



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

La relation entre les nombres de Cobalancing et systèmes d'équations aux différences

Préparé par : Romaissa Kadri
Amani Boufenghour

Soutenue devant le jury

Smail Kaouache	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Yacine Halim	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Mohamed Kecies	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire :2022/2023

REMERCIEMENT

Tout d'abord, nous remercions ALLAH à la santé, la force et la patience, pendant tout la période d'exécution de ce mémoire.

Spécial remerciements à Dr. Yacine Halim, pour tout les efforts déployés, son présence, son aide, et son conseils surtout, nous sommes très heureux et fiers de l'opportunité de travailler avec vous.

Nous remercions aussi, les membres de jury, Dr. Smail Kaouache, et Dr. Mohamed Kecies pour leurs conseils et, efforts de corriger et évaluer notre travail.

Mes remerciement, veut également à tout les enseignants et à toutes les établissements d'enseignement, qui ont fait partie de notre chemin formatif toutes ces années, surtout les enseignement de l'institut (S-T), et le Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf, Mila.

N'oublier pas, nos parents, merci beaucoup pour tous les sacrifices, les efforts et les souffrance, et pour tout ce que nous sommes aujourd'hui. Finalement, remerciements à tous ceux qui ont participé à ce travail de près ou de loin.

Amani, Romaissa.

RÉSUMÉ

L'objectif principale de ce mémoire est de trouver la forme de solution d'une équation aux différences et un système des équations aux différences non linéaires d'ordre supérieure, ainsi que d'étudier leur comportement asymptotique.

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques définitions et théorèmes liées à la théorie des équations aux différences. De plus nous présentons également une étude de la suite des de Balancing ainsi que la suite de Cobalancing.

Une équation aux différences d'ordre supérieure dont la solution est en relation avec la suite de Balancing généralisée fait l'objet du deuxième chapitre.

Dans le dernier chapitre, nous présentons la forme de la solution d'un système d'équations aux différences non linéaires d'ordre supérieure en termes de la suite de Balancing généralisé.

Mots clés : Système d'équations aux différences, suite de Balancing généralisée, suite de Cobalancing, la forme de solution.

ABSTRACT

The main objective of this work is to give the solution of a higher-ordre difference equation and a system of higher ordre non-linear difference equations.

In the first chapter, we presente theory, moreover we study of the Balancing sequence and the Cobalancing sequence.

A higher-ordre difference equation of with solutions associated to a general Balancing sequence is the sujet of the second chapter.

In the last chapter, we give the forme of the solution of a system of higher order in termes of a generelazed Balancing sequence.

Key words : System of differnce equations, generalized Balancing sequence, generale solution.

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو البحث عن حلول معادلة فروق و جملة معادلتى فروق غير خطية ذات رتب عليا، و دراسة سلوك تقاربها.

في الفصل الأول، قدمنا بعض التعاريف و النظريات الرئيسية المتعلقة بنظرية معادلات الفروق بالإضافة الى دراسة متتالية الأعداد المتوازنة و متتالية الأعداد فوق المتوازنة.

معادلة فروق ذات رتبة عليا مع حلول ذات علاقة بمتتالية الأعداد المتوازنة المعممة هو موضوع الفصل الثاني.

في الفصل الأخير، نعطي شكل حلول جملة معادلتى فروق غير خطية ذات رتب عليا بدلالة متتالية الأعداد المتوازنة المعممة.

الكلمات الأساسية : جمل معادلات الفروق، متتالية الأعداد المتوازنة المعممة، متتالية الأعداد فوق المتوازنة، الحل العام.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	3
1 Quelques préliminaires	4
1.1 Équations aux différences	4
1.1.1 Équation aux différences linéaires	4
1.1.2 Équations aux différences non linéaires	5
1.1.3 Stabilité par linéarisation	6
1.2 Systèmes d'équations aux différences non linéaires	7
1.2.1 La linéarisation	7
1.2.2 Stabilité par linéarisation	11
1.2.3 La stabilité	11
1.3 Les nombres de Cobalancing	12
1.3.1 Les nombres de Balancing	12
1.3.2 Le terme général de la suite de Balancing	13
1.3.3 Quelques propriétés de la suite de Balancing	14
1.3.4 Les nombres de Cobalancing	18
1.3.5 La formule de Binet de la suite de Cobalancing	19
1.3.6 Quelques propriétés de la suite de Cobalancing	21

2	Solution d'une équation aux différences non linéaire en terme des nombres de Cobalancing	25
2.1	L'équation $x_{n+1} = \frac{1}{6A - x_n}$	28
2.1.1	La forme de solution	29
2.2	L'équation $x_{n+1} = \frac{1}{6A - x_{n-k}}$	32
2.2.1	Analyse de la forme de l'équation (2.12)	32
2.2.2	Forme de la solution	33
2.3	Stabilité globale de la solution de (2.12)	35
3	Solution d'un système d'équations aux différences non linéaire d'ordre supérieurs en terme des nombres de Cobalancing	40
3.1	Introduction	40
3.2	La solution du système $x_{n+1} = \frac{1}{6A - y_n}, y_{n+1} = \frac{1}{6A - x_n}$	41
3.3	La solution du système $x_{n+1} = \frac{1}{6A - y_{n-k}}, y_{n+1} = \frac{1}{6A - x_{n-k}}$	48
3.3.1	Analyse de la forme du système (3.17)	48
3.3.2	Forme de la solution	49
3.3.3	Stabilité globale des solutions du système (3.17)	53

INTRODUCTION

L'objectif de ce mémoire est de trouver la forme de solution d'un système d'équations aux différences non linéaires d'ordres supérieures.

En mathématiques, les équations aux différences jouent un rôle important dans la compréhension et la modélisation de divers phénomènes, où ils expriment l'évolution d'une série de valeurs sur des intervalles de temps discrets, ce qui les rend particulièrement pertinentes dans plusieurs domaines comme, l'économie, la biologie, la physique et l'informatique ...etc, d'autre part, nous trouvons que l'étude des systèmes d'équations aux différences nous permet d'analyser des processus dynamique de prédire des états futurs et de découvrir des modèles qui nous aident à prendre des décisions éclairées.

Le concept des nombres de Balancing a été introduit pour la première fois par Behera et Panda [1] en 1999. En 2005, après une petite modification sur les nombres de Balancing, Behara et Ray [8] défini les nombres de Cobalancing.

L'étude des nombres de Balancing conduit à la découverte de nombreux modèles et relations au sein de suites numériques, grâce à lui les mathématiciens peuvent découvrir des symétries cachées, des propriétés arithmétiques et des connexions complexes entre différences éléments de la suite.

L'étude des nombres de Balancing est toujours en cours alimentée par les progrès de la recherche mathématiques et des outils informatiques, où les chercheurs creusent encore de plus en plus sur les propriétés de ces suite, pour ce qu'elle a des implication pratiques dans divers domaines des mathématiques et au-delà.

Ce mémoire vise à trouver les solutions d'une équation et d'un système d'équations aux différences non linéaires d'ordres supérieures, et d'étudier le comportement des points d'équilibres.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques préliminaires sur les équations et les systèmes d'équations aux différences, nous présentons dans la deuxième partie la forme de Binet de la suite de Balancing et la suite de Cobalancig et quelques leurs propriétés.

Le travail de troisième chapitre est divisé en deux parties, dans la première partie, nous intéressons à donner la forme générale de la solution de l'équation aux différences non linéaire d'ordre un

$$x_{n+1} = \frac{1}{6A - x_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $A \in \mathbb{N}_1$, avec la valeur initiale $x_0 \in \mathbb{N} - \{6A\}$. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à donner la forme générale de la solution et d'étudier la stabilité des points d'équilibres de l'équation aux différences d'ordre supérieure suivant :

$$x_{n+1} = \frac{1}{6A - x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, k \in \mathbb{N},$$

où $A \in \mathbb{N}_1$, avec les valeurs initiales $x_{-k}, \dots, x_0 \in \mathbb{N} - \{6A\}$. Nous donnons également la relation entre cette solution et la suite de Balancing généralisée.

Le dernier chapitre est devisé également en deux parties. Dans la première partie, nous donnons la forme générale de la solution du système d'équation aux différences non linéaire d'ordre un suivant :

$$x_{n+1} = \frac{1}{6A - y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{6A - x_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $A \in \mathbb{N}_1$, avec valeur initiale $x_0, y_0 \in \mathbb{N} - \{6A\}$. Dans la deuxième partie, nous exprimons la solution et nous étudions la stabilité des points d'équilibres du système d'équation aux différences d'ordre supérieur suivant :

$$x_{n+1} = \frac{1}{6A - y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{6A - x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, k \in \mathbb{N},$$

où $A \in \mathbb{N}_1$, avec les valeurs initiales $x_{-k}, \dots, x_0, y_{-k}, \dots, y_0 \in \mathbb{N} - \{6A\}$. Nous donnons aussi la relation entre cette solution et la suite de Balancing généralisée.

CHAPITRE 1

QUELQUES PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques définitions de base sur les équations aux différences et la suite de Cobalancing. Dans la première partie nous nous intéressons aux équation et systèmes d'équations aux différences. Dans la dernière partie nous présentons quelques définition et propriétés de la suite de Cobalancing.

1.1 Équations aux différences

1.1.1 Équation aux différences linéaires

Définition 1.1.1 *Une équation de la forme*

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \dots + p_k(n)x_n = g(n), \quad (1.1)$$

avec, $p_0(n) = 1$, $p_1(n)$, $p_2(n)$..., $g(n)$ sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}_{n_0}$, s'appelle équation aux différences linéaire d'ordre k , dès que $p_k(n) \neq 0$.

En général on associe k conditions initiales avec l'équation (1.1)

$$x_{n_0} = c_1, x_{n_0+1} = c_2, \dots, x_{n_0+K-1} = c_k, \quad (1.2)$$

avec $c_i, i = 1, \dots, k$ sont des constantes réelles ou complexes.

Définition 1.1.2 L'équation aux différences (1.1) avec $g(n) = 0, \forall n \geq n_0$ est dite équation aux différences linéaire homogène et elle s'écrit comme suit

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \dots + p_k(n)x_n = 0. \quad (1.3)$$

Définition 1.1.3 Une suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ est dit solution de l'équation (1.1) avec les conditions initiales (1.2) si elle satisfait la relation (1.1).

Proposition 1.1.1 [3] La solution générale de l'équation (1.3) avec $p_i(n), i = 1, \dots, k$ sont des constants, s'écrit :

$$x_n = \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n, c_{i,j} \in \mathbb{R}.$$

Où

- Le paramètre $s \leq k$ désigne le nombre de racines distinctes de l'équation caractéristique (1.3).
- Le paramètre λ_i désigne une racine de l'équation caractéristique (1.3).
- Le paramètre m_i désigne la multiplicité de la racine λ_i .
- Les coefficients $c_{i,j}$ sont des constantes qui sont déterminées à partir des conditions initiales.

1.1.2 Équations aux différences non linéaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I^{k+1} \longrightarrow I$ est une fonction continue.

Définition 1.1.4 Une équation aux différences d'ordre $(k+1)$

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.4)$$

avec les valeurs initiales $x_0, x_{-1}, \dots, x_{-k} \in I$, est dite non linéaire s'il n'est pas de la forme (1.1).

Définition 1.1.5 On appelle *équation aux différences linéaire associée* à l'équation (1.4) l'équation

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \dots + p_k y_{n-k},$$

avec

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}), \quad i = 0, \dots, k,$$

et

$$\begin{aligned} f : \quad I^k &\rightarrow I, \\ (u_1, \dots, u_k) &\mapsto f(u_1, \dots, u_k). \end{aligned}$$

Définition 1.1.6 Un point $\bar{x} \in I^{k+1}$, est dit point d'équilibre pour l'équation (1.6) si

$$\bar{x} = f(\bar{x}).$$

1.1.3 Stabilité par linéarisation

Théorème 1.1.1 [3]

- 1 . Si toutes les racines du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée sont dans le disque unité ouvert $|\lambda| < 1$, alors le point d'équilibre de l'équation (1.4) est asymptotiquement stable.
- 2 . Si au moins une racine du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre de l'équation (1.4) est instable.

