

N° Réf :

Centre Universitaire
Abd elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Etude qualitative d'un modèle financier discret

Préparé par :

- ❖ Boumaali Farida
- ❖ Dif Louiza

Soutenue devant le jury :

Boufelgha Nabila	M.A.A	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Présidente
Mesquine Habiba	M.A.A	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Azi Mourad	M.C.B	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire :2022/2023

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :
Mon cher père et ma chère mère.
Mes sœurs.
Toutes mes amies.
A mes collègues de mathématiques.

LOUIZA

Je dédie mon travail à ma très chère, respectueux et magnifiques :

À ma grand-mère : Laouar Khadija.

À Mon Oncle : Laouar Ahmad .

À la Meilleure Maman du Monde : Laouar Bariza.

À toute ma Famille Boumaali et ma belle Famille Laouar.

qui m'a soutenu tout aulong de ma vie.

Ainsi

À mes Sœurs.

À mes Frères.

À les belles enfants : « Monsef, Khadija, Ikram, Soundous »

À Mon proche soeur et binôme.

Mes chers amies et aussi a tout personne qui m'ont encouragé au long de mes étude.

FARIDA

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier **DIEU**, qui nous a donné la force, le courage et la volonté afin d'élaborer ce mémoire.

Un remerciement particulier à notre encadreur Mme: **Meskine Habiba** pour sa présence, son aide et surtout pour ses précieux conseils.

Nos grands remerciements vont aussi à Dr. **Abdelouahab Mohamed Salah** pour son aide et son orientation afin d'améliorer le contenu de ce mémoire.

Nos remerciements vont également à l'ensemble des membres de jury Mme: **Boufelgha Nabila** et Mr. **Azi Mourad** d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Nous remercions l'ensemble des enseignants du département de mathématiques.

Enfin, nous voudrions associer nos remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

MERCI À TOUT

Résumé

Dans ce mémoire, nous intéressons sur certains concepts de base de l'étude d'un système dynamique discret (Stabilité, points d'équilibre, bifurcations, chaos).

Ensuite, nous décrivons quelques modèles de l'oligopole et comme une application de ce qui précède, nous étudions un modèle financier de recyclage (jeu de duopole).

Nous présentons chaque joueur avec une équation au différence : le premier est intéressé par la production d'équipement original et son objet est de maximiser le profit, le deuxième recycle les produits et cherche à maximiser la part de marché pour atteindre un certain bénéfice.

Le comportement de ce modèle est étudié à l'aide des critères de stabilité du Jury qui analysent la stabilité locale des points d'équilibre de Nash dans certaines conditions, étant donné la volonté du consommateur de payer (C.W.P) comme un paramètre de bifurcation, le système est soumis à deux types de bifurcation : Flip (doublement de période) et Neimark-Sacker.

Pour illustrer la dynamique complexe du modèle, nous utilisons des simulations numériques pour prouver le comportement chaotique à travers les exposants de Lyapunov, les diagrammes de bifurcation et l'attracteur étrange.

Mots clés : système dynamique discret, système financier, stabilité, équilibre de Nash, duopole, stratégie concurrentielle, recyclage, bifurcations, attracteur chaotique, chaos.

Abstract

In this note we are interested in some basic concepts concerning a discrete dynamical system (stability, equilibrium points, bifurcations, chaos).

Beside that, we will describe some models of oligopoly and as an application of the above, we will study a financial model of remanufacturing (duopoly game).

We present each player with a difference equation : the first player is interested in production of original, equipment and his goal is to maximize profit, the second recycled and sought to maximize market share to reach a certain profit.

This study is done using jury stabilization criteria that analyse the local stability of Nash equilibrium points under certain conditions, given the consumer's willingness to pay (C.W.P) as a bifurcation parameter, The system has two types of bifurcations : Flip (period doubling) and Neimark-Sacker.

To illustrate the complex dynamics of the model, we use numerical simulations to prove chaotic behavior through Lyapunov exponents, bifurcations diagrams and the strange attractor.

Keywords : discrete dynamical system, financial system, stability, Nash equilibrium, duopoly, competition strategy, remanufacturing, bifurcations, chaotic attractor, chaos.

ملخص

في هذه المذكرة نهتم ببعض المفاهيم الأساسية لدراسة نظام ديناميكي منفصل (الإستقرار، نقاط التوازن التشعبات، الفوضى)، بعد ذلك نصف بعض نماذج إحتكار القلة و تطبيقا لما سبق سندرس نموذجا ماليا لإعادة التدوير (لعبة الإحتكار الثنائي).

نعتبر عن كل لاعب بمعادلة فروق : اللاعب الأول يهتم بإنتاج المعدات الأصلية وهدفه تعظيم الربح ،

أما الثاني يعيد تدويرها ويسعى لتعظيم الحصة السوقية للوصول إلى ربح معين.

تتم هذه الدراسة بإستخدام معايير إستقرار جيري التي تحلل الإستقرار المحلي لنقاط توازن ناش تحت ظروف معينة، بإعتبار إستعداد المستهلك للدفع (C.W.P) معامل للتشعب يخضع النظام لأنوعين من التشعبات تشعب مضاعف الفترة وتشعب نيمارك ساكر.

لتوضيح الديناميكيات المعقدة للنموذج نستخدم المحاكات العددية لإثبات السلوك الفوضوي من خلال أسس لياپنوف، مخططات التشعب والجاذب الفوضوي.

الكلمات المفتاحية : نظام ديناميكي منفصل، نظام مالي، الإستقرار، نقطة توازن ناش، احتكار ثنائي، استراتيجية منافسة، إعادة التدوير، التشعب، جاذب فوضوي، الفوضى.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé	4
Introduction	1
1 Notions générales sur les systèmes dynamiques discrets	3
1.1 Systèmes dynamiques	3
1.1.1 Espace de phase, espace d'état, portrait de phase	5
1.1.2 Flot, trajectoire (orbite)	6
1.2 Etude graphique des systèmes dynamiques	7
1.3 Attracteurs	11
1.3.1 Types d'attracteurs	12
1.3.2 Bassin d'attraction	13
1.4 Stabilité	14
1.4.1 Stabilité des points fixes et points périodiques	14
1.4.2 Cas linéaire	16
1.4.3 Cas non linéaire	17
1.4.4 Critère de jury	19
1.5 Natures des singularités	20
1.6 Bifurcations	22
2 Systèmes chaotiques à temps discrets	29
2.1 Définitions du chaos	30

2.2	Caractéristiques du chaos	31
2.2.1	Sensibilité aux conditions initiales	31
2.2.2	Exposants de Lyapunov	31
2.2.3	Dimension fractale	33
2.2.4	Attracteur chaotique	34
2.3	Scénarios de transition vers le chaos	36
3	Oligopolistique	39
3.1	Terminologie et définitions	39
3.2	Modélisation mathématique en économie à l'aide des équations aux différences	40
3.2.1	Systèmes économiques de dimension 1	42
3.2.2	Systèmes économiques de dimension supérieurs	45
3.3	Modèles oligopolistiques	50
3.3.1	Quelque types des modèles oligopolistiques	50
4	Etude d'un modèle financier	60
4.1	Description du modèle duopole	61
4.2	Analyse de la stabilité locale	64
4.3	Analyse numérique du modèle	69
	Conclusion	73
	Bibliographie	76

TABLE DES FIGURES

1.1	Représentation du flot	7
1.2	L'orbite du système $x(k) = 4.5x_k - 3.5x_k^2$: premier pas.	8
1.3	L'orbite du système $x_k = 4.5x_k - 3.5x_k^2$: deuxième pas.	9
1.4	Le portrait de phases d'un système dynamique non-linéaire.	11
1.5	Attracteur de Hénon	13
1.6	Classification des portraits de phases dans le plan ($\det A$, $\text{Tr } A$)	22
1.7	Bifurcation pli.	24
1.8	Le diagramme de bifurcation transcritique du système $f(x, \alpha) =$ $x(1 + \alpha - x)$	25
1.9	Bifurcation fourche : $f_{\alpha,x} > 0, f_{xxx} < 0$	26
1.10	Bifurcation doublement de période.	27
1.11	Bifurcation de Neimark-sacker $\lambda = 2.01$	28
2.1	Sensibilité aux conditions initiales de la fonction logistique pour $x_1 = 0.2$ et $x_2 = 0.2001$	35
2.2	Cascade de doublements de période	37
3.1	Dynamique dans le modèle O.S.G	45
3.2	Diagramme de bifurcation du chômage par rapport aux taux d'entrée.	49
3.3	Attracteur	50

3.4	Représentation schématique des courbes de la meilleure réponse (réaction)	52
4.1	La région de stabilité dans le plan (δ, α) , pour $\beta = 0.1, c_n = 0.2, c_r = 0.1$ et $v = 0.1$	69
4.2	Diagramme de bifurcation en fonction de δ pour $\alpha = 6.68, \beta = 0.1, c_n = 0.2, c_r = 0.1$ et $v = 0.1$. 4.2(a) Le diagramme de bifurcation de la solution q_n . 4.2(b) Le diagramme de bifurcation de la solution q_r . 4.2(c) Rayon des valeurs propres correspondant à l'équilibre de nash E. 4.2(d) Les exposants de lyapunov maximum.	71
4.3	Séries chronologiques et portait de phase du système (4.11) pour certain valeurs de δ avec $\alpha = 6.68, \beta = 0.1, c_n = 0.2, c_r = 0.1$ et $v = 0.1$. 4.3(a) Point fixe stable pour $\delta = 0.9$. 4.3(b) Cycle de période 4 pour $\delta = 0.7$. 4.3(c) Attracteur chaotique de 8-pièces pour $\delta = 0.5$. 4.3(d) Attracteur chaotique de 4-pièces pour $\delta = 0.48$. 4.3(e) Attracteur chaotique de 2-pièces pour $\delta = 0.3$. 4.3(f) Attracteur chaotique avec 1-pièce pour $\delta = 0.25$	72

INTRODUCTION

Les systèmes dynamiques sont développés et spécialisés au cours du XIXe siècle.

En effet, vers la fin du ce siècle Henri Poincaré avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps.

Toujours au même siècle, le mathématicien Alexandre Lyapunov effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesurer la distance entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines, lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de la sensibilité aux conditions initiales. [26]

En 1963 Edward Lorenz a étudié le comportement des systèmes dynamiques non linéaires et a souligné que dans ces systèmes de légères différences dans les conditions initiales génèrent des systèmes chaotiques (voir[23]).

Evidemment, les systèmes dynamiques sont des outils pour modéliser les phénomènes chaotiques évoluent dans le temps, ces phénomènes peuvent provenir de la biologie, circuits électriques [12, 17, 7], la médecine [13], la chimie [28] et les systèmes de sécurité de l'information (voir[8])...

Parmi les applications courantes des systèmes dynamiques discrets on cite la modélisation économique, cette dernière s'intéresse généralement à la situation du marché dans laquelle on distingue trois types du marché :

le monopole, l'oligopole et la concurrence pure et parfaite. Dans notre travail nous spécifions nos étude sur les marchés oligopolistiques qui sont une structure de marché entre le monopole et la concurrence parfaite. Elle est caractérisée par une domination de plusieurs entreprises qui contrôlent complètement le commerce.

La concurrence oligopolistique a été étudiée depuis longtemps.

Le plus ancien modèle d'oligopole était le modèle proposé par Cournot en 1838 [1], dans le duopole de Cournot qui présente une concurrence entres deux entreprises partagent le marché, la variable stratégique est la quantité.

Nous intéressons dans ce mémoire aux systèmes dynamiques discrets et nous concentrons sur un système financier, l'objectif du mémoire est l'étude qualitative d'un modèle financier de duopole. Dans ce contexte, notre travail est organisé comme suite :

Le premier chapitre : nous présentons quelque notions importantes sur les systèmes dynamiques discrets, nous passons à l'étude de la stabilité et nous finissons cette partie par les bifurcations les plus utiles.

Le deuxième chapitre : nous donnons quelque définitions et caractéristiques du chaos puis les scénarios de transition vers le chaos.

Le troisième chapitre : est consacré à la description des modèles mathématiques en économie et de plus des modèles oligopolistiques.

Le quatrième chapitre : nous étudions le comportement d'un modèle financier discret en utilisant les notions précédentes (points d'équilibres, stabilité, bifurcations, exposant de lyapunov, attracteur chaotique).

CHAPITRE 1

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES DISCRETS

1.1 Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental...(etc), dont l'état évolue en fonction du temps. L'analyse de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance de :

- son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant t_0 .
- sa loi d'évolution.

D'après ce qui a précédé les systèmes dynamiques sont classés en deux types :

- systèmes dynamiques continus.
- systèmes dynamiques discrets. [22]

Définition 1.1.1

Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet (X, T, f) constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état $f : X \times T \rightarrow X$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant. [22]

Systèmes dynamiques continus

Définition 1.1.2

Un système dynamique dans un temps continu est représenté par un système d'équations différentielles de la forme (voir[22]) :

$$\dot{x}_t = f(x, t, \alpha) \quad (1.1)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}^m$, où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système.

Exemple 1.1.1

L'oscillateur de duffing [6] :

$$\begin{cases} \dot{x} = y. \\ \dot{y} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t. \end{cases}$$

où δ , γ et ω sont des paramètres réels l'espace des phases est $\mathbb{R}^2$ et l'espace des paramètres est $\mathbb{R}^3$.

Systèmes dynamiques discrets

Définition 1.1.3

Un système dynamique dans le cas discret est représenté par une application (fonction itérative) [3], sous la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, \alpha) \quad (1.2)$$

$x_k \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}^m, k = 1, 2, 3, \dots$

Où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ indique la dynamique du système en temps discret. On peut

également identifier pour chaque couple (x_0, k_0) une solution unique :

$\phi_f(., x_0, k_0): \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, telle que :

$$\phi_f(k, x_0, k_0) = x_0, \quad \phi'_f(k+1, x_0, k_0) = f(\phi_f(k, x_0, k_0), k).$$

Exemple 1.1.2 (l'application de Hénon)

$$\begin{cases} x_{k+1} &= y_k + 1 - ax_k^2. \\ y_{k+1} &= bx_k. \end{cases}$$

Où a, b sont des paramètres réels.

L'espace des phases est $\mathbb{R}^2$ et l'espace des paramètres est $\mathbb{R}^2$. [6]

Systèmes autonomes et non autonomes

Lorsque la variable libre k apparaît explicitement dans l'expression de f alors le système est dit non autonome. On peut toujours transformer un système non autonome en système autonome (où k n'apparaît pas explicitement).

