\ \text{s.c} \\ h_i(x) = 0, \quad i : 1, \dots, m \\ g_j(x) \leq 0, \quad j : 1, \dots, p \\ x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

Où : f, h_i et g_j sont des fonctions définies de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

- Un point $x \in S$ est appelé solution réalisable de (PM).
- L'ensemble des conditions $\{h_i(x) = 0, \quad i : 1, \dots, m ; g_j(x) \leq 0, \quad j : 1, \dots, p, x \in S \subseteq \mathbb{R}^n\}$ sont les contraintes du problème (PM).
- L'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^n / h_i(x) = 0, \quad i : 1, \dots, m ; g_j(x) \leq 0, \quad j : 1, \dots, p\}$ est appelé l'ensemble des solutions réalisables ou ensemble des contraintes.

1.2.1 Notions de base

Pour la formulation mathématique (PM), on dit que x^* est une solution optimale :

Définition 1.2.1 [3] On appelle solution réalisable de (PM) tout point x vérifiant les contraintes (i.e., $x^* \in S$).

Définition 1.2.2 [3] Une solution réalisable qui optimise l'objectif sur S est dite solution optimale globale de (PM) (i.e., $x^* \in S$ est un minimum global de f si $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in S$).

Définition 1.2.3 [3] Un point x^* est une solution optimale locale de (PM), s'il existe un voisinage V de x^* tel que :

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in V(x^*).$$

1.2.2 Conditions d'optimalité

On considère le programme mathématique suivant :

$$(PM) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x) \\ \text{s.c} \\ h_i(x) = 0, \quad i : 1, \dots, m \\ g_j(x) \leq 0, \quad j : 1, \dots, p \\ x \in S \subseteq \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

Le lagrangien associé à (PM) est défini par :

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j g_j(x),$$

où : λ_i et μ_j sont des réels dits multiplicateurs de Lagrange tel que : $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i : 1, \dots, m$ et $\mu_j \in \mathbb{R}^+$, $j : 1, \dots, p$.

Théorème 1.2.1 [11](Karush-Kuhn-Tucker)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur S . Si x^* est une solution de problème (PM), alors il existe un vecteur $\lambda_i^* \in \mathbb{R}^m$ et $\mu_j^* \in \mathbb{R}_+^p$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0 \\ h_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, p \end{array} \right.$$

1.2.3 Existence et unicité

Théorème 1.2.2 [12](Weierstrass)

Si S l'ensemble des solutions, est compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et si f est continue sur S alors (PM) admet au moins une solution optimale globale $x^ \in S$.*

Théorème 1.2.3 [1] *Si f est strictement convexe et l'ensemble S est convexe, alors (PM) admet une solution optimale unique.*

Remarque 1.2.1 *La stricte convexité n'assure pas l'existence de la solution mais assure l'unicité.*

1.3 Programmation linéaire

Un problème de programmation linéaire consiste à optimiser une fonction objectif linéaire dépendant de variables de décision tout en vérifiant un ensemble de contraintes linéaires (égaalités et/ou inégalités).[9]

1.3.1 Forme générale d'un programme linéaire

Un programme linéaire générique s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{aligned}$$

ou, sous une forme plus compacte,

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n c_jx_j \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Nous ajouterons également des contraintes de non-négativités,

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Sous forme matricielle, le problème se réécrit :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ & Ax \geq b, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Avec

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Tel que :

- $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur inconnu.
- $c \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur coût.
- $b \in \mathbb{R}^m$ est le second membre.
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est la matrice des contraintes.
- $c^t x$ est la fonction à optimiser.
- $Ax \geq b$ les contraintes.

Exemple 1.3.1 Voici un exemple de programmation linéaire de forme générale :

$$\begin{aligned} \max z = & 5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \\ & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 - x_4 \leq 1 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Remarque 1.3.1 – On peut transformer un problème de maximisation à un problème de minimisation. Il suffit d'écrire : $\max(c^t x) = -\min(-c^t x)$.

- Une contrainte définie par une inégalité inférieure peut être multipliée par -1 pour obtenir une inégalité supérieure : $Ax \leq b \Leftrightarrow -Ax \geq -b$.
- Toute variable libre x ($x_i \in \mathbb{R}$) peut s'écrire comme différence de deux variables non négatives $x_i = x'_i - x''_i$, $x'_i \geq 0$ et $x''_i \geq 0$.
- une contrainte égalité peut être transformer en : $Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ax \geq b \\ Ax \leq b. \end{cases}$

1.3.2 Forme standard

Un programme linéaire primal sous la forme standard par :

$$\begin{aligned} \max \quad & c^t x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Règles de passage de la forme générale à la forme standard[17] :

1. On transforme toute variable libre.
2. On transforme un problème de minimisation à un problème de maximisation.
3. Une inégalité du type $\leq$ se ramène à une équation en ajoutant au membre de gauche une variable non négative, appelée variable d'écart, dont la contribution à la fonction objectif est nulle,

supposons que la i contrainte est sous la forme suivante :

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

en ajoutant une variable d'écart, on obtient :

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0.$$

4. Une inégalité du type $\geq$ se ramène à une équation en retranchant au membre de gauche une variable non négative, appelée variable d'écart, avec une contribution nulle à la fonction objectif,

supposons que la i contrainte est sous la forme suivante :

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i,$$

en retranchant une variable d'écart, on obtient :

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0.$$

1.3.3 Forme canonique

Un programme linéaire primal sous la forme canonique par :

$$\begin{aligned} \max c^t x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

1.3.4 Dualité en programmation linéaire

Soit le programme linéaire primal écrit sous forme standard :

$$(PL) \begin{cases} \min c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Son dual s'écrit sous la forme :

$$(DL) \begin{cases} \max b^t y \\ A^t y \leq c \\ y \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Exemple 1.3.2 Soit le problème primal suivant :

$$\begin{cases} \min 2x_1 - x_2 \\ x_1 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = -4 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Alors son dual est :

$$\max 3y_1 - 4y_2 + y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2 \\ -y_2 + y_3 \leq -1 \\ y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

1.4 Résolution d'un programme linéaire

1.4.1 Un exemple de programme linéaire

[13] Une entreprise qui fabrique deux types de camions (types A et B).

Cette entreprise est divisée en trois ateliers, l'atelier I fabriquant les moteurs, l'atelier II fabriquant les carrosseries, l'atelier III étant chargé de l'assemblage.

Les temps unitaires pour chacune des trois opérations et pour chaque type de camions sont consignés dans le tableau suivant :

Ateliers	Camions de type A	Camions de type B
I Moteurs	1h	3h
II Carrosseries	2h	1h
III Assemblage	1h	1h

Par ailleurs, l'étude des capacités de production des 3 ateliers a dégagé qu'en un mois, 450 heures de travail pouvaient être utilisées dans l'atelier I, 350 heures dans l'atelier II, 200 dans l'atelier III. Enfin, on sait que le bénéfice unitaire réalisé par l'entreprise sur les camions de type A s'élève à 4000 et que celui réalisé sur les camions de type B est de 8000.

Quelle doit être la production mensuelle en camions de chaque type pour rendre le bénéfice de l'entreprise le plus grand possible.

Solution 1.4.1 Les variables de décision sont :

- x_1 : la production mensuelle en camions de type A.
- x_2 : la production mensuelle en camions de type B.

Les contraintes de disponibilité d'heures de travail dans chacun des ateliers peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 &\leq 450 \text{ (AtelierI)} \\2x_1 + x_2 &\leq 350 \text{ (AtelierII)} \\x_1 + x_2 &\leq 200 \text{ (AtelierIII)}\end{aligned} \quad (a)$$

Par ailleurs, on a évidemment :

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (b)$$

Enfin, il s'agit de trouver x_1 et x_2 répondant aux contraintes (a) et (b) et rendant la fonction.

$$f = 4000x_1 + 8000x_2, \text{ maximale.}$$

1.4.2 Résolution graphique

Prenons notre exemple de modélisation, soit le problème d'optimisation [13] :

$$\begin{aligned} \max \quad & 4000x_1 + 8000x_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leq 450 \\ 2x_1 + x_2 \leq 350 \\ x_1 + x_2 \leq 200 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned} .$$

Le problème peut être représenté comme sur la Figure 1.2. Pour le réaliser, nous traçons d'abord les droites correspondant aux contraintes, puis nous déterminons le domaine réalisable en vérifiant le sens des inégalités pour chacune d'elle. Nous traçons ensuite les droites correspondant à la variation de l'objectif.