Théorème 1.1.2 (Théorème de Clark)[2]. Une condition suffisante pour la stabilité locale asymptotiquement de l'équation (1.4) est

$$|p_0| + |p_1| + \dots + |p_k| < 1.$$

Théorème 1.1.3 (Théorème de Rouché)[4]. Soient $f(z)$, $g(z)$ deux fonctions holomorphes dans un ouvert Ω du plan complexe $\mathbb{C}$, et soit K un compact contenu dans Ω . Si on a

$$|g(z)| < |f(z)|, \forall z \in \partial K,$$

alors le nombre de zéros de $f(z) + g(z)$ dans K est égal au nombre de zéros de $f(z)$ dans K .

1.2 Systèmes d'équations aux différences non linéaires

1.2.1 La linéarisation

Définition 1.2.1 Soient $f^{(i)}$ des fonctions continument différentiables

$$f^{(i)} : I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \dots \times I_p^{k+1} \rightarrow I_i^{k+1},$$

ou I_i , $i = 1, 2, \dots, p$ sont des intervalles réels.

Considérons le système de p équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = f^{(1)}(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \dots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \dots, x_{n-k}^{(2)}, \dots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \dots, x_{n-k}^{(p)}), \\ x_{n+1}^{(2)} = f^{(2)}(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \dots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \dots, x_{n-k}^{(2)}, \dots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \dots, x_{n-k}^{(p)}), \\ \vdots \\ x_{n+1}^{(p)} = f^{(p)}(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \dots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \dots, x_{n-k}^{(2)}, \dots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \dots, x_{n-k}^{(p)}), \end{cases} \quad (1.5)$$

ou $n, k \in \mathbb{N}_0$, $(x_{-k}^{(i)}, x_{-k+1}^{(i)}, \dots, x_0^{(i)}) \in I_i^{k+1}$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Définissons la fonction

$$H : I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \dots \times I_p^{k+1} \rightarrow I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \dots \times I_p^{k+1},$$

par

$$H(W) = (f_0^{(1)}(W), f_1^{(1)}(W), \dots, f_k^{(1)}(W), f_0^{(2)}(W), f_1^{(2)}(W), \dots, f_k^{(2)}(W), \dots, f_0^{(p)}(W), f_1^{(p)}(W), \dots, f_k^{(p)}(W)),$$

avec

$$W = (u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_k^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \dots, u_k^{(2)}, \dots, u_0^{(p)}, u_1^{(p)}, \dots, u_k^{(p)})^T,$$
$$f_0^{(i)}(W) = f^{(i)}(W), f_1^{(i)}(W) = u_0^{(i)}, \dots, f_k^{(i)}(W) = u_{k-1}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Posons,

$$W_n = [x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \dots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \dots, x_{n-k}^{(2)}, \dots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \dots, x_{n-k}^{(p)}]^T.$$

Ainsi, le système (1.5) est équivalent au système

$$W_{n+1} = H(W_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.6)$$

c'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1}^{(1)} & = & f^{(1)}(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \dots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \dots, x_{n-k}^{(2)}, \dots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \dots, x_{n-k}^{(p)}), \\ x_n^{(1)} & = & x_n^{(1)}, \\ & \vdots & \\ x_{n-k+1}^{(1)} & = & x_{n-k+1}^{(1)}, \\ x_{n+1}^{(2)} & = & f^{(2)}(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \dots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \dots, x_{n-k}^{(2)}, \dots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \dots, x_{n-k}^{(p)}), \\ x_n^{(2)} & = & x_n^{(2)}, \\ & \vdots & \\ x_{n-k+1}^{(2)} & = & x_{n-k+1}^{(2)}, \\ & \vdots & \\ x_{n+1}^{(p)} & = & f^{(p)}(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \dots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \dots, x_{n-k}^{(2)}, \dots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \dots, x_{n-k}^{(p)}), \\ x_n^{(p)} & = & x_n^{(p)}, \\ & \vdots & \\ x_{n-k+1}^{(p)} & = & x_{n-k+1}^{(p)}. \end{array} \right.$$

Définition 1.2.2

1 . Un point $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}) \in I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \dots \times I_p^{k+1}$, est dit point d'équilibre pour le système (1.5) si

$$\begin{aligned} \overline{x^{(1)}} &= f^{(1)}(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \dots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}), \\ \overline{x^{(2)}} &= f^{(2)}(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \dots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}), \\ &\vdots \\ \overline{x^{(p)}} &= f^{(p)}(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \dots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}). \end{aligned}$$

Autrement dit $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p)}})$ est une solution de (1.5).

2 . Un point $\overline{W} = (\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \dots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}) \in I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \dots \times I_p^{k+1}$, est point d'équilibre du système (1.6) si

$$\overline{W} = H(\overline{W}).$$

Remarque 1.2.1 Il est claire que $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}) \in I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \dots \times I_p^{k+1}$, est dit point d'équilibre de (1.5) si et seulement si $\overline{W} = (\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \dots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}) \in I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \dots \times I_p^{k+1}$, est un point d'équilibre du système (1.6).

Définition 1.2.3 On appelle système linéaire associée au système (1.6) autour du point d'équilibre

$$\overline{W} = (\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \dots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}) \in I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \dots \times I_p^{k+1},$$

le système

$$W_{n+1} = AW_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

ou A est la matrice Jacobienne de la fonction H au point d'équilibre $\overline{W}$, donner par

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_1^{(1)}} & \dots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_1^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_k^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_1^{(p)}} & \dots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_k^{(p)}} \\ \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_1^{(1)}} & \dots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_1^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_k^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_1^{(p)}} & \dots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_k^{(p)}} \\ \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_1^{(1)}} & \dots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_1^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_k^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_1^{(p)}} & \dots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_k^{(p)}} \\ \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_1^{(1)}} & \dots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_1^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_k^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_1^{(p)}} & \dots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_k^{(p)}} \\ \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial u_1^{(1)}} & \dots & \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial u_1^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial u_k^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial u_1^{(p)}} & \dots & \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial u_k^{(p)}} \\ \frac{\partial f_k^{(2)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(2)}}{\partial u_1^{(1)}} & \dots & \frac{\partial f_k^{(2)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(2)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_k^{(2)}}{\partial u_1^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_k^{(2)}}{\partial u_k^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_k^{(2)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_k^{(2)}}{\partial u_1^{(p)}} & \dots & \frac{\partial f_k^{(2)}}{\partial u_k^{(p)}} \\ \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_1^{(1)}} & \dots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_1^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_k^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_1^{(p)}} & \dots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_k^{(p)}} \\ \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_1^{(1)}} & \dots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_1^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_k^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_1^{(p)}} & \dots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_k^{(p)}} \\ \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_1^{(1)}} & \dots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_1^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_k^{(2)}} & \dots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_1^{(p)}} & \dots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_k^{(p)}} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

1.2.2 Stabilité par linéarisation

Théorème 1.2.1 [5]

- 1 . Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne A sont dans le disque unité ouvert $|\lambda| < 1$, alors le point d'équilibre $\bar{W}$ du système (1.6) est localement asymptotiquement stable.
- 2 . Si au moins une valeur propre de la matrice jacobienne A a un module supérieur à 1 alors le point d'équilibre $\bar{W}$ du système (1.6) est instable.

Définition 1.2.4 Une solution $(x_n^{(i)})_{n=-k}^{\infty}$, $i = 1, 2, \dots, p$ du système (1.5) est dit éventuellement périodique de période $p \in \mathbb{N}_0$ si

$$\exists N \geq -k; \quad x_{n+p}^{(i)} = x_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Si $N = -k$, on dit que la solution est périodique de période p .

1.2.3 La stabilité

Définition 1.2.5 Soit $\bar{W}$ un point d'équilibre du système (1.6) et $\|\cdot\|$ une norme, par exemple la norme euclidienne.

- 1 . Le point d'équilibre $\bar{W}$ est dit stable (ou localement stable) si pour chaque $\varepsilon > 0$; il existe $\delta > 0$ telle que $\|W_0 - \bar{W}\| < \delta$ implique $\|W_n - \bar{W}\| < \varepsilon$ pour $n \geq 0$.
- 2 . Le point d'équilibre $\bar{W}$ est dit asymptotiquement stable (ou localement asymptotiquement stable) s'il existe $\gamma \geq 0$ tel que $\|W_0 - \bar{W}\| < \gamma$ implique

$$\|W_n - \bar{W}\| \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty.$$

3 . Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit globalement attractif (respectivement globalement attractif de bassin d'attracteur l'ensemble $G \subseteq I^{k+1} \times J^{k+1}$), si pour chaque W_0 (respectivement pour chaque $W_0 \in G$)

$$\|W_n - \overline{W}\| \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty.$$

4 . Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit globalement asymptotiquement stable (respectivement globalement asymptotiquement stable par rapport à G) si est localement stable, et si pour chaque $W_0 \in G$

$$\|W_n - \overline{W}\| \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty.$$

5 . Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit instable s'il n'est pas localement stable.

1.3 Les nombres de Cobalancing

Dans cette partie nous donnons quelques définitions et propriétés de la suite de Balancing (ou la suite d'équilibrage) et la suite de Cobalancing.

1.3.1 Les nombres de Balancing

D'après Behera et Panda [1], un entier naturel n est appelé nombre de Balancing s'il satisfait

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + r). \quad (1.8)$$

Pour un entier naturel n . Ils appellent n un nombre d'équilibrage et r l'équilibrant correspondant à n et $(n, r) \in \mathbb{Z}^+$. Par exemple 6, 35 et 204 sont respectivement des nombres d'équilibrage avec 2, 14 et 84 équilibrant.

Il est également prouvé dans [1] qu'un entier positif n est un nombre d'équilibrage si et seulement si n est nombre triangulaire, c'est-à-dire que $8n^2 + 1$ est un carré parfait.

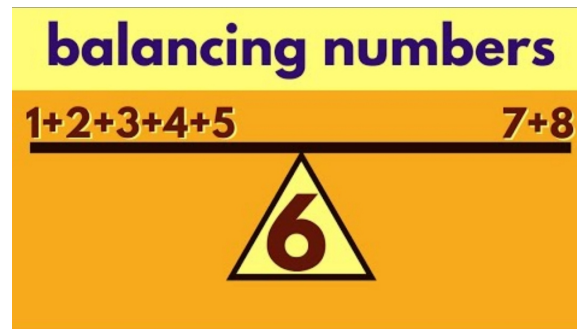


FIGURE 1.1 – Le plus petit nombre de Balancing.

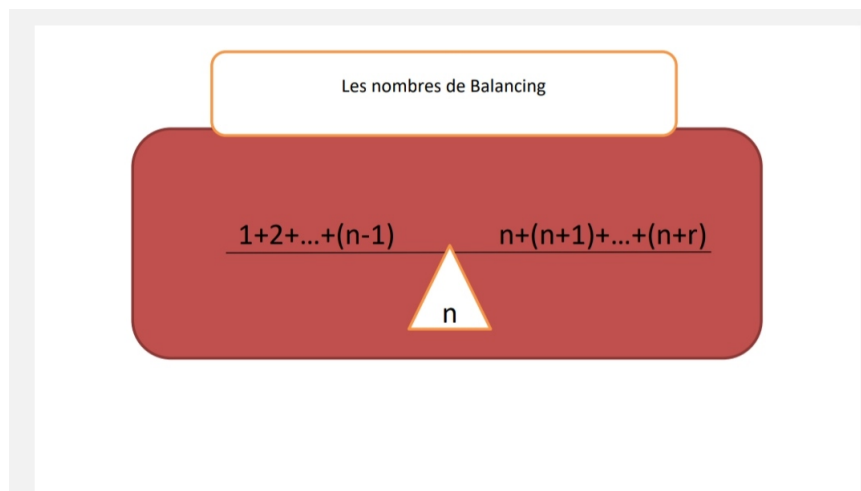


FIGURE 1.2 – La forme générale des nombres de Balancing.