Exemple 1.1.3

Soit l'équation suivante :

$$x_{k+1} = k. \tag{1.3}$$

On pose $y_k = k$, alors : $y_{k+1} = y_k + 1$. Donc l'équation (1.3) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= y_k. \\ y_{k+1} &= y_k + 1. \end{cases}$$

On augmente ainsi la dimension du système d'une unité, mais cela permet de remplacer systématiquement k dans les équations par x_{k+1} . [31]

1.1.1 Espace de phase, espace d'état, portrait de phase

Un système dynamique est caractérisé par un certain nombre de variables d'état. Le comportement dynamique du système est ainsi relié à l'évolution de chacune de ces variables d'état.

1. L'espace de phase

L'espace de phase est un espace souvent multi-dimensionnel permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système dynamique d'écrit par des équations différentielles par rapport au temps. [3]

2. L'espace d'état

L'espace d'état est l'ensemble des coordonnées nécessaires à la description complète d'un système. Cet espace peut être continu ou discret (voir[3]).

3. Portrait de phase

Définition 1.1.4

Un portrait de phase est une représentation graphique de la dynamique d'un système. Il se compose d'un diagramme représentant les positions de départ possibles dans le système et de flèches indiquent le changement de ces positions au cours des itérations de la fonction. [5]

1.1.2 Flot, trajectoire (orbite)

1. Flot

Soit le système dynamique suivant : $x_{k+1} = f(x_k)$ et soit φ le flot de ce système :

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow I.$$

$$(x, k) \mapsto \varphi_k(x) = \varphi(x, k).$$

Qui possède les propriétés suivantes :

1- $\varphi_k(x_0) = x_0$

2- $\varphi_{k+s}(x_0) = \varphi_k(\varphi_s(x_0))$, pour tous $k, s \in \mathbb{R}$ (voir[4]) :

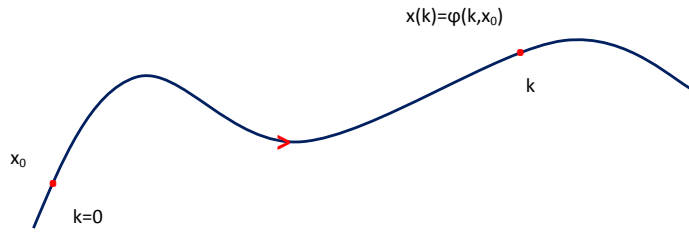


FIGURE 1.1 – Représentation du flot

2. Trajectoire (orbite)

Définition 1.1.5

Soit $(X, \mathbb{N}, f)$ un système dynamique discret, on appelle orbite (trajectoire) du système :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k), k \geq 0. \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

La suite

$$O(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1) = f(x(0)), \dots, x(k+1) = f(x_k), \dots\}. [27]$$

1.2 Etude graphique des systèmes dynamiques

Nous allons parler dans cette section de moyens très simples pour visualiser le comportement de certains systèmes. Ces représentations nous permettront de mieux comprendre les phénomènes que nous allons étudier (voir[2]).

1. Systèmes dynamiques discrets de dimension 1

Soit le (SDD) de dimension 1 :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

définit par une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

On peut visualiser sur le plan (x, y) l'évolution d'une orbite $O(x_0)$ en utilisant le graphe de la fonction f et la droite $y = x$. Prenons par exemple la fonction : $f(x) = 4.5x - 3.5x^2$.

Nous allons représenter l'orbite qui commence dans le point $x_0 = 0.2$. Traçons d'abord le graphe de la fonction f et la droite $y = x$ (voir 1.2). Sur le plan (x, y) l'orbite commence dans le point $A = (x_0, 0)$. Nous traçons maintenant une ligne verticale du point A jusqu'au graphe de la fonction $f(x)$. Le point d'intersection est exactement le point $B = (x_0, x_1)$ avec $x_1 = f(x_0)$. Ensuite, nous traçons une ligne horizontale à partir du point (x_0, x_1) jusqu'au point $C = (x_1, x_1)$ d'intersection avec la droite $y = x$.

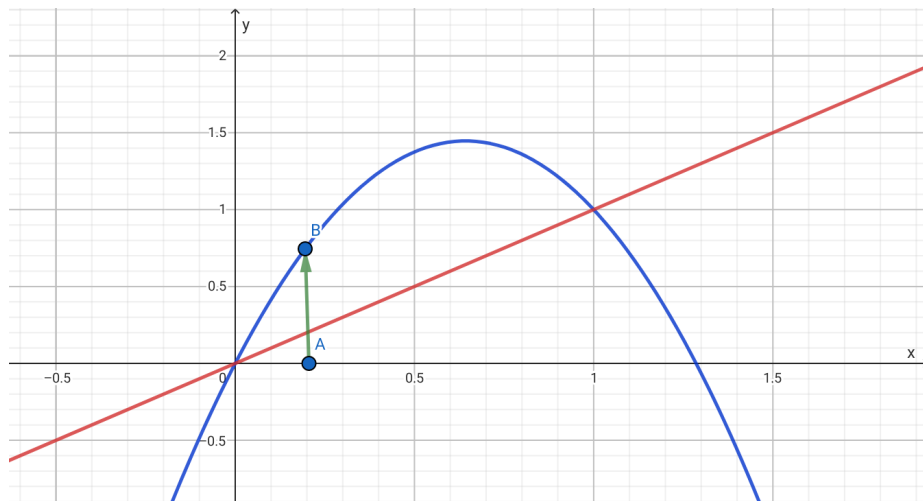


FIGURE 1.2 – L'orbite du système $x(k) = 4.5x_k - 3.5x_k^2$: premier pas.

A partir de ce point nous traçons encore une ligne verticale vers le graphe de la fonction $f(x)$ pour trouver le point suivant $x_2 = f(x_1)$ (voir la figure 1.3). En continuant ainsi nous pouvons suivre l'évolution de l'orbite sur autant de points que nous le voulons. Cette représentation graphique des systèmes est particulièrement utile par ce qu'elle permet de voir clairement les points fixes (ce sont les points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ et de la droite $y = x$).

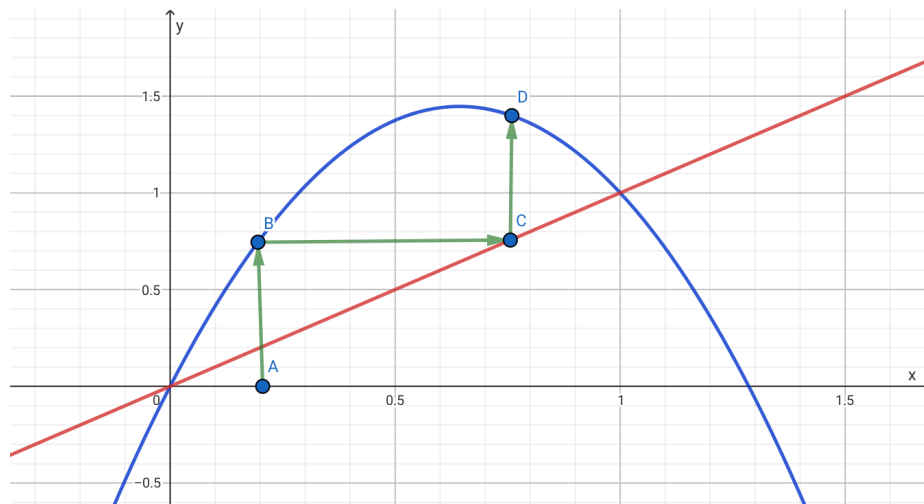


FIGURE 1.3 – L'orbite du système $x_k = 4.5x_k - 3.5x_k^2$: deuxième pas.

2. Systèmes dynamiques de dimension 2 :

Un système dynamique discret de dimension 2 est d'écrit par deux équations :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = f_1(x_1(k), x_2(k)) \\ x_2(k+1) = f_2(x_1(k), x_2(k)) \end{cases}$$

Pour étudier ces systèmes on utilise souvent des portraits de phases. Pour tracer le portrait de phases d'un système dynamique défini par

l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

on choisit sur le plan une grille de points $D = (x_1, x_2)$ assez dense et l'on trace dans chaque point la direction du départ de l'orbite qui commence dans ce point. Cette direction pour un point initial :

$$X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

est définie par le vecteur $X(1) - X(0) = f(X(0)) - X(0)$ cela donne un aperçu (voir la figure 1.4) de toutes les orbites possibles du système. Si l'on s'intéresse à une orbite particulière, on peut la retrouver sur le portrait de phases, en suivant les directions du champ de vecteurs tracées à partir du point initial de l'orbite. On peut observer à l'aide d'un portrait de phases les points fixes du système, ce sont les points tels que $f(x^*) = x^*$. Donc, le vecteur de direction du portrait de phases doit être nul dans un point fixe. Le comportement des orbites du système autour d'un point fixe est important, le portrait de phases nous permettons une première analyse qualitative de ce comportement. Sur la figure (1.4) sont tracées quelques orbites commençant dans des points proches des points fixes. Sur un portrait de phases on peut également apercevoir des orbites périodiques, si le système en a. Dans ce cas, on peut distinguer des courbes closes formées par un groupe de vecteurs de directions.

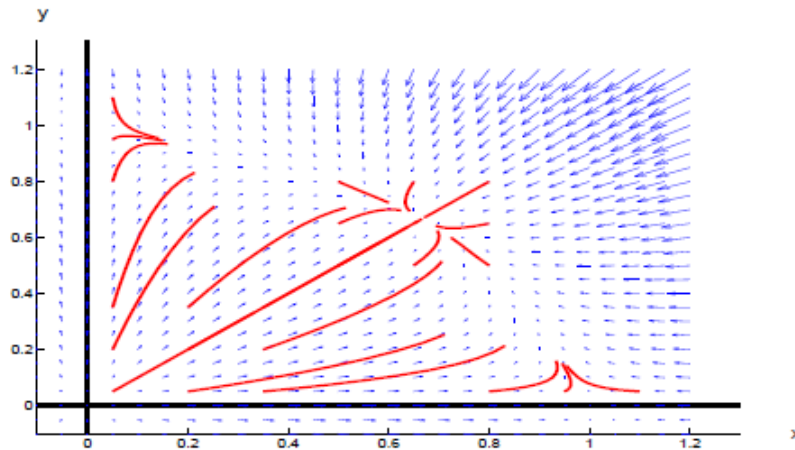


FIGURE 1.4 – Le portrait de phases d'un système dynamique non-linéaire.

1.3 Attracteurs

Définition 1.3.1 (Ensemble invariant)

Soit A un sous-ensemble de l'espace des phases, A est dit invariant (resp. positivement invariant) par un flot φ_k , si pour tout k dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $[0, +\infty[$), $\varphi_k(A)$ est inclus dans A . [22]

Remarque 1.3.1

La trajectoire d'un système autonome dans l'espace d'état est un ensemble invariant.

Définition 1.3.2

Un attracteur est un lieu géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble de situations) vers les quelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales [22].

Mathématiquement, l'ensemble A est un attracteur si :

1. A est un ensemble compact et invariant par le flot φ_k (c-à-d $\varphi_k(A) = A$ pour tout k)
2. Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(k, x_0) = \varphi_k(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$
3. $\bigcap_{k \geq 0} \varphi_k(V) = A$
4. Il existe une orbite dense dans A .

1.3.1 Types d'attracteurs

Il y a deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

1. Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

- **Point fixe**

L'attracteur point fixe est le plus simple attracteur, il est un point de l'espace des phases vers lequel tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système. On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes. Il s'agit des noeuds stables et des foyers stables [22]

- **Points périodiques**

L'attracteur "points périodiques" est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système.

- **Courbe invariante**

Les courbes invariantes des systèmes discrets sont analogues au tore des flots continus. La dynamique sur la courbe fermée peut être complexe, en particulier lorsque les paramètres varient ces courbes perd sa régularité et peut se transformer en des ensembles invariantes.

2. Attracteurs étranges

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques : au cours d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange. Il se caractérise par :

1. Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique).
2. La dimension de l'attracteur est fractale et non entière.

3. L'attracteur est de volume nul dans l'espace des phases. [22]

Exemple 1.3.1

La récurrence de Hénon est un système dynamique discret de dimension 2 dont la représentation d'état est la suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= y_k - ax_k^2 + 1. \\ y_{k+1} &= bx_k. \end{cases}$$

pour les valeurs $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

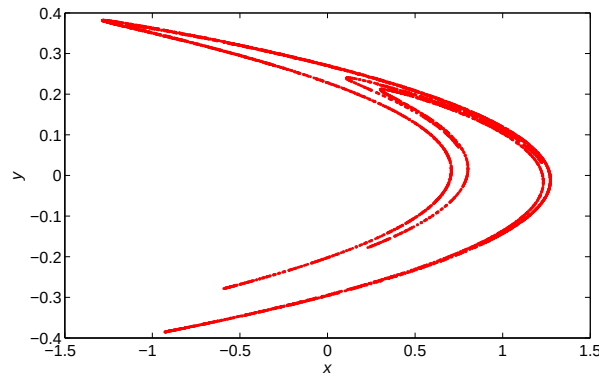


FIGURE 1.5 – Attracteur de Hénon

1.3.2 Bassin d'attraction

Définition 1.3.3

Soit x^* un point fixe de l'application f , alors le bassin d'attraction

$$W^s(x^*) = \{x : \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = x^*\}.$$

En d'autres termes $W^s(x^*)$ est constitué de tous les points qui sont asymptotique vers x^* . Remarquons que si x^* est un point fixe asymptotiquement stable, $W^s(x^*)$ contient un intervalle ouvert autour de x^* . L'intervalle maximal dans $W^s(x^*)$ qui contient x^* est appelé bassin d'attraction immédiat est noté $B(x^*)$. [30]

Exemple 1.3.2

$f(x) = x^2$ a un point fixe attractif $x^* = 0$. Son bassin d'attraction $W^s(0) = (-1, 1)$.

Notez que 1 est un point fixe instable et -1 est un point fixe éventuellement qui passe à 1 après une itération.

1.4 Stabilité

1.4.1 Stabilité des points fixes et points périodiques

Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique. On définit un (SDD) de dimension 1 par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) \\ x(0) = x_0, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

1. Point fixe

Définition 1.4.1

Un point fixe x^* d'une application f est un point qui satisfait l'équation

$$x^* = f(x^*). \quad (1.4)$$

Géométriquement : le point fixe est une intersection de la courbe de notre fonction $y = f(x)$ avec la bissectrice $y = x$. [20]

Remarque 1.4.1

Parfois, ces points sont appelés aussi points stationnaires ou points d'équilibre. Soit x^* un point fixe de l'équation (1.4), $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$ les valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x)$ associée.