Pour cela, traçons les trois droites :

$$\text{eq1} : x_1 + 3x_2 = 450$$

$$\text{eq2} : 2x_1 + x_2 = 350$$

$$\text{eq3} : x_1 + x_2 = 200$$

et on a $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

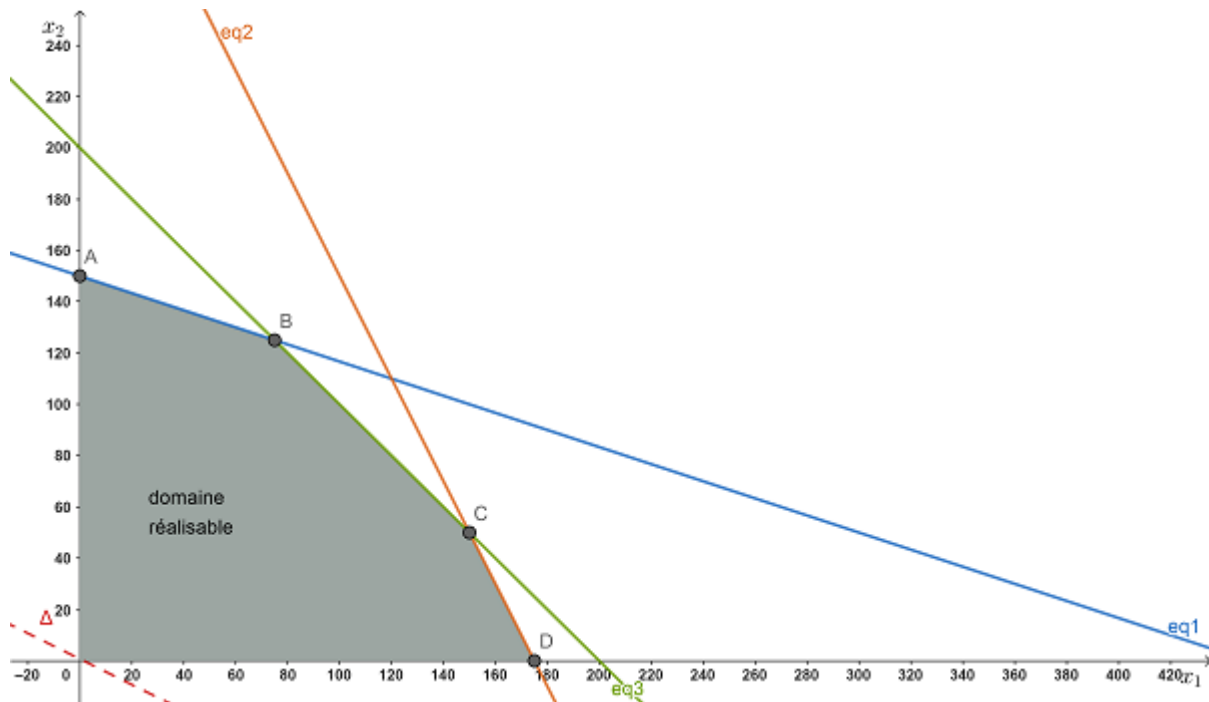


FIGURE 1.2 – Résolution graphique d'un problème linéaire.

Il est clair que ces trois droites délimitent un domaine réalisable, hachuré sur la Figure 1.2, qui représente l'ensemble des solutions possibles compte tenu des contraintes (a) et (b). Il s'agit du polygone convexe OABCD dont chaque sommet est donné par l'intersection de deux droites parmi les cinq qui déterminent les contraintes (A par exemple, est l'intersection de $x_1 = 0$ et de $x_1 + 3x_2 = 450$).

Il s'agit donc de trouver le point (ou les points) de domaine réalisable tel que la fonction $4000x_1 + 8000x_2$ soit maximale en ce point, ou, ce qui est la même chose, tel que la fonction $x_1 + 2x_2$ soit maximale.

Sur la figure, on a tracé une droite Δ de la forme $x_1 + 2x_2 = \text{constante}$, pour avoir le point (ou les points) cherché, il suffit de déplacer la droite Δ parallèlement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle « touche » dernier point de domaine réalisable, donc le point cherché est le point B de coordonnées (75 ; 125), en remplaçant dans la fonction objectif, on trouve

la valeur maximale.

La représentation graphique, bien qu'intéressante pour "voir" comment se passe les choses, ne fonctionnent plus dès que nous avons plus de deux variables. Il faut alors passer à l'utilisation de logiciels, utilisant l'algorithme du simplexe ou de points intérieurs.

1.4.3 Méthode du simplexe

La méthode du simplexe est un algorithme classique et largement utilisé pour résoudre les problèmes de programmation linéaire (PL). Elle a été développée par George Dantzig dans les années 1940 et reste l'une des méthodes les plus efficaces pour résoudre les problèmes de PL.

La méthode du simplexe se décompose généralement en deux phases : la phase 1 et la phase 2. Ces phases sont utilisées pour résoudre les problèmes de programmation linéaire avec des contraintes d'égalité, d'inégalité et des variables libres.

Phase I

La phase 1 est utilisée pour trouver une solution de base réalisable initiale. Cette phase est nécessaire lorsque le problème contient des contraintes d'égalité et/ou des variables libres. L'objectif de la phase 1 est de trouver une solution initiale qui satisfait toutes les contraintes du problème.

Phase II

Une fois que la solution de base réalisable initiale est trouvée dans la phase 1, la phase 2 est utilisée pour améliorer cette solution et trouver la solution optimale du problème.

1.4.4 méthodes de point intérieur

La nouvelle époque des méthodes points intérieurs a commencé en 1984 lorsque Karmarkar a proposé son algorithme Optimisation linéaire, et il a annoncé que son algorithme pouvait résoudre des problèmes d'Optimisation linéaire à grande échelle beaucoup plus rapidement que la méthode Simplexe. Aujourd'hui, il est clair que Karmarkar a ouvert un nouveau champ : le champ florissant des méthodes de points intérieurs modernes. Il y a, principalement, quatre grandes catégories des méthodes de points intérieurs :

- Les méthodes affines.
- Les méthodes projectives.
- Les méthodes de réduction de la potentielle.
- Les méthodes de trajectoire centrale.

Dans ce travail, on s'intéresse pour les méthodes de trajectoire centrale.

CHAPITRE 2

MÉTHODE DE TRAJECTOIRE CENTRALE POUR LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

Dans cette partie, on donne un aperçu sur les méthodes primales-duales de trajectoire basée sur l'approche barrière logarithmique. Dans les années 70, la théorie de la complexité devient une partie importante en optimisation en général, et en particulier, en optimisation linéaire. On exige aux méthodes développées de montrer que leur convergence se réalise en un temps polynomial. C'est à dire de résoudre le problème en un nombre d'opérations borné par un polynôme de la même taille du problème.

2.1 Définitions et propriétés

Rappelons que le problème de la programmation linéaire, considéré comme primal, est défini par

$$(PL) \begin{cases} \min c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Le problème dual associé à (PL) est défini par

$$(DL) \begin{cases} \max b^t y \\ A^t y + s = c \\ y \in \mathbb{R}^m, s \geq 0. \end{cases}$$

où s désigne une variable d'écart. Les ensembles des solutions réalisables de (PL) et (DL) seront notés respectivement F_p et F_D . Ainsi, on a :

$$F_p = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x \geq 0\},$$

et

$$F_D = \{(y, s) \in \mathbb{R}^m, A^t y + s = c, s \geq 0\}.$$

Théorème 2.1.1 [10](Dualité faible)

Si x et y sont des solutions réalisables de problèmes (PL) et (DL) respectivement, alors $c^t x > b^t y$.

Preuve : On a x et y sont réalisables, alors du problème (DL) on a :

$$c \geq A^t y \implies c^t x \geq y^t A x = (b^t y)^t = b^t y.$$

Théorème 2.1.2 [10](Dualité forte)

Si x^* et y^* sont des solutions réalisables de (PL) et (DL) respectivement tels que $b^t y^* = c^t x^*$, alors x^* et y^* sont des solutions optimales des problèmes (PL) et (DL) respectivement.

Preuve : On veut démontrer que x^* et y^* sont des solutions optimales des problèmes (PL) et (DL) respectivement c'est-à-dire, on démontre que $c^t x^* = \min c^t x$ et $b^t y^* = \max b^t y$. D'après le théorème précédent, on a $b^t y^* \geq c^t x^*$ donc $\min c^t x \geq \max b^t y$ en particulier, $c^t x^* \geq \min c^t x \geq \max b^t y \geq b^t y^*$

$$\left\{ \begin{array}{l} c^t x^* \geq \min c^t x \geq \max b^t y \geq c^t x^* \implies c^t x^* \geq \min c^t x \geq c^t x^* \\ \text{et} \\ b^t y^* \geq \min c^t x \geq \max b^t y \geq b^t y^* \implies b^t y^* \geq \max b^t y \geq b^t y^*. \end{array} \right.$$

D'où le résultat.

2.2 Méthode de trajectoire centrale primale-duale

2.2.1 Présentation de la méthode

A tout problème (PL) on associe le problème pénalisé suivant :

$$(PL)_\mu \left\{ \begin{array}{l} \min f_\mu(x) \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{array} \right.$$

où f_μ est la fonction définie par :

$$f_\mu(x) = c^t x - \mu \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i).$$

Propriétés de f_μ [5] • Pour tout $\mu > 0$, la fonction f_μ , est strictement convexe.

• En effet, $f_\mu \in C^\infty$ et nous avons en particulier

$$\nabla f_\mu(x) = c - \mu X^{-1}e,$$

avec $e = (1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$.

$$\nabla^2 f_\mu(x) = \mu X^{-2},$$

où $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ est une matrice diagonale définie positive, car $x_i > 0$, et $\mu > 0$, alors $\nabla^2 f_\mu(x)$ est une matrice définie positive.

