



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Processus de Markov et les équations de la physique

**Préparé par : Aida Mekhnache
Soulaf Rezaiki**

Soutenue devant le jury

Rakia Ahmed-Yahia	M.C.B	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Nabila Boufelgha	M.A.A	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Hanane Benhabiles	M.A.A	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire : 2022/2023

Remerciement

Nous tenons à remercier avant tout ALLAH le toute puissant de nous avoir donné la volonté, la santé et le courage pour réaliser ce travail. Nous remercions chaleureusement notre encadreur de ce travail Madame Boufelgha Nabila pour son aide précieuse et ses conseils éclairés dans la direction de notre travail, Ainsi que leur grande disponibilité et son immense gentillesse. Nous remercions également tous les membres de jury madame Benhabiles Hanane et madame Ahmed yahia Rakia qu'ont accepté de juger notre travail, et tous nos enseignants, nos collègues et administrateurs du département de Mathématiques et Informatique. Mes grands remerciements vont aussi à toute notre famille précisément notre père et notre mère pour son encouragement qu'ont accompagné durant cette mémoire. Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Avant tout, nous remercions Allah tout puissant qui nous avons donné le courage, la force et la volonté afin de pouvoir accomplir ce travail.

Je dédie ce modeste travail en signe de respect, de reconnaissance et de gratitude :

À Mon très cher père Zouaoui que j'aime tant, sans lesquels je ne serai jamais arrivée là où j'en suis, À celui qui m'a toujours encouragée et soutenue moralement Que DIEU vous protéger vous garde pour nous.

À ma mère Nassira, mon amour, la lumière de mes yeux et la joie de mon cœur... à mon premier professeur qui m'a soutenue et encouragée tout au long de mon parcours académique ... à celle qui n'a ménagé aucun effort pour me rendre heureuse.

À mon fiancé Ibrahim qui a été mon soutien inconditionnel dans cette démarche et cette réussite.

À mes chères sœurs Dounia et Israa et mes frères Nassim et Sif Eddin qui m'avez toujours soutenu et encouragé durant ces années d'études. À mon binôme Soulef, Merci énormément pour ton soutien moral, ta patience et ta compréhension tout au long de ce projet

À ma cher sœur ma force et ma fierté pour leurs soutiens tout long de mon parcours universitaire Aida Merci pour tous les bons moments que nous avons partagés.

À ma grande et adorable famille, sur toute mes cousines Marwa, Aya, Feryal, sara, Abir Amani, Ilham.

Aida

Dédicace

Au nom d'Allah, le Tout Miséricordieux, le Très Miséricordieux, Louange à Allah, par la grâce de qui les bonnes actions sont accomplies, et que la paix et la bénédiction soient sur le Messager d'Allah.

Maintenant, envers la générosité de l'amour et de la profusion des dons, sans attente ni rétribution, à ceux qui ont été mon soutien dans les moments difficiles de cette réussite et de sa naissance, à celle qui m'a submergé de sa tendresse et de son amour, à ma mère Malika qui m'a donné naissance et à ma grand-mère Sassiya qui m'a élevé. Quoi que je dise à leur sujet, je ne pourrai jamais leur rendre pleinement justice. À mon père Abdelmajid et mon papa Saleh, qui m'ont donné leurs yeux lorsque je les ai demandés. Que Dieu prolonge leur vie, leur accorde une santé et un bien-être continus.

À ma chère tante Sabrina, qui a été mon enseignante, à ma tante Salima, avec ses prières, à mes oncles, chacun avec son nom, Mounir, Fouad et Aziz. À ma sœur Ibtiham, compagne de mon chemin, à mon frère Jalal. À mon fiancé Mohammed, mon supporter. À mon amie et sœur Shahinaz, mon âme sœur. À Aida, mon amie dans cette réussite. À toute ma famille et à tous ceux qui m'ont soutenu et qui étaient avec moi dans mon parcours. À tous mes parents et proches, je vous dis merci pour votre fidélité et votre soutien.

Soulef

Résumé

Dans ce travail, nous représentons la relation entre les équations de la physique et le processus de Markov, ainsi que les méthodes pour les résoudre de manière probabiliste. Nous avons posé les bases des équations physiques, puis donné quelques bases de probabilité, mouvement brownien, processus de Markov, processus de Poisson, intégrales stochastique et équations différentielles stochastique, puis montré les liens importants entre probabilité et équation aux dérivées partielles. Utilisation des transformées de Fourier et de la formule d'Ito et la formule de Feynman-Kac.

Mots-clés : intégrales stochastiques, équation différentielle stochastique, transformations de Fourier, formule d'Ito, formule de Feynman-kac, mouvement brownien.

Abstract

In this work, we represent the relationship between the equations of physics and the Markov process, as well as the methods to solve them probabilistically. We laid the foundations of physical equations, then gave some basics of probability, Brownian motion, Markov process, Poisson process, stochastic integrals and stochastic differential equations, then showed the important links between probability and partial differential equation. Use of Fourier transforms and the Ito formula and the Feynman-Kac formula.

Keywords: stochastic integrals, stochastic differential equation, Fourier transformations, Ito formula, Feynman-kac formula, Brownian motion.

ملخص

في هذا العمل، نمثل العلاقة بين معادلات الفيزياء وعملية ماركوف، فضلاً عن الأساليب المستخدمة لحلها بشكل احتمالي. وقد وضعنا بعض المعادلات الفيزيائية، ثم قدمنا بعض أساسيات الاحتمالات، وحركة براونية، وعملية ماركوف، وعملية بواسون، والتكاملات العشوائية و المعادلات التفاضلية العشوائية ، ثم أظهرنا الروابط المهمة بين الاحتمالات و المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام تحويل فورييه وصيغة إيتو وصيغة فينمان-كاك.

الكلمات المفتاحية : التكاملات العشوائية ، المعادلات التفاضلية العشوائية، تحويل فورييه، صيغة إيتو، صيغة فينمان-كاك، حركة براونية.

TABLE DE MATIÈRES

1	Équations de la physique mathématique	2
1.1	Concepts préliminaires	3
1.1.1	Équations différentielles ordinaires	3
1.1.2	Équations aux Dérivées Partielles	3
1.1.3	Problème de Cauchy	4
1.1.4	Dimension et ordre d'une E.D.P	4
1.1.5	E.D.Ps quasi linéaire du première ordre	4
1.1.6	Condition aux limites	5
1.1.7	Classification des équations	6
1.2	Méthode de séparation des variables	7
1.2.1	Situation du problème	7
1.3	Équation de transport	9
1.4	Équation de Laplace	9
1.4.1	Résolution de l'équation de Laplace dans un disque	10
1.5	Équation des ondes	11
1.6	Équation de la chaleur	11
1.6.1	Équation de diffusion	17
2	Probabilité et processus de Markov	18

2.1	Notions de probabilités dans le discrete	19
2.1.1	Notions d'expérience aléatoire discrete	19
2.1.2	Probabilité	19
2.2	Variables aléatoires discrete	20
2.2.1	Loi de probabilité d'une variable aléatoire	20
2.2.2	Valeurs caractéristiques	20
2.2.3	Lois de probabilité discrete	22
2.2.4	Lois de probabilité continues	23
2.3	La fonction caractéristique	24
2.4	Processus de Markov	25
2.4.1	Généralités	25
2.4.2	Chaînes de Markov à temps discret	26
2.4.3	Chaînes de Markov à temps continus	26
2.5	Processus de Poisson	27
2.5.1	Définitions de processus de Poisson	27
2.6	Mouvement Brownien (M.B)	29
2.6.1	Mouvement Brownien	30
2.7	Intégrale stochastique	31
2.8	Équation différentielle stochastique	32
3	Relation entre les équations de la physique et les processus de Markov	34
3.1	Formule de Feynman-Kac	36
3.2	Transformation de Fourier :	37
3.3	Semi-groupes et générateurs	38
3.4	Lien entre les E.D.P et les E.D.S	40
3.5	Représentation probabiliste de la solution parabolique	42
3.5.1	E.D.P de la chaleur :	42
3.5.2	Un model de transformation temporelle :	49

Introduction générale

Dans ce travail, il s'agit de montrer la relation entre les équations de la physiques et les processus aléatoires de Markov, ainsi que de mettre l'accent sur certains résultats liés aux équations physiques et à leur résolution par des méthodes probabilistes. Le travail est divisé en trois chapitres :

Dans **le premier chapitre**, nous mettons en évidence les bases des équations physiques dont nous avons besoin dans cette étude, leurs types et leurs solutions analytique, y compris l'équation de la chaleur, l'équation de Laplace et l'équation des ondes. Nous expliquons également comment résoudre ces équations analytique à l'aide de la méthode de séparation des variables et des séries de Fourier.