1. x^* un point fixe hyperbolique si : $|\lambda_i| \neq 1, \forall i \in [1, n]$.
2. x^* un point fixe non-hyperbolique si : $|\lambda_i| = 1, \forall i \in [1, n]$. [20]

Théorème 1.4.1 (Existence)

Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé et $f : I \rightarrow I$ continue. Si $I \subseteq f(I)$ alors f a un point fixe dans l'intervalle I . [2]

Théorème 1.4.2 (Unicité)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a, b]$. Supposons que $|f'(x)| < 1, \forall x \in [a, b]$, alors la fonction $g(x)$ a unique point fixe x^* t.q : $f(x^*) = x^*$ dans l'intervalle $[a, b]$. [2]

Définition 1.4.2

Un point fixe x^* s'appelle stable si $\forall \epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que : si $|x_0 - x^*| < \delta$ alors pour tout $k > 0 : |f^k(x_0) - (x^*)| < \epsilon$.

Autrement dit toutes les orbites qui commencent près du point x^* restent dans un voisinage de ce point si : $x_0 \in \cup_\delta(x^*)$, alors pour tout $k > 0 : f^k(x_0) \in \cup_\epsilon(x_0)$.

[2]

Définition 1.4.3

Un point fixe s'appelle instable s'il existe un $\epsilon > 0$ tel que $\forall r > 0$ il existe un $x_0 \in \cup_r(x^*)$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que : $|f^n(x_0) - x^*| > \epsilon$. Cela signifie que pour tout voisinage du point fixe x^* , il existe une orbite qui, en commençant dans ce voisinage s'éloigne du point x^* . [2]

Théorème 1.4.3 (Critère de stabilité des points fixes)

Soient : $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue sur I ayant un point fixe $x^* \in I$. Supposons qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que la fonction f est dérivable sur tout voisinage $\cup_\epsilon(x^*) \subset I$ du point x^* et que la dérivée de la fonction f est continue au point x^* . Alors le point x^* est :

- attractif si : $\left| \frac{d}{dx} f(x) \right| < 1$.

- Répulsif si : $\left| \frac{d}{dx} f(x) \right| > 1$.

Situation indéterminée : si $\left| \frac{d}{dx} f(x) \right| = 1$

Si la dérivée de la fonction $f(x)$ au point fixe x^* est égale à ± 1 , dans ce cas il ya d'autre théorème qui déduire la nature du point fixe. [2]

Théorème 1.4.4

Soient : $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue et dérivable sur I . Soit $x^* \in I$ un point fixe de l'application f tel que : $\left| \frac{d}{dx} f(x) \right| = 1$. Supposons qu'il existe un voisinage $\cup_\delta$ du point x^* tel que la seconde dérivée f'' existe sur tout ce voisinage.

- (a) Si $f''(x) > 0$ (f' est strictement croissante) alors x^* est un point semi-stable à gauche.
- (b) Si $f''(x) < 0$ (f' est strictement décroissante) alors x^* est un point semi-stable à droite.

(c) Si $f''(x) = 0$ (f' a un point d'extremum local) alors x^* et si la troisième dérivée existe alors :

i. Si $f''' < 0$ (maximum local) x^* est un point attractif faible.

ii. Si $f''' > 0$ (minimum local) x^* est une source faible. [2]

2. Point périodique

Définition 1.4.4

Un point x^* est périodique de période p si : $f^p(x^*) = x^*$, Un point périodique de période p est donc un point fixe de l'application f^p mais pas un point fixe pour f^l si $1 \leq l < p$ (l et p entiers). L'orbite qui commence en un tel point est une suite périodique, elle n'a que p points distincts. Chacun de ces p points est p -périodique. Une telle orbite s'appelle orbite périodique de période p . [2]

Théorème 1.4.5 (Critères de stabilité des points périodiques)

Soient $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue sur I (voir[2]).

Supposons que le (SDD) défini par la fonction $f(x)$ possède une orbite périodique

$O(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\} \subset I$ de période p . Supposons en plus qu'autour de chaque point de l'orbite $x_i \in O(x_0)$, $i = 0, 1, \dots, p-1$ il existe un voisinage $\cup_{\delta_i}(x_i) \subset I$ tel que la fonction $f(x)$ est dérivable dans ce voisinage est que sa dérivée est continue en x_i . Alors l'orbite $O(x_0)$ est répulsive si :

$$\left| \frac{d}{dx} f^p(x_0) \right| = \left| \prod_{j=0}^{p-1} f'(x(j)) \right| > 1.$$

Le cas est indéterminé si :

$$\left| \frac{d}{dx} f^p(x_0) \right| = \left| \prod_{j=0}^{p-1} f'(x(j)) \right| = 1.$$

L'orbite $O(x_0)$ est attractive si :

$$\left| \frac{d}{dx} f^p(x_0) \right| = \left| \prod_{j=0}^{p-1} f'(x(j)) \right| < 1.$$

1.4.2 Cas linéaire

Un système dynamique linéaire d'ordre 1 unidimensionnel définit sous la forme :

$$x_{k+1} = Sx_k, x \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Il admet au point x_0 une solution explicite de la forme :

$$x_k = S^k x_0. \quad (1.6)$$

L'origine est le seul point fixe, on voit que la nature de ce point est complètement déterminée par le nombre réel S , appelé multiplicateur du point fixe $x^* = 0$. En effet :

1- Si $|S| < 1$, $\forall x_0$ l'orbite $O(x_0)$ du système (1.5) tend vers le point fixe $x^* = 0$.

Ce point est dit asymptotiquement stable.

2- Si $|S| > 1$, $\forall x_0$ l'orbite $O(x_0)$ du (1.5) s'éloigne de 0 quand n augmente. Ce point est alors dit répulsif (instable).

La nature du point fixe 0 dépend aussi du signe du multiplicateurs S . En effet :

a- Si S est positif la suite des points engendrées par (1.5) et telle que x_k a toujours le même signe que x_0 . 0 appelé dans ce cas point de type 1.

b- Si S est négatif la suite des points engendrées par (1.5) et telle que le signe de x_k dépend de k . Cette suite oscille autour du point fixe. 0 est appelé point de type 2.

3- Si $|S| = 1$ on distingue deux cas :

a- Si $S = 1$ tout point de l'axe des x est un point fixe

b- Si $S = -1$ tout point de l'axe des x est un point fixe de

$$x_{k+1} = S^2 x_k. \quad (1.7)$$

Lorsque 0 est attractif, le domaine d'attraction de 0, est l'ensemble des points x_0 qui donne une suite tend vers 0. Il est constitué pour tout l'axe des x . [27]

1.4.3 Cas non linéaire

Méthode de linéarisation

Si le système dynamique discret est non linéaire on se sert au procédé de linéarisation afin de pouvoir prévoir son comportement au voisinage des points d'équilibre. Considérons l'équation non-linéaire unidimensionnelle générale du premier ordre :

$x_{k+1} = f(x_k)$. Le point fixe x^* satisfait $x^* = f(x^*)$.

Afin d'étudier le système au voisinage de x^* on écrit $x_k = x^* + h_k$ et développons f en séries de Taylor au voisinage de x^* en prenant seulement les termes linéaires. Donc : $x^* + h_{k+1} \simeq f(x^*) + \frac{df}{dx}(x^*)h_k$, ce qui donne :

$h_{k+1} = \frac{df}{dx}(x^*)h_k$. On appelle cette équation la linéarisation de l'équation $x_{k+1} = f(x_k)$.

Théorème 1.4.6

Considérons l'équation linéarisée précédente :

1. Si $\left| \frac{df}{dx}(x^*) \right| < 1$, le point fixe x^* est stable.
2. Si $\left| \frac{df}{dx}(x^*) \right| > 1$, le point fixe x^* est instable.
3. Si $\left| \frac{df}{dx}(x^*) \right| = 1$, aucune conclusion n'est tirée .

On peut généraliser cette définition pour des systèmes multidimensionnels. Considérons l'équation non-linéaire générale du premier ordre $x_{k+1} = f(x_k)$. Où $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, avec $m \in \mathbb{N}$ est une application non-linéaire m -dimensionnelle différentiable par rapport à toutes les variables d'état du système définies sur un sous-ensemble ouvert autour d'un point fixe x^* , D est un sous ensemble et α est un vecteur des paramètres. x^* devient dans ce cas un vecteur en fonction des variables d'état satisfaisant $x^* = f(x^*)$ en linéarisant ce système au voisinage de l'équilibre x^* , on obtient $h_{k+1} = Ah_k$ où A est la matrice jacobienne évaluée en x^* . Et λ_i avec $1 \leq i \leq m$, sont les valeurs propres associées à A . [20]

Théorème 1.4.7

Soit le système linéarisé suivant : $h_{k+1} = Ah_k$

** Si toutes les valeurs propres de A sont inférieurs à un alors x^* est asymptotiquement stable.*

** S'il existe une valeur propre de A dont le module est supérieur à un alors x^* est instable.*

** S'il existe une valeur propre de A dont le module est égal à un alors aucune conclusion n'est tirée. [20]*

1.4.4 Critère de jury

Le critère de jury est un outil algébrique pour analyser la stabilité des systèmes dynamiques discrets à partir de la connaissance du polynôme caractéristique sans calculer les racines (voir [25]) :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Théorème 1.4.8

Un système linéaire discret est asymptotiquement stable si et seulement si les coefficients de son polynôme caractéristique vérifient les relations qui suivent. Les conditions dépendant de l'ordre du système .

Pour plus de simplicité on suppose que $a_n > 0$. Dans le cas contraire il suffit de multiplier tous les coefficients par -1 .

$$n = 2 : \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 > 0. \\ a_0 - a_1 + a_2 > 0. \\ a_2 - a_0 > 0. \end{cases}$$

$$n = 3 : \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0. \\ -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 > 0. \\ a_3 - |a_0| > 0. \\ a_0 a_2 - a_1 a_3 - a_0^2 + a_3^2 > 0. \end{cases}$$

Exemple 1.4.1

Soit le système dont le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P(x) = x^3 + (k - 0.75)x - 0.25$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = k > 0 \\ -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 = k + 0.5 > 0 \\ a_3 - |a_0| = 1 - 0.25 > 0. \\ a_0 a_2 - a_1 a_3 - a_0^2 + a_3^2 = -k + 1.6875 > 0 \end{cases}$$

dont l'intersection donne $0 < k < 1.6875$ comme condition de stabilité.

1.5 Natures des singularités

Soient les deux systèmes suivants :

$$x_{k+1} = f(x_k). \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k). \\ x_0 = x(0). \end{cases} \quad (1.9)$$

Pour caractériser la nature des points fixes et les cycles [18], nous supposons que :

a) Si la dimension de système (1.8) est égal à un, le multiplicateur d'un point fixe x^* est S et le multiplicateur d'un cycle d'ordre p , $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ est : S_p . Un point fixe ou un cycle est dit asymptotiquement stable si $|S| < 1$ ($|S_p| < 1$ respectivement), et instable (ou répulsif) si $|S| > 1$ ($|S_p| > 1$ respectivement).

b) Si la dimension du système (1.8) supérieur à un, les multiplicateurs d'un point fixe x^* ou d'un cycle d'ordre p sont les valeurs propres de la matrice Jacobienne de $f(x^*)$ ou de $f^p(x_i)$. Lorsque la dimension de système (1.9) est égal à deux, il existe deux valeurs propres λ_1 et λ_2 alors la nature de point fixe ou cycle donnée comme suivante :

1) Col : Si λ_1 et λ_2 sont réels : $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$. Un col est un point instable :

a-de type 1 : si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

b-de type 2 : si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.

c-de type 3 : si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.

2) Noeud : Si λ_1 et λ_2 sont réels

a-stable : si $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2$.

b-instable : si $|\lambda_i| > 1, i = 1, 2$.

3) Foyer : si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $r = |\lambda_i|, i = 1, 2$.

a- stable : si $r < 1$.

b- instable : si $r > 1$.

Lorsque la dimension de système (1.9) est égal à trois, alors existe trois multiplicateurs $S_i (i = 1, 2, 3)$ sont les valeurs propres d'un point fixe ou d'un cycle.

1) Col : Si $S_i, i = 1, 2, 3$ sont réels

a-de type 1 : si $|S_i| < 1, i = 1, 2$ et $|S_3| > 1$.

b-de type 2 : si $|S_i| > 1, i = 1, 2$ et $|S_3| < 1$.

2) Col-foyer : Si S_1 et S_2 sont complexes conjuguées, et S_3 est réel

a-de type 1 : si $|S_i| < 1, i = 1, 2$ et $|S_3| > 1$.

b-de type 2 : si $|S_i| > 1, i = 1, 2$ et $|S_3| < 1$.

3) Noeud : Si $S_i, i = 1, 2, 3$ sont réels

a-stable si $|S_i| < 1, i = 1, 2, 3$.

b-instable si $|S_i| > 1, i = 1, 2, 3$.

4) Noeud-foyer : Si S_1 et S_2 sont complexes conjuguées, et S_3 est réel

a-stable : si $|S_i| < 1, i = 1, 2, 3$.

b-instable : si $|S_i| > 1, i = 1, 2, 3$.