- Si F_P^0 et F_D^0 sont non vides, alors pour tout $\mu > 0$, le problème $(PL)_\mu$, admet une solution unique notée $x(\mu)$, et appelée "point centrale".
- Quand $\mu \rightarrow 0$, $x(\mu) \rightarrow x^*$ solution optimale de (PL) .
- La fonction $\mu \rightarrow (x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ définit la trajectoire centrale qu'on note

$$T_c = (x(\mu), y(\mu), s(\mu) \mid \mu > 0),$$

T_c s'appelle trajectoire centrale de $(PL)_\mu$.

- $x(\mu)$ est définie d'une façon unique par les conditions d'optimalité de Karush – Kuhn – Tucker suivantes :

$$\begin{cases} c - \mu X^{-1}e - A^t y = 0 \\ Ax = b, \end{cases}$$

où y est le vecteur de mutiplicateur de Lagrange associé à la contrainte. $Ax = b$ du problème $(PL)_\mu$.

- En introduisant $s = \mu X^{-1}e$, on aura $Xs = \mu e$. Le système précédent devient :

$$(S_\mu) \begin{cases} Xs = \mu e \\ Ax = b, \quad x > 0 \\ A^t y + s = c, \quad s > 0. \end{cases}$$

Notons que (S_μ) correspond aux conditions de complémentarité pour un problème de programmation linéaire.

Remarque 2.2.1 [5] Le système (S_μ) désigne aussi les conditions d'optimalité du problème $(DL)_\mu$ où

$$(DL)_\mu \begin{cases} \max b^t y - \mu \sum_{i=1}^n \text{Log}(s_i) \\ A^t y + s = c, \quad s > 0. \end{cases}$$

En effet, les conditions d'optimalité de Karush – Khun – Tucker pour ce dernier problème sont données par :

$$(S'_\mu) \begin{cases} b - Ax = 0 \\ \mu S^{-1}e - x = 0 \\ A^t y + s = c, \end{cases}$$

où x est le vecteur de multiplicateur associé à la contrainte $A^t y + s = c$ et $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$. D'où (S'_μ) est équivalent à (S_μ) .

En ajoutant les deux contraintes $s > 0$ et $x > 0$ au dernier système, on retrouve bien (S_μ) .

2.2.2 Concept de proximité

Les méthodes (TC) primales-duales sont basées sur la résolution du système non linéaire suivant [7][15] :

$$\begin{cases} Ax - b = 0 \\ A^t y + s - c = 0 \\ XSe - \mu e = 0 \\ s > 0, x > 0, \end{cases}$$

qui peut être obtenu en combinant le système non linéaire primal (PL) et le système non linéaire dual (DL), le système admet une solution unique si et seulement si les hypothèses $\overset{0}{F}_P$ et $\overset{0}{F}_D$ sont vérifiées simultanément.

Soit $\mu > 0$ et un critère d'arrêt ε donné on dit que la solution $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ est proximité de la trajectoire centrale s'il appartient à l'ensemble :

$$T_c = \{(x, y, s) \in \overset{0}{F}_P \times \overset{0}{F}_D / \|X(\mu)S(\mu) - \mu e\|_2 \leq \theta \mu, 0 < \theta < 1\}.$$

En calculant une racine de la fonction $F(x, y, s) = 0$, issue du système (S_μ) , et définie par :

$$F(x, y, s) = \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^t y + s - c \\ XSe - \mu e \end{pmatrix}.$$

Avec $x, s > 0$.

La direction de Newton $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ est solution du système linéaire :

$$J(x, y, s) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = -F(x, y, s)$$

J est la matrice Jacobienne du système. On obtient :

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu e - XSe \end{bmatrix}.$$

De la deuxième équation, on a :

$$\Delta s = -A^t \Delta y.$$

En substituant dans la troisième, on obtient :

$$S\Delta x - XA^t \Delta y = \mu e - XSe.$$

En multipliant par AS^{-1} et sachant que $A\Delta x = 0$, on a :

$$-AS^{-1}XA^t \Delta y = AS^{-1}(\mu e - XSe).$$

Comme A est de plein rang, on a la solution cherchée :

$$\Delta y = -(AS^{-1}XA^t)^{-1}AS^{-1}(\mu e - XSe)$$

$$\Delta s = -A^t \Delta y$$

$$\Delta x = S^{-1}(\mu e - XSe) - S^{-1}X\Delta s.$$

Donc le nouvel itéré s'écrit sous la forme :

$$(x^+, y^+, s^+) = (x, y, s) + \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta s), \alpha \in]0, 1],$$

le pas de déplacement $\alpha > 0$ est choisi d'une façon à maintenir la stricte faisabilité des nouveaux itérés, alors on va choisir une procédure dite de positivité qui est moins coûteuse que la méthode de recherche linéaire.

2.2.3 Algorithme de la méthode

Algorithme de trajectoire centrale

Début algorithme

Données : Soit $\varepsilon > 0$ un paramètre de précision ;

Initialisation

$K = 0, (x^0, y^0, s^0) \in F_P^0 \times F_D^0$ où $\mu^0 = \frac{(x^0)^t s^0}{n}$;

Tant que $(x^k)^t s^0 > \varepsilon$ **faire**

1. Prendre $\mu^{K+1} = \mu^K \sigma, 0 < \sigma < 1$.

2. Calculer

$$\Delta y = -(AS^{-1}XA^t)^{-1}AS^{-1}(\mu e - XSe)$$

$$\Delta s = -A^t \Delta y$$

$$\Delta x = S^{-1}(\mu e - XSe) - S^{-1}X\Delta s.$$

3. Prendre

$$x^{K+1} = x^K + \alpha^K \Delta x^K$$

$$s^{K+1} = s^K + \alpha^K \Delta s^K$$

$$y^{K+1} = y^K + \alpha^K \Delta y^K.$$

4. Poser $K=K+1$

Fin tant que

Fin algorithme.

CHAPITRE 3

MÉTHODE DE TRAJECTOIRE CENTRALE VIA UNE FONCTION NOYAU

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode de point intérieur primaire-double pour problèmes linéaire d'optimisation basés sur une nouvelle fonction noyau efficace avec un trigonométrique barrière terme. Nous dériver les limites de complexité pour les grandes et petites méthodes de mise à jour, respectivement.

Une telle fonction est fortement convexe et coercive, lisse sur son domaine qui n'est autre que l'ortan positif. Nous montrons que le meilleur résultat de complexité peut être atteint, à savoir $O(pn^{\frac{p+2}{2(p+1)}} \log \frac{n}{\epsilon})$, pour les méthodes à grand pas et $O(p^n \log \frac{n}{\epsilon})$ pour les méthodes à petit pas, ce qui améliore sensiblement les résultats de complexité obtenus jusqu'à présent.

On a détaillé l'article de M. Bouafia, A. Yassine et D. Benterki, qui s'intitule "*An Efficient Primal-Dual Interior Point Method for Linear Programming Problems Based on a*

3.1 Présentation de la méthode

Nous considérons le problème d'optimisation linéaire primal sous forme standard suivant :

$$\min \{ \langle c, x \rangle : Ax = b, x \geq 0 \}, \quad (\mathbf{P}) \quad (3.1)$$

et son dual

$$\max \{ \langle b, y \rangle : A^t y + s = c, s \geq 0 \}, \quad (\mathbf{D}) \quad (3.2)$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice donnée et $\langle c, x \rangle = c^t x$, $\text{rang}(A) = m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Nous supposons que **(P)** et **(D)** satisfont la condition de points intérieurs, notée **CPI**, i.e., il existe (x^0, y^0, s^0) tel que :

$$Ax^0 = b, A^t y^0 + s^0 = c, x^0 > 0, s^0 > 0. \quad (3.3)$$

On sait que la recherche des solutions optimales de **(P)** et **(D)** est équivalente à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} Ax = b, & x \geq 0, \\ A^t y + s = c, & s \geq 0, \\ xs = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

L'idée de base d'**IPMs** est de remplacer la troisième équation en (3.4), la condition dite de complémentarité pour **(P)** et **(D)**, par l'équation paramétrée $xs = \mu e$, avec $\mu > 0$. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} Ax = b, & x \geq 0 \\ A^t y + s = c, & s \geq 0 \\ xs = \mu e. \end{cases} \quad (3.5)$$

Si la condition de point intérieur **CPI** est satisfaite, c'est-à-dire pour chaque $\mu > 0$ le système (3.5) admet une solution unique $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$.

On appelle $x(\mu)$ le μ -centre de **(P)** et $(y(\mu), s(\mu))$ le μ -centre de **(D)**.

Appliquons la méthode de Newton au système (3.5), on résoud le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} A\Delta x = 0, \\ A^t \Delta y + \Delta s = 0, \\ x\Delta s + s\Delta x = \mu e - xs. \end{cases} \quad (3.6)$$

Ce système admet une solution unique désignée par $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$.