Définition 1.3.1 [1] La suite de Balancing est la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$B_{n+2} = 6B_{n+1} - B_n, \quad B_0 = 0, \quad B_1 = 1. \quad (1.9)$$

1.3.2 Le terme général de la suite de Balancing

Soit la suite de Balancing

$$B_{n+2} - 6B_{n+1} + B_n = 0, \quad B_0 = 0, \quad B_1 = 1. \quad (1.10)$$

-L'équation caractéristique de (1.10) est

$$\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0,$$

ainsi, les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1 = 3 + 2\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

La solution générale de l'équation (1.10) est de la forme

$$B_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n. \quad (1.11)$$

En utilisant les condition initiales, on obtient :

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}}{8} \quad \text{et} \quad c_2 = -\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Donc

$$B_n = \frac{\sqrt{2}}{8} (3 + 2\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{8} (3 - 2\sqrt{2})^n. \quad (1.12)$$

Définition 1.3.2 La formule (1.12) est dit la formule de Binet de la suite de Balancing.

Autrement dit :

$$B_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, n \in \mathbb{N}, \quad (1.13)$$

avec

$$\alpha = 3 + 2\sqrt{2}, \quad \beta = 3 - 2\sqrt{2}.$$

1.3.3 Quelques propriétés de la suite de Balancing

Proposition 1.3.1 Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Balancing.

Donc on a les identités suivantes :

i) **L'identité de Cassini** : Pour $n > 0$, on a

$$B_{n-1}B_{n+1} - B_n^2 = -1. \quad (1.14)$$

ii) **L'identité d'Ocagne** : Pour $n, r \in \mathbb{N}$, on a

$$B_{n+r}B_{n+1} - B_{n+r+1}B_n = B_r. \quad (1.15)$$

iii) **L'identité de Johnson** : Pour k, l, m, n et $r \in \mathbb{N}$ tels que $k + l = m + n$,

$$B_kB_l - B_mB_n = B_{k-r}B_{l-r} - B_{m-r}B_{n-r}. \quad (1.16)$$

iv) **L'identité de Catalan** : Pour n et $r \in \mathbb{N}$ tels que

$$B_n^2 - B_{n+r}B_{n-r} = B_r^2. \quad (1.17)$$

Preuve.

i) **L'identité de Cassini** : De (1.13) on a :

$$B_{n-1} = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}, \quad \text{et} \quad B_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}, \quad \forall n \geq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} B_{n-1}B_{n+1} - B_n^2 &= \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2, \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} [2(\alpha\beta)^n - \alpha^{n-1}\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta^{n-1}], \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} [-(\alpha\beta)^{n-1}(\alpha - \beta)^2], \\ &= -(\alpha\beta)^{n-1} = -1. \quad (\text{car } \alpha\beta = 1) \end{aligned}$$

ii) *L'identité d'Ocagne* : En utilisons la formule de Binet (1.13)

$$\begin{aligned} B_{n+r}B_{n+1} - B_{n+r+1}B_n &= \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{\alpha^{n+r+1} - \beta^{n+r+1}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right), \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} [\beta^{n+r+1}\alpha^n + \beta^n\alpha^{n+r+1} - \alpha^{n+r}\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta^{n+r}]. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} B_{n+r}B_{n+1} - B_{n+r+1}B_n &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} [(\alpha\beta)^n(\alpha^{r+1} + \beta^{r+1} - \alpha^r\beta - \beta^r\alpha)], \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} [\alpha^r(\alpha - \beta) - \beta^r(\alpha - \beta)]. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} B_{n-1}B_{n+1} - B_n^2 &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} [(\alpha^r - \beta^r)(\alpha - \beta)], \\ &= \frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}, \\ &= B_r. \end{aligned}$$

iii) *L'identité de Johnson* : Pour k, l, m, n et $r \in \mathbb{N}$ tels que $k + l = m + n$ on a :

$$\begin{aligned} B_kB_l - B_mB_n &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} [(\alpha^k - \beta^k)(\alpha^l - \beta^l) - (\alpha^m - \beta^m)(\alpha^n - \beta^n)], \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} [\alpha^m\beta^n + \beta^m\alpha^n - \alpha^k\beta^l - \beta^k\alpha^l]. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} B_k B_l - B_m B_n &= \frac{(\alpha\beta)^r}{(\alpha - \beta)^2} [(\alpha\beta)^{-r} (\alpha^m \beta^n + \beta^m \alpha^n - \alpha^k \beta^l - \beta^k \alpha^l)], \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} [\alpha^{m-r} \beta^{n-r} + \beta^{m-r} \alpha^{n-r} - \alpha^{k-r} \beta^{l-r} - \beta^{k-r} \alpha^{l-r}]. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} B_k B_l - B_m B_n &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} [\alpha^{k-r} (\alpha^{l-r} - \beta^{l-r}) - \beta^{k-r} (\alpha^{l-r} - \beta^{l-r}) - \alpha^{m-r} (\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}) + \beta^{m-r} (\alpha^{n-r} - \beta^{n-r})] \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} [(\alpha^{k-r} - \beta^{k-r}) (\alpha^{l-r} - \beta^{l-r}) - (\alpha^{m-r} - \beta^{m-r}) (\alpha^{n-r} - \beta^{n-r})], \\ &= B_{k-r} B_{l-r} - B_{m-r} B_{n-r}. \end{aligned}$$

iv) *L'identité de Catalan.*

Soient $n, r \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} B_n^2 - B_{n+r} B_{n-r} &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2 - \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta} \right), \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} [\alpha^{n+r} \beta^{n-r} + \alpha^{n-r} \beta^{n+r} - 2(\alpha\beta)^n], \\ &= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha - \beta)^2} [\alpha^r \beta^{-r} + \alpha^{-r} \beta^r - 2]. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} B_n^2 - B_{n+r} B_{n-r} &= \frac{(\alpha\beta)^{n-r}}{(\alpha - \beta)^2} [\alpha^{2r} + \beta^{2r} - 2(\alpha\beta)^n], \\ &= (\alpha\beta)^{n-r} \left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta} \right)^2, \\ &= B_r^2. \end{aligned}$$

■

1.3.4 Les nombres de Cobalancing

D'après Behara et Ray [8], un entier naturel n est appelé un nombre de Balancing s'il satisfait :

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + r), \quad (1.18)$$

si $(n, r) \in \mathbb{Z}^+$, alors n est appelle le nombre d'équilibrage, r est appelle le balancer associé à n , par exemple 6, 35, 204 sont des nombres des Balancing dont le balancer sont respectivement 2, 14, 84, il est également prouvé, l'explication par exemple existe déjà. Après un petit modification à (1.18), nous appelons entier naturel n un nombre de Cobalancing si il satisfait :

$$1 + 2 + \dots + n = (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + r), \quad (1.19)$$

si le couple $(n, r) \in \mathbb{Z}^+$ est une solution de (1.19), alors n est appelle le nombre de Coéquilibrage, r est appelle le Cobalancer associé à n , ce qui définit sous la relation

$$r = \frac{-(2n + 1) + \sqrt{8n^2 + 8n + 1}}{2},$$

les trois premiers nombres de Cobalancing sont 2, 14 et 84 avec Cobalancers 1, 6 et 35 respectivement, il est également prouvé.

De ce qui précède concluons que : chaque nombre d'équilibrage est un Cobalancer associé à n , et chaque balancer associé à n est un nombre de Coéquilibrage.

Définition 1.3.3 [9] La suite de Cobalancing est la suite $(b_n)_{n \geq \mathbb{N}}$ définie par

$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 2. \quad (1.20)$$

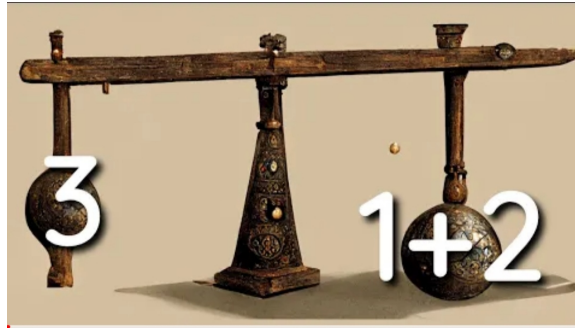


FIGURE 1.3 – La plus petit nombre de Cobalancing.

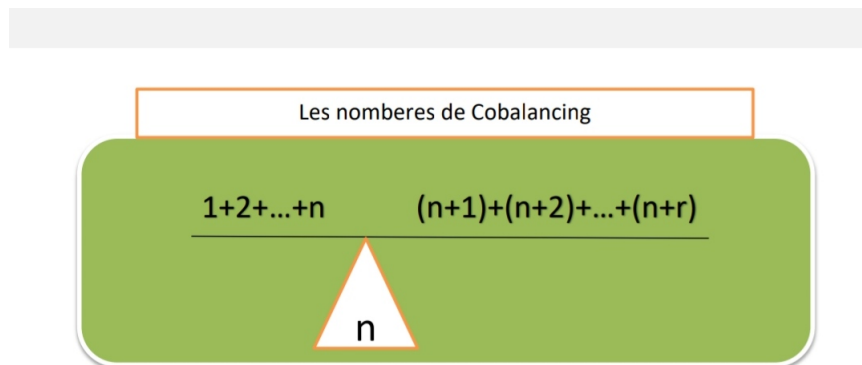


FIGURE 1.4 – La forme générale des nombres de Cobalancing.

1.3.5 La formule de Binet de la suite de Cobalancing

Soit

$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2, \quad \text{avec } b_1 = 0, \quad b_2 = 2.$$

Nous écrivons $\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\alpha_2 = 1 - \sqrt{2}$ substitution

$$d_n = b_n + \frac{1}{2},$$

d_n vérifie la relation de récurrence suivant

$$d_{n+1} = 6d_n - d_{n-1},$$

la forme général de la solution de d_n est :

$$d_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n,$$

le polynôme caractéristique

$$\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0,$$

donc les racine

$$\lambda_1 = 3 + 2\sqrt{2} = \alpha_1^2,$$

$$\lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2} = \alpha_2^2,$$

nous utilisons les condition initiale $d_1 = \frac{1}{2}$ et $d_2 = \frac{5}{2}$, nous obtenons :

$$A = \frac{1}{\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

et

$$B = \frac{1}{\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

alors la solution est :

$$\begin{aligned} d_n &= A\lambda_1^n + B\lambda_2^n, \\ &= \frac{\alpha_1^{2n-1} - \alpha_2^{2n-1}}{4\sqrt{2}}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n &= d_n - \frac{1}{2}, \\ &= \frac{\alpha_1^{2n-1} - \alpha_2^{2n-1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ &= B_{n-1} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.1 [9] Si b_n est le n -ème nombre Cobalancing, alors la forme de Binet est :

$$b_n = \frac{\alpha_1^{2n-1} - \alpha_2^{2n-1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

avec

$$\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad \text{et} \quad \alpha_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

1.3.6 Quelques propriétés de la suite de Cobalancing

D'après la formule de Binet de suite de Cobalancing, nous pouvons dériver d'autres relations intéressantes entre les nombres de Cobalancing.