Dans **le deuxième chapitre**, on donne les bases et les lois fondamentales des probabilités dont nous avons besoin. Ensuite, nous parlerons des processus, en particulier des processus de Markov, en mentionnant leurs caractéristiques et leurs types. Ensuite, nous parlerons des processus de Poisson, puis du mouvement brownien, suivi de l'intégration stochastique et des équations différentielles stochastiques.

Dans **le troisième chapitre**, nous montrons comment utiliser ce qui a été présenté dans les chapitres précédents pour résoudre un problème spécifique lié aux processus aléatoires. Nous utilisons une approche probabiliste pour résoudre ce problème en utilisant la formule 'Ito et la formule de Feynman-kac.

CHAPITRE 1

ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Une équation aux dérivées partielles (E.D.P) est une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions inconnues dépendant de plusieurs variables vérifiant certaines conditions concernant leur dérivées partielles. On trouve les E.D.P dans les applications de la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie,...etc. En effet, dans ces domaines, des phénomènes généralement modélise par des systèmes mathématiques impliquant des équations sont dérivées partielles en déterminant la relation entre u et ses dérivés.

1.1 Concepts préliminaires

1.1.1 Équations différentielles ordinaires

L'équation la plus simple est lorsque la fonction u dépend uniquement d'une seule variable.

Alors cette relation est décrite simplement par ce qu'on appelle une E.D.O.

Définition 1.1.1 [16]

Une E.D.O est une relation de type

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x), \dots, u^n(x)) = 0, \quad (1.1.1)$$

entre la variable $x \in \mathbb{R}$ (par fois $x \in I \subset \mathbb{R}$) et les dérivées de la fonction inconnue au point x .

1.1.2 Équations aux Dérivées Partielles

La généralisation de la définition précédente en mettant en jeu des fonctions de plusieurs variables permet de construire le concept d'une E.D.P. On commence par donner la définition d'une E.D.P du 1^{er} ordre.

Définitions 1.1.1 [11]

Une équation à la dérivée partielle du 1^{er} ordre d'inconnue u de n variables indépendantes $x_1, \dots, x_n$ est une fonction de la forme :

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0, \quad (1.1.2)$$

où $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.2

La forme générale d'une E.D.P d'ordre 2 est :

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0, \quad (1.1.3)$$

pour $(x, y) \in \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1.1.3 Problème de Cauchy

Théorème 1.1.1 [14] Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0 et supposons que $f \in \mathbb{C}^k(E)$, alors il existe $a > 0$ tel que :

le problème de Cauchy :

$$\dot{x} = f(x),$$

$$x(0) = x_0,$$

admet une solution unique sur l'intervalle $[-a, a]$.

1.1.4 Dimension et ordre d'une E.D.P

La dimension d'une équation aux dérivées partielles correspond au nombre de variables indépendantes sur lesquelles la fonction inconnue dépend.

L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de la dérivation présent dans l'équation.

1.1.5 E.D.Ps quasi linéaire du première ordre

Définition 1.1.3 [14]

On appelle équation aux dérivées partielles quasi-linéaire du première ordre, d'inconnue u , une équation de la forme :

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n, u),$$

pour $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les coefficients $a_1, \dots, a_n$ et le second membre f sont des fonctions données. En dimension 2, l'équation prend la forme :

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u), \quad (L)$$

Pour $(x, y) \in \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les fonctions a, b, c supposées de classe C^1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Au moins l'une des fonctions a ou b n'est pas identiquement nuls.

Exemple 1.1.1 [8]

$$x(y - u) \frac{\partial u}{\partial x} + y(u - x) \frac{\partial u}{\partial y} = (x - y)u,$$

est une quasi-linéaire du premier ordre en 2 dimensions.

1.1.6 Condition aux limites

Une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs prises par la solution d'une E.D.P.

La donnée d'une condition aux limites permet de déterminer une solution répondant à certaines conditions physiques.

Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, Γ sa frontière et G une fonction donnée.

- Lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières, dans ce cas on donne une condition de type frontière.[20].

$$u(x, y) = G(x, y), \forall (x, y) \in \Gamma.$$

- Si l'une des variables désigne une position dans un repère spatial, et l'autre est le temps : une condition de type frontière est associée à une fonction connue G .

$$u(t, 0) = G(t), \forall t \geq 0,$$

et une condition initiale est associée à une fonction connue F .

$$u(0, x) = F(x), \forall x \geq 0.$$

Exemple 1.1.2 [8]

On considère l'exemple de l'équation de transport. On cherche des solutions $u(t, x)$ qui vérifient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, t > 0 \text{ et } x \in [0, l], l > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \text{condition initiale}, \\ u(t, 0) = u_1(t), \text{condition frontiere}, \end{cases}$$

où u_0 et u_1 sont des fonctions données.

1.1.7 Classification des équations

Définition 1.1.4 [8]

On appelle équation aux dérivées partielles semi-linéaire du second ordre, d'inconnue u sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, une équation de la forme :

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}), \quad (L)$$

où a, b, c sont des fonctions données, et F une fonction définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

La classification des E.D.Ps du second ordre est issue de la classification de l'équation quadratique des sections conique en géométrie analytique L'équation :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

représente l'hyperbole, la parabole ou l'ellipse selon le signe de $b^2 - 4ac$ (positif, nulle ou négatif). Alors, la classification de l'équation (L) dépend des coefficients $a(x, y), b(x, y)$ et $c(x, y)$ en un point donné (x, y) . Conséquemment, on donne la définition suivante :

Définition 1.1.5

Soit $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y)$, on a les cas suivants :

1-Si $\Delta(x, y) > 0$, l'équation est dite hyperbolique.

2-Si $\Delta(x, y) = 0$, l'équation est dite parabolique.

3-Si $\Delta(x, y) < 0$, l'équation est dite elliptique.

Exemple 1.1.3 L'équation des ondes,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

est une équation hyperbolique sur le domaine $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ car $\Delta(t, x) = b^2(t, x) - 4a(t, x)c(t, x) = 4c^2 > 0$.

1.2 Méthode de séparation des variables

La méthode de séparation des variables, également connue sous le nom de méthode de Fourier, est couramment utilisée pour résoudre les problèmes aux limites liés aux équations aux dérivées partielles. Elle consiste à chercher des solutions particulières sous la forme séparable $u(x, y) = X(x)Y(y)$, où X et Y sont des fonctions respectivement de x et y . Dans de nombreux cas, l'équation aux dérivées partielles se réduit à deux équations différentielles ordinaires pour X et Y , ce qui permet de résoudre des problèmes aux limites impliquant des équations différentielles ordinaires. Cependant, il n'est pas toujours possible de séparer une E.D.P en deux ou plusieurs équations différentielles ordinaires.

1.2.1 Situation du problème

On décrit maintenant la méthode de séparation des variables et examine les conditions d'applicabilité de la méthode aux problèmes qui impliquent des E.D.Ps de second ordre de deux variables indépendantes. On considère donc le problème aux limites dont l'inconnue $u(t, x)$ posé sur un domaine de la forme $I \times J$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$.

$$\begin{cases} a_1(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_2(t)\frac{\partial u}{\partial t} + (a_3(x) + b_3(t))u(x, t) = h(x, t), & (x, t) \in I \times J, \quad (L) \\ u(x, 0) = f(x) \quad x \in I : \text{Condition initiale}, \end{cases}$$

où $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, h(t, x), f(x)$ sont des fonctions données.

Condition aux limites : On distingue différents types de conditions aux limites (C.L) :

Conditions de Dirichlet : u est fixée sur le bord de I :

$$u(t, a) = u(t, b) = 0.$$

Conditions de Neumann : la dérivée normale de u est fixée sur I :

$$u_x(t, a) = u_x(t, b) = 0.$$

Conditions de Robin ou mixtes :

$$c_1(x)u(t, a) + c_2(x)u_x(t, b) = 0.$$

Conditions périodiques :

$$u(t, a) = u(t, b) \text{ et } u_x(t, a) = u_x(t, b).$$

Rapportons les principales étapes de cette méthode.

1. On recherche les solutions séparées de (L). Ces solutions sont de la forme spétiale

$$u(t, x) = T(t)X(x),$$

et satisfont les condition aux limites et la condition initiale. Il se trouve que X et T doivent être des solutions de problèmes aux limites linéaires (L) relatives aux X et T , respectivement.

2. On résout les problème (L), on utilise le principe de superposition générale pour générer à partir de $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une solution plus générale du problème, sous la forme d'une série infinie de solutions séparées.