Le résultat d'une étape de Newton avec la taille de l'étape α s'écrit comme suit :

$$x_+ = x + \alpha \Delta x, \quad y_+ = y + \alpha \Delta y, \quad s_+ = s + \alpha \Delta s, \quad (3.7)$$

où $\alpha \in]0, 1]$.

Nous présentons maintenant le vecteur v réduit et les directions de recherche d_x et d_s comme suit :

$$v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}, \quad d_x = \frac{v\Delta x}{x}, \quad d_s = \frac{v\Delta s}{s}. \quad (3.8)$$

En utilisant (3.6) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} A\Delta x = 0, \\ A^t \Delta y + \Delta s = 0, \\ x\Delta s + s\Delta x = -\mu v(v - v^{-1}), \end{cases} \quad (3.9)$$

En utilisant (3.8) on a le système (3.6) :

$$\begin{cases} \bar{A}d_x = 0 \\ \bar{A}^t \Delta y + d_s = 0 \\ d_x + d_s = v^{-1} - v. \end{cases} \quad (3.10)$$

Tel que

$$\bar{A} = \frac{1}{\mu}AV^{-1}X,$$

et $V = \text{diag}(v)$, $X = \text{diag}(x)$.

Remarquez que la partie droite de la troisième équation du système (3.10) n'est rien d'autre que le contraire de la fonction de barrière logarithmique $\Phi(v)$,

i.e : $d_x + d_s = -\nabla\Phi(v)$, alors le système (3.10) peut-être comme suit :

$$\begin{cases} \bar{A}d_x = 0 \\ \bar{A}^t \Delta y + d_s = 0 \\ d_x + d_s = -\nabla\Phi(v). \end{cases} \quad (3.11)$$

La fonction barrière logarithmique $\Phi(v)$ on définit $\mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ s'écrit aussi comme suit :

$$\Phi(v) = \Phi(x, s, \mu) = \sum_{i=1}^n \psi(v_i), \quad (3.12)$$

avec

$$\psi(v_i) = \frac{v_i^2 - 1}{2} - \log v_i. \quad (3.13)$$

Dans ce qui suit, Nous utilisons $\Phi(v)$ la fonction de proximité pour mesurer la distance entre l'itéré μ -centre et la trajectoire centrale pour $\mu > 0$ donné, comme suit :

$$\delta(v) = \frac{1}{2} \|\nabla\Phi(v)\| = \frac{1}{2} \|d_x + d_s\|. \quad (3.14)$$

3.2 Fonction noyau avec terme barrière trigonométrique

3.2.1 Fonctions noyau et propriétés

Définition 3.2.1 [15] Soit $\psi(t) : \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}^+$, une fonction deux fois continument différentiable. Alors est dite fonction noyau, si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $\psi(1) = \psi'(1) = 0$,
2. $\psi''(t) > 0$ pour $t > 0$,
3. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = +\infty$.

Les deux premières conditions désignent que $\psi(t)$ est strictement convexe et admet une valeur minimale, si $t = 1$. On définit $\psi(t)$ à partir de sa dérivée seconde comme suit :

$$\psi(t) = \int_1^t \int_1^y \psi''(x) dx dy. \quad (3.15)$$

Et la dernière condition indique une fonction barrière.

Dans le tableau suivant, on donne les différentes fonctions noyaux connues et la complexité de leur algorithme pour les méthodes de points intérieurs :

i	Fonction noyau ψ_i	Complexité(grand-pas)
1	$\frac{t^2 - 1}{2} - \log t.$	$O\left(n \log \frac{n}{\epsilon}\right)$
2	$\frac{t^{p+1} - 1}{p+1} - \log t, p \in [0, 1].$	$O\left(qn^{\frac{q+1}{2q}} \log \frac{n}{\epsilon}\right)$
3	$\frac{t^2 - 1}{2} + \frac{t^{1-q} - 1}{q-1}, q > 1.$	$O\left(n \log \frac{n}{\epsilon}\right)$
4	$\frac{t^2 - 1}{2} + e^{\frac{1}{t}-1} - 1.$	$O\left(\sqrt{n}(\log n)^2 \log \frac{n}{\epsilon}\right)$
5	$t - 1 + \frac{t^{1-q} - 1}{q-1}, q > 1.$	$O\left(qn \log \frac{n}{\epsilon}\right)$
6	$p \frac{t^2 - 1}{2} + \frac{t^{-pq} - 1}{q(q+1)} - \frac{pq(t-1)}{q+1}, q > 0, p \geq 1.$	$O\left(\sqrt{n}[\log n] \log \frac{n}{\epsilon}\right)$
7	$\frac{t^2 - 1}{2} + \frac{6}{\pi} \tan\left(\pi \frac{1-t}{4t+2}\right).$	?
8	$\frac{t^2 - 1}{2} + \frac{6}{\pi} \tan\left(\pi \frac{1-t}{4t+2}\right).$	$O\left(n^{\frac{3}{4}} \log \frac{n}{\epsilon}\right)$
9	$\frac{t^2 - 1}{2} - \log t + \lambda \tan^2 h(t), h(t) = \frac{\pi(1-t)}{3t+2}, 0 < \lambda \leq \frac{8}{25}.$	$O\left(n^{\frac{3}{4}} \log \frac{n}{\epsilon}\right)$
10	$\frac{t^2 - 1}{2} - \log t + \frac{1}{8} \tan^2\left(\frac{\pi(1-t)}{4t+2}\right).$	$O\left(n^{\frac{2}{3}} \log \frac{n}{\epsilon}\right)$
11	$\frac{t^2 - 1}{2} - \int_1^t e^{3\left(\tan \frac{\pi}{2x+2}\right)-1} dx.$	$O\left(\sqrt{n}(\log n)^2 \log \frac{n}{\epsilon}\right)$
12	$t^2 - 2t + \frac{1}{\sin h(t)}, h(t) = \frac{\pi}{t+1}.$	$O\left(n^{\frac{3}{4}} \log \frac{n}{\epsilon}\right)$
13	$\frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(t-1)^2}{2t} + \frac{1}{8} \tan^2\left(\frac{\pi(1-t)}{4t+2}\right).$	$O\left(n^{\frac{2}{3}} \log \frac{n}{\epsilon}\right)$
14	$\frac{t^2 - 1}{2} + \frac{4}{\pi p} [\tan^p \frac{\pi}{2t+2} - 1], p \geq 2.$	$O\left(pn^{\frac{p+2}{2(p+2)}} \log \frac{n}{\epsilon}\right)$

TABLE 3.1 – Résultats de la complexité algorithmique pour l'optimisation linéaire

Maintenant, nous définissons une nouvelle fonction noyau $\psi(t)$ comme suit :

$$\psi(t) = \frac{t^2 - 1}{2} + \frac{4}{\pi p} [\tan^p h(t) - 1], h(t) = \frac{\pi}{2t+2}, p \geq 2. \quad (3.16)$$

Nous donnons les trois premiers dérivés par rapport à t comme suit :

$$\psi'(t) = t + \frac{4}{\pi} \sec^2 h(t) (\tan^{p-1} h(t)) h'(t). \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
 \psi''(t) &= 1 + \frac{4}{\pi} \left[\frac{\left[2 \tan h(t) (\tan^{p-1} h(t)) (h'(t))^2 \right] \sec^2 h(t) + \left[(p-1) \tan^{p-2} h(t) (1 + \tan^2 h(t)) (h'(t))^2 \right] \sec^2 h(t) + \left[\tan^{p-1} h(t) \right] h''(t) \sec^2 h(t)}{\left[\tan^{p-1} h(t) \right] h''(t)} \right] \\
 &= 1 + \frac{4}{\pi} \sec^2 h(t) \left[\frac{2 \tan^p h(t) (h'(t))^2 + \left[(p-1) \tan^{p-2} h(t) + (p-1) \tan^p h(t) \right] (h'(t))^2}{\left[\tan^{p-1} h(t) \right] h''(t)} \right] \quad (3.18) \\
 &= 1 + \frac{4}{\pi} \sec^2 h(t) \left[\frac{\left[(p+1) \tan^p h(t) + (p-1) \tan^{p-2} h(t) \right] (h'(t))^2 + \left[\tan^{p-1} h(t) \right] h''(t)}{\left[\tan^{p-1} h(t) \right] h''(t)} \right] \\
 \psi'''(t) &= \frac{4}{\pi} \sec^2 h(t) \left[\frac{\left[2(p+1) \tan^{p+1} h(t) + 2(p-1) \tan^{p-1} h(t) \right] (h'(t))^3 + \left[2 \tan^p h(t) \right] h''(t) h'(t)}{\left[2 \tan^p h(t) \right] h''(t) h'(t)} \right] \\
 &+ \frac{4}{\pi} \sec^2 h(t) \left[\frac{\left[(p+1)p \tan^{p-1} h(t) [1 + \tan^2 h(t)] + (p-1)(p-2) \tan^{p-3} h(t) [1 + \tan^2 h(t)] \right] (h'(t))^3 + 2h'(t)h''(t) \left[(p+1) \tan^p h(t) + (p-1) \tan^{p-2} h(t) \right] + (p-1) \tan^{p-2} h(t) [1 + \tan^2 h(t)] h' h''(t) + \left[\tan^{p-1} h(t) \right] h'''(t)}{\left[(p-1) \tan^{p-2} h(t) [1 + \tan^2 h(t)] h' h''(t) + \left[\tan^{p-1} h(t) \right] h'''(t) \right]} \right] \quad (3.19) \\
 &= \frac{4}{\pi} \sec^2 h(t) \left[\frac{\left[(p-1)(p-2) \tan^{p-3} h(t) + 2p^2 \tan^{p-1} h(t) + (p+1)(p+2) \tan^{p+1} h(t) \right] (h'(t))^3 + \left[3(p-1) \tan^{p-2} h(t) + 3(p+1) \tan^p h(t) \right] h'(t) h''(t) + \left[\tan^{p-1} h(t) \right] h'''(t)}{\left[\tan^{p-1} h(t) \right] h'''(t)} \right]
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{-\pi}{2(t+1)^2}, \\ h''(t) &= \frac{\pi}{(t+1)^3}, \\ h'''(t) &= \frac{-3\pi}{(t+1)^4}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Remarque 3.2.1 on a : $\left(\tan h(t)\right)' = \left[1 + \tan^2 h(x)\right]h'(x) = \left(\sec^2 h(x)\right)h'(x)$.