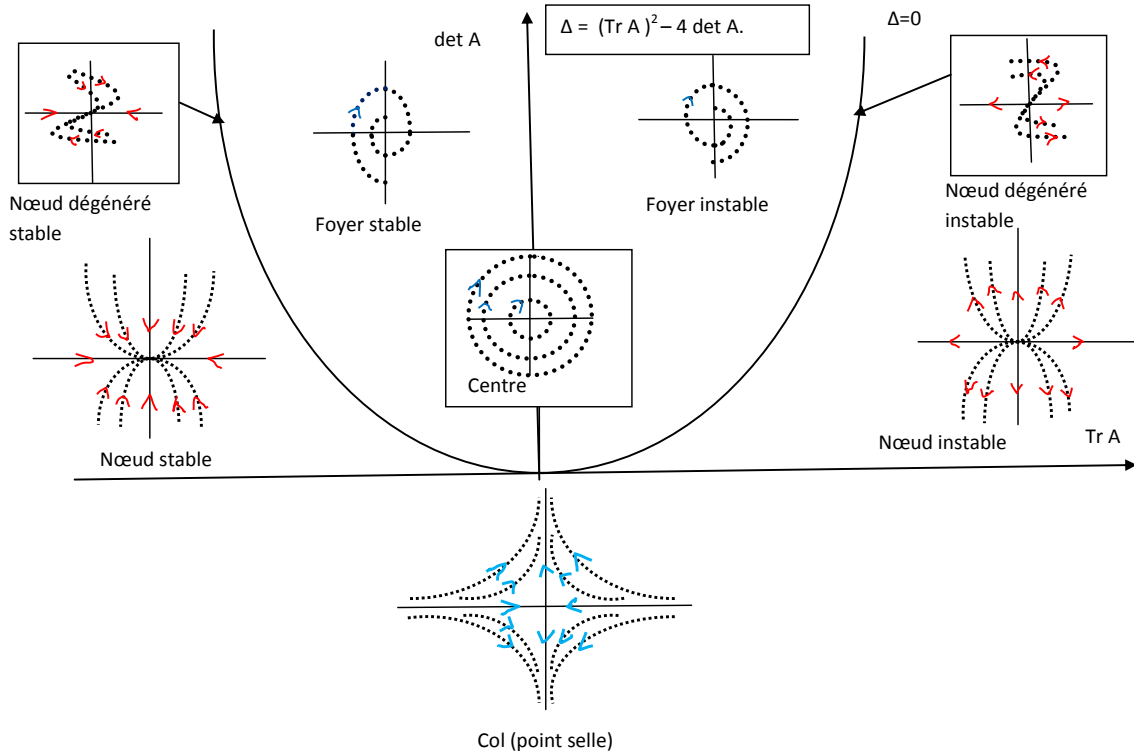


FIGURE 1.6 – Classification des portraits de phases dans le plan ($\det A$, $\text{Tr } A$)

1.6 Bifurcations

Soit le système dynamique non-linéaire suivant :

$$x_{k+1} = f(x_k, \alpha). \quad (1.10)$$

avec un point fixe x^* où $x_k \in \mathbb{R}^n$ est la variable d'état et $\alpha \in \mathbb{R}^m$ est un paramètre de bifurcation. On dit que le système (1.10) a une bifurcation pour ($\alpha = \alpha_0$) s'il existe un changement de stabilité de sa solution x^* lorsqu'on modifie le paramètre α .

Définition 1.6.1

Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation [4].

Types des bifurcations :

Il existe plusieurs types de bifurcations selon les propriétés des secondes dérivées de la famille des fonctions $f(x_k, \alpha)$. Chaque bifurcation est caractérisée par son équation générale typique. Les différents types de bifurcations, pour les systèmes dynamiques discrets sont les bifurcations : noeud-col (ou tangente, ou pli), transcritique, Pitchfork et la bifurcation doublement de période (ou flip). Considérons l'équation non-linéaire générale du premier ordre (1.10) où f est définie de manière à avoir des dérivées continues par rapport à x et α . Alors on a les définitions suivantes (voir [20, 31, 2]) :

1. Bifurcation de type noeud-col (tangente, ou pli)

Définition 1.6.2

Nous disons qu'une bifurcation noeud-col s'est produite à α_0 si :

- (a) $f(x^*, \alpha_0) = x^*$.
- (b) $\frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial x}(x^*) = 1$.
- (c) $\frac{\partial f_{\alpha_0}^2}{\partial x^2}(x^*) \neq 0$.
- (d) $\frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial \alpha}(x^*) \neq 0$.

C'est une bifurcation caractérisée par l'apparition de deux cycles d'ordre k de stabilité différentes, à la bifurcation les deux cycles sont confondus et avec un multiplicateur S égal à 1.

Exemple 1.6.1 Soit le système défini par l'application :

$$f(x, \alpha) = x^2 + x + \alpha. \quad (1.11)$$

Les points fixes de (1.11) sont solutions de l'équation : $x^2 + x + \alpha = x$. Pour $\alpha > 0$, il n'y a pas de point fixe. Pour $\alpha = 0$, il y a un seul point fixe $x_1 = 0$. Pour $\alpha < 0$, il y a deux points fixes $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\alpha}$. L'itération (1.11) présente une bifurcation pli à $\alpha = 0$ au point fixe $x = 0$ avec un multiplicateur $f'_0(0) = 1$. Pour $\alpha < 0$, les multiplicateurs des points $x_1 = \sqrt{-\alpha}$ et $x_2 = -\sqrt{-\alpha}$ sont $2\sqrt{-\alpha} + 1 > 1$ (x_1 est répulsif) et $0 < -2\sqrt{-\alpha} + 1 < 1$ (x_2 est attractif) respectivement.

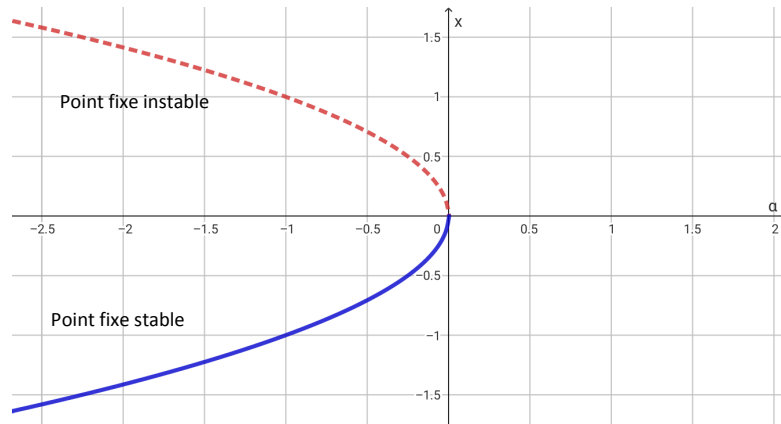


FIGURE 1.7 – Bifurcation pli.

2. La bifurcation transcritique

Définition 1.6.3

Nous disons qu'une bifurcation transcritique s'est produite à α_0 si :

- (a) $f(x^*, \alpha_0) = x^*$.
- (b) $\frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial x}(x^*) = 1$.
- (c) $\frac{\partial^2 f_{\alpha_0}}{\partial x^2}(x^*) \neq 0$.
- (d) $\frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial \alpha}(x^*) = 0$.

Sous une bifurcation transcritique deux équilibres distincts échangent leurs caractéristiques de stabilité. Donc si x_0 est un équilibre stable et x_1 un équilibre instable pour $\alpha < \alpha_0$ où α_0 est une valeur de bifurcation, alors pour $\alpha > \alpha_0$ x_1 serait stable tandis que x_0 perdrait sa stabilité.

Exemple 1.6.2

Considérons la fonction : $f(x, \alpha) = x(1 + \alpha - x)$. Les points fixes sont solutions de l'équation : $x(\alpha - x) = 0$, il y a donc deux branches de points fixes $\gamma_1(\alpha) = 0$ et $\gamma_2(\alpha) = \alpha$, les deux branches se croisent en point $\alpha_0 = 0$.

Pour étudier la stabilité de ces branches on commence par calculer la dérivée :

$f_x(x, \alpha) = 1 + \alpha - 2x$. Alors pour la première branche on a : $f_x(x, \gamma_1(\alpha)) = 1 + \alpha$. On déduit que si : $-2 < \alpha < 0$ cette branche est attractive, si $0 < \alpha$ elle est répulsive. Au point $\alpha_0 = 0$ on a : $f_x(0, 0) = 1$. Pour la deuxième branche on trouve : $f_x(x, \gamma_2(\alpha)) = 1 - \alpha$. Si $\alpha < 0$ cette branche est répulsive, si $0 < \alpha < 2$ elle est attractive. Au point $\alpha_0 = 0$ on a : $f_x(0, 0) = 1$. C'est donc est une bifurcation transcritique (voir figure 1.8)

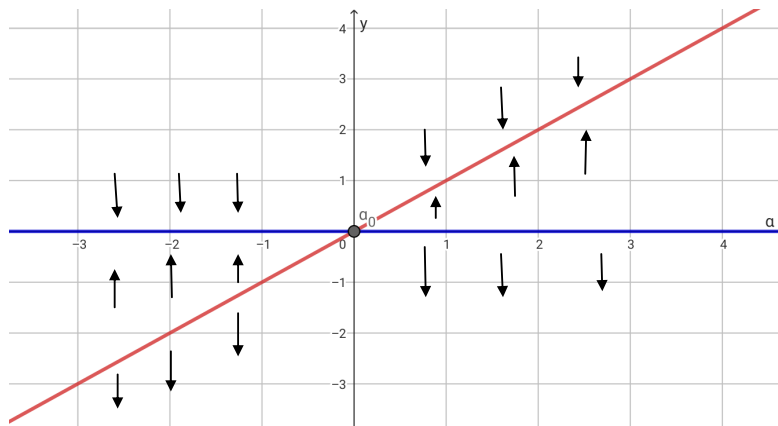


FIGURE 1.8 – Le diagramme de bifurcation transcritique du système $f(x, \alpha) = x(1 + \alpha - x)$.

3. Bifurcation fourche (Pitchfork)

Définition 1.6.4

Nous disons qu'une bifurcation Pitchfork s'est produite à α_0 si

- (a) $f(x^*, \alpha_0) = x^*$.
- (b) $\frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial x}(x^*) = 1$.
- (c) $\frac{\partial^2 f_{\alpha_0}}{\partial x^2}(x^*) = 0$.
- (d) $\frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial \alpha}(x^*) = 0$.

Dans ce cas, un équilibre stable (respectivement, instable) change sa stabilité et donne deux nouvelles branches d'équilibre qui prennent ses caractéristiques de stabilité antérieurs.

Exemple 1.6.3

Soit la fonction : $f(x, \alpha) = x(1 + \alpha - x^2)$. Les points fixes sont solutions de l'équation : $x(\alpha - x^2) = 0$, d'où trois branches de points fixes autour du point $\alpha = \alpha_0 = 0$. Pour $\alpha < 0$ il n'y a qu'une seule branche : $\gamma_1(\alpha) = 0$. Pour $\alpha > 0$ il y a deux autres branches qui apparaissent : $\gamma_2(\alpha) = \sqrt{\alpha}$, $\gamma_3(\alpha) = -\sqrt{\alpha}$. La branche $\gamma_1(\alpha)$ qui passe par le point (0,0) elle est attractive pour $\alpha < \alpha_0$ et répulsive pour $\alpha > \alpha_0$, les deux autres branches $\gamma_2(\alpha)$ et $\gamma_3(\alpha)$ sont attractives $\alpha > \alpha_0$.

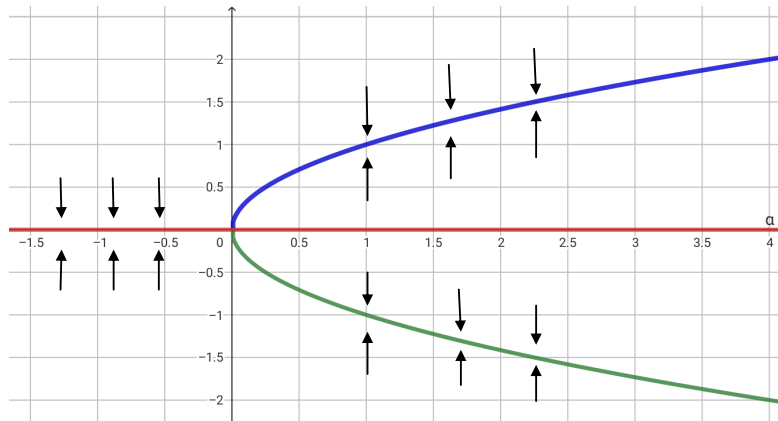


FIGURE 1.9 – Bifurcation fourche : $f_{\alpha,x} > 0, f_{xxx} < 0$.

4. Bifurcation doublement de période (flip)

Définition 1.6.5

Nous disons qu'une bifurcation de doublement de période s'est produite à α_0 si

- (a) $f(x^*, \alpha_0) = x^*, \forall \alpha \in]\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0 + \epsilon[$ pour quelques α_0 et $\epsilon > 0$.
- (b) $\frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial x}(x^*) = -1$.
- (c) $\frac{\partial^2 f_{\alpha_0}^2}{\partial x \partial \alpha}(x^*) \neq 0$.

Lorsqu'un cycle d'ordre k stable a un multiplicateur qui passe par la valeur $S = -1$. Ce cycle devient alors instable et donne naissance à un

cycle d'ordre $2k$ stable. Afin de clarifier ce genre de bifurcation nous traitons l'exemple suivant :

Exemple 1.6.4

Soit l'application logistique f définie par : $f(x, \alpha) = \alpha x(1 - x)$ avec α est le paramètre de bifurcation. L'application f présente une bifurcation doublement de période en $\alpha = 3$ au point fixe $x_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$ avec un multiplicateur $S = -1$. Le diagramme de bifurcation dans l'espace (α, x) est donné par la figure (1.10).

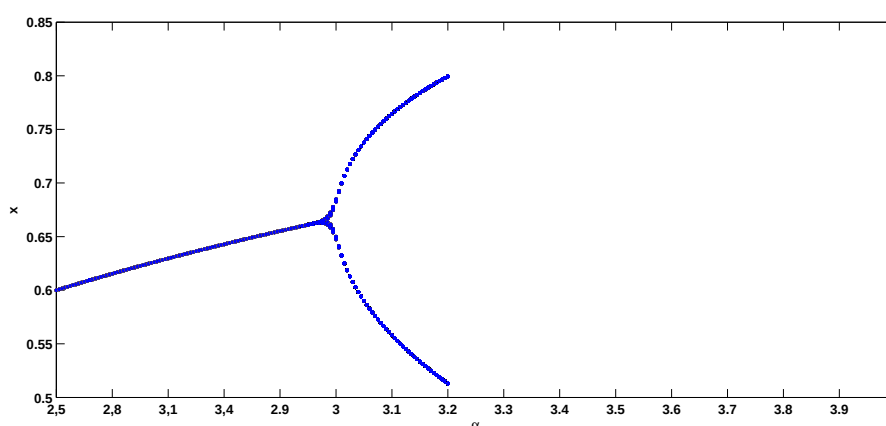


FIGURE 1.10 – Bifurcation doublement de période.

5. Bifurcation de Neimark-Sacker

Définition 1.6.6

La bifurcation correspondante à la présence de $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \pi$ est appelée une bifurcation de Neimark-Sacker. Elle est définie pour un système de dimension plus grand que 1, cette bifurcation est caractérisée par la naissance d'une courbe invariante fermée à partir d'un point fixe, lorsque le point fixe change la stabilité via une paire de valeurs propres complexes avec un module unitaire.

Exemple 1.6.5

Soit le système dynamique discret $(\mathbb{R}^2, \mathbb{N}, f)$ généré par la transformation f définie par :

$$f : \begin{cases} x_{k+1} = rx_k(1 - y_k), r > 0 \\ y_{k+1} = x_k \end{cases}$$

Cette application a deux points fixes (x_1, y_1) et (x_2, y_2) avec $x_1 = y_1 = 0$ et $x_2 = y_2 = 1 - \frac{1}{r}$.