3. Dans la dernière étape, on calcule les coefficients de cette série et étudie sa convergence.

Principe de superposition Si u_1 et u_2 satisfont une E.D.P linéaire homogène, alors une combinaison linéaire arbitraire $c_1u_1 + c_2u_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ satisfait également la même équation. Dans la suite, on va rappeler quelques notions essentielles sur les séries de Fourier qui sera utilisées dans le reste de ce chapitre.

1.3 Équation de transport

$$[1] \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Où $u(x, t)$ est utilisée pour modéliser la pollution de l'air, la dispersion des colorants ou même le flux de trafic.

1.4 Équation de Laplace

L'équation de Laplace est un cas particulier des équations de diffusion. Si la diffusion est stationnaire (indépendante du temps), les équations de diffusion se réduisent à l'équation de Laplace

[1]. **En une seule dimension**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

En deux dimensions

$$\nabla \cdot \nabla u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

En trois dimensions

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Une solution de l'équation de Laplace s'appelle une fonction harmonique. En une seule dimension, les fonctions harmoniques sont $u(x) = A + Bx$.

L'équation de Laplace non homogène est :

$$\Delta u = f,$$

avec f une fonction donnée, que l'on appelle l'équation de Poisson.

1.4.1 Résolution de l'équation de Laplace dans un disque

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ un disque de rayon a centré à l'origine. [1]

On note par :

$C : x^2 + y^2 = a^2$ le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon a la frontière de D . On cherche une fonction harmonique dans D qui vérifie $u = f$ sur C . le problème s'écrit donc : trouver une fonction u telle que

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, \text{ dans } D, \\ u(x, y) = f(x, y), \text{ sur } C, \end{cases}$$

où f étant donnée. On ne peut pas appliquer la méthode de séparation des variables car le domaine D n'est pas le produit de deux intervalles. Donc on peut essayer de chercher la solution sous la forme :

$$u(x, y) = w(r, \theta), \tag{1.4.1}$$

avec

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), & 0 < r \leq a, \\ y = r \sin(\theta), & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \tag{1.4.2}$$

1.5 Équation des ondes

L'équation des ondes est :[1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f, \quad (1.5.1)$$

telle que c est une constante.

Est utilisé pour modéliser de petites oscillations, elle joue un grand rôle dans la dynamique des fluides et dans l'électromagnétisme.

1.6 Équation de la chaleur

On étudie l'équation de la chaleur :[1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = 0. \quad (1.6.1)$$

Est utilisée dans l'étude de la conduction thermique.

Où u est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Cette équation modélise certains phénomènes d'évolution comme la diffusion de chaleur, la répartition de substances chimiques.

Remarque 1.6.1 *Un changement de variable, $t^* = kt$, transforme cette équation en :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0. \quad (1.6.2)$$

Il suffit donc d'étudier le cas $k=1$. Considérons le problème sur l'intervalle $[0, L]$ avec $L > 0$, constitué de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, t > 0, \quad (1.6.3)$$

les conditions aux limites de type Dirichlet :

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, t \geq 0, \quad (1.6.4)$$

et la condition initiale :

$$u(0, x) = f(x), 0 \leq x \leq L, \quad (1.6.5)$$

où f est une fonction donnée et k est une constante positive. Ce problème modélise la conduction thermique dans une tige de longueur L . La chaleur est supposée nulle aux deux extrémités de la tige et égale à $f(x)$ à l'instant $t = 0$. Les conditions aux limites impliquent que :

$$f(0) = u(0, 0) = u(t, 0) = 0,$$

et

$$f(L) = u(t, L) = u(0, L) = 0.$$

Ces deux conditions s'appellent les conditions de compatibilité.

Étape 1 : On commence par chercher des solutions de (1.6.3) sous la forme :

$$u(t, x) = T(t)X(x) \quad (1.6.6)$$

qui satisfont les conditions (1.6.4) où X et T sont des fonctions de x et t , respectivement. Dans cette étape, on ne prend pas en compte la condition initiale (1.6.5) et on n'est pas intéressé par la solution zéro $u(x, t) = 0$. On cherche donc des fonctions X et T qui ne s'annulent pas identiquement. Par différentiation de (1.6.6) par rapport à t et deux fois par rapport à x et par substitution dans (1.6.3), on obtient :

$$XT'(t) = kX''(x)T(t), \quad 0 < x < L, t > 0.$$

On peut réécrire :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad 0 < x < L, t > 0, \quad (1.6.7)$$

Puisque x et t sont des variables indépendantes, cette relation implique qu'il existe une constante λ (appelée constante de séparation) telle que :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad 0 < x < L, t > 0. \quad (1.6.8)$$

Comme on cherche des solutions ne s'annulent pas identiquement, alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $T(t_0) = 0$. Conséquemment, on obtient :

$$\begin{cases} u(t_0, 0) = X(0)T(t_0) = 0, \\ u(t_0, L) = X(L)T(t_0) = 0. \end{cases} \implies X(0) = X(L) = 0$$

L'équation (1.6.8) conduit au système d'E.D.Os suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0, 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0, \end{cases} \quad (1.6.9)$$

et on a :

$$\frac{dT}{dt} + \lambda T = 0, t > 0, \quad (1.6.10)$$

Étape 2 : On commence d'abord à résoudre le système (1.6.9). Une solution non triviale de (1.6.9) est appelée fonction propre avec la valeur propre λ : On distingue 3 cas :

Cas 1 : $\lambda = -\mu^2 < 0$, alors

$$X(x) = \alpha e^{-\mu x} + \beta e^{\mu x},$$

où α, β sont des réels arbitraires.

Les conditions aux limites donnent :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0, \\ \alpha e^{-\mu L} + \beta e^{\mu L} = 0. \end{cases}$$

De la première équation, on a $\alpha = -\beta$. la seconde équation implique donc $\alpha e^{-\mu L} = \alpha e^{\mu L}$, alors si $\alpha \neq 0$ on obtient $e^{2\mu L} = 1$. Ceci n'est pas possible car μ et L sont différents de 0 et par conséquent $\alpha = \beta = 0$. Alors, dans ce cas $X \equiv 0$ et $u(t, x) = 0$ pour tout $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$.

On doit donc exclure le cas $\lambda < 0$.

Cas 2 :

Si $\lambda = 0$, on obtient :

$$X(x) = \alpha + \beta x,$$

où α, β sont des réels arbitraires.

Les conditions aux limites impliquent :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0, \\ \alpha + \beta L = 0. \end{cases}$$

Comme $L \neq 0$, il est claire que $\alpha = \beta = 0$. Alors, dans ce cas $X \equiv 0$ et $u(x, t) = 0$ pour tout $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$. On doit donc exclure le cas $\lambda = 0$.

Cas 3 : Si $\lambda = \mu^2$, on obtient :

$$X(x) = \alpha \cos(\mu x) + \beta \sin(\mu x),$$

où α, β sont des réels arbitraires. Les conditions aux limites impliquent que :

$$\begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta \sin(\mu L) = 0. \end{cases}$$

Pour éviter la solution triviale $X \equiv 0$, on suppose que $\beta \neq 0$. Ceci implique que $\sin(\mu L) = 0$.

Conséquemment :

$$\mu L = n\pi, \lambda = (n\pi/L)^2, n \in \mathbb{Z}.$$

Il en résulte que :

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2,$$

sont les valeurs propres de laplacien et les fonctions :

$$X_n(x) = \beta_n \sin(n\pi x/L),$$

sont les fonctions caractéristiques du problème (1.6.9). Comme $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit donc de considérer :

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2, X_n(x) = \beta_n \sin(n\pi x/L), n \in \mathbb{N}^*.$$

Il reste maintenant à résoudre le problème (1.6.10), sa solution est donnée par :

$$T(t) = \gamma_n e^{-k(n\pi/L)^2 t}, n \in \mathbb{N}^*.$$

A la fin de cette étape, on peut considérer qu'on a bien construit une base hilbertienne $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

Étape 3 :

On utilise le principe de superposition générer à partir de $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une solution plus générale du problème, sous la forme d'une série infinie de solutions séparées. On a ainsi obtenu la suivante de solutions séparées :

$$u_n(t, x) = \gamma_n \sin(n\pi x/L) e^{-k(n\pi/L)^2 t}, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.6.11)$$

par le principe de superposition implique que toute combinaison linéaire

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^N \gamma_n \sin(n\pi x/L) e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad (1.6.12)$$

de solutions séparées est également une solution de l'équation de la chaleur qui satisfait les conditions aux limites de Dirichlet.