Lemme 3.2.1 Pour $h(t)$ définie dans (3.16) et $p \geq 2$, nous avons ce qui suit

$$0 < h(t) < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0. \tag{3.21}$$

$$\tan h(t) > 0, \quad t > 0. \tag{3.22}$$

$$\tan h(t) - \frac{2}{(p+1)\pi t} > 0, \quad t > 0. \tag{3.23}$$

Preuve.

Pour (3.21), puisque h décroissant sur $]0, +\infty[$ et

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2t+2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2t+2} = 0,$$

donc

$$0 < h(t) < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0.$$

En utilisant (3.21), nous obtenons

$$\tan h(t) > \tan 0 > 0, \quad t > 0.$$

Pour prouver (3.23), on a

$$g(t) = \tan h(t) - \frac{2}{(p+1)\pi t}.$$

Alors la dérivée première de $g(t)$ est

$$\begin{aligned} g'(t) &= (\sec^2 h(t))h'(t) + \frac{2}{(p+1)\pi t^2} \\ &= \frac{h'(t)}{(\cos h(t))^2} + \frac{2}{(p+1)\pi t^2} \\ &= \frac{h'(t)(p+1)\pi t^2 + 2(\cos h(t))^2}{(p+1)\pi t^2 \cos^2 h(t)}. \end{aligned}$$

En utilisant

$$0 < h(t) < \frac{\pi}{2}, t > 0 \text{ et } h(t) = \frac{\pi}{2t+2}, h'(t) = \frac{-\pi}{2(t+1)^2}.$$

On a

$$\cos h(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - h(t)\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - h(t)\right) \leq \left(\frac{\pi}{2} - h(t)\right),$$

donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{h'(t)(p+1)\pi t^2 + 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - h(t)\right)}{(p+1)\pi t^2 \cos^2 h(t)} \leq \frac{h'(t)(p+1)\pi t^2 + 2\left(\frac{\pi}{2} - h(t)\right)^2}{(p+1)\pi t^2 \cos^2 h(t)} \\ &= \frac{\frac{-\pi^2(p+1)t^2}{2(t+1)^2} + 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2t+2}\right)^2}{(p+1)\pi t^2 \cos^2 h(t)} \\ &= \frac{\frac{-2\pi^2(p+1)t^2}{4(t+1)^2} + 2\left(\frac{\pi(t+1)-\pi}{2(t+1)}\right)^2}{(p+1)\pi t^2 \cos^2 h(t)} \\ &= \frac{-2p\pi}{(p+1) \cos^2 h(t)(2t+2)^2} < 0, \text{ (pour } p \geq 2). \end{aligned}$$

Alors $g(t)$ est décroissante en $]0, +\infty[$,

et $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$ donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tan h(t) - \frac{2}{(p+1)\pi t} = 0,$$

donc la condition (3.23) est satisfaite.

Ce qui montre la preuve ■

3.2.2 Eligibilité de la nouvelle fonction noyau

Le lemme suivant est utilisé pour montrer l'efficacité de notre nouvelle fonction noyau (3.16) :

Lemme 3.2.1 Soit $\psi(t)$ définie dans (3.16), et pour tout $t > 0$. Alors,

$$\psi''(t) > 1. \quad (3.24)$$

$$\psi'''(t) < 0. \quad (3.25)$$

$$t\psi''(t) - \psi'(t) > 0. \quad (3.26)$$

$$t\psi''(t) + \psi'(t) > 0. \quad (3.27)$$

Preuve.

Pour montrer $\psi''(t) > 1$, en utilisant (3.20) et (3.22), pour tout $t > 0$.

Alors

$$\frac{4}{\pi} \sec^2 h(t) \left[\begin{array}{c} (p+1)\tan^p h(t) + \\ \left[\begin{array}{c} (p-1)\tan^{p-2} h(t) \\ \tan^{p-1} h(t) \end{array} \right] h''(t) \end{array} \right] (h'(t))^2 > 0.$$

Pour montrer (3.25), en utilisant (3.19), (3.20) et (3.22) on obtient $\psi'''(t) < 0, \forall t > 0$.

Pour (3.26), on utilise (3.2.1) et (3.18) et on obtient :

$$t\psi''(t) - \psi'(t) = \frac{4}{\pi} \sec^2 h(t) \left[\begin{array}{c} t \left[(p-1)\tan^{p-2} h(t) + (p+1)\tan^p h(t) \right] (h'(t))^2 + \\ t \left(\tan^{p-1} h(t) \right) h''(t) + \left(\tan^{p-1} h(t) \right) (-h'(t)) \end{array} \right],$$

on a $-h'(t) = \frac{\pi}{2(t+1)^2} > 0$, ce qui montre (3.26).

Pour (3.27), en utilisant (3.2.1) et (3.18), on a

$$\begin{aligned} t\psi''(t) + \psi'(t) &= 2t + \frac{4}{\pi} \sec^2 h(t) \left[\frac{(h'(t))^2 [(p-1) \tan^{p-2} h(t)] t +}{\left(\tan^{p-1} h(t) \right) \left[\begin{array}{c} ((p+1)(h'(t))^2 \tan h(t)) t + h''(t) t + \\ h'(t) \end{array} \right]} \right] \\ &= 2t + \frac{4}{\pi} \sec^2 h(t) \left[\frac{(h'(t))^2 [(p-1) \tan^{p-2} h(t)] t +}{\left(\tan^{p-1} h(t) \right) \frac{4\pi}{(2t+2)^4} \left[\begin{array}{c} 2t^2 + \\ \pi(p+1)t \left(\tan h(t) - \frac{2}{(p+1)\pi t} \right) \end{array} \right]} \right] \end{aligned}$$

pour (3.23)

$$\frac{4\pi}{(2t+2)^4} \left[\frac{2t^2 +}{\pi(p+1)t \left(\tan h(t) - \frac{2}{(p+1)\pi t} \right)} \right] > 0$$

, ce qui prouve (3.27).

Ce qui termine la preuve. ■

De (3.27), est équivalente que la fonction $t \rightarrow \psi(e^t)$ est convexe et

$$\psi(\sqrt{t_1 t_2}) \leq \frac{1}{2}(\psi(t_1) + \psi(t_2)), \quad (3.28)$$

pour tout $t_1, t_2 \geq 0$.

Cette propriété est connue dans la littérature, et il a été démontré par plusieurs chercheurs (voir [19, 8]).

En guise de préparation pour plus tard, nous présentons les résultats techniques du nouveau noyau fonction.

Lemme 3.2.2 *Pour ψ , nous avons :*

$$\frac{1}{2}(t-1)^2 \leq \psi(t) \leq \frac{1}{2}[\psi'(t)]^2, t > 0. \quad (3.29)$$

$$\psi(t) \leq \left(1 + \frac{\pi}{8}p\right)(t-1)^2, t > 1. \quad (3.30)$$

Preuve. Pour montrer (3.29) , en utilisant (3.24) et $\psi(t) = \int_1^t \int_1^y \psi''(x) dx dy$, on a

$$\psi(t) = \int_1^t \int_1^x \psi''(y) dy dx \geq \int_1^t \int_1^x 1 dy dx = \frac{1}{2}(t-1)^2$$

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_1^t \int_1^x \psi''(y) \times 1 dy dx \\ &\leq \int_1^t \int_1^x \psi''(y) \psi''(x) dy dx \\ &= \int_1^t \psi''(x) \psi'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} [\psi'(t)]^2 \end{aligned}$$

Pour montrer (3.30), en utilisant le développement de Taylor, et on a $\psi(1) = \psi'(1) = 0$, $\psi''(1) = (2 + \frac{\pi}{4}p)$, $\psi'''(t) < 0$ alors

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi(1) + \psi'(1)(t-1) + \frac{1}{2}\psi''(1)(t-1)^2 + \frac{1}{6}\psi'''(\xi)(\xi-1)^3 \\ &= \frac{1}{2}\psi''(1)(t-1)^2 + \frac{1}{6}\psi'''(\xi)(\xi-1)^3 \\ &\leq \frac{1}{2}\psi''(1)(t-1)^2 \\ &= (1 + \frac{\pi}{4}p)(t-1)^2 \end{aligned}$$

pour certains ξ vérifiant : $1 \leq \xi \leq t$.