La matrice jacobienne évaluée au point fixe (x_2, y_2) est :

$$J(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1-r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle a pour équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \lambda + r - 1 = 0$$

On déduit les valeurs propres :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - r}$$

Si $r > \frac{5}{4}$ les valeurs propres sont complexes avec $|\lambda_{1,2}|^2 = r - 1$. Pour $r = 2$, le point fixe (x_2, y_2) perd sa stabilité.

Les valeurs propres sont alors $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ et le système présente une bifurcation de Neimark-Sacker. La bifurcation est présentée sur la figure (1.11). (voir[32])

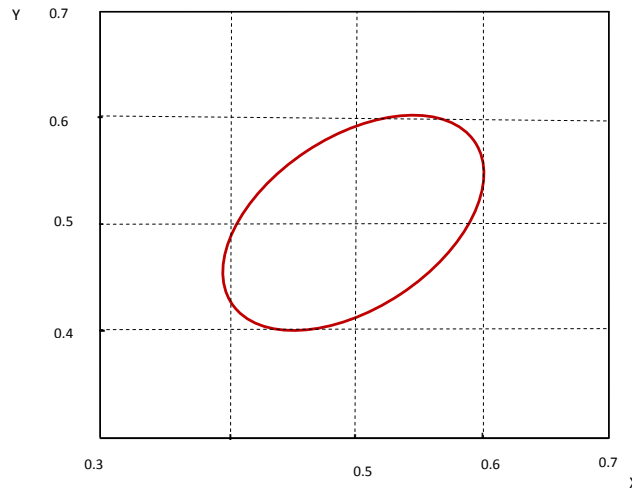


FIGURE 1.11 – Bifurcation de Neimark-sacker $\lambda = 2.01$.

CHAPITRE 2

SYSTÈMES CHAOTIQUES À TEMPS DISCRETS

Dans l'usage commun, le «chaos» signifie "un état de désordre". Cependant, dans la théorie du chaos, le terme est défini plus précisément. La théorie du chaos est un domaine des études en mathématiques, avec des applications dans plusieurs disciplines comme la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie, la météorologie, la sociologie et la philosophie. La théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales. De petites différences dans les conditions initiales produisent des résultats très divergents pour de tels systèmes dynamiques, ce qui rend la prévision à long terme impossible en général. Cela se produit même si ces systèmes sont déterministes, ce qui signifie que leur comportement futur est entièrement déterminé par leurs conditions initiales, sans éléments aléatoires impliqués. Ce comportement est connu sous le nom de chaos déterministe, ou tout simplement le chaos. Il n'existe pas de définition à la fois formelle et générale du chaos. Cependant, le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique qui inclut :

La non-linéarité : l'évolution irrégulière du comportement d'un système

chaotique est due aux non linéarités.

Le déterminisme : un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes.

La sensibilité : le système manifeste une très haute sensibilité aux changements de conditions.

L'imprévisibilité : en raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

L'irrégularité : l'ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques. [4]

2.1 Définitions du chaos

Un système chaotique est un système simple ou complexe, sensible aux conditions initiales et qui présente un caractère répétitif, une forte récurrence. Une petite perturbation peut entraîner une instabilité ou un déséquilibre gigantesque non prédictible à long terme. Ainsi les dispositifs simples peuvent donner lieu à des phénomènes complexes, il est l'inverse d'un système parfaitement régulier. On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématiques du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle du chaos. [27]

Parmi les définitions les plus courantes du chaos, on trouve :

-Chaos au sens de Devaney

Définition 2.1.1

Soit E un ensemble. L'application $f : E \rightarrow E$ est dite chaotique sur E si :

- 1. f possède une sensibilité aux conditions initiales,*
- 2. f est topologiquement transitive,*
- 3. les points périodiques sont denses dans E . [33]*

Définition 2.1.2

$f : E \rightarrow E$ est dite topologiquement transitive si pour toute paire d'ensembles ouverts U, V il existe $k > 0$ tel que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Définition 2.1.3

Supposons que X est un ensemble et Y un sous-ensemble de X . Y est dense dans X si pour n'importe quel élément $x \in X$, il existe un élément y dans le sous ensemble Y arbitrairement proche de x , c'est-à-dire si la fermeture de Y égale à X . Ce qui revient à dire que Y est dense dans X si pour tout $x \in X$ on peut trouver une séquence des points $\{y_n\}$ qui convergent vers x .

2.2 Caractéristiques du chaos

2.2.1 Sensibilité aux conditions initiales

Définition 2.2.1

On dit qu'une application d'un intervalle I est sensible aux conditions initiales s'il existe $v > 0$ tel que pour tout $x_0 \in I$ et $\delta > 0$, il existe $y_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ et un entier positif k tel que $|f^k(x_0) - f^k(y_0)| \geq v$.

Le nombre v sera appelé la constante de sensibilité de f . La fonction la plus simple à dépendance sensible est l'application linéaire $f(x) = cx$, $c > 1$. Pour les points initiaux x_0 et $x_0 + \delta$, nous avons $f^k(x_0 + \delta) - f^k(x_0) = c^k(x_0 + \delta) - c^k x_0 = c^k \delta$. Par conséquent, $|f^k(x_0 + \delta) - f^k(x_0)|$ augmentera jusqu'à ∞ lorsque k tend vers ∞ , quelle que soit δ plus petit. Cependant, cette application linéaire n'est pas un exemple intéressant car elle ne possède aucune des autres propriétés du chaos. [30]

2.2.2 Exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov sont un outil qui sert à mesurer la divergence entre deux orbites qui découlent des conditions initiales très proches voisines. Les exposants de Lyapunov permettent d'affirmer la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique. Le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases. [16]

- Calcul des exposants de lyapunov :

- Cas d'une application discrète unidimensionnelle

Considérons le système dynamique défini par l'application suivante :

$x_{k+1} = f(x_k)$, tel que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Choisissons deux conditions initiales très proches, soient x_0 et $x_0 + \epsilon$, regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentielle. On pourra trouver un réel λ tel qu'après k itérations on a : $\epsilon \exp(k\lambda) \cong |f^k(x_0 + \epsilon) - f^k(x_0)|$ d'où $k\lambda \cong \ln |f^k(x_0 + \epsilon) - f^k(x_0)|$

et pour $\epsilon \rightarrow 0$ on a :

$$\begin{aligned} \lambda &\cong \frac{1}{k} \ln \left| \frac{df^k(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{k} \ln \left| \frac{df^k(x_0)}{df^{k-1}(x_0)} \cdot \frac{df^{k-1}(x_0)}{df^{k-2}(x_0)} \cdots \frac{df^1(x_0)}{df^0(x_0)} \right| \\ &\cong \frac{1}{k} \ln \left| \frac{d(x_{k-1})}{dx_{k-1}} \cdot \frac{d(x_{k-2})}{dx_{k-2}} \cdots \frac{d(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln |f'(x_i)| \end{aligned}$$

finalement pour $k \rightarrow \infty$ on a :

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln |f'(x_i)|$$

avec $f'(x_i) = \frac{df(x_i)}{d(x_i)}$.

λ est appelé exposant de Lyapunov il indique le taux moyen de divergence entre deux trajectoires distinctes, à partir de deux conditions initiales très proches.

- Si $\lambda > 0$ alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.
- Si $\lambda < 0$ les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales. Appliquant la formule précédente pour $x_i = x^*$ tel que x^* est le point d'équilibre, il faut que : $\lambda = \ln |f'(x^*)|$

– Cas d'une application discrète multidimensionnelle

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tq : $x_{k+1} = f(x_k)$. Un système de dimension n possède n exposants de Lyapunov λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système. Pour le calculer

de l'exposant de lyapunov, nous partons d'un point initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pour caractériser le comportement autour du point x_k par la matrice jacobienne $J(x_i)$:

$$J(x_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_i^1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_i^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_i^1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_i^n} \end{pmatrix}$$

Notons : $J(x_{k-1}) \dots J(x_0) = \prod_{i=1}^k J(x_i)$ avec : $J_0 = J(x_0)$ par $J^k(x_i)$, est la matrice jacobienne de f^k au point x_0 ; $\sigma_1(f^k(x)) \dots \sigma_n(f^k(x))$ les valeurs propres de $J^k(x_i)$. On définit alors les n exposant de Lyapunov de la manière suivante : $\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |\sigma_i(f^k(x_0))|$, $i = 1, 2, \dots, n$

-Pour le point d'équilibre x^* la formule précédant devient :

$$\lambda_i = \ln |\sigma_i(x^*)|, i = 1, 2, \dots, n.$$

2.2.3 Dimension fractale

Durant le calcul de la dimension de l'attracteur d'un système chaotique, nous obtenons une valeur positive non entière, cela signifie que le système possède un attracteur étrange. Plusieurs dimensions ont été proposées telles que la dimension de Kolmogorov, dimension de corrélation, dimension de Lyapunov.

Il y a une différence légère entre chacune de ces dimensions, mais elles caractérisent toutes, l'attracteur étrange avec sa dimension fractale et satisfont les trois propriétés suivantes :

1. $A \subset B \Rightarrow \dim(A) \leq \dim(B)$.
2. $A = \emptyset \Rightarrow \dim(A) = -\infty$.
3. $\dim(A \times B) = \max(\dim(A), \dim(B))$. [3]

Il existe plusieurs type de dimensions pour les attracteurs chaotiques, parmi celle-ci on cite :

1-Dimension de Lyapunov

Paramètre permettant de mesurer la dimension du chaos. Suivant le type du chaos généré, la dimension de Lyapunov est plus ou moins grande : pour des systèmes non retardés (dimension finie) tels que les systèmes de Lorenz ou Rössler, la dimension de Lyapunov est au maximum égale au nombre de variables du système (dimension faible), alors que pour les systèmes à retard (dimension infinie) la dimension de Lyapunov tend vers de grandes valeurs. Plus la dimension sera grande, plus la complexité du chaos sera élevée. Classant les exposants de Lyapunov $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ la dimension de Lyapunov dim_L est définie par :

$$dim_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{\lambda_{j+1}}$$

Où j est le plus grand entier qui satisfait :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \dots, \lambda_j \geq 0. \text{ [21]}$$

2- Dimension de capacité (Kolmogorov)

Soit X un ensemble de points de l'attracteur, on recouvre X par un nombre minimal $N(\epsilon)$ d'hypercube de côté ϵ . (voir[3])

-Si X est un carré de côté L , il peut être recouvert par $N(\epsilon) = \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^2$ petits carrés de côtés ϵ .

-Dans le cas général, on a :

$$N(\epsilon) = \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^d, d = \frac{\log N(\epsilon)}{\log L - \log \epsilon}, \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0, \log L < -\log \epsilon.$$

Définition 2.2.2

La dimension de kolmogorov (capacité) a défini par :

$$dim_c = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon}.$$

2.2.4 Attracteur chaotique

Une définition d'un attracteur étrange peut être formulée ainsi : un sous-ensemble borné A de l'espace est un attacteur étrange pour l'application f de l'espace s'il existe un voisinage V de A vérifiant les propriétés suivantes :

- **Attraction :**

V est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par f dont le point initial est dans V est entièrement contenue dans V . De plus, toute orbite devient et reste aussi proche de A que l'on veut.

– **Sensibilité :**

Les orbites dans le point initial sont dans V et extrêmement sensibles aux conditions initiales.

– **Fractal :**

A admet une structure fractale.

– **Mélange :**

Pour tout point de A , il existe des orbites démarrées dans V qui passent aussi près que l'on veut de ce point. [24]

Exemple 2.2.1 (l'application logistique)

Le système chaotique le plus connu est l'application logistique, cette fonction a été proposée par le biologiste May en 1976 pour représenter de manière très simplifiée l'évolution annuelle d'une population d'insectes. La fonction logistique très connue dans la théorie des systèmes non linéaires, est une application non bijective du domaine $[0, 1]$ dans lui-même qui sert de récurrence à la suite :

$x_{k+1} = \alpha x_k(1 - x_k)$ où $(k = 0, 1, \dots)$ dénote le temps discret, x la variable dynamique et α un paramètre réel.

– **Sensibilité aux conditions initiales**

La sensibilité aux conditions initiales de la fonction logistique est illustrée sur la figure (2.1) pour deux conditions initiales très proches $x_1 = 0.2$ et $x_2 = 0.2001$ avec $\alpha = 3.9$.

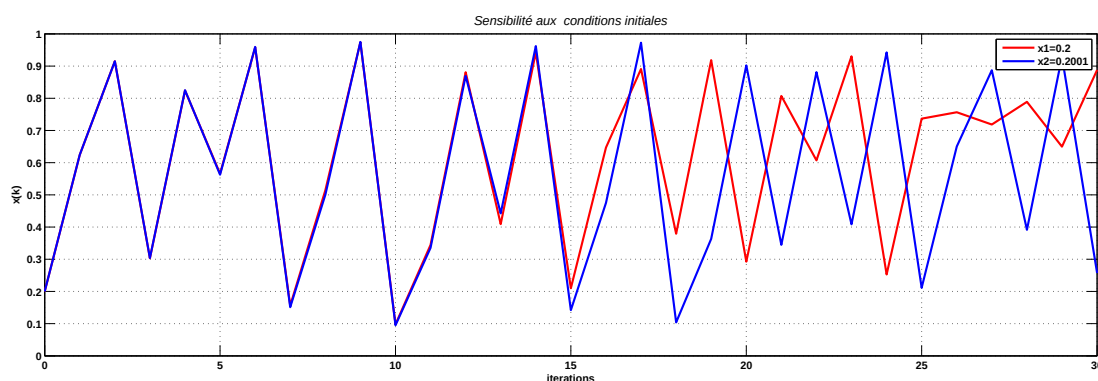


FIGURE 2.1 – Sensibilité aux conditions initiales de la fonction logistique pour $x_1 = 0.2$ et $x_2 = 0.2001$

– *L'exposant de lyapunov*

Nous avons vu précédemment la fonction logistique est défini par :

$$x_{k+1} = \alpha x_k(1 - x_k).$$

Pour $\alpha = 4$ les points fixes sont : $x_1^* = 0$ et $x_2^* = \frac{3}{4}$.