Considérons maintenant la condition initiale. Supposons qu'il ait la forme :

$$f(x) = \sum_{n=1}^N \delta_n \sin(n\pi x/L),$$

c'est-à-dire qu'il s'agit d'une combinaison linéaire des fonctions propres. Ensuite, une solution au problème de chaleur (1.8.3) – (1.8.5) est donnée par :

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^N \delta_n \sin(n\pi x/L) e^{-k(n\pi/L)^2 t}.$$

L'idée brillante de Fourier était qu'il était possible de représenter une fonction arbitraire f satisfaisant les conditions aux limites (1.8.4) comme une combinaison linéaire infinie unique des fonctions propres $\sin(n\pi x/L)$. En d'autres termes, il est possible de trouver des constantes δ_n telles que :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x/L).$$

Une telle série est appelée une série (ou extension) de Fourier (généralisée) de la fonction f par rapport aux fonctions propres du problème, et δ_n , $n = 1, 2, \dots$ sont appelés les coefficients de Fourier (généralisés) de la série. Dans ce cas, le principe de superposition généralisée implique que l'expression formelle :

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x/L) e^{-k(n\pi/L)^2 t},$$

est un candidat naturel pour une solution généralisée du problème (1.6.3) - (1.6.5). On explique maintenant comment représenter une fonction «arbitraire» f sous la forme d'une série de Fourier. En d'autres termes, comment calculer les coefficients δ_n :

Remarquons :

$$\int_0^L \sin(m\pi x/L) f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \int_0^L \sin(m\pi x/L) \sin(n\pi x/L) dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n, \\ L/2 & , m = n. \end{cases}$$

Par conséquent, les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\delta_n = \frac{\int_0^L \sin(m\pi x/L) f(x) dx}{\int_0^L \sin^2(m\pi x/L) ds} = \frac{2}{L} \int_0^L \sin(n\pi x/L) f(x) dx.$$

On obtient la formule explicite de la solution formelle, qui est donnée par :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x/L) e^{-k(n\pi/L)^2 t},$$

où

$$\delta_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin(m\pi x/L) f(x) dx.$$

1.6.1 Équation de diffusion

Soit une $u(t, x)$ représentant la température dans un problème de diffusion thermique, ou la concentration pour un problème de diffusion de particules. L'équation de diffusion est : [13]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + s(t, x),$$

où D est le coefficient de diffusion et $s(t, x)$ représente une source, par exemple une source thermique provenant d'un phénomène de dissipation.

CHAPITRE 2

PROBABILITÉ ET PROCESSUS DE MARKOV

Stochastique vient du mot grec stokhastikos, qui signifie spéculatif, et stockhos est fait référence à la cible. Un processus stochastique est un modèle mathématique qui décrit un état.

Un phénomène aléatoire qui évolue dans le temps, processus aléatoire, fonction aléatoire ou signal aléatoire sont des synonymes.

Un système évolue stochastiquement s'il peut reprendre une série à tout moment continue, sa configuration exacte à un instant donné ne peut être prédite.

Dans le futur, son évolution dans le temps dépend donc du hasard. Autrement dit, les situations ne peuvent pas être étudiées simplement à l'aide de calculs de probabilité, il décrit des événements où le résultat possible de chaque événement est un nombre.

2.1 Notions de probabilités dans le discrete

2.1.1 Notions d'expérience aléatoire discrete

On appelle expérience aléatoire une expérience dont on ne peut pas prévoir a priori l'issue. Une expérience aléatoire ayant un nombre fini ou dénombrable d'issues possible est appelée expérience aléatoire discrete. L'ensemble de toute les issues possible est appelée l'univers des possibles associé a cette expérience, il est généralement noté Ω . Chaque sous ensemble de Ω contenant un seul élément est appelé événement élémentaire, on le notera ω_i et on aura $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

Remarque 2.1.1 [18]

Une expérience aléatoire est déterminée par l'expérience que l'on effectue et donc l'univers aussi. Si on change d'expérience aléatoire, on change aussi d'univers.

2.1.2 Probabilité

Définition 2.1.1 [18]

Consistons une expérience aléatoire, Ω est son univers associé.

On appelle probabilité, notée P , tout application de l'ensemble des événements Ω dans $[0, 1]$ vérifiant les trois axiomes suivants :

- *Pour tout évènement A de Ω on a : $A^c \in \Omega$.*
- *$P(\Omega) = 1$.*
- *Si deux évènements A et B sont incompatibles alors :*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Remarque 2.1.2 [18]

La probabilité d'un évènement $A = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est telle que $P(A) = P(\omega_1) + \dots + P(\omega_n)$.

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

$$P(\emptyset) = 0.$$

$$p(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

2.2 Variables aléatoires discrètes

Définition 2.2.1 [9]

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$ un univers probabilisé fini. On appelle variable aléatoire notée X définie sur Ω toute application de Ω dans $\mathbb{R}$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble image de Ω par X .

2.2.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 2.2.2 [9]

Soit Ω un univers probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω . On appelle loi de probabilité de X l'application qui à chaque valeur image x , fait correspondre la probabilité p_i de la partie $\{X = x_i\}$ de Ω .

Remarque 2.2.1

On a donc $P(\Omega) = \sum_{i=1}^n p_i = 1$.

2.2.2 Valeurs caractéristiques

Cas discrete : Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $\{x_1, \dots, x_n\}$ avec les probabilités respectives $\{p_1, \dots, p_n\}$.

Paramètre de position : Espérance mathématique

Définition 2.2.3 [18]

On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X le nombre noté $E(X)$ et qui

a valeur :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

Ce nombre s'interprète comme la moyenne m des valeurs x_i pondérées par leur probabilité p_i .

Paramètre de disposition : Variance

Si X est une variable aléatoire d'espérance $E(X)$. On appelle variance de X le réel : [18]

$$Var(X) = E(X - E(X))^2.$$

et on a

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Cas continue :

Paramètre de position : Espérance mathématique

Si X une variable aléatoire **continue**, on a : [18]

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx.$$

pour une v.a $Y = g(X)$, l'espérance de Y est donnée par :

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx.$$

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx,$$

$$E(X^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx.$$

2.2.3 Lois de probabilité discrete

La loi de Bernoulli

On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ si :[18]

$$P(X = 0) = 1 - p \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p.$$

Ainsi, X modélise le résultat d'une expérience aléatoire à deux issues (expérience élémentaire) avec probabilité p de réussite. On a :

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = p(1 - p).$$

Modèle

Modélise une épreuve de Bernoulli à savoir un phénomène ayant seulement deux issues possibles (Pile ou face).

Loi binomiale

Modèle

Modélise le nombre de succès sur n répétition d'un phénomène ayant deux issues possibles.

Paramètre

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = npq.$$

La loi de Poisson

On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. [18]

Le paramètre λ est lié à la fréquence d'apparition des événements, on l'appellera paramètre d'intensité. Dans ce cadre, X modélise le nombre d'événements se produisant dans l'intervalle de temps $[0, t]$. On a alors :

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \lambda.$$

Modèle

Retenons juste qu'il modélise des événements rares (nombre de pannes sur une ligne de production, accidents d'avions...). Nous verrons plus tard une autre façon de l'introduire.

2.2.4 Lois de probabilité continues

La loi uniforme

On dit que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur le segment $[a, b]$, et on note $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$, si elle admet pour densité de probabilité la fonction f définie par : [18]

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [a, b], \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b]. \end{cases}$$

Et on a :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Modèle

Une variable uniforme sur $[a, b]$ modélise un tirage au sort uniforme d'une valeur dans l'intervalle $[a, b]$: la probabilité pour que la valeur tombe dans un intervalle est proportionnelle à la longueur de l'intervalle.

La loi exponentielle

On dit que la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, si elle admet pour densité de probabilité la fonction f définie par [18]

:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Et on a :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Modèle

Duré de vie d'un atome, croissance bactérienne.