Ce qui termine la preuve. ■

Soit $\sigma : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ être la fonction inverse de ψ pour $t \geq 1$ et soit $\rho : [0, +\infty[\rightarrow]0, 1]$ soit la fonction inverse de $-\frac{1}{2}\psi'$ pour tout $t \in]0, 1]$. Ensuite, nous avoir le lemme suivante :

Lemme 3.2.3 Pour ψ , nous avons :

$$1 + \sqrt{\frac{8}{8 + \pi p}} s \leq \sigma(s) \leq 1 + \sqrt{2s}, s \geq 0. \quad (3.31)$$

$$\tan h(t) \leq (4z + 2)^{\frac{1}{p+1}}, z \geq 0. \quad (3.32)$$

Preuve. Pour montrer (3.31), soit

$$s = \psi(t), t \geq 1, \text{ i.e : } \sigma(s) = t, t \geq 1.$$

En utilisant (3.29), on a

$$\psi(t) \geq \frac{1}{2}(t-1)^2.$$

Donc

$$s \geq \frac{1}{2}(t-1)^2, t \geq 1,$$

ce qui implique que

$$\sigma(s) = t \leq 1 + \sqrt{2s}.$$

En utilisant (3.30), on a

$$\psi(t) \leq \left(1 + \frac{\pi}{8}p\right)(t-1)^2, t > 1,$$

donc

$$s \leq \left(1 + \frac{\pi}{8}p\right)(t-1)^2, t > 1,$$

ce qui implique que

$$t = \sigma(s) \geq 1 + \sqrt{\frac{8}{8 + \pi p}}s.$$

Pour montrer (3.32), soit

$$z = \frac{-1}{2}\psi'(t), t \in]0, 1] \Leftrightarrow 2z = -\psi'_B(t), t \in]0, 1].$$

En utilisant la définition de $\psi'(t)$ et $h'(t)$, on a

$$2z = -\left(t + \frac{4}{\pi}\left(1 + \tan^2 h(t)\right)\left(\tan^{p-1} h(t)\right)h'(t)\right),$$

ce qui implique

$$(1 + \tan^2 h(t))(\tan^{p-1} h(t)) = (2z + t) \frac{\pi}{4(-h'(t))} \leq (2z + 1) \frac{\pi}{4(-h'(1))} = 2(2z + 1) \text{ pour } t \in]0, 1],$$

et

$$(1 + \tan^2 h(t))(\tan^{p-1} h(t)) \geq \tan^2 h(t) \tan^{p-1} h(t) = \tan^{p+1} h(t),$$

ce qui implique que

$$\tan h(t)^{p+1} \leq (4z + 2), z \geq 0.$$

Donc

$$\tan h(t) \leq (4z + 2)^{\frac{1}{p+1}}, z \geq 0.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Nous proposons un théorème important, qui est valable pour toutes les fonctions du noyau qui satisfont (3.25) et (3.26) (Lemma 2.4 dans [8]).

Théorème 3.2.1 [19] *Laisser $\sigma : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ être la fonction inverse de $\psi(t)$ pour $t \geq 1$.*

Ensuite, nous avons

$$\phi(\beta v) \leq n\psi\left(\beta\sigma\left(\frac{\phi(v)}{n}\right)\right), v \in \mathbb{R}_{++}, \beta \geq 1.$$

Lemme 3.2.4 *Soit $v_+ = \frac{v}{\sqrt{1-\theta}}$, $0 \leq \theta \leq 1$, Si $\Phi(v) \leq \tau$, alors on a*

$$\Phi(v_+) \leq \frac{\theta n + 2\tau + 2\sqrt{2\tau n}}{2(1-\theta)}$$

Preuve. On a $\frac{1}{\sqrt{1-\theta}} \geq 1$, et $\sigma\left(\frac{\Phi(v)}{n}\right) \geq 1$, nous obtenons $\frac{\sigma\left(\frac{\Phi(v)}{n}\right)}{\sqrt{1-\theta}} \geq 1$.

Et pour $t \geq 1$, on a

$$\psi(t) \leq \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Appliquant le théorème 3.2.1, avec $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$, l'inégalité (3.31) il suit que :

$$\begin{aligned}
 \Phi(v_+) &\leq n\psi\left(\beta\sigma\left(\frac{\phi(v)}{n}\right)\right) \\
 &\leq n\psi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\sigma\left(\frac{\Phi(v)}{n}\right)\right) \\
 &\leq \frac{n}{2}\left(\left[\frac{\sigma\left(\frac{\Phi(v)}{n}\right)}{\sqrt{1-\theta}}\right]^2 - 1\right) \\
 &= \frac{n}{2(1-\theta)}\left(\left[\sigma\left(\frac{\Phi(v)}{n}\right)\right]^2 - (1-\theta)\right) \\
 &\leq \frac{n}{2(1-\theta)}\left(\left[1 + \sqrt{2\frac{\Phi(v)}{n}}\right]^2 + \theta - 1\right) \\
 &= \frac{n}{2(1-\theta)}\left(\left[1 + 2\frac{\Phi(v)}{n} + 2\sqrt{2\frac{\Phi(v)}{n}}\right] + \theta - 1\right) \\
 &= \frac{n}{2(1-\theta)}\left(\left[2\frac{\Phi(v)}{n} + 2\sqrt{2\frac{\Phi(v)}{n}}\right] + \theta\right),
 \end{aligned}$$

on suppose que $\Phi(v) \leq \tau$, donc on obtient :

$$\begin{aligned}
 \Phi(v_+) &\leq \frac{n}{2(1-\theta)}\left(2\frac{\tau}{n} + 2\sqrt{2\frac{\tau}{n}} + \theta\right) \\
 &= \frac{2\tau + 2\sqrt{2\tau n} + \theta n}{2(1-\theta)}.
 \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

Soit

$$\Phi_0 = \frac{2\tau + 2\sqrt{2\tau n} + \theta n}{2(1-\theta)} = L(n, \theta, \tau), \tag{3.33}$$

alors, $\Phi(v_+)$ majore par Φ_0 dans l'algorithme.

3.2.3 Analyse de la complexité

Dans cette section, nous calculons une taille d'étape par défaut α et la diminution résultante de la fonction de barrière. Après un pas amorti, nous avons

$$x_+ = x + \alpha \Delta x;$$

$$y_+ = y + \alpha \Delta y;$$

$$s_+ = s + \alpha \Delta s.$$

On a $v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}$, $d_x = \frac{v\Delta x}{x}$, $d_s = \frac{v\Delta s}{s}$, nous avons

$$\begin{aligned} x_+ &= x \left(e + \alpha \frac{\Delta x}{x} \right) = x \left(e + \alpha \frac{d_x}{v} \right) = \frac{x}{v} (v + \alpha d_x), \\ s_+ &= s \left(e + \alpha \frac{\Delta s}{s} \right) = s \left(e + \alpha \frac{d_s}{v} \right) = \frac{s}{v} (v + \alpha d_s), \end{aligned}$$

Donc pour μ fixé on a :

$$v_+ = \sqrt{\frac{x_+ s_+}{\mu}} = \sqrt{\frac{xs(v + \alpha d_x)(v + \alpha d_s)}{\mu v^2}} = \sqrt{(v + \alpha d_x)(v + \alpha d_s)}.$$

Pour tout $\alpha > 0$, on pose :

$$f(\alpha) = \Phi(v_+) - \Phi(v). \quad (3.34)$$

Donc, $f(\alpha)$ est la différence de proximité entre le nouvel et le courant itéré.