Théorème 1.3.2 [9]

a) Pour $n > 0$, on a :

$$(b_n - 1)^2 = 1 + b_{n-1}b_{n+1}.$$

b) Pour $n > k \geq 2$, on a :

$$b_n = b_k + B_k b_{n-k+1} - B_{k-1} b_{n-k}.$$

c) Pour $n > 0$, on a :

$$b_{2n} = B_n b_{n+1} - b_n (B_{n-1} - 1).$$

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_{2n+1} = (B_{n+1} + 1)b_{n+1} - B_n b_n.$$

e) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_{2n-1} = (B_n + 1)b_n - B_{n-1}b_{n-1}.$$

f) Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_{n+m} = b_m + B_m b_{n+1} - B_{m-1} b_n.$$

Preuve.

a) Pour $n > 0$, on a :

$$(b_n - 1)^2 = 1 + b_{n-1}b_{n+1}.$$

Par récurrence :

la relation est vrai pour $n = 1$

$$(b_1 - 1)^2 = 1 + b_0 b_2,$$

$$1 = 1.$$

On supposons que la relation est vrai pour n , c'est-à-dire :

$$(b_n - 1)^2 - b_{n-1}b_{n+1} = 1,$$

et démontrés que c'est vrai pour $n + 1$, c'est-à-dire :

$$(b_{n+1} - 1)^2 - b_n b_{n+2} = 1.$$

On a

$$(b_{n+1} - 1)^2 = b_{n+1}^2 - 2b_{n+1} + 1.$$

Et

$$\begin{aligned} 1 + b_n b_{n+2} &= 1 + b_n(6b_{n+1} - b_n + 2), \\ &= 1 + 6b_n b_{n+1} - b_n^2 + 2b_n. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} (b_{n+1} - 1)^2 - b_n b_{n+2} &= b_{n+1}^2 - 2b_{n+1} + 1 - 6b_n b_{n+1} + b_n^2 - b_n, \\ &= (b_n - 1)^2 - b_{n+1}(6b_n - b_{n+1} + 2), \\ &= (b_n - 1)^2 - b_{n+1}b_{n-1}, \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc la relation est vrai pour $n + 1$ aussi, alors le théorème est vrai.

b) Pour $n > k \geq 2$, on a :

$$b_n = b_k + B_k b_{n-k+1} - B_{k-1} b_{n-k}.$$

Le prouve de cette relation est basée sur l'induction sur k ,
pour $k = 2$, on a

$$b_n = 6b_{n-1} + 2,$$

d'après les relation (1.10) et (1.20), la relation est vrai pour $n > k = 2$

$$\begin{aligned} b_3 &= 6b_2 + 2, \\ &= 6 \times 2 + 2, \\ &= 14. \end{aligned}$$

On suppose que la relation est vrai pour $k = r$, tel que $n > r \geq k \geq 2$, c'est-à-dire

$$b_n = b_r + B_r b_{n-r+1} - B_{r-1} b_{n-r},$$

et on montre que, c'est vrai pour $k = r + 1$, c'est-à-dire

$$b_n = b_{r+1} + B_{r+1} b_{n-r} - B_r b_{n-r-1}.$$

On a :

$$\begin{aligned} b_{r+1} + B_{r+1} b_{n-r} - B_r b_{n-r-1} &= b_{r+1} + (6B_r - B_{r-1})b_{n-r} - B_r(6b_{n-r} - b_{n-r+1} + 2), \\ &= b_{r+1} - 2B_r + B_r b_{n-r+1} - B_{r-1} b_{n-r}, \\ &= b_r + B_r b_{n-r+1} - B_{r-1} b_{n-r}, \\ &= b_n. \end{aligned}$$

Donc la relation est vrai aussi pour $k = r + 1$, alors le théorème est vrai.

La démonstration de c), d), e), f), suit à la démonstration de b), où :

-dans c), on remplace n par $2n$, et k par n ,

-dans d), on remplace n par $2n + 1$, et k par $n + 1$,

-dans e), on remplace n par $2n - 1$, et k par n ,

-dans f), on remplace n par $n + m$, et k par m .

■

CHAPITRE 2

SOLUTION D'UNE ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES NON LINÉAIRE EN TERME DES NOMBRES DE COBALANCING

Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la forme générale de la solution de l'équation aux différences non linéaire d'ordre supérieur

$$x_{n+1} = \frac{1}{6A - x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

où $A \in \mathbb{N}_1$, et les conditions initiales $x_{-1}, \dots, x_0 \in \mathbb{R} - \{6A\}$, où la solution est donnés en

fonction des nombres de Cobalancing.

Lemme 2.0.1 *Soit la généralisation de la suite de Balancing suivante :*

$$\mathcal{B}_{n+2} = 6A\mathcal{B}_{n+1} - \mathcal{B}_n, \quad \mathcal{B}_0 = 0, \quad \mathcal{B}_1 = 1. \quad (2.1)$$

Où $A \in \mathbb{N}_1$, alors la solution de l'équation (2.1) s'écrit sous la forme

$$\mathcal{B}_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad (2.2)$$

avec $\alpha = 3A + \sqrt{9A^2 - 1}$, et $\beta = 3A - \sqrt{9A^2 - 1}$.

Preuve.

Le polynôme caractéristique de l'équation (2.1) est :

$$\lambda^2 - 6A\lambda + 1 = 0.$$

Ainsi les racines caractéristiques sont :

$$\alpha = 3A + \sqrt{9A^2 - 1},$$

$$\beta = 3A - \sqrt{9A^2 - 1}.$$

La solution générale de l'équation (2.1) s'écrit :

$$\mathcal{B}_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n.$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient :

$$c_1 = \frac{1}{\alpha - \beta},$$

$$c_2 = \frac{-1}{\alpha - \beta}.$$

Alors

$$\mathcal{B}_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

■

Corollaire 2.0.1 Soit $(\mathcal{B})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Balancing généralisée. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n+1}}{\mathcal{B}_{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n+2}}{\mathcal{B}_{2n+1}} = \alpha,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n-1}}{\mathcal{B}_{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n}}{\mathcal{B}_{2n+1}} = \beta,$$

avec $\alpha = 3A + \sqrt{9A^2 - 1}$, $\beta = 3A - \sqrt{9A^2 - 1}$.

Preuve. De (2.2), on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n+1}}{\mathcal{B}_{2n}} &= \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}, \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{2n+1} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{2n+1} \right)}{\alpha^{2n} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{2n} \right)}, \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

$$\left[\text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{2n+1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{2n} = 0. \right]$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n-1}}{\mathcal{B}_{2n}} &= \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}, \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{2n-1} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{2n-1} \right)}{\alpha^{2n} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{2n} \right)}, \\ &= \frac{1}{\alpha} = \beta. \end{aligned}$$

$$\left[\text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{2n-1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{2n} = 0. \right]$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n+2}}{\mathcal{B}_{2n+1}} &= \frac{\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}}{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}, \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{2n+2} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{2n+2} \right)}{\alpha^{2n+1} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{2n+1} \right)}, \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

$$\left[\text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{2n+2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{2n+1} = 0. \right]$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n}}{\mathcal{B}_{2n+1}} &= \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}, \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{2n} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{2n} \right)}{\alpha^{2n+1} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{2n+1} \right)}, \\ &= \frac{1}{\alpha} = \beta. \end{aligned}$$

$$\left[\text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{2n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{2n+1} = 0. \right] \blacksquare$$

2.1 L'équation $x_{n+1} = \frac{1}{6A - x_n}$

Dans cette section on donne la forme de la solution de l'équation aux différences d'ordre un suivant

$$x_{n+1} = \frac{1}{6A - x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

où $A \in \mathbb{N}_1$, et la condition initiale $x_0 \in \mathbb{R} - \{6A\}$.

2.1.1 La forme de solution

Pour trouver la forme de la solution de l'équation (2.3) nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1.1 *On considère l'équation aux différences linéaire*

$$z_{n+2} - 6Az_{n+1} + z_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.4)$$

où $A \in \mathbb{N}_1$, avec les valeurs initiales z_0 et $z_1 \in \mathbb{R}$. Alors toutes les solutions de l'équation (2.4) écrits sous la forme

$$z_n = -z_0 \mathcal{B}_{n-1} + z_1 \mathcal{B}_n. \quad (2.5)$$

Preuve. L'équation caractéristique de l'équation (2.4) est donnée par

$$\varphi^2 - 6A\varphi + 1 = 0, \quad (2.6)$$

qui a deux racines réels $\alpha = 3A + \sqrt{9A^2 - 1}$, et $\beta = 3A - \sqrt{9A^2 - 1}$.

Donc la solution générale de (2.4) et donnée par

$$z_n = c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n. \quad (2.7)$$

Pour trouver c_1 et c_2 , on utilise les conditions initiales z_0 et z_1 , c'est-à-dire

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= z_0, \\ c_1 \alpha + c_2 \beta &= z_1. \end{cases}$$

On va écrire le système sous la forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Cramer on obtient,

$$c_1 = \frac{z_0\beta - z_1}{\beta - \alpha},$$

$$c_2 = \frac{z_1 - z_0\alpha}{\beta - \alpha}.$$

On remplace c_1 et c_2 dans (2.7) on obtient :

$$z_n = z_0 \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{-(\alpha - \beta)} + z_1 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Alors

$$z_n = -z_0\mathcal{B}_{n-1} + z_1\mathcal{B}_n.$$

■

Pour trouver la forme des solutions de l'équation (2.3), on considère le changement de variable suivant :

$$x_n = \frac{z_n}{z_{n+1}},$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{z_{n+1}}{z_{n+2}} &= \frac{1}{6A - \frac{z_n}{z_{n+1}}}, \\ &= \frac{z_{n+1}}{6Az_{n+1} - z_n}. \end{aligned}$$

Donc l'équation (2.3) devient

$$z_{n+2} = 6Az_{n+1} - z_n. \quad (2.8)$$

L'équation (2.8) est sous la forme de l'équation (2.4), alors d'après le Lemme (2.1.1) sa solution est sous la forme (2.5), c'est -à-dire,

$$z_n = -z_0\mathcal{B}_{n-1} + z_1\mathcal{B}_n,$$

tel que $\mathcal{B}_n$ est le n -ème nombre de Balancing généralisé, et z_0, z_1 sont des nombres réels. Alors

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{z_n}{z_{n+1}}, \\ &= \frac{-z_0 \mathcal{B}_{n-1} + z_1 \mathcal{B}_n}{-z_0 \mathcal{B}_n + z_1 \mathcal{B}_{n+1}}, \\ &= \frac{-\left(\frac{z_0}{z_1}\right) \mathcal{B}_{n-1} + \mathcal{B}_n}{-\left(\frac{z_0}{z_1}\right) \mathcal{B}_n + \mathcal{B}_{n+1}}, \end{aligned}$$

avec

$$x_0 = \frac{z_0}{z_1},$$

donc

$$x_n = \frac{-x_0 \mathcal{B}_{n-1} + \mathcal{B}_n}{-x_0 \mathcal{B}_n + \mathcal{B}_{n+1}}. \quad (2.9)$$

Donc tout ce qui précède, le théorème suivant est vrai.

Théorème 2.1.1 Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une solution bien définie de l'équation aux différences (2.3).

Alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \frac{-x_0 \mathcal{B}_{n-1} + \mathcal{B}_n}{-x_0 \mathcal{B}_n + \mathcal{B}_{n+1}}, \quad (2.10)$$

où $(\mathcal{B})_{n \geq 0}$ est la suite de Balancing généralisée.

Corollaire 2.1.1 Les solutions de l'équation aux différences (2.3) écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{2n} = \frac{-x_0 \mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-x_0 \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ x_{2n+1} = \frac{-x_0 \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-x_0 \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}. \end{array} \right. \quad n \geq 1. \quad (2.11)$$

Avec les valeurs initiales $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{B}_1$, et $\mathbb{B}_1$ est l'ensemble défini par

$$\mathbb{B}_1 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ x_0 \in \mathbb{R}; -x_0 \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1} = 0, \text{ et } -x_0 \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2} = 0 \right\}.$$

2.2 L'équation $x_{n+1} = \frac{1}{6A - x_{n-k}}$

Dans cette section on donne la forme de solution de l'équation aux différences d'ordre supérieur suivant

$$x_{n+1} = \frac{1}{6A - x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.12)$$

où $A \in \mathbb{N}_1$, et les conditions initiales $x_{-k}, \dots, x_0 \in \mathbb{R} - \{6A\}$.