2.3 La fonction caractéristique

Définition 2.3.1

Soit X v.a.r. La fonction caractéristique de X est la fonction :

$$\begin{aligned} \Psi_X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \Psi_X(t) = E[e^{it \cdot X}]. \end{aligned}$$

i) si X est une variable aléatoire **discrete**, sa fonction caractéristique est :

$$\Psi_X(t) = \sum_{k=0}^n e^{itk} P(X = k).$$

- ii) si X est une variable aléatoire **continue** de la densité de probabilité f_X , sa fonction caractéristique est :

$$\Psi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx.$$

2.4 Processus de Markov

Le processus aléatoire est la famille de variables aléatoires

Un processus aléatoire est une généralisation d'un vecteur aléatoire. Cependant, contrairement au vecteur aléatoire, la connaissance de la loi de (X_t) pour tout $t \in T$ telle que $T \in \mathbb{R}_+$ ne suffit pas à caractériser complètement le processus. En effet, cette connaissance ne donne aucune information sur l'évolution du processus entre deux instants t et $t + \Delta t$. Pour étudier les processus aléatoires, il est donc important de considérer les probabilités de transition. Si B_1 et B_2 sont des parties de E , on note $P([X_{t+\Delta t} \in B_2] / [X_t \in B_1])$ la probabilité de transition de B_1 à B_2 entre les instants t et $t + \Delta t$. Cette probabilité représente la probabilité d'être dans l'ensemble B_2 à l'instant $t + \Delta t$, sachant que le processus était dans l'ensemble B_1 à l'instant t . [5]

2.4.1 Généralités

Le processus de Markov est un outil simple pour modéliser une classe particulière de systèmes à espace d'états discret. L'analyse des processus de Markov est un préliminaire nécessaire à l'étude des systèmes de files d'attente.

Définition 2.4.1 [5]

Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$, est un processus de Markov si :

axiome de Markov : pour tous $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$, pour tous $x_1, \dots, x_{n+1}$:

$$P([X_{t_{n+1}} = x_{n+1}] / [X_{t_1} = x_1] \cap \dots \cap [X_{t_n} = x_n]) = P([X_{t_{n+1}} = x_{n+1}] / [X_{t_n} = x_n]) \quad (2.4.1)$$

-axiome d'homogénéité : pour tous s et t , pour tous $x, y \in E$, $P([X_{t+s} = y] / [X_s = x])$ ne dépend que de t (et non des instants s et $t + s$).

2.4.2 Chaînes de Markov à temps discret

Définition 2.4.2 [4]

Un processus stochastique $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ dont l'espace des états E est fini ou infini dénombrable est une chaîne de Markov stationnaire (ou homogène par rapport au temps) si :

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_{n+1} = j | X_n = i] = p_{i,j},$$

pour tous les états $i_0, \dots, i_{n-1}, i, j$ et pour tout $n \geq 0$.

2.4.3 Chaînes de Markov à temps continu

Définition 2.4.3 [4]

$$\mathbb{I} = \mathbb{N}$$

Le Processus aléatoire $(X_t)_{t \geq 0}$ d'espace d'états $E = \{e_i\}_{i \in \mathbb{I}}$, fini ou dénombrable, est une chaîne de Markov à temps continu, si sont vérifiées les propriétés :

(1) propriété de Markov : $\forall (e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}) \in E^{n+1}, \forall (t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$,

$$P(X_{t_{n+1}} = e_{n+1} | X_{t_n} = e_n, \dots, X_{t_1} = e_1) = P(X_{t_{n+1}} = e_{n+1} | X_{t_n} = e_n), \quad (2.4.2)$$

(2) homogénéité : $\forall t_1, t_2, t \in \mathbb{R}_+, \forall e_1, e_j \in E$:

$$P(X_{t_1+t} = e_j | X_{t_1} = e_i) = P(X_{t_2+t} = e_j | X_{t_2} = e_i), \text{ not } P_{i,j}(t). \quad (2.4.3)$$

Les chaînes de Markov à temps continu sont supposées être **régulières** : leur nombre de transitions en temps fini est presque sûrement fini, ce qui est le cas si la chaîne récurrente ou finie.

Théorème 2.4.1

la matrice de transition $P(t) = (P_{i,j}(t))_{i,j \in \mathbb{I}}$ vérifie les deux propriétés :

$$(1) \forall t, \forall i, j \in \mathbb{I}, P_{i,j}(t) \geq 0,$$

$$(2) \forall t, \forall i \in \mathbb{I}, \sum_j P_{i,j}(t) = 1.$$

Remarque 2.4.1 le processus de poisson et mouvement brownien sont des exemples de processus de Markov.

2.5 Processus de Poisson

Le processus de Poisson est un processus de comptage qui modélise la répartition dans le temps d'événements comme l'arrivée d'appels à centre téléphonique, occurrence d'accident dans une ville, panne de machines dans une usine...

2.5.1 Définitions de processus de Poisson

Définition 2.5.1 [17]

Un processus de Poisson $N_t, t \geq 0$ est un processus de comptage d'intensité $\lambda, \lambda > 0$, s'il vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $N_0 = 0$,
- (ii) (N_t) est à accroissements indépendant,
- (iii) Le nombre d'occurrences dans un intervalle de temps quelconque de longueur t la loi Poisson de paramètre λt , c'est-à-dire, $\forall s, t \geq 0$, on a :

$$P\{N_{s+t} - N_s = n\} = \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad (n \geq 0).$$

Proposition 2.5.1 [5]

Un processus de comptage $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ tel que $N_0 = 0$ est un processus de poisson si et seulement si :

- est stationnaire,

- *est un processus à accroissements indépendants,*
- *il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $t \geq 0$, le variable aléatoire N_t suivre la loi de Poisson de paramètre λt .*

2.6 Mouvement Brownien (M.B)

Historique

Ce passage décrit l'observation initiale du mouvement brownien par le botaniste écossais Robert Brown en 1827. En observant de minuscules particules en suspension dans un gaz ou un liquide, il a remarqué leur mouvement erratique et désordonné, qui semblait ne pas suivre de trajectoires reconnaissables. Ce mouvement était considéré comme indéterminable par certains physiciens du 19^{ème} siècle, ce qui empêchait l'application des lois de la mécanique classique et la mesure de la vitesse.

En 1900, Louis Bachelier, un mathématicien français, a proposé pour la première fois une approche mathématique du mouvement brownien dans sa théorie de la spéculation. Il a utilisé ce concept pour simuler la dynamique des cours boursiers. Cependant, sa méthode est restée largement ignorée jusqu'aux années 1960. En 1905, Albert Einstein, un physicien allemand, a formulé un modèle probabiliste décrivant le mouvement des particules diffusantes. Il a montré que la loi de position d'une particule à un instant donné suivait une densité gaussienne satisfaisant l'équation de la chaleur, connaissant son état initial.

En 1905, le physicien polonais Marian von Smoluchowski a utilisé des marches aléatoires pour décrire le mouvement brownien dans ses limites. En 1923, l'Américain Norbert Wiener a établi la première construction mathématique rigoureuse du mouvement brownien en tant que processus aléatoire, démontrant notamment la continuité de ses trajectoires. Entre 1930 et 1960, de nombreuses propriétés du mouvement brownien ont été étudiées, notamment par le Français Paul Lévy, qui a introduit le concept d'équations différentielles stochastiques.

Les recherches menées dans les années 1930 par Leonard Ornstein et George Eugene, des scientifiques néerlandais, ont examiné la corrélation entre probabilité et physique à travers l'étude du mouvement brownien et de ses extensions. Ils ont développé le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck, qui caractérise l'état d'équilibre

dans un système propulsé par le mouvement brownien. Depuis lors, de nombreux travaux ont été consacrés aux mouvements browniens, à leurs généralisations et au calcul stochastique.

Il est important de mentionner Wolfgang Döblin, un mathématicien franco-allemand dont les travaux pionniers dans le domaine de l'analyse stochastique ont été menés à la fin des années 1930. Malheureusement, il n'est pas revenu de la Seconde Guerre mondiale et ses œuvres, qu'il avait envoyées du front, ont été oubliées jusqu'en 2000.

Le mouvement brownien présente des trajectoires non dérivables en aucun point, contrairement aux phénomènes déterministes régis par des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles. Cela rend impossible l'utilisation d'équations différentielles traditionnelles pour aborder le mouvement brownien. Au lieu de cela, on utilise des équations intégrales et des intégrales stochastiques. [2].

2.6.1 Mouvement Brownien

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un processus $(B_t)_{t \geq 0}$ sur cet espace.

Définition 2.6.1 [12]

Le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien (standard) si :

- a** $P(B_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).
- b** $\forall s \leq t, B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $(t - s)$.
- c** $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les variables $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$ sont indépendantes.

La propriété (b) est la stationnarité des accroissements du mouvement Brownien, la propriété (c) traduit que le mouvement Brownien est à accroissements indépendants. On peut aussi écrire (c) sous la forme équivalente suivante :

(c') Soit $s \leq t$. La variable $B_t - B_s$ est indépendante de la tribu du passé avant s , soit $\sigma(B_u, u \leq s)$. Nous ne démontrons pas l'existence du mouvement Brownien (M.B dans la suite). On pourra consulter l'ouvrage de Karatzas et Shreve (1988). On le construit sur "l'espace canonique " $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par $B_t(\omega) = \omega(t)$ et on munit cet espace d'une mesure (mesure de Wiener) telle que B soit un

MB.