Par (3.28), nous avons

$$\begin{aligned} \Phi(v_+) &= \Phi\left(\sqrt{(v + \alpha d_x)(v + \alpha d_s)}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}(\Phi(v + \alpha d_x) + \Phi(v + \alpha d_s)). \end{aligned}$$

On a $f(\alpha) \leq f_1(\alpha)$ telle que :

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{2}[\phi(v + \alpha d_x) + \phi(v + \alpha d_s)] - \phi(v), \quad (3.35)$$

pour $\alpha = 0$, alors

$$f_1(0) = \frac{1}{2}[\phi(v) + \phi(v)] - \phi(v) = \phi(v) - \phi(v) = 0,$$

et

$$f(0) = \phi(\sqrt{v^2}) - \phi(v) = 0,$$

donc

$$f(0) = f_1(0) = 0,$$

pour (3.12) on a : $\phi(v) = \sum_{i=1}^n \psi(v_i)$, alors

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\psi(v_i + \alpha d_{x_i}) + \psi(v_i + \alpha d_{s_i})] - \sum_{i=1}^n \psi(v_i). \quad (3.36)$$

La dérivée de $f_1(\alpha)$ est :

$$f'_1(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\psi'(v_i + \alpha d_{x_i}) d_{x_i} + \psi'(v_i + \alpha d_{s_i}) d_{s_i}),$$

et la dérivée de $f'_1(\alpha)$ est :

$$f''_1(\alpha) = \frac{1}{2} \sum (\psi''(v_i + \alpha d_{x_i}) d_{x_i}^2 + \psi''(v_i + \alpha d_{s_i}) d_{s_i}^2), \quad (3.37)$$

pour $\alpha = 0$, on trouve

$$f'_1(0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\psi'(v_i) d_{x_i} + \psi'(v_i) d_{s_i}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \psi'(v_i) (d_{x_i} + d_{s_i}).$$

En utilisant (3.11) et (3.14), on a

$$f'_1(0) = \frac{1}{2} \nabla \phi(v)^t (d_x + d_s) = -\frac{1}{2} \nabla \phi(v)^t \nabla \phi(v) = -2\delta(v)^2. \quad (3.38)$$

Lemme 3.2.5 Soit $\delta(v)$ définie dans (3.14), alors

$$\delta(v) \geq \sqrt{\frac{1}{2}\Phi(v)}. \quad (3.39)$$

Preuve. En utilisant (3.29), (3.14), on a

$$\Phi(v) = \sum_{i=1}^n \psi(v_i) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(\psi'(v_i))^2 = \frac{1}{2}\|\nabla\Phi(v)\|^2 = 2\delta(v)^2,$$

donc

$$\delta(v) \geq \sqrt{\frac{1}{2}\Phi(v)}.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Remarque 3.2.2 Nous supposons que $\tau > 1$. En utilisant Lemma 3.2.5 et de l'hypothèse que $\Phi(v) \geq \tau$, on a

$$\delta(v) \geq \sqrt{\frac{1}{2}\Phi(v)} \geq \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 3.2.6 Que $f_1(\alpha)$ soit comme défini dans (3.35) et $\delta(v)$ être comme défini dans (3.14). Alors on a :

$$f_1''(\alpha) \leq 2\delta^2\psi''(v_{\min} - 2\alpha\delta). \quad (3.40)$$

Preuve. Puisque d_x et d_s sont orthogonaux, (3.14) implique que $\|(d_x, d_s)\| = 2\delta$. Par conséquent nous avons $\|d_x\| \leq 2\delta$ et $\|d_s\| \leq 2\delta$. Par conséquent,

$$v_i + \alpha d_{xi} \geq v_{\min} - 2\alpha\delta, \quad v_i + \alpha d_{si} \geq v_{\min} - 2\alpha\delta, \quad 1 \leq i \leq n.$$

En utilisant (3.25), $\psi''(t)$ diminue monotone. Par conséquent, de (3.37) nous obtenons

$$f_1''(\alpha) \leq \frac{1}{2} \psi''(v_{\min} - 2\alpha\delta) \sum_{i=1}^n (d_{xi}^2 + d_{si}^2) = 2\delta^2 \psi''(v_{\min} - 2\alpha\delta).$$

Ce qui termine la preuve. ■

Lemme 3.2.7 $f_1'(\alpha) \leq 0$ seulement si α comble l'inégalité

$$\psi'(v_{\min}) - \psi'(v_{\min} - 2\alpha\delta) \leq 2\delta. \quad (3.41)$$

Preuve. En utilisant Lemme 3.2.6, et aussi (3.38)

$$\begin{aligned} f_1'(\alpha) &= f_1'(0) + \int_0^\alpha f_1''(\xi) d\xi \\ &\leq -2\delta^2 + 2\delta^2 \int_0^\alpha \psi''(v_{\min} - 2\xi\delta) d\xi \\ &= -2\delta^2 - \delta \int_0^\alpha \psi''(v_{\min} - 2\xi\delta) d(v_{\min} - 2\xi\delta) \\ &= -2\delta^2 - \delta(\psi'(v_{\min} - 2\alpha\delta) - \psi'(v_{\min})). \end{aligned}$$

Alors, $f_1'(\alpha) \leq 0$ si

$$-\psi'(v_{\min} - 2\alpha\delta) + \psi'(v_{\min}) \leq 2\delta.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Lemme 3.2.8 On a $f_1'(\alpha) \leq 0$, si α satisfait l'inégalité (3.41), la valeur maximale de α est donnée par :

$$\bar{\alpha} = \frac{\rho(\delta) - \rho(2\delta)}{2\delta}.$$

Lemme 3.2.9 On utilise (3.41), on obtient :

$$\bar{\alpha} \geq \frac{1}{\psi''(\rho(2\delta))}.$$

Lemme 3.2.10 Soient ρ et α défini dans le Lemme. Si $\Phi(v) \geq \tau \geq 1$, alors nous avons

$$\bar{\alpha} \geq \frac{1}{(9 + 4p\pi)(8\delta + 2)^{\frac{p+2}{p+1}}}.$$

Preuve. En utilisant le Lemme ,on a

$$\bar{\alpha} \geq \frac{1}{\psi''(\rho(2\delta))},$$

et pour $\rho(2\delta) = t \in]0, 1]$, on a

$$(h'(t))^2 = \frac{\pi^2}{4(t+1)^4} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$h''(t) = \frac{\pi}{(t+1)^3} \leq \pi.$$

$$\psi'' = 1 + \frac{4}{\pi} \sec^2 h(t) \left[\begin{array}{l} [(p-1) \tan^{p-2} h(t) + (p+1) \tan^p h(t)] (h'(t))^2 + \\ [\tan^{p-1} h(t)] h''(t) \end{array} \right],$$

pour $z = 2\delta$ et (3.32) on a $\tan h(t) \leq (4z+2)^{\frac{1}{p+1}}$, ce qui implique

$$\begin{aligned} \tan^2 h(\rho(2\delta)) &\leq (8\delta+2)^{\frac{2}{p+1}} \\ \tan^{p-2} h(\rho(2\delta)) &\leq (8\delta+2)^{\frac{p-2}{p+1}} \\ \tan^{p-1} h(\rho(2\delta)) &\leq (8\delta+2)^{\frac{p-1}{p+1}} \\ \tan^p h(\rho(2\delta)) &\leq (8\delta+2)^{\frac{p}{p+1}}, \end{aligned}$$

et $(8\delta+2) > 1$ ce qui implique

$$\psi''(t) \leq \left[1 + \frac{4}{\pi} (2) \left(2p \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + \pi \right) \right] (8\delta+2)^{\frac{p+2}{p+1}},$$

on a

$$\bar{\alpha} \geq \frac{1}{\left[1 + \frac{4}{\pi} (2) \left(2p \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + \pi \right) \right] (8\delta+2)^{\frac{p+2}{p+1}}} = \frac{1}{(9+4p\pi)(8\delta+2)^{\frac{p+2}{p+1}}}.$$

Ce qui termine la preuve. ■

On note

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{(9+4p\pi)(8\delta+2)^{\frac{p+2}{p+1}}}, \quad (3.42)$$

$\tilde{\alpha}$ est le pas de déplacement et $\tilde{\alpha} \leq \bar{\alpha}$.

Lemme 3.2.11 Si le pas de déplacement α vérifie $\alpha \leq \bar{\alpha}$, on a :

$$f(\alpha) \leq -\alpha\delta^2,$$

alors

$$f(\tilde{\alpha}) \leq -\frac{\sqrt{2}}{288(13p+9)}[\phi(v)]^{\frac{p}{2(p+1)}}. \quad (3.43)$$

Preuve. En utilisant le Lemme avec $\alpha = \tilde{\alpha}$ et de, nous avons

$$\begin{aligned} f(\tilde{\alpha}) &\leq \frac{-\alpha\delta^2}{-\delta^2} \\ &= \frac{(9+4p\pi)(8\delta+2)^{\frac{p+2}{p+1}}}{-\delta^2} \\ &\leq \frac{(9+4p\pi)(8\delta+2(2\delta))^{\frac{p+2}{p+1}}}{-\delta^{\frac{p}{p+1}}} \\ &\leq \frac{144(13p+9)}{-\sqrt{2}} \\ &\leq \frac{-\sqrt{2}}{288(13p+9)}[\Phi(v)]^{\frac{p}{2(p+1)}}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

Après la mise à jour de μ à $(1-\theta)\mu$, on a

$$\Phi(v_+) \leq \Phi_0 = \frac{\theta n + 2\tau + 2\sqrt{2\tau n}}{2(1-\theta)}.$$

Nous avons besoin de compter le nombre d'itérations internes nécessaires pour revenir à la situation où $\Phi(v) \leq \tau$ après une μ mise à jour.