2.2.1 Analyse de la forme de l'équation (2.12)

Nous analysons la relation de récurrence de l'équation (2.12), nous écrivons sous certains termes

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{6A - x_{-k}}, \\ x_2 = \frac{1}{6A - x_{1-k}}, \\ x_3 = \frac{1}{6A - x_{2-k}}, \\ \vdots \\ x_k = \frac{1}{6A - x_{-1}}, \\ x_{k+1} = \frac{1}{6A - x_0}. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{(k+1)m+1} = \frac{1}{6A - x_{(k+1)m-k}}, \\ x_{(k+1)m+2} = \frac{1}{6A - x_{(k+1)m-k+1}}, \\ x_{(k+1)m+3} = \frac{1}{6A - x_{(k+1)m-k+2}}, \\ \vdots \\ x_{(k+1)m+k} = \frac{1}{6A - x_{(k+1)m-1}}, \\ x_{(k+1)m+(k+1)} = \frac{1}{6A - x_{(k+1)m}}. \end{array} \right. \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

De même manière, il est montré que tout les termes de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$, écrits sous la forme

$$x_{(k+1)(n+1)-j} = \frac{1}{6A - x_{(k+1)n-j}}, \quad (2.13)$$

telle que x_{-j} est le condition initiale et $j \in \{0, 1, \dots, k\}$.

2.2.2 Forme de la solution

Soit le changement de variable :

$$x_n^{(j)} = x_{(k+1)n-j}. \quad (2.14)$$

Alors l'équation (2.12) devient

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{1}{6A - x_n^{(j)}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.15)$$

Proposition 2.2.1 *La solution de l'équation aux différences (2.12) est donné par*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{2(k+1)n-j} = \frac{-x_{-j}\mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-x_{-j}\mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ x_{2(k+1)n+(k+1)-j} = \frac{-x_{-j}\mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-x_{-j}\mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}. \end{array} \right. \quad n \geq 1. \quad (2.16)$$

Avec les valeurs initiales $x_j \in \mathbb{R} - \mathbb{B}_1$, et $\mathbb{B}_1$ est l'ensemble défini par

$$\mathbb{B}_1 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ x_{-j} \in \mathbb{R}; x_{-j}\mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1} = 0, \text{ et } -x_{-j}\mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2} = 0 \right\},$$

et $j \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Preuve. On a l'équation (2.12) s'écrit sous la forme (2.15), par conséquent et d'après la Corollaire(2.1.1), la solution de l'équation (2.15) est

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{2n}^{(j)} = \frac{-x_0^{(j)} \mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-x_0^{(j)} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ x_{2n+1}^{(j)} = \frac{-x_0^{(j)} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-x_0^{(j)} \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}. \end{array} \right. \quad n \geq 1, j \in \{0, 1, \dots, k\}. \quad (2.17)$$

En substituant (2.14) dans (2.17), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{(k+1)(2n)-j} = \frac{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ x_{(k+1)(2n+1)-j} = \frac{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}. \end{array} \right. \quad n \geq 1, j \in \{0, 1, \dots, k\}.$$

Alors la solution de l'équation (2.12) est

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{2(k+1)n-j} = \frac{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ x_{2(k+1)n+(k+1)-j} = \frac{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}. \end{array} \right. \quad n \geq 1, j \in \{0, 1, \dots, k\}.$$

■

Corollaire 2.2.1 *La solution de l'équation aux différences (2.12) pour $A = 1$ est donnée en terme des nombres de Cobalancing, c'est-à-dire :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{2(k+1)n-j} = \frac{-x_{-j} \left(b_{2n} + \frac{1}{2}\right) + \left(b_{2n+1} + \frac{1}{2}\right)}{-x_{-j} \left(b_{2n+1} + \frac{1}{2}\right) + \left(b_{2n+2} + \frac{1}{2}\right)}, \\ x_{2(k+1)n+(k+1)-j} = \frac{-x_{-j} \left(b_{2n+1} + \frac{1}{2}\right) + \left(b_{2n+2} + \frac{1}{2}\right)}{-x_{-j} \left(b_{2n+2} + \frac{1}{2}\right) + \left(b_{2n+3} + \frac{1}{2}\right)}. \end{array} \right. \quad n \geq 0. \quad (2.18)$$

Avec les valeurs initiales $x_j \in \mathbb{R} - \mathbb{B}_1$, et $\mathbb{B}_1$ est l'ensemble défini par

$$\mathbb{B}_1 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ x_{-j} \in \mathbb{R}; -x_{-j} \left(b_{2n+1} + \frac{1}{2} \right) + \left(b_{2n+2} + \frac{1}{2} \right) = 0, \text{ et } -x_{-j} \left(b_{2n+2} + \frac{1}{2} \right) + \left(b_{2n+3} + \frac{1}{2} \right) = 0 \right\},$$

et $j \in \{0, 1, \dots, k\}$.

2.3 Stabilité globale de la solution de (2.12)

Lemme 2.3.1 *L'équation (2.12) admet deux points d'équilibres réels :*

$$\bar{x}_1 = 3A + \sqrt{9A^2 - 1}, \quad \bar{x}_2 = 3A - \sqrt{9A^2 - 1}, \quad A \in \mathbb{N}_1.$$

Preuve. Considérant la fonction

$$\begin{aligned} f : I^{k+1} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(x) = \frac{1}{6A - x}. \end{aligned}$$

Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre, donc

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \bar{x}, \\ \frac{1}{6A - \bar{x}} &= \bar{x}, \\ \bar{x}(6A - \bar{x}) &= 1, \\ -\bar{x}^2 + 6A\bar{x} - 1 &= 0, \end{aligned} \tag{2.19}$$

l'équation (2.19) admet deux solutions réelles dans I , données par :

$$\bar{x}_1 = 3A + \sqrt{9A^2 - 1}, \tag{2.20}$$

$$\bar{x}_2 = 3A - \sqrt{9A^2 - 1}. \tag{2.21}$$

■

La stabilité locale du point d'équilibre (2.21) de l'équation (2.12) est donner par le

théorème suivant.

Théorème 2.3.1 *Le point d'équilibre $\bar{x}_2$ est localement asymptotiquement stable.*

Preuve. L'équation linéaire associée à l'équation (2.12) du point d'équilibre $\bar{x}_2$ est donnée par :

$$y_{n+1} = p_k y_{n-k},$$

avec

$$p_k = f'(\bar{x}_2) = \frac{1}{(6A - \bar{x}_2)^2} = \frac{\bar{x}_2}{6A - \bar{x}_2}.$$

Alors

$$y_{n+1} = \left(\frac{\bar{x}_2}{6A - \bar{x}_2} \right) y_{n-k}.$$

On a :

$$|p_k| = \left| \frac{\bar{x}_2}{6A - \bar{x}_2} \right| = \left| \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} \right| < 1. \quad (\text{car } \bar{x}_1 > \bar{x}_2)$$

D'après le Théorème de Clark, $\bar{x}_2$ est localement asymptotiquement stable. ■

L'instabilité locale du point d'équilibre (2.20) de l'équation (2.12) est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.3.2 *Le point d'équilibre $\bar{x}_1$ est instable.*

Preuve. L'équation linéaire associée à l'équation (2.12) du point d'équilibre $\bar{x}_1$ est donnée par :

$$y_{n+1} = Q_k y_{n-k},$$

avec

$$Q_k = f'(\bar{x}_1) = \frac{1}{(6A - \bar{x}_1)^2} = \frac{\bar{x}_1}{6A - \bar{x}_1}.$$

Alors

$$y_{n+1} = \left(\frac{\bar{x}_1}{6A - \bar{x}_1} \right) y_{n-k}.$$

Son polynôme caractéristique est donné par :

$$\lambda = \left(\frac{\bar{x}_1}{6A - \bar{x}_1} \right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

On a :

$$|\lambda| = \left| \left(\frac{\bar{x}_1}{6A - \bar{x}_1} \right)^{\frac{1}{k+1}} \right| = \left| \left(\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} \right)^{\frac{1}{k+1}} \right| > 1. \quad (\text{car } \bar{x}_1 > \bar{x}_2)$$

D'après le Théorème (1.1.1), $\bar{x}_1$ est instable. ■

Théorème 2.3.3 *Le point d'équilibre $\bar{x}_2$ est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une solution de l'équation (2.12). D'après le Théorème (2.3.1), il suffit de prouver que $\bar{x}_2$ est globalement attractif, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n(k+1)-j} = \bar{x}_2.$$

De (2.16) on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n(k+1)-j} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-x_j \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-x_{-j} \left(\frac{\mathcal{B}_{2n-1}}{\mathcal{B}_{2n}} \right) + 1}{-x_{-j} + \left(\frac{\mathcal{B}_{2n+1}}{\mathcal{B}_{2n}} \right)}. \end{aligned}$$

Comme,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n-1}}{\mathcal{B}_{2n}} = \frac{1}{\alpha}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n+1}}{\mathcal{B}_{2n}} = \alpha.$$

On obtient que

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n(k+1)-j} &= \frac{-x_{-j} \left(\frac{1}{\alpha} \right) + 1}{-x_{-j} + \alpha}, \\
 &= \frac{\alpha}{-x_{-j} + \alpha}, \\
 &= \frac{1}{\alpha}, \\
 &= \beta = \bar{x}_2.
 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n(k+1)+(k+1)-j} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}, \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-x_{-j} \left(\frac{\mathcal{B}_{2n}}{\mathcal{B}_{2n+1}} \right) + 1}{-x_{-j} + \left(\frac{\mathcal{B}_{2n+2}}{\mathcal{B}_{2n+1}} \right)}.
 \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n}}{\mathcal{B}_{2n+1}} = \frac{1}{\alpha}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n+2}}{\mathcal{B}_{2n+1}} = \alpha.$$

On a

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n(k+1)+(k+1)-j} &= \frac{-x_{-j}\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 1}{-x_{-j} + \alpha}, \\ &= \frac{-x_{-j} + \alpha}{-x_{-j} + \alpha} \\ &= \frac{\alpha}{-x_{-j} + \alpha}, \\ &= \frac{1}{\alpha}, \\ &= \beta = \bar{x}_2.\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n(k+1)-j} = \bar{x}_2.$$

Donc $\bar{x}_2$ est globalement attractif et par conséquent $\bar{x}_2$ est globalement asymptotiquement stable. ■

CHAPITRE 3

SOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES NON LINÉAIRE D'ORDRE SUPÉRIEURS EN TERME DES NOMBRES DE COBALANCING

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse la forme de la solution du système d'équations aux différences non linéaires d'ordre supérieur suivant :

$$x_{n+1} = \frac{1}{6A - y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{6A - x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

ou $A \in \mathbb{N}_1$ avec les valeurs initiales $x_{-k}, \dots, x_0, y_{-k}, \dots, y_0 \in \mathbb{R} - \{6A\}$, ou la solution est donnée en fonctions des nombres de Cobalancing.

3.2 La solution du système $x_{n+1} = \frac{1}{6A - y_n}, y_{n+1} = \frac{1}{6A - x_n}$

Pour trouver la solution du système

$$x_{n+1} = \frac{1}{6A - y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{6A - x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

nous rappelons que $\mathcal{B}_n$ est le n-ème nombre de Balancing généralisé, qui vérifie la relation de récurrence

$$\mathcal{B}_{n+2} = 6A\mathcal{B}_{n+1} - \mathcal{B}_n, \quad \mathcal{B}_0 = 0, \quad \mathcal{B}_1 = 1.$$

Pour trouver la solution du système (3.1), nous besoin de deux lemmes suivants.