En utilisant la formule $\lambda = \ln|f'(x^*)|$ pour calculer l'exposant de Lyapunov de la fonction logistique on trouve $\lambda = \ln|4(1 - 2x_2^*)| = \ln 2 > 0$, d'où la comportement est chaotique au voisinage de x_2^* . [29]

2.3 Scénarios de transition vers le chaos

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage vers le chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changement discontinus qu'on a déjà appelés bifurcations. On peut citer trois scénarios de transition d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre. [11, 19, 15]

1-Par doublement de période

Ce scénario est le plus connu. Par augmentation du paramètre de contrôle de l'expérience, la fréquence du régime périodique double, puis est multipliée par 4, par 8, par 16 (etc). Les doublements étant de plus en plus rapprochés, on tend vers un point d'accumulation auquel on obtiendrait hypothétiquement une fréquence infinie. C'est à ce moment que le système devient chaotique. Il a été étudié en particulier la dynamique de populations par R.May sur l'application logistique, $x_{k+1} = \alpha x_k(1 - x_k)$. Selon la valeur du paramètre α , la suite converge soit vers un point fixe nul ou pas. Dès que α est plus grand que 3 le système bifurque, c'est à dire qu'il oscille entre deux valeurs autour du point fixe. On parle d'attracteur point périodique de période 2. En continuant à augmenter α , ces deux attracteurs s'écartent du point fixe jusqu'à ce qu'une nouvelle bifurcation ait lieu. Chaque point se dédouble et on obtient un cycle attracteur de période 4. On dit qu'il y

a doublement de période. C'est à partir de cet exemple que Feigenbaum pressentit l'existence d'une forme d'universalité dans cette transition vers le chaos sous forme de cascade de doublement de période.

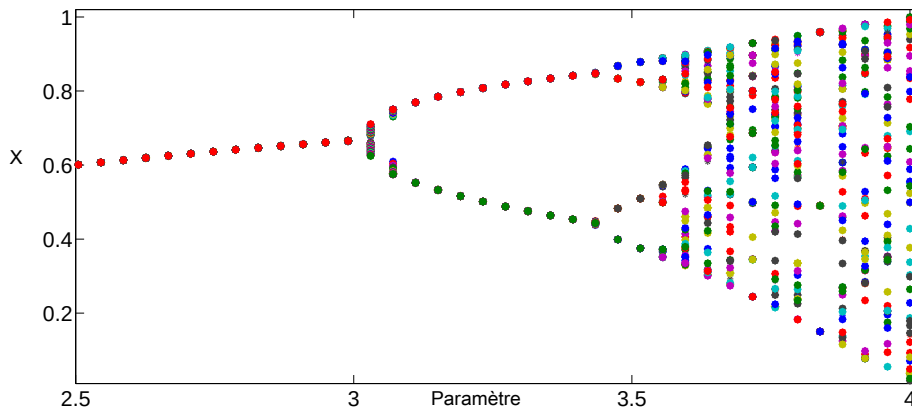


FIGURE 2.2 – Cascade de doublements de période

2- Par intermittences

Ce scénario via les intermittences se caractérise par l'apparition erratique de bouffées chaotiques dans un système qui oscille de manière régulière. Le système conserve pendant un certain laps de temps un comportement périodique ou pratiquement périodique, c'est à dire une certaine "régularité", et il se déstabilise, brutalement, pour donner lieu à une sorte d'explosion chaotique. Il se stabilise de nouveau ensuite, pour donner lieu à une nouvelle "bouffée" plus tard. On a constaté que la fréquence et la durée des phases chaotiques avaient tendance à s'accroître plus on s'éloignait de la valeur critique de la contrainte ayant conduit à leur apparition. L'intermittence suppose en particulier que le cycle limite (correspondant à l'état périodique d'où est issu ce phénomène de transition) bifurque de façon sous-critique et qu'il n'y ait pas d'attracteur à proximité. C'est ce que l'on observe dans le système de Rössler.

3- Quasi-périodicité

Ce scénario a été confirmé par de nombreuses expériences dont les plus célèbres se trouvent en thermo-hydrodynamique convection de Rayleigh-Bénard dans une petite boîte et en chimie réaction de Bélousov-Zabotinsky. Cette route vers le chaos résulte de la "concurrence" de différentes fréquences

dans le système dynamique. Dans un système à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle, le comportement est périodique, mais si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Dans ce cas les trajectoires couvrent la surface d'un tore. Alors on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence, et ainsi de suite jusqu'au chaos.

CHAPITRE 3

OLIGOPOLISTIQUE

3.1 Terminologie et définitions

1. Micro-économie :

la micro-économie est une branche de l'économie qui modélise le comportement des agents économiques (ménages, consommateurs, entreprises ...) et leurs interactions notamment sur les marchés.

2. Marché :

Le marché est le lieu de rencontre entre l'offre et la demande afin d'effectuer un échange de bien ou d'un service en contre partie d'un prix.

3. Théorie des jeux :

La théorie des jeux est un domaine des mathématiques qui propose une description formelle d'interactions stratégiques entre agents (joueurs).

4. Stratégie concurrentielle :

La stratégie concurrentielle est l'ensemble des moyens mis en oeuvre pour disposer d'avantages sur ses concurrents. Elle est importante pour l'image de l'entreprise auprès des consommateurs.

5. Oligopole :

L'oligopole est une structure de marché dans laquelle il existe un petit

nombre d'offreurs et plusieurs demandeurs.

6. Monopole :

est une structure de marché dans laquelle il existe un seul offreur et plusieurs demandeurs.

7. Concurrence pure et parfaite :

La concurrence pure et parfaite est un marché dans lequel les vendeurs et les acheteurs n'ont pas d'influence sur les prix en raison de : l'atomocité de l'offre et de la demande, l'homogénéité des produits, la transparence de l'information et de la libre entrée et sortie sur le marché.

8. Duopole :

Le duopole désigne une forme plus simple d'un oligopole caractérisée par deux entreprises offrant un même produit ou service.

9. Duopole de cournot :

Le duopole de cournot est une situation de marché dans laquelle les deux firmes qui dominent le marché vendent des biens (services) similaires et elles sont en compétition sur la quantité, elles décident quelle quantité produire simultanément.

10. Equilibre de Nash :

Dans la théorie des jeux l'équilibre de Nash est une situation où chaque joueur prévoit correctement le choix des autres et maximise son gain compte tenu de cette prévision.

3.2 Modélisation mathématique en économie à l'aide des équations aux différences

Les systèmes dynamiques temporels discrets apparaissent naturellement dans la modélisation économique et sociale, parce que les changements dans l'état d'un système résultent de décisions qui ne peuvent pas être révisées en permanence (temps déterminé). Par exemple, les décisions de la production ne peuvent être modifiées qu'après les réunions d'un conseil

d'administration, ou après les conclusions de contrats, en tenant compte du retard de la production (un cas exemplaire se produit pour les productions agricoles, dont le montant ne peut être modifié qu'à la saison des semailles).

Equations aux différences en économie

Une équation aux différences exprime le taux de changement de l'état actuel comme une fonction de l'état actuel. L'illustration simple de ce type adopté est due au changement du (G.D.P : Gross Domestic Product) au fil des ans. Considérant le (G.D.P) de l'économie dans l'année t comme variable d'état dans la période t , qui est indiqué par $x(t)$, et le taux de variation du (G.D.P) est constant. Ensuite, le mouvement du (G.D.P) est décrit mathématiquement comme :

$$\frac{x(t+1) - x(t)}{x(t)} = g$$

le taux de croissance g est donné à chaque année, le (G.D.P) dans la période t est donné en résolvant cette équation

$$x(t+1) = (1+g)x(t).$$

Si nous connaissons le (G.D.P) d'une année spéciale, $x(0)$, alors le (G.D.P) de l'année t est donné par : $x(t) = x(0)(1+g)^t$. [33]

En fait, si nous connaissons le (G.D.P) d'une année particulière, l'équation prédit le (G.D.P) à tout moment. Nous pouvons résoudre explicitement la fonction au différence ci-dessus car g est constante. Il est raisonnable de considérer que le taux de croissance est affecté par de nombreux facteurs, tels que l'état actuel du système économique, la connaissance de l'économie et l'environnement international. Lorsque le taux de croissance n'est pas constant et qui est considéré comme affecté par l'état actuel et d'autres facteurs exogènes tels que les conditions économiques mondiales (qui sont mesurées par la variable t), alors la croissance économique est décrite par :

$$\frac{x(t+1) - x(t)}{x(t)} = g(x(t), t)$$

3.2.1 Systèmes économiques de dimension 1

– Modèle de croissance sectorielle (O.S.G)

Nous représentons un modèle de croissance à un seul secteur (O.S.G) en temps discret, le passage du temps dans une séquence de périodes, numéroté à partir de zéro et indexé par $t = 0, 1, 2, \dots$

Le Temps 0, mentionné au début de la période 0 représente la situation initiale à partir de laquelle l'économie commence à croître. La fin de la période $t - 1$ coïncide avec le début de la période (temps) t . Nous supposons que les transactions sont effectuées à chaque période. Le modèle suppose que chaque individu vit éternellement. (voir [33]) La population augmente à taux n ; ainsi

$$N(t) = (1 + n)N(t - 1).$$

Chaque individu fournit une unité de travail à chaque fois t . La production en période t utilise le montant $K(t)$ du capital et le montant $N(t)$ des services de main-d'oeuvre. Il fournit la quantité $Y(t)$ des marchandises. Ici, la production est supposée continue pendant la période, mais utilisant ensuite le même capital qui existait au début de la période. La fonction de production est

$$F(K(t), N(t)) = AK^\alpha(t)N^\beta(t), \quad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha, \beta > 0.$$

La fonction de production a des rendements (retours) d'échelle constants. Les marchés sont concurrentiels ; ainsi le travail (main-d'oeuvre) et le capital gagnent leurs produits marginaux, les entreprises ne font aucun profit. Supposons que la dépréciation soit proportionnelle au capital et indique le taux de dépréciation par δ_k . Le montant total de la dépréciation est égal à $\delta_k K(t)$. Le taux d'intérêt réel et le salaire du travail sont donné par :

$$r(t) + \delta_k = \frac{\alpha F(t)}{K(t)}, \quad w(t) = \frac{\beta F(t)}{N(t)}.$$

Il existe un certain stock de capital initial K_0 qui est détendu à parts égales par tous les individus à la période initiale. Nous écrivons les conditions

marginale de l'intensité capitaliste :

$$\begin{aligned} r(t) + \delta_k &= \alpha AK^{-\beta}(t). \\ w(t) &= \beta AK^{-\beta}(t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Où $k(t) = K(t)/N(t)$. Nous modélisons maintenant le comportement des consommateurs, ils obtiennent un revenu au cours de la période t du paiement des intérêts $r(t)K(t)$ et du salaire $w(t)N(t)$.

$$Y(t) = r(t)K(t) + w(t)N(t).$$

Nous appelons $Y(t)$ le revenu actuel. La valeur totale de la richesse que les consommateurs peuvent vendre pour acheter des biens et économiser est égal à $K(t)$. Le revenu disponible brut est égal à

$$\hat{Y}(t) = Y(t) + K(t).$$

Le revenu disponible brut sert à l'épargne et à la consommation. Au cours de la période t , les consommateurs répartiraient le budget total disponible entre les économies $S(t)$ et la consommation de biens $C(t)$. La contrainte budgétaire est donnée par

$$C(t) + s(t) = \hat{Y}(t).$$

Nous supposons que le niveau d'utilité $U(t)$ que les consommateurs obtiennent dépend du niveau de consommation du bien $C(t)$ et l'économie nette $S(t)$ en période t . Nous utilisons la fonction d'utilité Cobb-Douglas pour décrire la préférences des consommateurs

$$U(t) = C^\xi(t)S^\lambda(t), \quad \xi + \lambda = 1, \quad \xi, \lambda > 0,$$

où ξ et λ sont respectivement les propensions à consommer des biens et la richesse propre.

Les ménages maximisent les bénéfices sous réserve des contraintes budgétaires, nous résolvons le choix optimal des consommateurs comme : $C(t) = \xi \hat{Y}(t)$, $S(t) = \lambda \hat{Y}(t)$.

Le montant $K(t + 1)$ dans la période t est égal à l'épargne réalisée dans la période t , c'est-à-dire $K(t + 1) = S(t)$. Comme la valeur initiale K_0 et la force de travail $N(t)$ sont exogènes, l'équation ci-dessus nous permettons de calculer récursivement tous les $K(t)$. Le Capital $K(1)$ est obtenu de K_0 et N_0 ; $K(2)$ est obtenu de $K(1)$ et $N(1)$, ...

Ensuite, nous calculons directement $r(t)$, $w(t)$, $S(t)$ et $C(t)$ à partir des équations associées. Nous réécrivons maintenant la dynamique par habitant.

Avec

$$S(t) = \lambda \hat{Y}(t)$$

et

$$\hat{Y}(t) = AK^\alpha(t)N^\beta(t) + \delta K(t),$$

où $\delta = 1 - \delta_k$, l'accumulation du capital $K(t + 1) = S(t)$, est donné par

$$K(t + 1) = \lambda AK^\alpha(t)N^\beta + \lambda \delta K(t).$$

La division de l'équation ci-dessus par N donne

$$\frac{K(t + 1)}{N(t)} = \lambda AK^\alpha(t) + \lambda \delta K(t)$$

En Substituant

$$N(t) = \frac{N(t + 1)}{1 + n}$$

dans l'équation ci-dessus, nous avons

$$(1 + n)k(t + 1) = \lambda Ak^\alpha(t) + \lambda \delta k(t). \quad (3.2)$$

Il s'agit d'une équation aux différences non linéaire dans $k(t)$. Nous pouvons réécrire cette équation comme :

$$k(t + 1) = \Psi(k(t)) = (Ak^\alpha(t) + \delta K(t)) \frac{\lambda}{1 + n}$$

Pour que cette équation aux différences soit en état d'équilibre, nous avons $k(t + 1) = k(t) = k^*$. La substitution de cette condition dans l'équation (3.2) donne $(1 + n - \lambda \delta)k^* = \lambda Ak^{*\alpha}$.

L'équation a une solution positive unique $K^* = \left(\frac{\lambda A}{1 + n - \lambda \delta} \right)$. Il est facile de montrer $\frac{d\Psi(K(t))}{dk(t)}|_{k(t)=K^*} = \alpha + \frac{\beta \delta \lambda}{1 + n} < \alpha + \beta = 1$. Nous concluons que l'unique point d'équilibre est stable, la figure (3.1) montre la relation entre $k(t + 1)$ et $k(t)$, que nous exprimons par $k(t + 1) = \Psi(K(t))$ la pente de $\Psi(K(t))$ est infinie à $k(t) = 0$ et diminue vers une constante $\lambda \delta < 1 + n$. La fonction $\Psi(K(t))$ traverse la droite $k(t + 1) = K(t)$ à la valeur d'état stable k^* . Le stock du capital s'approche monotonement de son point d'équilibre unique au fil du temps. Le point d'équilibre est stable car la courbe $\Psi(K(t))$ est toujours ascendante en pente et elle traverse la droite $k(t + 1) = K(t)$ par le haut.