La diminution dans chaque itération intérieure est donnée par (3.43). Dans [19], nous pouvons trouver les valeurs appropriées de K et $\gamma \in]0, 1]$:

$$\bar{K} = \frac{\sqrt{2}}{288(13p+9)}, \quad \gamma = 1 - \frac{p}{2(p+1)} = \frac{p+2}{2(p+1)}.$$

Lemme 3.2.12 Soit K le nombre total d'itérations internes dans l'itération externe. Alors $p > 0$ on a

$$K \leq \left(\frac{288(13p+9)(p+1)\sqrt{2}}{(P+2)} \right) \Phi_0^{\frac{p+2}{2(P+1)}}.$$

Preuve. De le Lemme 1.2.3, dans [8], nous avons

$$K \leq \frac{\Phi_0^{\gamma'}}{\bar{K}^{\gamma'}} = \left(\frac{288(13p+9)(p+1)\sqrt{2}}{(P+2)} \right) \Phi_0^{\frac{p+2}{2(P+1)}}.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Soient ϕ_0 alors, le nombre total d'itérations pour avoir une solution approchée avec $n\mu < \epsilon$ est majoré par

$$\left(\frac{288(13p+9)(p+1)\sqrt{2}}{(P+2)} \right) \Phi_0^{\frac{p+2}{2(P+1)}} \frac{\log \frac{n}{\epsilon}}{\theta}. \quad (3.44)$$

Pour les méthodes à grand pas avec $\tau = O(n)$ et $\theta = \Theta(1)$, on a

$$O(pn^{\frac{p+2}{2(P+1)}} \log \frac{n}{\epsilon}) \text{ itérations.}$$

Si on prend $p = \frac{\log n}{2} - 1$, la borne d'itérations devienne

$$O(\sqrt{n} \log(n) \log \frac{n}{\epsilon}) \text{ itérations,}$$

qui est le minimum de $O((p+1)n^{\frac{p+2}{2(P+1)}} \log \frac{n}{\epsilon})$ itérations.

Pour les méthodes à petit pas, on a $\tau = O(1)$ et $\theta = \Theta(\frac{1}{\sqrt{n}})$. Nous obtenons un majorant de nombre total d'itérations suivant :

En utilisant (3.44) et comme

$$\psi(t) \leq (1 + \frac{\pi}{8}p)(t-1)^2, t > 1,$$

on a

$$\begin{aligned}
 \Phi(v_+) &\leq n\psi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\sigma\left(\frac{\Phi(v)}{n}\right)\right) \\
 &\leq n\left(1 + \frac{\pi}{8}p\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\sigma\left(\frac{\Phi(v)}{n}\right) - 1\right)^2 \\
 &= \frac{n(1+\frac{\pi}{8}p)}{(1-\theta)}\left(\sigma\left(\frac{\Phi(v)}{n}\right) - \sqrt{1-\theta}\right)^2 \\
 &\leq \frac{n(1+\frac{\pi}{8}p)}{(1-\theta)}\left((1 + \sqrt{2\frac{\Phi(v)}{n}})(1-\theta)\right)^2 \\
 &= \frac{n(1+\frac{\pi}{8}p)}{(1-\theta)}\left((1 - \sqrt{1-\theta}) + \sqrt{2\frac{\Phi(v)}{n}}\right)^2 \\
 &\leq \frac{n(1+\frac{\pi}{8}p)}{(1-\theta)}\left(\theta + \sqrt{2\frac{\tau}{n}}\right)^2 \\
 &= \frac{n(1+\frac{\pi}{8}p)}{(1-\theta)}\left(\theta\sqrt{n} + \sqrt{2\tau}\right)^2 \\
 &= \Phi_0.
 \end{aligned}$$

Où nous avons également utilisé la propriété $1 - \sqrt{1-\theta} = \frac{\theta}{1 + \sqrt{1-\theta}} \leq \theta$ et $\Phi(v) \leq \tau$.

En utilisant cette borne supérieure Φ_0 , nous obtenons un majorant de nombre total d'itérations suivant :

$$\left(\frac{288(13p+9)(p+1)\sqrt{2}}{P+2}\right)\Phi_0^{\frac{p+2}{2(p+1)}}\frac{\log\frac{n}{\epsilon}}{\theta}.$$

Par conséquent,

$$\Phi_0 = O(p),$$

et la complexité algorithmique devienne

$$O\left(p^2 \sqrt{n} \log \frac{n}{\epsilon}\right) \text{ iterations.}$$

Nous remarquons que tous les résultats théoriques de cette fonction obtenus pour $p \geq 2$ restent valables pour $p = 1$

$$O\left(\sqrt{n} \log \frac{n}{\epsilon}\right),$$

qui est la meilleure complexité pour les algorithmes à pas court.

CONCLUSION

Dans ce travail, on s'est intéressée à résoudre le problème d'un programme linéaire par une méthode de trajectoire centrale basée sur les fonctions noyaux, on a présenté d'une manière détaillée le papier publié par Bouafia et autres en 2016, où on a présenté une nouvelle fonction noyau à terme barrière trigonométrique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Leulmi, *etude d'une méthode barrière logarithmique via les fonctions minorantes pour la programmation semi-définie*, thèse de doctorat, 2018.
- [2] A. Nassima, *Méthodes de points intérieurs pour la programmation linéaire basées sur les fonctions noyaux*, thèse de doctorat, 2012.
- [3] A. Zirari, *Méthodes de points intérieurs et leurs applications sur des problèmes d'optimisation semi-définis*, thèse de doctorat, Université Ferhat Abbas, Sétif-1, Algérie, 2020.
- [4] B. Bounibane, *Extension de quelques méthodes de points intérieurs pour un problème d'optimisation*, thèse de doctorat, Université de Batna 2, 2019.
- [5] E. Kallel, *UNE SYNTHÈSE SUR LES MÉTHODES DU POINT INTÉRIEUR*, Canada, janvier 1998.
- [6] F. Bastin, *Modèles de recherche opérationnelle*, France, 2006.
- [7] J. Nocedal, J. Wright, *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering*, Springer.
- [8] J. Peng, C. Roos, T. Terlaky, *Self-regularity, A new paradigm for Primal-Dual Interior Point Algorithm*, Princeton University Press, Princeton, 2002.
- [9] J. Teghem, *recherche opérationnelle*, ellipses.

- [10] L. Menniche, *Etude théorique et numérique d'une classe de méthodes de points intérieurs pour la programmation linéaire*, thèse de doctorat, Université Ferhat Abbas, Sétif-1, Algérie, 2017.
- [11] M. Bergouiou, *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires*, DUNOD.
- [12] M. Bierlaire, *Introduction à l'optimisation différentiable*, presse polytechnique et universitaire romandes, 2006.
- [13] M. Nakhla, J-C. Moisdon, *Recherche opérationnelle*, MINES ParisTech, France, 2010.
- [14] M. Bouafia, D. Benterki, A. Yassine, *An efficient primal-dual Interior Point Method for linear programming problems based on a new kernel function with a trigonometric barrier term*, J Optim Theory Appl, 2016.
- [15] M. Bouafia, *Étude asymptotique des méthodes de points intérieurs pour la programmation linéaire*, thèse de doctorat, Université du Haver, Université Ferhat Abbas(Sétif-1, Algérie), 2016.
- [16] P. Weiss, *Eléments d'analyse et d'optimisation convexe*, Dernière mise à jour, 2015.
- [17] S. Haddadi, *Programmation linéaire*, ellipses.
- [18] S. Kettab, *Généralisation d'une méthode de trajectoire centrale de points intérieurs pour la programmation semi-définie*, thèse de doctorat, Université Ferhat Abbas, Sétif-1, 2015.
- [19] Y. Q. Bai, M. El Ghami, C. Roos, *A comparative study of kernel functions for primaldual interior point algorithms in linear optimization*, SIAM Journal on Optimization, 15, 101-128, (2004).

Abstract

In this work, we introduced a modern branch of mathematics, which is linear programming.

We discussed the linear program and how to solve it in several ways, including the geometric method, the simplex method, and the interior point method. The latter is the most popular method.

We were interested in studying one of the interior point methods, which is the central trajectory method based on a kernel function.

Keywords : Linear programming, Geometric method, Simplex method, Interior point method, Central trajectory method, Kernel function, Algorithmic complexity.

Résumé

Dans ce travail nous avons présenté une nouvelle branche des branches des mathématiques qui est La Programmation Linéaire.

Nous avons parlé sur le programme linéaire et la méthode de sa résolution à différentes manières comme la méthode de la résolution graphique, la méthode du simplexe et la méthode du point intérieur qui est considérée comme la plus populaire.

Nous avons étudié l'une des méthodes du point intérieur qui est la méthode de trajectoire centrale via une fonction noyau.

Mot clés : Programmation Linéaire, Résolution graphique, Méthode du simplexe, Méthode de Points Intérieurs, Méthode de Trajectoire Centrale, Fonctions Noyaux, Complexité Algorithmique.

ملخص

في هذا العمل قدمنا فرع حديث من فروع الرياضيات و هي البرمجة الخطية. تحدثنا عن البرنامج الخطي و كيفية حله بعدة طرق منها الطريقة الهندسية و طريقة السمبلكس و طريقة النقطة الداخلية و تعد هذه الاخيرة الاكثر شهرة. اهتممنا بدراسة احدى طرق النقطة الداخلية و هي طريقة المسار المركزي المعتمد على دالة نواة. الكلمات المفتاحية : البرمجة الخطية, الطريقة الهندسية, طريقة السمبلكس, طريقة النقطة الداخلية, المسار المركزي, دالة نواة, تكلفة الخوارزمية.