Lemme 3.2.1 *On considère l'équation aux différences linéaire*

$$T_{n+2} + 6AT_{n+1} + T_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.2)$$

où $A \in \mathbb{N}_1$, et les valeurs initiales $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$. Alors tous les solutions de l'équation (3.2) écrites sous la forme

$$T_n = (-1)^{n-1}(T_0\mathcal{B}_{n-1} + T_1\mathcal{B}_n). \quad (3.3)$$

Preuve. L'équation caractéristique de l'équation (3.2) est donnée par :

$$\rho^2 + 6A\rho + 1 = 0,$$

qui à deux racines réels ρ_1, ρ_2

$$\rho_1 = -\beta, \quad \rho_2 = -\alpha,$$

tel que α , et β sont les racine de l'équation (2.6). Donc la solution générale de (3.2) est donnée par

$$T_n = c_1 \rho_1^n + c_2 \rho_2^n. \quad (3.4)$$

Pour trouver c_1 et c_2 , on utilise les conditions initiales T_0 et T_1 , c'est-à-dire

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= T_0, \\ c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2 &= T_1. \end{cases}$$

On va écrire le système sous la forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Cramer on obtient,

$$c_1 = \frac{T_0 \rho_2 - T_1}{\rho_2 - \rho_1},$$

$$c_2 = \frac{T_1 - T_0 \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}.$$

On remplace c_1 et c_2 dans (3.4) on obtient :

$$T_n = T_0 \frac{(-\beta)^{n-1} - (-\alpha)^{n-1}}{(-\alpha) - (-\beta)} + T_1 \frac{(-\alpha)^n - (-\beta)^n}{(-\alpha) - (-\beta)}.$$

Alors

$$T_n = (-1)^{n-1} (T_0 \mathcal{B}_{n-1} + T_1 \mathcal{B}_n).$$

■

Lemme 3.2.2 *On considère le système d'équations aux différences linéaire suivant :*

$$\begin{cases} u_{n+2} = 6Av_{n+1} - u_n, \\ v_{n+2} = 6Au_{n+1} - v_n, \end{cases} \quad (3.5)$$

avec les valeurs initiales $u_0, u_1, v_0, v_1 \in \mathbb{R}$. Alors toutes les solutions de ce système sont écrites sous la forme

$$\begin{cases} u_{2n} = -u_0\mathcal{B}_{2n-1} + v_1\mathcal{B}_{2n}, \\ u_{2n+1} = -v_0\mathcal{B}_{2n} + u_1\mathcal{B}_{2n+1}, \\ v_{2n} = -v_0\mathcal{B}_{2n-1} + u_1\mathcal{B}_{2n}, \\ v_{2n+1} = -u_0\mathcal{B}_{2n} + v_1\mathcal{B}_{2n+1}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Preuve. Du système (3.5), pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{cases} u_{n+1} + v_{n+1} = 6A(u_n + v_n) - (u_{n-1} + v_{n-1}), \\ u_{n+1} - v_{n+1} = 6A(v_n - u_n) - (u_{n-1} - v_{n-1}). \end{cases} \quad (3.7)$$

On pose

$$\begin{cases} R_n = u_n + v_n, \\ S_n = u_n - v_n. \end{cases} \quad (3.8)$$

On remplace (3.8) dans (3.7), on obtient les deux équations aux différences linéaires suivantes :

$$R_{n+1} = 6AR_n - R_{n-1}, \quad (3.9)$$

$$S_{n+1} = -6AS_n - S_{n-1}. \quad (3.10)$$

-L'équation (3.9) est sous la forme de l'équation (2.8), donc d'après le Lemme (2.1.1) sa solution est sous la forme

$$R_n = -R_0\mathcal{B}_{n-1} + R_1\mathcal{B}_n,$$

tel que $\mathcal{B}_n$ est le n -ème nombre de Balancing généralisé, et R_0, R_1 sont des nombres réels.

-L'équation (3.10) est sous la forme de l'équation (3.2), donc d'après le Lemme (3.2.1) sa solution est sous la forme (3.3). C'est -à-dire

$$S_n = (-1)^{n-1}(S_0\mathcal{B}_{n-1} + S_1\mathcal{B}_n), \quad (3.11)$$

tel que $\mathcal{B}_n$ est le n-ème nombre de Balancing généralisé et S_0, S_1 sont des nombres réels.

De (3.8), on a

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{2}(R_n + S_n), \\ v_n = \frac{1}{2}(R_n - S_n). \end{cases} \quad (3.12)$$

Donc la solution du système (3.12) est donnée par :

$$\begin{cases} u_{2n} = \frac{1}{2}(-R_0\mathcal{B}_{2n-1} + R_1\mathcal{B}_{2n} - S_0\mathcal{B}_{2n-1} - S_1\mathcal{B}_{2n}), \\ u_{2n+1} = \frac{1}{2}(-R_0\mathcal{B}_{2n} + R_1\mathcal{B}_{2n+1} + S_0\mathcal{B}_{2n} + S_1\mathcal{B}_{2n+1}), \\ v_{2n} = \frac{1}{2}(-R_0\mathcal{B}_{2n-1} + R_1\mathcal{B}_{2n} + S_0\mathcal{B}_{2n-1} + S_1\mathcal{B}_{2n}), \\ v_{2n+1} = \frac{1}{2}(-R_0\mathcal{B}_{2n} + R_1\mathcal{B}_{2n+1} - S_0\mathcal{B}_{2n} - S_1\mathcal{B}_{2n+1}). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} u_{2n} = -u_0\mathcal{B}_{2n-1} + v_1\mathcal{B}_{2n}, \\ u_{2n+1} = -v_0\mathcal{B}_{2n} + u_1\mathcal{B}_{2n+1}, \\ v_{2n} = -v_0\mathcal{B}_{2n-1} + u_1\mathcal{B}_{2n}, \\ v_{2n+1} = -u_0\mathcal{B}_{2n} + v_1\mathcal{B}_{2n+1}. \end{cases} \quad (3.13)$$

■

Pour trouver la forme de la solution du système (3.1), on considère les changements des variables suivants

$$\begin{cases} x_n = \frac{z_n}{w_{n+1}}, \\ y_n = \frac{w_n}{z_{n+1}}. \end{cases}$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = \frac{z_{n+1}}{w_{n+2}}, \\ = \frac{1}{6A - \frac{w_n}{z_{n+1}}}, \\ y_{n+1} = \frac{z_{n+1}}{6Az_{n+1} - w_n}, \\ = \frac{w_{n+1}}{z_{n+2}}, \\ = \frac{1}{6A - \frac{z_n}{w_{n+1}}}, \\ = \frac{z_{n+1}}{6Aw_{n+1} - z_n}. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Donc le système (3.1) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{n+2} = 6Az_{n+1} - w_n, \\ z_{n+2} = 6Aw_{n+1} - z_n. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Le système (3.15) est sous la forme de système (3.5), donc d'après le Lemme (3.2.2) sa solution est sous la forme (3.6). C'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{2n} = -w_0\mathcal{B}_{2n-1} + z_1\mathcal{B}_{2n}, \\ w_{2n+1} = -z_0\mathcal{B}_{2n} + w_1\mathcal{B}_{2n+1}, \\ z_{2n} = -z_0\mathcal{B}_{2n-1} + w_1\mathcal{B}_{2n}, \\ z_{2n+1} = -w_0\mathcal{B}_{2n} + z_1\mathcal{B}_{2n+1}, \end{array} \right. \quad (3.16)$$

tel que les valeurs initiales $w_0, w_1, z_0, z_1 \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{z_n}{w_{n+1}}, \\ y_n &= \frac{w_n}{z_{n+1}}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 x_{2n} &= \frac{z_{2n}}{w_{2n+1}}, \\
 &= \frac{-z_0 \mathcal{B}_{2n-1} + w_1 \mathcal{B}_{2n}}{-z_0 \mathcal{B}_{2n} + w_1 \mathcal{B}_{2n+1}}, \\
 &= \frac{-w_1 \left(\left(\frac{z_0}{w_1} \right) \mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n} \right)}{-w_1 \left(\left(\frac{z_0}{w_1} \right) \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1} \right)}, \\
 &= \frac{-x_0 \mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-x_0 \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 x_{2n+1} &= \frac{z_{2n+1}}{w_{2n+2}}, \\
 &= \frac{-w_0 \mathcal{B}_{2n} + z_1 \mathcal{B}_{2n+1}}{-w_0 \mathcal{B}_{2n+1} + z_1 \mathcal{B}_{2n+2}}, \\
 &= \frac{-z_1 \left(\left(\frac{w_0}{z_1} \right) \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1} \right)}{-z_1 \left(\left(\frac{w_0}{z_1} \right) \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2} \right)}, \\
 &= \frac{-y_0 \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-y_0 \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}.
 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 y_{2n} &= \frac{w_{2n}}{z_{2n+1}}, \\
 &= \frac{-w_0 \mathcal{B}_{2n-1} + z_1 \mathcal{B}_{2n}}{-w_0 \mathcal{B}_{2n} + z_1 \mathcal{B}_{2n+1}}, \\
 &= \frac{-z_1 \left(\left(\frac{w_0}{z_1} \right) \mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n} \right)}{-z_1 \left(\left(\frac{w_0}{z_1} \right) \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1} \right)}, \\
 &= \frac{-y_0 \mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-y_0 \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 y_{2n+1} &= \frac{w_{2n+1}}{z_{2n+2}}, \\
 &= \frac{-z_0 \mathcal{B}_{2n} + w_1 \mathcal{B}_{2n+1}}{-z_0 \mathcal{B}_{2n+1} + w_1 \mathcal{B}_{2n+2}}, \\
 &= \frac{-w_1 \left(\left(\frac{z_0}{w_1} \right) \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1} \right)}{-w_1 \left(\left(\frac{z_0}{w_1} \right) \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2} \right)}, \\
 &= \frac{-x_0 \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-x_0 \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}.
 \end{aligned}$$

Avec

$$x_0 = \frac{z_0}{w_1}, \quad y_0 = \frac{w_0}{z_1}.$$

Alors d'après tout ce qui précède la théorème suivant est vrai.

Théorème 3.2.1 Soit $(x_n, y_n)_{n \geq 1}$ une solution bien définie du système (3.1). Alors pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{2n} = \frac{-x_0 \mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-x_0 \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ x_{2n+1} = \frac{-y_0 \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-y_0 \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}, \\ y_{2n} = \frac{-y_0 \mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-y_0 \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ y_{2n+1} = \frac{-x_0 \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-x_0 \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}, \end{cases}$$

ou $\mathcal{B}_n$ est le n -ème nombre de Balancing généralisée.

3.3 La solution du système $x_{n+1} = \frac{1}{6A - y_{n-k}}, y_{n+1} = \frac{1}{6A - x_{n-k}}$

Dans cette partie, on donne la solution du système d'équation aux différences d'ordre supérieur suivant

$$x_{n+1} = \frac{1}{6A - y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{6A - x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.17)$$

où $A \in \mathbb{N}_1$, et les conditions initiales $x_{-k}, \dots, x_0, y_{-k}, \dots, y_0 \in \mathbb{R} - \{6A\}$.