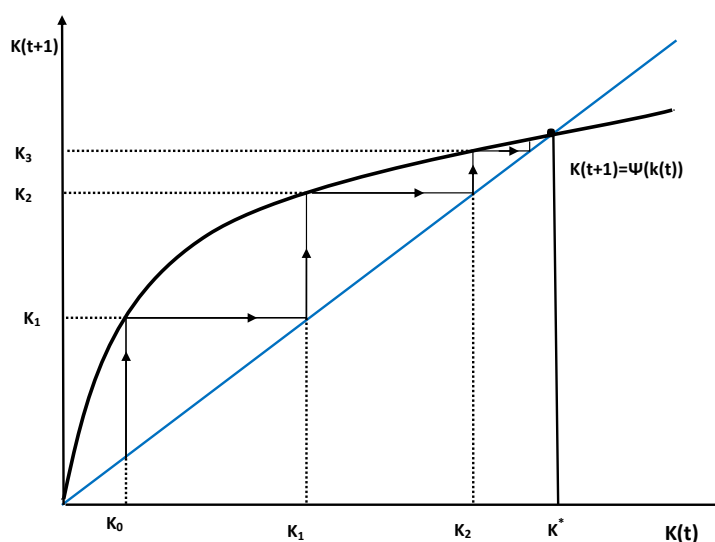


FIGURE 3.1 – Dynamique dans le modèle O.S.G

3.2.2 Systèmes économiques de dimension supérieurs

– Chômage, inflation et chaos

Cette section présente un modèle de flux de travailleurs avec un débit de sortie non linéaire du chômage (voir [33]). Le modèle est proposé par

Neugart. Le chômage $U(t)$ à période t est identifié comme suit :

$$U(t+1) - U(t) = i(L - U(t)) - o(t)U(t), \quad (3.3)$$

où $i > 0$ désigne le taux d'entrée (exogène), $L = 1$ la population active (la force de travail) et $o(t)$ est le taux de sortie de chômage. Ici, le taux de sortie de fraction des emplois qui arrivent sur le marché au moment t pour les demandeurs d'emplois, c-à-d :

$$o(t) = \frac{J(t)}{U(t) + d(1 - U(t))}$$

où le paramètre $0 < d < 1$ donne les chercheurs en cours d'emploi comme une fraction constante des travailleurs salariés et $J(t)$ indique les créations d'emplois. Nous spécifions :

$$J(t) = J_s + \gamma(m - \pi(t))$$

où J_s est la création d'emplois en raison des caractéristiques structurelles de l'économie $\gamma(m - \pi(t))$ décrit la composante cyclique des créations d'emplois, où γ est un paramètre positif, m le taux de croissance monétaire exogène et $\pi(t)$ le taux d'inflation à t . Par conséquent, le taux de sortie du chômage peut être exprimé

$$o(t) = \frac{J_s + \gamma(m - \pi(t))}{U(t) + d(1 - U(t))}$$

La substitution de l'équation ci-dessus dans l'équation (3.3) donne

$$U(t+1) = i - \left[(1-i) + \frac{J_s + \gamma(m - \pi(t))}{U(t) + d(1 - U(t))} \right] U(t) = \Lambda(U(t), \pi(t)) \quad (3.4)$$

Supposons que les entreprises ne peuvent pas augmenter leurs prix dans la même mesure que les salaires nominaux augmentent à t . Cette hypothèse se reflète dans l'exigence de $\delta > 1$ dans la formation suivante de la dynamique

du taux d'inflation.

$$\pi(t) = \frac{1}{\delta} \left(\pi^e(t) + \frac{w_b(t) - w_p}{w_p} \right), \quad (3.5)$$

où $\pi(t)$ est le taux d'inflation à t , $\pi^e(t)$ est le taux d'inflation attendu à t , $w_b(t)$ est le taux de salaire négocié à t et w_p est le prix du salaire réel déterminé (qui égale $(1 - \mu)y$, où $0 < \mu < 1$ est la marge fixe et $y = 1$ est la productivité marginale constante). Le salaire réel négocié $w_b(t)$ est donné par

$$w_b(t) = y - (1 - b)U(t)$$

où $0 < b < 1$ est le "salaire de réserve". L'anticipation d'inflation est formée par

$$\pi^e(t) = a\pi(t - 1) + (1 - a)\pi^e(t - 1),$$

où $0 \leq a \leq 1$ est le taux moyen pondéré. Sous ces hypothèses, nous pouvons réécrire l'équation (3.5) comme

$$\pi(t + 1) = \frac{1}{\delta} \left(\pi^e(t + 1) + \frac{\mu - (1 - b)U(t + 1)}{1 - \mu} \right). \quad (3.6)$$

À partir de cette équation et

$$\pi^e(t + 1) = a\pi(t) + (1 - a)\pi^e(t),$$

nous avons

$$\delta\pi(t + 1) = a\pi(t) + (1 - a)\pi^e(t) + \frac{\mu - (1 - b)U(t + 1)}{1 - \mu}.$$

En substituant cette équation à l'équation (3.6) pour t , nous résolvons

$$\pi(t + 1) = \frac{a\mu}{\mu_0\delta} + \left(\frac{a}{\delta} + (1 - a) \right) \pi(t) - \frac{ab_0}{\mu_0\delta} \Lambda(U(t), \pi(t)) = \Phi(U(t), \pi(t)), \quad (3.7)$$

où $b_0 = 1 - b$, $\mu_0 = 1 - \mu$. Le système dynamique se compose d'équations

(3.4) et (3.7), c'est-à-dire

$$\begin{cases} U(t+1) = \Lambda(U(t), \pi(t)). \\ \pi(t+1) = \Phi(U(t), \pi(t)). \end{cases} \quad (3.8)$$

Un point fixe est donné par

$$U = \Lambda(U, \pi), \quad \pi = \Phi(U, \pi).$$

On impose qu'à un état stable $\pi^* = m$ l'inflation égale au taux de croissance monétaire. Le système a un état stable unique

$$(U^*, \pi^*) = \left(\frac{\mu + m\mu_0(1 - \delta)}{b_0}, m \right)$$

à condition que

$$0 \leq \mu + m\mu_0(1 - \delta) \leq b_0$$

La matrice jacobienne J est donnée par

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Où

$$a_{11} = \left. \frac{\partial \Lambda(U, \pi)}{\partial U} \right|_{(U^*, \pi^*)} = 1 - i - \frac{(1 - U^*)id}{(U^* + d(1 - U^*))U^*}.$$

$$a_{12} = \left. \frac{\partial \Lambda(U, \pi)}{\partial \pi} \right|_{(U^*, \pi^*)} = \frac{\gamma U^*}{U^* + d(1 - U^*)}.$$

$$a_{21} = \left. \frac{\partial \Phi(U, \pi)}{\partial U} \right|_{(U^*, \pi^*)} = \frac{b_0}{\delta \mu_0} (1 - a - a_{11}).$$

$$a_{22} = \left. \frac{\partial \Phi(U, \pi)}{\partial \pi} \right|_{(U^*, \pi^*)} = \frac{1}{\delta} \left(a + (1 - a)\delta - \frac{b_0 a_{12}}{\mu_0} \right).$$

Nous fournissons maintenant exemples numériques réalisés par Neugart. Comme discuté par Neugart, il est raisonnable de choisir les paramètres suivants

$$a = 0.5, \delta = 2, b = 0.5, \gamma = 0.5. \quad (3.9)$$

Sous (3.9), si nous précisons $d = 0.01$, $m = 0.03$, $i \approx 0.13199$, alors une valeur propre est égale à -1 ; une bifurcation doublement de période se produit. Elle peut être montré que sous (3.9), la valeur propre avec une racine positive ne se croise jamais 1. La figure (3.2) illustre le diagramme de bifurcation de U sur i sous (3.9) et $d = 0.01$, $m = 0.03$. Les augmentations de $i \approx 0.13199$ mèneront à d'autres bifurcations. Mathématiquement, le mécanisme dynamique est similaire aux bifurcations observées pour l'application de Hénon.

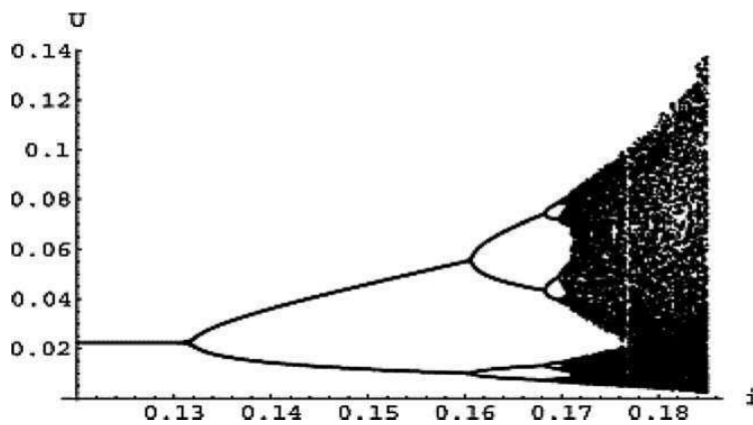


FIGURE 3.2 – Diagramme de bifurcation du chômage par rapport aux taux d'entrée.

La figure (3.3) montre l'existence d'un attracteur avec le taux d'inflation sur le taux de chômage lorsque les paramètres sont spécifiés comme dans (3.9) et $d = 0.01$, $m = 0.03$, $i = 0.18$.

L'attracteur ressemble à une courbe de Phillips. Néanmoins, dans ce modèle, il n'y a pas d'arbitrage stable entre le taux d'inflation et le taux de chômage. Le système se déplace de haut en bas d'une "courbe" à pente négative de manière erratique.

Une paire de taux de chômage et d'inflation aujourd'hui ne permettent pas de savoir où se situera l'économie à long terme.

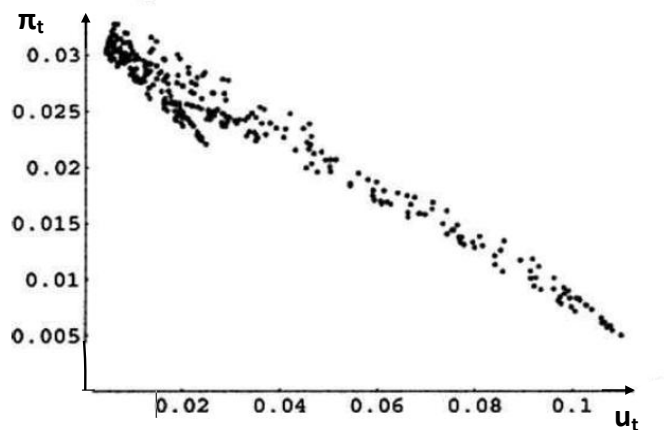


FIGURE 3.3 – Attracteur

3.3 Modèles oligopolistiques

L'oligopole : désigne une situation de marché dans laquelle quelques entreprises font face à une multitude d'acheteurs. Toute décision d'une entreprise a des conséquences sur les autres. Les entreprises peuvent adopter un comportement selon les analyses de Cournot, Bertrand ou Stackelberg. Elles peuvent se livrer à une guerre des prix pour conquérir le marché ou s'entendre entre elles et former un cartel. Lorsque les entreprises ne coopèrent pas entre elles, les décisions permettent rarement de parvenir à une situation optimale. C'est tout l'intérêt de l'apport de la théorie des jeux.

3.3.1 Quelques types des modèles oligopolistiques

1. Modèle duopole de Cournot

Considérons deux firmes qui produisent dans la période t des quantités $q_1(t)$ et $q_2(t)$ de biens homogènes et les vendent sur le même marché caractérisé

par une fonction de demande inverse $p = D^{-1}(Q) = f(Q)$, où $Q = q_1 + q_2$ est la quantité totale produite et $C_i(q_1, q_2)$, $i = 1, 2$, sont les fonctions de coût respectives (généralement la fonction de coût de firme i dépend seulement de sa propre production q_i , mais en général on ne peut pas exclure les externalités de coûts, positives ou négatives, en raison de la présence d'un concurrents) puis les profits des deux firms sont donnés par

$$\pi_i(q_1, q_2) = pq_i - C_i = f(Q)q_i - C_i(q_1, q_2)$$

Par conséquent, le profit de chaque entreprise dépend également de la production de l'autre (voir [10]). À chaque fois t firme résout un profit problème de maximisation afin de décider de la production $q_i(t+1)$ à vendre après le retard de production $\Delta t = 1$. Cependant, au moment t la firme ne connaît généralement pas la décision de production de l'autre, donc une valeur attendue doit être considérée dans les problèmes de maximisation

$$q_i(t+1) = \arg \max_{q_i(t+1)} \Pi_i(t+1) = \arg \max_{q_i} [f(q_i + q_{-i}^e(t+1))q_i - C_i(q_i, q_{-i}^e(t+1))] \quad (3.10)$$

où la notation q_{-i} indique la production du concurrent de firme i . Ainsi, le calcul de la production optimale exige que chaque firme possède :

1. la connaissance de la fonction de demande $p = f(Q)$;
2. connaissance de sa propre fonction de coûts $C_i(q_i)$;
3. parfaite prévoyance sur les choix de production des concurrents sur $q_{-i}^e(t+1) = q_{-i}(t+1)$;
4. compétence en calcul pour résoudre le problème d'optimisation.