Définition 2.6.2

Un processus $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien (ou processus Wiener) si :

- i) $\forall 0 \leq s < t$, $\{B_t - B_s\}$ est indépendant de la tribu $\sigma\{B_u, u \leq s\}$, (on écrit $(B_t - B_s) \perp \mathcal{B}_s$, $(0 \leq u \leq s < t)$, de loi gaussienne centrée de variance $(t - s)$ et de fonction de covariance : $\text{Cov}(B_t, B_s) = \inf(s, t) = s \wedge t$,
- ii) Les trajectoires de B , c.à.d les applications $t \mapsto B_t(\omega)$, sont toutes continues.

Définition 2.6.3 (Mouvement brownien standard)

Un mouvement brownien est dit standard si :

$$\begin{cases} B_0 = 0, \\ E(B_t) = 0, \\ E(B_t^2) = t. \end{cases}$$

Dans la suite, lorsqu'on parlera de M.B (mouvement brownien), sans autre précision, il s'agira d'un M.B. standard, dans ce cas la loi de B_t prend la forme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} dx.$$

dx étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.6.1 Soit B_t un M.B alors :

1. $-B_t$ est aussi un M.B ,
2. Pour tout $c > 0$, $\{\frac{1}{c}B_t\}$ est un M.B ,
3. Le processus définit par $Y_0 = 0$, et $Y_t = tB_{1/t}$ est un M.B.

2.7 Intégrale stochastique

Le but de l'intégrale stochastique est de donner un sens à des équations de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X) + g(t, X) \frac{dB_t}{dt},$$

Par exemple, si $f = 0$ et $g = 1$, on devrait retrouver $X_t = X_0 + B_t$, décrivant le mouvement suramorti d'une particule Brownienne. Le problème est que, comme nous l'avons mentionné, les trajectoires du processus de Wiener ne sont pas différentiables, ni même à variations bornées. Comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, on interprète une solution de l'équation différentielle comme une solution de l'équation intégrale :

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t g(X_s)dB_s.$$

C'est à la deuxième intégrale qu'il s'agit de donner un sens mathématique. Si $s \rightarrow g(X_s)$ était différentiable, on pourrait le faire à l'aide d'une intégration par parties, mais ce n'est en général pas le cas.

2.8 Équation différentielle stochastique

Les équations différentielles sont des équations d'évolution du type, qui sont transformées en équations différentielles stochastiques (E.D.S) pour prendre en compte les phénomènes aléatoires.

$$\dot{x} = f(t, x(t)),$$

où l'inconnue est une fonction $x(t)$ qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée $x'(t)$ et elle-même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme (seule la dérivée 1 ère est impliquée) avec $f(t, x) = a + bx$ indépendant de t par rapport à x . Symboliquement, l'équation se réécrit :

$$dx_1 = f(t, x(t))dt.$$

Cette équation modélise typiquement un système physique $x(t), t \geq 0$ qui évolue dans le temps de façon que x s'accroît, à la date t , selon le taux $f(t, x_t)$.

Par exemple, avec $f(t, x_t) = a(t)x(t)$, l'équation $dx_t = a(t)x_t dt$ modélise le cours

d'un actif financier x_t soumis au taux d'intérêt variable $a(t)$ ou d'une population avec un taux de natalité $a(t)$. Il est bien connu que la solution est :

$$x_t = x_0 e^{\left(\int_0^t f(s)ds\right)}.$$

CHAPITRE 3

RELATION ENTRE LES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE ET LES PROCESSUS DE MARKOV

Des liens importants existent entre probabilités et équations aux dérivées partielles (E.D.P) via les processus stochastiques. Ceux-ci sont souvent reliés à des opérateurs différentiels linéaires, ce qui permet d'exprimer les solutions de certaines E.D.P en termes de processus stochastiques.

Formule d'Itô

[19] Soit $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction réelle $C^{1,2}$, et X un processus d'Itô, on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s)ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)dX_s + \int_0^t \frac{1}{2}f''_{xx}(s, X_s)d\langle X, X \rangle_s. \quad (3.0.1)$$

Où

$$\begin{aligned}\langle dt.dt \rangle &= \langle dt.dB_t \rangle = \langle dB_t.dt \rangle = 0, \\ \langle dB_t.dB_t \rangle &= dt.\end{aligned}$$

Exemple 3.0.1

1. On reprend l'intégrale

$$\int_0^t B_s dB_s$$

On choisit $X_t = B_t$ et $f(t, x) = \frac{1}{2}x^2$. Alors

$$Y_t = f(t, B_t) = \frac{1}{2}B_t^2.$$

Alors la formule d'Itô

$$\begin{aligned}dY_t &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot (dB_t)^2, \\ &= B_t dB_t + \frac{1}{2}(dB_t)^2 = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt.\end{aligned}$$

Ainsi

$$d\left(\frac{1}{2}B_t^2\right) = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt.$$

En d'autres termes,

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}t.$$

2. Que vaut

$$\int_0^t s dB_s.$$

Il semble raisonnable que le terme tB_t devrait apparaître, posons alors

$$f(t, x) = tx \quad \text{et} \quad Y_t = f(t, B_t) = tB_t.$$

Alors par la formule d'Itô,

$$dY_t = B_t dt + t dB_t + 0,$$

i.e

$$d(tB_t) = B_t dt + t dB_t,$$

Ou

$$tB_t = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s,$$

ou

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds.$$

qui apparaît comme une intégration par parties.

3.1 Formule de Feynman-Kac

On se donne des fonctions A, S et h et on considère l'équation aux dérivées partielles suivant [12] :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + A(t, x) \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2} S^2(t, x) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0. \quad (3.1.1)$$

avec la condition finale $\Psi(T, x) = h(x)$.

Nous allons voir que la solution Ψ de cette équation est de la forme :

$$\Psi(t, x) = E(h(X_T) | X_t = x).$$

où (X_t) est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = A(t, X_t)dt + S(t, X_t)dB_t.$$

On applique la formule d'Itô pour le processus $Y_t = \Psi(t, X_t)$ lorsque Ψ est solution de (3.1.1) :

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(t, X_t) d\langle X \rangle_t, \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, X_t) (A(t, X_t) dt + S(t, X_t) dB_t) + \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(t, X_t) S^2(t, X_t) dt. \end{aligned}$$

En rassemblant les termes en dt et en utilisant le fait que Ψ est solution de l'E.D.P (3.1.1), on obtient :

$$dY_t = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, X_t) S(t, X_t) dB_t.$$

En particulier, (Y_t) est une martingale. On en déduit :

$$\Psi(x, t) = E(\Psi(t, X_t) | X_t = x) = E(\Psi(T, X_T) | X_t = x) = E(h(X_T) | X_t = x).$$

3.2 Transformation de Fourier :

Théorème 3.2.1 (Produit de convolution) :

Soient $A \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $S \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \rightarrow A(x - y)S(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. On pose

$$(A * S)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} A(x - y)S(y)dy.$$

Définition 3.2.1

Soit une fonction F à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), F intégrable sur $\mathbb{R}$ au sens $F \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$:

L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|dx$ est finie i.e convergente.

La transformée de Fourier de F est la fonction $\mathcal{F}(F) = \tilde{F}$ définie par :

$$\mathcal{F}(F) : \nu \mapsto \tilde{F}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(xe^{-i\nu x})dx. \quad (3.2.1)$$

Proposition 3.2.1

On rappelle quelques propriétés essentielles sur les transformées de Fourier.

1. La Linéarité :

si $A, S \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(\alpha A + \beta S) = \alpha \mathcal{F}(A) + \beta \mathcal{F}(S).$$

2. convolution :

Soit $A, S \in L^1(\mathbb{R})$ alors

i) $\widetilde{A * S} = \tilde{A} \tilde{S}.$

3. Dérivée de la transformée :

si A et $\tilde{A} \in L^1(\mathbb{R})$ alors

i) $\tilde{A} \in C^1(\mathbb{R}).$

ii) $(\tilde{A})'(x) = (-2\pi i t A)(x).$

3.3 Semi-groupes et générateurs**Définition 3.3.1 [3]**

Soit E un espace de Banach, une famille à un paramètre $T(t)$,

$0 \leq t \leq +\infty$ d'opérateurs linéaires bornés de E est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur E si :

i) $T(0) = I$ (I est l'opérateur identité de E).

ii) $T(t + s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0.$

Définition 3.3.2 [3]

L'opérateur linéaire A défini par :

$$D(A) = \left\{ x \in E : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\},$$

et

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = \frac{d^+ T(t)x}{dt} \Big|_{t=0}, x \in D(A).$$

est appelé générateur infinitésimale du semi-groupe $T(t)$, $D(A)$ est le domaine de A .