3.3.1 Analyse de la forme du système (3.17)

Nous analysons la relation de récurrence du système (3.17), nous écrivons

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{6A - y_{-k}}, \\ x_2 = \frac{1}{6A - y_{1-k}}, \\ x_3 = \frac{1}{6A - y_{2-k}}, \\ \vdots \\ x_k = \frac{1}{6A - y_{-1}}, \\ x_{k+1} = \frac{1}{6A - y_0}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{(k+1)m+1} = \frac{1}{6A - y_{(k+1)m-k}}, \\ x_{(k+1)m+2} = \frac{1}{6A - y_{(k+1)m-k+1}}, \\ x_{(k+1)m+3} = \frac{1}{6A - y_{(k+1)m-k+2}}, \\ \vdots \\ x_{(k+1)m+K} = \frac{1}{6A - y_{(k+1)m-1}}, \\ x_{(k+1)m+(k+1)} = \frac{1}{6A - y_{(k+1)m}}. \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Et

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{6A - x_{-k}}, \\ y_2 = \frac{1}{6A - x_{1-k}}, \\ y_3 = \frac{1}{6A - x_{2-k}}, \\ \vdots \\ y_k = \frac{1}{6A - x_{-1}}, \\ y_{k+1} = \frac{1}{6A - x_0}. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_{(k+1)m+1} = \frac{1}{6A - x_{(k+1)m-k}}, \\ y_{(k+1)m+2} = \frac{1}{6A - x_{(k+1)m-k+1}}, \\ y_{(k+1)m+3} = \frac{1}{6A - x_{(k+1)m-k+2}}, \\ \vdots \\ y_{(k+1)m+K} = \frac{1}{6A - x_{(k+1)m-1}}, \\ y_{(k+1)m+(k+1)} = \frac{1}{6A - x_{(k+1)m}}. \end{array} \right. \quad n \in \mathbb{N}_0$$

De la même manière, il est montré que tout les termes des les suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ écrite sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{(k+1)(n+1)-j} = \frac{1}{6A - y_{(k+1)n-j}}, \\ y_{(k+1)(n+1)-j} = \frac{1}{6A - x_{(k+1)n-j}}, \end{array} \right. \quad (3.18)$$

telle que x_{-j} et y_{-j} sont des conditions initiales et $j \in \{0, 1, \dots, k\}$.

3.3.2 Forme de la solution

Pour trouver la forme de la solution nous appliquons l'analyse précédente.

Soit le changement de variable

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n^{(j)} = y_{(k+1)n-j}, \\ y_n^{(j)} = x_{(k+1)n-j}. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1}^{(j)} = y_{(k+1)(n+1)-j}, \\ y_{n+1}^{(j)} = x_{(k+1)(n+1)-j}. \end{array} \right. \quad j \in \{0, 1, \dots, k\}.$$

Donc la solution (3.18) la même du système

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(j)} = \frac{1}{6A - y_n^{(j)}}, \\ y_{n+1}^{(j)} = \frac{1}{6A - x_n^{(j)}}. \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.20)$$

Proposition 3.3.1 *La solution de système (3.17) écrit sous la forme :*

$$\begin{cases} x_{2(k+1)n-j} = \frac{-x_{-j}\mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-x_{-j}\mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ x_{2(k+1)n+(k+1)-j} = \frac{-y_{-j}\mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-y_{-j}\mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}, \\ y_{2(k+1)n-j} = \frac{-y_{-j}\mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-y_{-j}\mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ y_{2(k+1)n+(k+1)-j} = \frac{-x_{-j}\mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-x_{-j}\mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}, \end{cases} \quad n \geq 1. \quad (3.21)$$

avec les valeurs initiales $x_j, y_j \in \mathbb{R} - \mathbb{B}_1$, et $\mathbb{B}_1$ est l'ensemble définie par

$$\mathbb{B}_1 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ x_0 \in \mathbb{R}; \quad C_n^{(j)} = 0, \quad D_n^{(j)} = 0, \quad E_n^{(j)} = 0, \quad F_n^{(j)} = 0 \right\},$$

avec

$$C_n^{(j)} = -x_{-j}\mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1},$$

$$D_n^{(j)} = -y_{-j}\mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2},$$

$$E_n^{(j)} = -y_{-j}\mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1},$$

$$F_n^{(j)} = -x_{-j}\mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2},$$

et $j \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Preuve. On a le système (3.17) écrite sous la forme (3.20), donc d'après la Théorème (3.2.1) la solution du système (3.17) est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{2n}^{(j)} = \frac{-x_0^{(j)} \mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-x_0^{(j)} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ x_{2n+1}^{(j)} = \frac{-y_0^{(j)} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-y_0^{(j)} \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}, \\ y_{2n}^{(j)} = \frac{-y_0^{(j)} \mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-y_0^{(j)} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ y_{2n+1}^{(j)} = \frac{-x_0^{(j)} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-x_0^{(j)} \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

On remplace l'équation (3.19) dans (3.22), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{(k+1)(2n)-j} = \frac{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ x_{(k+1)(2n+1)-j} = \frac{-y_{-j} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-y_{-j} \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}, \\ y_{(k+1)(2n)-j} = \frac{-y_{-j} \mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-y_{-j} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ y_{(k+1)(2n+1)-j} = \frac{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}. \end{array} \right. \quad n \geq 1, j \in \{0, 1, \dots, k\}.$$

Alors la solution du système (3.17) est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{2(k+1)n-j} = \frac{-x_{-j}\mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-x_{-j}\mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ x_{2(k+1)n+(k+1)-j} = \frac{-y_{-j}\mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-y_{-j}\mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}, \\ y_{2(k+1)n-j} = \frac{-y_{-j}\mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-y_{-j}\mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ y_{2(k+1)n+(k+1)-j} = \frac{-x_{-j}\mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-x_{-j}\mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}. \end{array} \right. \quad n \geq 1.$$

■

Corollaire 3.3.1 *La solution du système (3.17) pour $A = 1$ est donné en fonction des nombres de Cobalancing suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{2(k+1)n-j} = \frac{-x_{-j}\left(b_{2n} + \frac{1}{2}\right) + \left(b_{2n+1} + \frac{1}{2}\right)}{-x_{-j}\left(b_{2n+1} + \frac{1}{2}\right) + \left(b_{2n+2} + \frac{1}{2}\right)}, \\ x_{2(k+1)n+(k+1)-j} = \frac{-y_{-j}\left(b_{2n+1} + \frac{1}{2}\right) + \left(b_{2n+2} + \frac{1}{2}\right)}{-y_{-j}\left(b_{2n+2} + \frac{1}{2}\right) + \left(b_{2n+3} + \frac{1}{2}\right)}, \\ y_{2(k+1)n-j} = \frac{-y_{-j}\left(b_{2n} + \frac{1}{2}\right) + \left(b_{2n+1} + \frac{1}{2}\right)}{-y_{-j}\left(b_{2n+1} + \frac{1}{2}\right) + \left(b_{2n+2} + \frac{1}{2}\right)}, \\ y_{2(k+1)n+(k+1)-j} = \frac{-x_{-j}\left(b_{2n+1} + \frac{1}{2}\right) + \left(b_{2n+2} + \frac{1}{2}\right)}{-x_{-j}\left(b_{2n+2} + \frac{1}{2}\right) + \left(b_{2n+3} + \frac{1}{2}\right)}, \end{array} \right. \quad n \geq 0. \quad (3.23)$$

avec les valeurs initiales $x_j, y_j \in \mathbb{R} - \mathbb{B}_1$, et $\mathbb{B}_1$ est l'ensemble défini par

$$\mathbb{B}_1 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ x_0 \in \mathbb{R}; \quad C_n^{(j)} = 0, \quad D_n^{(j)} = 0, \quad E_n^{(j)} = 0, \quad F_n^{(j)} = 0 \right\},$$

avec

$$C_n^{(j)} = -x_{-j} \left(b_{2n+1} + \frac{1}{2} \right) + \left(b_{2n+2} + \frac{1}{2} \right),$$

$$D_n^{(j)} = -y_{-j} \left(b_{2n+2} + \frac{1}{2} \right) + \left(b_{2n+3} + \frac{1}{2} \right),$$

$$E_n^{(j)} = -y_{-j} \left(b_{2n+1} + \frac{1}{2} \right) + \left(b_{2n+2} + \frac{1}{2} \right),$$

$$F_n^{(j)} = -x_{-j} \left(b_{2n+2} + \frac{1}{2} \right) + \left(b_{2n+3} + \frac{1}{2} \right),$$

et $j \in \{0, 1, \dots, k\}$.

3.3.3 Stabilité globale des solutions du système (3.17)

Dans cette section, nous étudions la stabilité asymptotique globale de la solution réel du système (3.17). Soit I et $J \in \mathbb{R}$ et on considère les fonctions

$$f : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow I,$$

$$g : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow J,$$

où I et J sont des intervalles réels. Considérons le système d'équations aux différences définies par

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}) = \frac{1}{6A - y_{n-k}}, \\ y_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}) = \frac{1}{6A - x_{n-k}}, \end{cases} \quad (3.24)$$

ou $n, k \in \mathbb{N}$, $(x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0) \in I^{k+1}$ et $(y_{-k}, y_{-k+1}, \dots, y_0) \in J^{k+1}$.

Lemme 3.3.1 *Le système (3.24) admet deux points équilibres réels donne par :*

$$\overline{M} = (\overline{x}, \overline{y}) = (3A + \sqrt{9A^2 - 1}, 3A + \sqrt{9A^2 - 1}), \quad A \in \mathbb{N}_1,$$

$$\overline{M}' = (\overline{x}', \overline{y}') = (3A - \sqrt{9A^2 - 1}, 3A - \sqrt{9A^2 - 1}).$$

Preuve. Soit $(\overline{x}, \overline{y})$ un point d'équilibre donc :

$$\overline{x} = \frac{1}{6A - \overline{y}}, \quad (3.25)$$

$$\overline{y} = \frac{1}{6A - \overline{x}}, \quad (3.26)$$

on obtient

$$6A\overline{x} - \overline{x}\overline{y} - 1 = 0, \quad (3.27)$$

$$6A\overline{y} - \overline{x}\overline{y} - 1 = 0. \quad (3.28)$$

Et avec la soustraction de (3.25) et (3.26) on obtient :

$$\overline{x} = \overline{y}. \quad (3.29)$$

On remplace (3.29) dans (3.26) on obtient :

$$-\overline{y}^2 + 6A\overline{y} - 1 = 0,$$

alors

$$\overline{y} = 3A + \sqrt{9A^2 - 1}, \quad \overline{y}' = 3A - \sqrt{9A^2 - 1}.$$

Donc les point d'équilibres sont

$$\overline{M} = (\overline{x}, \overline{y}) = (3A + \sqrt{9A^2 - 1}, 3A + \sqrt{9A^2 - 1}),$$

$$\overline{M'} = (\overline{x'}, \overline{y'}) = (3A - \sqrt{9A^2 - 1}, 3A - \sqrt{9A^2 - 1}).$$

■

La stabilité locale du point d'équilibre $\overline{M'} = (\overline{x'}, \overline{y'}) = (3A - \sqrt{9A^2 - 1}, 3A - \sqrt{9A^2 - 1})$ est décrite dans le théorème suivant.

Théorème 3.3.1 *Le point d'équilibre $\overline{M'}$ est localement asymptotiquement stable.*

Preuve. Définissons la fonction

$$H : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow I^{k+1} \times J^{k+1},$$

par

$$H(w) = (f_0(w), f_1(w), \dots, f_k(w), g_0(w), g_1(w), \dots, g_k(w)),$$

avec

$$w = (u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k)^T,$$

$$f_0(w) = f(w), f_1(w) = u_0, \dots, f_k(w) = u_{k-1},$$

$$g_0(w) = g(w), g_1(w) = v_0, \dots, g_k(w) = v_{k-1}.$$

Posons

$$w_n = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k})^T.$$

Ainsi, le système (3.24) est équivalent au système

$$w_{n+1} = H(w_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & \frac{1}{6A - y_{n-k}}, \\ x_n & = & x_n, \\ \vdots & & \\ x_{n-k+1} & = & x_{n-k+1}, \\ y_{n+1} & = & \frac{1}{6A - x_{n-k}}, \\ y_n & = & y_n, \\ \vdots & & \\ y_{n-k+1} & = & y_{n-k+1}. \end{array} \right.$$

Le système linéaire associé au système (3.17) autour du point d'équilibre $\overline{M'} = (\overline{x'}, \overline{x'}, \dots, \overline{x'}, \overline{y'}, \overline{y'}, \dots, \overline{y'})$, est donnée par

$$w_{n+1} = Dw_n.$$

Avec D est la matrice Jacobienne donnée par

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & (3A - \sqrt{9A^2 - 1})^2 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (3A - \sqrt{9A^2 - 1})^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Le polynôme caractéristique est donner par

$$\begin{aligned} P_D(\lambda) &= \det(D - \lambda I_{2(k+1)}), \\ &= \lambda^{2(k+1)} - (3A - \sqrt{9A^2 - 1})^4. \end{aligned}$$

Considérons les deux fonctions définies par

$$\psi(\lambda) = \lambda^{2(k+1)}, \quad \varphi(\lambda) = -(3A - \sqrt{9A^2 - 1})^4, \quad (3.31)$$

alors

$$P_D = \psi(\lambda) + \varphi(\lambda).$$

On a

$$|-(3A - \sqrt{9A^2 - 1})^4| < 1, \quad (\text{Car } A \in \mathbb{N}_1)$$

et

$$|\lambda^{2(k+1)}| = 1, \quad \forall \lambda : |\lambda| = 1.$$

Donc

$$|\varphi(\lambda)| < |\psi(\lambda)|, \quad \forall \lambda : |\lambda| = 1.$$

D'après le Théorème de Rouché (1.1.3) ψ et $P = \psi + \varphi$ ont le même nombre de zéro dans le disque unité $|\lambda| < 1$, et puisque ψ admet comme racine $|\lambda| = 0$ de multiplicité $2(k+1)$, alors tous les racines de P sont dans le disque $|\lambda| < 1$.

Ainsi d'après le Théorème (1.1.1), le point d'équilibre $(3A - \sqrt{9A^2 - 1}, 3A - \sqrt{9A^2 - 1}, \dots, 3A - \sqrt{9A^2 - 1})$ est localement asymptotiquement stable. ■

L'instabilité locale du point d'équilibre $\bar{M} = (\bar{x}, \bar{y}) = (3A + \sqrt{9A^2 - 1}, 3A + \sqrt{9A^2 - 1})$ est donner par le théorème suivant.

Théorème 3.3.2 *Le point d'équilibre $\bar{M}$ est instable.*

Preuve. Définissons la fonction

$$H : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow I^{k+1} \times J^{k+1},$$

par

$$H(w) = (f_0(w), f_1(w), \dots, f_k(w), g_0(w), g_1(w), \dots, g_k(w)),$$

avec

$$w = (u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_k)^T,$$

$$f_0(w) = f(w), f_1(w) = u_0, \dots, f_k(w) = u_{k-1},$$

$$g_0(w) = g(w), g_1(w) = v_0, \dots, g_k(w) = v_{k-1}.$$

Posons

$$w_n = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k})^T.$$

Ainsi, le système (3.24) est équivalent au système

$$w_{n+1} = H(w_n) \quad , n = 0, 1, 2, \dots,$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & \frac{1}{6A - y_{n-k}}, \\ x_n & = & x_n, \\ \vdots & & \\ x_{n-k+1} & = & x_{n-k+1}, \\ y_{n+1} & = & \frac{1}{6A - x_{n-k}}, \\ y_n & = & y_n, \\ \vdots & & \\ y_{n-k+1} & = & y_{n-k+1}. \end{array} \right.$$

Le système linéaire associé au système (3.17) autour du point d'équilibre $\overline{M} = (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \bar{y}, \dots, \bar{y})$, est donnée par

$$w_{n+1} = Dw_n.$$

Avec D est la matrice Jacobienne donnée par

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & (3A + \sqrt{9A^2 - 1})^2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (3A + \sqrt{9A^2 - 1})^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Le polynôme caractéristique est donner par

$$\begin{aligned} P_D(\lambda) &= \det(D - \lambda I_{2(k+1)}), \\ &= \lambda^{2(k+1)} - (3A + \sqrt{9A^2 - 1})^4. \end{aligned}$$

On a :

$$|\lambda| = \left| (3A + \sqrt{9A^2 - 1})^{\frac{4}{2(k+1)}} \right| = \left| (3A + \sqrt{9A^2 - 1})^{\frac{2}{k+1}} \right| > 1. \quad (\text{Car } A \in \mathbb{N}_1)$$

D'après le Théorème (1.1.1), le point d'équilibre $(3A + \sqrt{9A^2 - 1}, 3A + \sqrt{9A^2 - 1}, \dots, 3A + \sqrt{9A^2 - 1})$ est instable. ■

Théorème 3.3.3 *Le point d'équilibre $\overline{M'}$ est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. Soit $(x_n, y_n)_{n \geq 0}$ $j = 0, 1, \dots, k$, la solution du système (3.17).

D'après le Théorème (3.3.1), $\overline{M'}$ localement asymptotiquement stable, il suffit donc de prouver que $\overline{M'} = (\overline{x'}, \overline{y'})$ est globalement attractif.

On a

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{(k+1)(2n)-j} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-x_{-j}\mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-x_{-j}\mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-x_{-j}\left(\frac{\mathcal{B}_{2n-1}}{\mathcal{B}_{2n}}\right) + 1}{-x_{-j} + \left(\frac{\mathcal{B}_{2n+1}}{\mathcal{B}_{2n}}\right)}.\end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n-1}}{\mathcal{B}_{2n}} = \frac{1}{\alpha}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n+1}}{\mathcal{B}_{2n}} = \alpha,$$

donc

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{(k+1)(2n)-j} &= \frac{-x_{-j}\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 1}{-x_{-j} + \alpha}, \\ &= \frac{-x_{-j} + \alpha}{\alpha}, \\ &= \beta = \overline{x'},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{(k+1)(2n+1)-j} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-y_{-j}\mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-y_{-j}\mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}, \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-y_{-j}\left(\frac{\mathcal{B}_{2n}}{\mathcal{B}_{2n+1}}\right) + 1}{-y_{-j} + \left(\frac{\mathcal{B}_{2n+2}}{\mathcal{B}_{2n+1}}\right)}.\end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n}}{\mathcal{B}_{2n+1}} = \frac{1}{\alpha}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n+2}}{\mathcal{B}_{2n+1}} = \alpha,$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{(k+1)(2n+1)-j} &= \frac{-y_{-j} \left(\frac{1}{\alpha} \right) + 1}{-y_{-j} + \alpha}, \\ &= \frac{-y_{-j} + \alpha}{-y_{-j} + \alpha} \\ &= \frac{\alpha}{-y_{-j} + \alpha}, \\ &= \beta = \overline{x'}. \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{(k+1)n-j} = \overline{x'}.$$

Et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{(k+1)(2n)-j} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-y_{-j} \mathcal{B}_{2n-1} + \mathcal{B}_{2n}}{-y_{-j} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}, \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-y_{-j} \left(\frac{\mathcal{B}_{2n-1}}{\mathcal{B}_{2n}} \right) + 1}{-y_{-j} + \left(\frac{\mathcal{B}_{2n+1}}{\mathcal{B}_{2n}} \right)}. \end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n-1}}{\mathcal{B}_{2n}} = \frac{1}{\alpha}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n+1}}{\mathcal{B}_{2n}} = \alpha,$$

donc

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{(k+1)(2n)-j} &= \frac{-y_{-j} \left(\frac{1}{\alpha} \right) + 1}{-y_{-j} + \alpha}, \\
 &= \frac{\alpha}{-y_{-j} + \alpha}, \\
 &= \beta = \overline{y}',
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{(k+1)(2n+1)-j} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n} + \mathcal{B}_{2n+1}}{-x_{-j} \mathcal{B}_{2n+1} + \mathcal{B}_{2n+2}}, \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-x_{-j} \left(\frac{\mathcal{B}_{2n}}{\mathcal{B}_{2n+1}} \right) + 1}{-x_{-j} + \left(\frac{\mathcal{B}_{2n+2}}{\mathcal{B}_{2n+1}} \right)}.
 \end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n}}{\mathcal{B}_{2n+1}} = \frac{1}{\alpha}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{B}_{2n+2}}{\mathcal{B}_{2n+1}} = \alpha,$$

donc

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{(k+1)(2n+1)-j} &= \frac{-x_{-j} \left(\frac{1}{\alpha} \right) + 1}{-x_{-j} + \alpha}, \\
 &= \frac{\alpha}{-x_{-j} + \alpha}, \\
 &= \beta = \overline{y}'.
 \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{(k+1)n-j} = \overline{y'}.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{(k+1)n-j}, y_{(k+1)n-j}) = (\overline{x'}, \overline{y'}).$$

Donc le point d'équilibre $\overline{M'}$ est globalement attractif, alors il est globalement asymptotiquement stable. ■

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans notre mémoire, nous présentons une contribution significative en donnant la forme de solution pour le système d'équations aux différences d'ordre supérieure, notées (3.17).

De plus, nous établissons une connexion entre une suite de Balancing généralisée et la solution du système (3.17). En utilisant cette connexion, nous pouvons obtenir des informations sur le comportement asymptotique de solution.

En particulier, notre mémoire présente non seulement la forme générale de solution pour le système (3.17), mais établit également un lien entre les nombres de Balancing généralisées et la solution du système.

De plus, nous étudions la stabilité globale de la solution, ce qui permet une compréhension plus profonde du comportement du système.

Comme perspectives nous allons essayer de donner la forme des solutions des systèmes plus généraux suivants

i)

$$x_{n+1} = \frac{1}{A - y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{B - x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

où $A, B \in \mathbb{N}_1$, et les conditions initiales $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0, y_{-k}, y_{-k+1}, \dots, y_0$, sont des nombres réels positives.

ii)

$$x_{n+1} = \frac{1}{A - z_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{A - x_{n-k}}, \quad z_{n+1} = \frac{1}{A - y_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

où $A \in \mathbb{N}_1$, et les conditions initiales $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0, y_{-k}, y_{-k+1}, \dots, y_0, z_{-k}, z_{-k+1}, \dots, z_0$, sont des nombres réels positives.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Behera and G. K. Panda, *On the square roots of triangular numbers*, Fibonacci Quarterly, 37(2)(1999), 98-105.
- [2] C. W. Clark, *A delayed recruitment of a population dynamics with an application to baleen whale population*, Journal of Mathematical Biology, 3(1976), 381-391.
- [3] S. Elaydi, *An introduction to difference equations*, Springer, (2005).
- [4] I. Gohberg and J. Leiterer, *Holomorphic operator functions of one variable and application*, Birkhauser, (2009).
- [5] M. R. S. Kulenovic and G. Ladas, *Dynamics of second ordre rational difference equation with open problems and and conjecture*, Chapman and Hall, Boca Raton, London, New York, Washington, D. C, (2002).
- [6] K. Liptai, *Fibonacci Balancing numbers*, The Fibonacci Quartly, 42(4)(2004), 330-340.
- [7] G. K. Panda, *Sequence balancing and cobalancing numbers*, The Fibonacci Quarterly, 45(2007), 265-271.
- [8] G. K. Panda and P. K. Ray, *Cobalancing numbers and cobalancers*, International Jornal of Mathematic and Mathematical Sciences, 8(2005), 1189-1200.
- [9] P. K. Ray, *Balancing and Cobalancing numbers*, Ph. D. thesis, National Institute of Technology, Rourkela, India, (2009).

- [10] S. Stevic, *Note on the bilinear difference equation with a delay*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, (41)(2018), 9349-9360.
- [11] N. Touafek and Y. Halim, *Global attractivity of a rational difference equation*, Mathematical Sciences Letters 2(3), (2013), 161-165.