Théorème 3.3.1

Soit (B_t) un M.B alors :

$$E\{|B_t|\} = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty.$$

Preuve.

Rappelons d'abord que pour tout $t \geq 0$, $B_t \sim N(0, 1)$ ainsi :

$$\begin{aligned} E\{|B_t|\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx. \end{aligned}$$

On a :

$|x|e^{-\frac{x^2}{2t}}$ est une fonction pair.

Remarque 3.3.1

Fonction pair :

$$\int_{-a}^a g(x) dx = 2 \int_0^a g(x) dx.$$

Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = 2 \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

Alors :

$$\begin{aligned} E\{|B_t|\} &= 2 \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} 2xe^{-\frac{x^2}{2t}} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2t}{\sqrt{2\pi t}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2t}} \right]_0^{+\infty}, \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}}.
\end{aligned}$$

■

3.4 Lien entre les E.D.P et les E.D.S

La formule de Feynman-Kac, prouve qu'il y'a une connection entre les solutions des équations différentielles stochastiques et certaines équations aux dérivées partielles du second ordre linéaire.

Théorème 3.4.1

Soient $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in \mathbb{R}_+$, $(B_t, t \in \mathbb{R})$ un mouvement Brownien standard et $A, S : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions conjointement continues en (t, x) et lipschitzienne en x . On pose $(X_t, t \in [t_0, +\infty[)$ la solution de l'E.D.S

$$dX_t = A(t, X_t)dt + S(t, X_t)dB_t,$$

et $X_{t_0} = x_0$. On suppose de plus qu'il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$|S(t, x)| > K, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Soit $h \in C(\mathbb{R})$ et $T > 0$, étant données les hypothèses ci dessus sur A et S , il existe une unique fonction $\Psi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x) + A(t, x) \frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} S^2(t, x) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0 & \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ \Psi(T, x) = h(x). \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Remarque 3.4.1

Si Ψ la solution de l'équation (3.4.1), le processus $(\Psi(t, X_t), t \in [t_0, T])$ est une martingale.

En effet, par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned}
 \Psi(t, x) - \Psi(t_0, x_0) &= \int_0^t \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial \Psi}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X \rangle, \\
 &= \int_0^t \frac{\partial \Psi}{\partial x}(s, X_s) S(s, X_s) dB_s \\
 &\quad + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s, X_s) ds + \frac{\partial \Psi}{\partial x} A(s, X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} S(s, X_s)^2 ds}_{\text{(cette quantité est nulle car } \Psi \text{ satisfait l'équation (3.4.1))}} \\
 &= \int_0^t \frac{\partial \Psi}{\partial x}(s, X_s) S(s, X_s) dB_s.
 \end{aligned}$$

Le processus $\Psi(t, X_t)$ est donc une martingale.

La nature probabiliste des solutions des E.D.P

Nous supposons b et σ ne dépendent pas du temps, on note X_t une solution de

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t.$$

Définition 3.4.1

Soit f une fonction de classe C^2 à dérivées bornées. On appelle générateur infinitésimal du processus X_t , l'opérateur différentiel qui à une fonction f de classe C^2 associe.

$$Af(x) = \frac{\sigma^2(X_t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b(X_t) \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Théorème 3.4.2

Soit Ψ une fonction de classe $C^{1,2}$ en (t, x) à dérivées bornées sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \Psi(T, x) = f(x),$$

et

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + A_t \Psi - r\Psi\right)(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Alors :

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \Psi(t, x) = E\left(e^{-\int_t^T r(s, X_s) ds} f(X_T)\right).$$

Cette dernière est l'écriture probabiliste de la solution de l'E.D.P.

Ainsi pour calculer l'espérance d'une fonction qui s'écrit comme fonction d'une solution d'une E.D.S, il suffit de résoudre l'E.D.P associée au problème.

3.5 Représentation probabiliste de la solution parabolique

3.5.1 E.D.P de la chaleur :

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles décrivant la distribution de la chaleur dans le temps. Dans une dimension spatiale, on note $\Psi(t, x)$ comme la température qui obéit à la relation :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0,$$

où α est appelé coefficient de diffusion. Les problèmes liés aux équations aux dérivées partielles sont généralement complétés par des conditions initiales $\Psi(0, x) = \Psi_0(x)$ et certaines conditions aux limites.

Dans ce travail, on résout l'équation de la chaleur, nous utilisons la convention suivante pour la transformée de Fourier et son inverse.

On se propose de résoudre l'équation de la Chaleur suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \Psi(t, x) &= \frac{1}{2} \partial_x^2 \Psi(t, x), \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R} \\ \Psi(0, x) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.5.1)$$

où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

On définit le noyau de la chaleur par :

$$k(t, y - x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}(y-x)^2}.$$

Le noyau de la chaleur est une solution fondamentale (ou fonction de Green) de l'opérateur $\partial_t - \frac{1}{2}\partial_x^2$ de l'équation de la chaleur.

On sait que la solution de l'équation (3.5.1) analytiquement est :

$$\Psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}} k(t, y - x) f(y) dy. \quad (3.5.2)$$

i.e. une convolution de g avec le noyau de la chaleur.

On passe en suite la résolution de l'équation (3.5.1) à l'aide de la définition de mouvement brownien (B_t) .

i.e. la représentation probabiliste de la solution de l'équation de la Chaleur.

On montre que sa solution est donnée par :

$$\Psi(t, x) = E^x(g(B_t)).$$

Nous appliquons la transformée de Fourier pour confirmer que cette égalité est vraie :

$$\hat{\Psi}(t, y) = F(\Psi(t, x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \Psi(t, x) dx.$$

on dérive par rapport à t ,

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\Psi}(t, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \partial_t \Psi(t, x) dx, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \left[\frac{1}{2} \partial_x^2 \Psi(t, x) \right] dx. \end{aligned}$$

En appliquant l'intégrale par partie :

Posons,

$$\begin{cases} A(x) = e^{-ixy}, \\ S'(x) = \partial_x^2 \Psi(t, x). \end{cases} \implies \begin{cases} A'(x) = -iy e^{-ixy}, \\ S(x) = \partial_x \Psi(t, x). \end{cases}$$

Alors,

$$\partial_t \hat{\Psi}(t, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-ixy} \partial_x \Psi(t, x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + iy \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \partial_x \Psi(t, x) dx \right],$$

Nous avons :

$$e^{-ixy} \partial_x \Psi(t, x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0, \text{ car elle est à support compact.}$$

Alors,

$$\partial_t \hat{\Psi}(t, y) = \frac{iy}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \partial_x \Psi(t, x) dx,$$

En appliquant l'intégrale par partie pour la deuxième fois :

On pose,

$$\begin{cases} A(x) = e^{-ixy} \\ S'(x) = \partial_x \Psi(t, x) \end{cases} \implies \begin{cases} A'(x) = -iy e^{-ixy}, \\ S(x) = \Psi(t, x). \end{cases}$$

Puis,

$$\partial_t \hat{\Psi}(t, y) = -\frac{y^2}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \Psi(t, x) dx}_{\text{(transformation de Fourier } \Psi)}$$

d'où,

$$\partial_t \hat{\Psi}(t, y) = -\frac{y^2}{2} \hat{\Psi}(t, y).$$

est une équation différentielle ordinaire à coefficients constants.

Alors,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\Psi}(t, y) &= -\frac{y^2}{2}\hat{\Psi}(t, y), \\ \frac{d\hat{\Psi}(t, y)}{\hat{\Psi}(t, y)} &= -\frac{y^2}{2}dt,\end{aligned}$$

Par intégration,

$$\ln \hat{\Psi}(t, y) = -\frac{y^2}{2}t + c, \text{ o } c \text{ est une constante strictement positive.}$$

Nous trouvons,

$$\hat{\Psi}(t, y) = Ke^{-\frac{y^2}{2}t}, \quad K = e^c. \quad (1)$$

Les solutions sont des exponentielles décroissantes dans t .

Le terme constant est la condition initiale, notées par :

$$\hat{\Psi}(0, y) = \hat{g}(y),$$

on obtient : $K = \hat{g}(y)$,

et donc,

$$\hat{\Psi}(t, y) = \hat{\Psi}(y)e^{-\frac{y^2}{2}t}.$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}E(e^{iyB_t}) &= \int e^{iyp} g(p) dp, \\ &= \int e^{iyp} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{p^2}{2t}} dp, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int e^{iyp} e^{-\frac{p^2}{2t}} dp, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int e^{-\frac{1}{2t}p^2 + iyp} dp.\end{aligned}$$

D'après l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} (e^{\frac{b^2}{4a}} + c), \quad a > 0.$$

$$\text{Donc } \int e^{\frac{-1}{2t}p^2+iy p} dp = \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-\frac{y^2}{4t}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} E(e^{iyB_t}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int e^{\frac{-1}{2t}p^2+iy p} dp, \\ &= e^{-\frac{y^2}{2t}}. \end{aligned} \quad (2)$$

D'après (1) et (2) on a :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(t, y) &= E(e^{iyB_t}) \hat{g}(y), \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{iyz} \hat{g}(y) P_{B_t}(dz), \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{iyz} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} g(x) dx \right] P_{B_t}(dz), \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable : $x = x + z$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} e^{iyz} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iy(x+z)} g(x+z) dx \right] P_{B_t}(dz), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iyz} \int_{\mathbb{R}} e^{-iyz} e^{-ixy} g(x+z) dx P_{B_t}(dz), \end{aligned}$$

Ainsi,

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \int_{\mathbb{R}} g(x+z) P_{B_t}(dz) dx,$$

Ou $P_{B_t}(dz)$ la loi de B_t donnée par la définition (2.6.3)
que nous résolvons

$$\hat{\Psi}(t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \Psi(t, x) dx.$$

Telle que :

$$\Psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}} g(x + z) P_{B_t}(dz).$$

On applique la définition (2.6.3)

$$\begin{aligned} \Psi(t, x) &= \int_{\mathbb{R}} g(x + z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2t}} dz, \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dy, \\ &= E(g(B_t + x)) = E^x(g(B_t)). \end{aligned}$$

Maintenant, on va vérifier que cette solution est égale à solution analytiquement :

En effet :

$$\begin{aligned} E^x(g(B_t)) &= E(g(B_t + x)), \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(z + x) P_{B_t}(dz), \end{aligned}$$

On a $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$

Alors,

$$E^x(g(B_t)) = \int_{\mathbb{R}} g(z + x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2t}}(dz),$$

On suppose $y = z + x$ et $dy = dz$

$$\begin{aligned} E(g(B_t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}} k(t, y-x) g(y) dy. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Avec en plus un terme de potentiel $-v$ i.e au second membre on a :

$$J = \frac{1}{2} \partial_x^2 - v,$$

On a par la formule de Feynman-Kac que :

$$\Psi(t, x) = E^x \left(g(B_t) e^{-\int_0^t v(B_s) ds} \right).$$

Généralisation

On commence :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = Au(t, x), \\ u(0, x) = f(x). \end{cases}$$

Tq :

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

La forme de Feynman-Kac donne la relation entre le point de vue analytique et l'approche probabiliste

$$u(t, x) = E^x[f(X_t)],$$

ou X_t est la solution de E.D.S :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s.$$

3.5.2 Un model de transformation temporelle :

On se propose de résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t f(t, p) = f(t, p+1) - f(t, p), & \forall t > 0, p \in \mathbb{R} \\ f(0, p) = g(p), & p \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.5.3)$$

La solution est :

$$f(t, p) = E^p(f(N_t)). \quad (3.5.4)$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \hat{f}(t, y) &= F(f(t, p)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipy} f(t, p) dp. \\ \partial_t \hat{f}(t, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipy} \partial_t f(t, p) dp, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipy} [f(t, p+1) - f(t, p)] dp, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipy} f(t, p+1) dp - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipy} f(t, p) dp}_{(\text{transformation de Fourier } \hat{f})}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipy} f(t, p+1) dx - \hat{f}(t, p), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(p+1)y} f(t, x+1) dx - \hat{f}(t, y), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(p+1)y} e^{iy} f(t, p+1) dp - \hat{f}(t, y), \end{aligned}$$

$$= e^{iy} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(p+1)y} f(t, p+1) dx}_{\text{(transformation de Fourier)}} - \hat{f}(t, y),$$

$$\partial_t \hat{f}(t, y) = e^{iy} \hat{f}(t, y) - \hat{f}(t, y) = (e^{iy} - 1) \hat{f}(t, y).$$

est une équation différentielle ordinaire à coefficients constantes.

Donc,

$$\frac{d}{dt} \hat{f}(t, y) = (e^{iy} - 1) \hat{f}(t, y),$$

$$\frac{d\hat{f}(t, y)}{\hat{f}(t, y)} = (e^{iy} - 1) dt,$$

Par l'intégration, nous trouvons,

$$\ln \hat{f}(t, y) = (e^{iy} - 1)t + c, \quad \text{où } c > 0.$$

$$\hat{f}(t, y) = e^{(e^{iy}-1)t} \hat{g}(y), \quad K = e^c. \quad (1)$$

la condition initiale, données par :

$$\hat{f}(0, y) = \hat{g}(y).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} E\{e^{ixN_t}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixp} P_{N_t=p} dp, \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} e^{ixp} P_{N_t=p}, \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} e^{ixp} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^p}{p!}, \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(e^{ix} \lambda t)^p}{p!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\lambda t} e^{ix\lambda t}, \\
&= e^{-\lambda t} e^{e^{ix}\lambda t}, \\
&= e^{\lambda t(e^{ix}-1)}. \quad (2)
\end{aligned}$$

D'après (1) et (2) on obtient :

$$\begin{aligned}
\hat{f}(t, y) &= E[e^{iyN_t}] \hat{g}(x), \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{iyp} \hat{g}(x) P_{N_t}(dp), \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{iyp} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(q+p)y} g(q+p) dq \right] P_{N_t}(dp), \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iqy} \int_{\mathbb{R}} g(p+q) P_{N_t}(dp) dq,
\end{aligned}$$

où $p_{N_t}(dp)$ la loi de N_t , alors :

$$\begin{aligned}
f(t, q) &= \int_{\mathbb{R}} g(p+q) P_{N_t} d(p), \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} g(q+n) P(N_t = q+n), \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} g(q+n) e^{-\gamma_0 t} \frac{(\gamma_0 t)^n}{n!}, \\
&= e^{-\gamma_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} g(q+n) \frac{\gamma_0 t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Abbassov, K. Baddari,. *Équations de la physique mathématique appliquées*. UPO, 2009.
- [2] J. Breton. *Processus stochastiques*, Université de Rennes 1, Octobre Décembre 2020.
- [3] B. Boujdaa, Cours Master *Théorie des Semi Groupes*, Centre Universitaire-Mila, Département de Mathématique et Informatique, édition 2022-2023.
- [4] Y. Caumel, *Probabilités et processus stochastiques*, Springer-Verlag-France, 2011.
- [5] C. Claudie, *Processus Stochastiques Modélisation*, ISMAG MASTER 2 - MI00451X, Université de Toulouse Le Miria, 2012-2013.
- [6] D. Connus, Robert Dalong, *Introduction à la théorie des probabilités*, 2015.
- [7] F. Cottet-Emard, *Probabilité et tests d'hypothèse*, en Belgique, Bruxelles et Paris, mars 2014.
- [8] R. Cuourant, D. Hilbert. *Methods of mathematical physics*. Wiley - V C H, 1989.
- [9] A. Fuchs, D. Foata, . *Calcul des probabilité*, 2 nd,DUNOD-Belgique, Juin (2005).

- [10] M. Haneche, *Processus Stochastiques Et Equations Aux Derivees Partielles*. Mémoire de Magister. Université De M'hemed Bougera. Boumerdès, 2008/2009.
- [11] A. Kelleche *Équations de la physique mathématique*, Université Djilali Bou-nâama, faculté des science et de la technologie, edition 10 Octobre 2020.
- [12] M. Lefebvre, *Processus stochastique appliqués*, Canada, 2009.
- [13] F. Legrand, *Licence Créative Commons*.
- [14] A. Mehazem, Cours Master *Système dynamique*, Centre Universitaire-Mila, Département de Mathématique et Informatique, 2020-2021.
- [15] É. Pardoux, *Processus de Markov et applications*, 11 srptembre 2006.
- [16] Pinchover, J. Rubenstein. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 2005.
- [17] M. Ross Sheldon, *Initiation aux probabilités*, Traduction de la septième édition américaine, presses polytechniques et universitaires romandes, 2007.
- [18] N. Savy, *Probabiliés et statistiques pour modéliser et décider*. Ellipses-France, janvier (2006).
- [19] D. Sondermann, *Introduction to Stochastic Calculus for Finance*, A New Didactic Approach. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006.
- [20] A. Walter. Strauss. *Partial Differential Equations : An Introduction*. Wiley, 1992.