Selon ces hypothèses, chaque firme calculera sa meilleure réponse, implicitement définie par le premier ordre (nécessaire) conditions $\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 0$, alors

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = q_i f'(q_i + q_{-i}(t+1)) + f(q_i + q_{-i}(t+1)) + \frac{\partial C_i(q_i, q_{-i}(t+1))}{\partial q_i} = 0, (i = 1, \dots, n). \quad (3.11)$$

ainsi que conditions de deuxième ordre $\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} < 0$. Dans certains cas, une

solution de (3.11) peut être obtenue, exprimée par les fonctions de réaction

$$q_i(t+1) = R_i(q_{-i}(t)), i = 1, 2 \quad (3.12)$$

Les solutions des 2 équations avec 2 inconnues $q_i = R_i(q_{-i})$, $i = 1, 2$, donnent les équilibres de Nash, situé aux intersections des fonctions de réaction (où chaque firme joue sa meilleure réponse à la les meilleures stratégies de réponse des autres joueurs). Toutefois, des niveaux de rationalité plus faibles, ainsi qu'un degré d'information plus faible des acteurs, peuvent être envisagés afin de modéliser des situations économiques plus réalistes. Détendons d'abord l'hypothèse de la perfection prospective sur le choix de production attendu des autres acteurs, et de le remplacer en supposant attentes sur

$$q_{-i}^e(t+1) = q_{-i}(t) \quad (3.13)$$

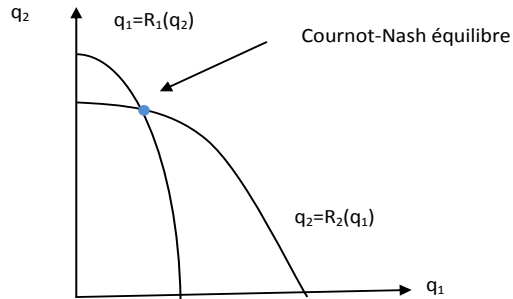


FIGURE 3.4 – Représentation schématique des courbes de la meilleure réponse (réaction)

c'est-à-dire qu'en l'absence d'information sur les décisions de production des concurrents, chaque joueur suppose que les concurrents produiront dans la prochaine période la même production que dans la période actuelle. Sous cette hypothèse la meilleure réponse donne lieu à un système dynamique discret

$$q_i(t+1) = R_i(q_{-i}(t)). \quad (3.14)$$

Par exemple, si nous considérons la demande linéaire et les fonctions de coûts linéaires, $p = a - b(q_1 + q_2)$ et $C_i(q_i) = c_i q_i$, alors le producteur 1 fait face au problème d'optimisation

$\max_{q_1} [(a - c_1)q_1 - bq_1 q_2(t) - bq_1^2]$ et de la condition du premier ordre $\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 0$, nous obtenons $(a - c_1) - bq_2(t) - 2bq_1 = 0$ à partir de laquelle $q_1(t+1) = -\frac{1}{2}q_2(t) + \frac{a - c_1}{2b}$. La condition d'ordre deux $\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1^2} = -2b < 0$

assure qu'il est effectivement un maximum. Si nous résolvons le même problème pour l'autre firme nous obtenons le système dynamique linéaire bidimensionnel à temps discret suivant

$$\begin{cases} q_1(t+1) = R_1(q_2(t)) = -\frac{1}{2}q_2(t) + \frac{a - c_1}{2b}. \\ q_2(t+1) = R_2(q_1(t)) = -\frac{1}{2}q_1(t) + \frac{a - c_2}{2b}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Où l'unique équilibre est :

$$E^* = \left(\frac{a + c_2 - 2c_1}{3b}, \frac{a + c_1 - 2c_2}{3b} \right) \quad (3.16)$$

est positif à condition qu' $a + c_2 - 2c_1 > 0$ et $a + c_1 - 2c_2 > 0$, deux inégalités qui ne sont pas vides dans l'espace des coûts marginaux (c_1, c_2) à condition que $c_1 < a$ et $c_2 < a$, la condition habituelle de coûts de production unitaire inférieur au prix unitaire. L'équilibre E est toujours globalement asymptotiquement stable, comme les valeurs propres du modèle linéaire sont $\lambda_{12} = \pm \frac{1}{2}$. Le vecteur propre associé à $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ est $v_1 = (-1, 1)$ et avec $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ est $v_2 = (1, 1)$,

Si la fonction de demande inverse est $p = \frac{1}{Q}$, alors les mêmes arguments conduisent au système dynamique discret non linéaire suivant

$$\begin{cases} q_1(t+1) = -q_2(t) + \sqrt{\frac{q_2(t)}{c_1}}. \\ q_2(t+1) = -q_1(t) + \sqrt{\frac{q_1(t)}{c_2}}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Encore une fois, un équilibre unique de Nash existe, donné par

$$E^* = \left(\frac{c_1}{(c_1 + c_2)^2}, \frac{c_1}{(c_1 + c)^2} \right) \quad (3.18)$$

2. Jeux sur les parts de marché

• Les fonctions de prix isoélastiques :

Nous supposons que la fonction de prix est isoélastique (voir[9]).

N denote le nombre d'entreprises, soit x_k la sortie de firmes k ($k = 1, 2, \dots, N$) et $Q = \sum_{k=1}^N x_k$ la production totale de l'industrie. Puis la fonction de prix est $f(Q) = \frac{A}{Q}$ avec une certaine constante A positive. Si aucune externalité sont pris en charge et $C_k(x_k)$ indique le coût de firme k , puis son bénéfice est donné comme

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} -C_k(0) & \text{si } x_k = 0. \\ \frac{Ax_k}{Q_k + x_k} - C_k(x_k) & \text{si } x_k > 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

où nous utilisons à nouveau la notation simplificatrice $Q = \sum_{l \neq k} x_l$ de sorte que $Q = Q_k + x_k$. Dans la discussion suivante, nous supposerons que pour tous k , C_k est deux fois continuellement différentiable, croissante et convexe, de sorte que pour toutes les valeurs possibles de x_k , $C'_k(x_k) > 0$ et $C''_k(x_k) \geq 0$. Nous pouvons maintenant calculer la meilleure réponse de firme k . Supposons d'abord que $Q_k = 0$, afin que les autres entreprises ne produisent pas. Alors

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} -C_k(0) & \text{si } x_k = 0. \\ A - C_k(x_k) & \text{si } x_k > 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Dans ce cas, l'entreprise n'est pas le meilleur choix, mais il est dans son intérêt de sélectionner une valeur positive de x_k qu'est aussi petite que possible. En d'autres termes, firme k ne pas avoir un bénéfice maximum pour $Q_k = 0$, son bénéfice n'a qu'un supremum à $x_k = 0$ si $Q_k > 0$, afin que les autres entreprises produisent, puis

$$\frac{\partial \varphi_k(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_k} = \frac{AQ_k}{(Q_k + x_k)^2} - C'_k(x_k). \quad (3.21)$$

et

$$\frac{\partial^2 \varphi_k(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_k^2} = -\frac{2AQ_k}{(Q_k + x_k)^3} - C_k''(x_k) < 0. \quad (3.22)$$

montrant que φ_k est strictement concave en x_k avec des valeurs positives fixes de Q_k . Si nous supposons à nouveau que chaque entreprise a une limite, L_k de capacité finie existe et unique pour chaque entreprise et est donné par

$$R_k(Q_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{A}{Q_k} - C_k'(0) \leq 0 \\ L_k, & \text{si } \frac{AQ_k}{(Q_k + L_k)^2} - C_k'(L_k) \geq 0, \\ Z_k^*, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.23)$$

est Z_k^* la solution unique de l'équation strictement monotone

$$\frac{AQ_k}{(Q_k + z_k)^2} - C_k'(z_k) = 0. \quad (3.24)$$

dans l'intervalle $(0, L_k)$ La dérivée de la meilleure fonction de réponse est obtenue par différenciation implicite de l'équation équivalente

$$AQ_k - C_k'(z_k)(Q_k + z_k)^2 = 0$$

d'où nous avons

$$A - C_k'' R_k'(Q_k + z_k)^2 - 2C_k'(Q_k + z_k)(1 + R_k') = 0$$

implique que :

$$R_k'(Q_k) = \frac{A - 2C_k' Q_k}{C_k'' Q_k^2 + 2C_k' Q_k}. \quad (3.25)$$

Ici le dénominateur est toujours positif mais le signe du numérateur est indéterminé. Par conséquent, $R_k(Q_k)$ n'est pas nécessairement monotone. Si nous exprimons la meilleure réponse fonctions en termes de la production totale de l'industrie, puis le résultat modifié meilleure fonction de réponse $\tilde{R}_k(Q)$ ne sera pas monotone. Considérons maintenant un équilibre intérieur, puis de (3.24),

$$A\bar{Q}_k - C_k'(\bar{x}_k)\bar{Q}^2 = 0$$

Pour tout k , le numérateur de (3.25) à l'équilibre devient :

$$A - \frac{2A\bar{Q}_k}{\bar{Q}} = \frac{A}{\bar{Q}}(\bar{Q} - 2\bar{Q}_k)$$

Donc $R'_k(\bar{Q}_k) \leq 0$ ssi $\bar{Q} \leq 2\bar{Q}_k$.

Avis en outre que

$$R'_k(Q_k) > \frac{-C''_k Q^2 - 2C'_k Q}{C''_k Q^2 + 2C'_k Q} = -1.$$

Si $N = 2$, alors à un équilibre $R'_k = 0$ pour $k = 1, 2$. Si l'équilibre est symétrique alors R'_k est positive pour une entreprise et négative pour l'autre, donc $R'_1 R'_2 < 0$.

Supposons ensuite que $N \geq 3$ et pour toutes les entreprises $x_k \leq Q_k$. Cette condition signifie qu'aucune grande entreprise ne domine le reste de l'industrie. Dans ce cas $Q \leq 2Q_k$ pour tout k et $-1 < R'_k \leq 0$, alors dans le cas général la condition $Q \leq 2Q_k$ à l'équilibre peut être violée par au plus une entreprise, donc il ya au plus une entreprise avec dérivée positive R'_k à l'équilibre.

• Présentation du modèle

Les modèles basés sur la part du marché ont été utilisés dans divers contextes pour décrire le comportement des concurrents dans un marché. Non seulement ont ils été dans le domaine de recherche, la théorie de recherche opérationnelle. Ces modèles sont souvent utilisés pour décrire la concurrence entre plusieurs marques d'un produit sur le marché (voir[9]).

Un modèle typique de ce type précise que la part de marché d'un concurrent est égale à l'attraction de son produit, divisée par l'attraction totale de tous les produits des concurrents sur le marché. L'attraction de chaque concurrent est donnée en termes de répartition de l'effort concurrentiel. Prenons, à titre d'exemple, le cas de deux concurrents qui se font concurrence sur le marché sur la base des efforts de commercialisation déployées. Si $x_1 > 0$ indique l'effort de commercialisation du concurrent 1 et $x_2 > 0$ l'effort de commercialisation du concurrent 2, puis $\alpha_1 x_1^{\beta_1}$ et $\alpha_2 x_2^{\beta_2}$ représentent les attraits des clients aux produits des concurrents 1 et 2, respectivement. Les paramètres

positifs α_1 et α_2 dans ce contexte indiquent l'efficacité relative des efforts et des paramètres $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$ sont les élasticités des produits les efforts de commercialisation. Les parts de marché des concurrents sont alors donné par :

$$s_1 = \frac{\alpha_1 x_1^{\beta_1}}{\alpha_1 x_1^{\beta_1} + \alpha_2 x_2^{\beta_2}}, \quad s_2 = \frac{\alpha_2 x_2^{\beta_2}}{\alpha_1 x_1^{\beta_1} + \alpha_2 x_2^{\beta_2}} \quad (3.26)$$

Une telle spécification à la propriété théoriquement attrayante qu'elle est logiquement cohérente dans le sens où il produit des parts de marché qui sont entre 0 et 1, les parts de marché s'élèvent à un pour tous les concurrents sur le marché. Si $A > 0$ indique potentiel de vente du marché (en termes monétaires) et le coût marginal d'efforts de l'entreprise i , puis les bénéfices d'une période de l'entreprise 1 et 2 sont :

$$\varphi_1 = As_1 - c_1 x_1, \quad \varphi_2 = As_2 - c_2 x_2. \quad (3.27)$$

En introduisant les nouvelles variables de décision $z_1 = \alpha_1 x_1^{\beta_1}$, $z_2 = \alpha_2 x_2^{\beta_2}$ et fonctions de coûts $C_1(z_1) = c_1 \left(\frac{z_1}{\alpha_1} \right)^{1/\beta_1}$ et $C_2(z_2) = c_2 \left(\frac{z_2}{\alpha_2} \right)^{1/\beta_2}$, le jeu d'attraction des parts de marché est identique à un jeu d'oligopole avec la fonction de demande du marché isoélastique. Par conséquent, les résultats obtenus sont valables pour les jeux d'attraction de part de marché aussi bien. Rappelons que β_1 et β_2 sont les élasticités des attraites des produits par rapport aux efforts de commercialisation. Par conséquent, nous avons typiquement $\beta_i \in (0, 1)$, ou $1/\beta_i > 1$, donc les fonctions C_1 et C_2 sont strictement convexes. Par conséquent, dans les applications un équilibre unique de Nash est obtenu. Dans le cas général, une solution fermée pour l'équilibre de Nash ne peut pas être donnée. Toutefois, pour le cas symétrique, c'est-à-dire pour des élasticités identiques $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, coûts marginaux identiques de effort $c_1 = c_2 = c$, et des paramètres d'efficacité identiques $\alpha_1 = \alpha_2$, l'équilibre de Nash peut être facilement calculé. Il est caractérisé par des efforts identiques des deux concurrents,

$$E^* = \left(\frac{A\beta}{4c}, \frac{A\beta}{4c} \right) \quad (3.28)$$

Une version dynamique d'un modèle d'attraction de parts de marché peut, par exemple, être obtenue sur la base de bénéfices marginaux. Nous suppo-

sons qu'au moment t où les efforts de marketing de la prochaine période, $x_1(t+1)$ et $x_2(t+1)$, sont déterminés selon le processus d'ajustement

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) + \lambda_1(x_1(t)) \left[\frac{\partial \varphi_1(x_1(t), x_2(t))}{\partial x_1} \right] \\ x_2(t+1) = x_2(t) + \lambda_2(x_2(t)) \left[\frac{\partial \varphi_2(x_1(t), x_2(t))}{\partial x_2} \right] \end{cases} \quad (3.29)$$

Les expressions $\lambda_i(\cdot)$ déterminent par combien d'efforts peuvent varier d'une période à l'autre et elles peuvent être interprétées comme les « vitesses de réaction ». Évidemment, les états stables du système dynamique (3.29) sont donnés comme solutions des équations :

$$\lambda_1(x_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 0, \lambda_2(x_2) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = 0.$$

Tout équilibre de Nash intérieur du jeu d'attraction de part de marché sous-jacent est obtenu comme la solution positive des conditions du premier ordre $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = 0$, en supposant que les conditions de la deuxième ordre sont satisfaites. Notez, cependant, que les points fixes qui ne sont pas des équilibres de Nash peuvent exister. En outre, il doit être mentionné que la forme fonctionnelle des vitesses de réaction $\lambda_i(\cdot)$ sont sans conséquence pour le calcul de l'équilibre de Nash. Nous supposons que $\lambda_1(x_1) = v_1 x_1$ et $\lambda_2(x_2) = v_2 x_2$. En termes économiques, le système dynamique incorpore alors l'idée que les efforts de marketing sont proportionnelle aux bénéfices marginaux, où les paramètres positifs v_1 et v_2 sont les facteurs de proportionnalité. En utilisant les expressions relatives aux parts de marché 1 et 2 données dans (3.26) et aux bénéfices dans (3.27), le modèle dynamique basé sur la part du marché qui en résulte (3.29) peut s'écrire sous la forme :

$$T : \begin{cases} x_1(t+1) = (1 - v_1 c_1) x_1(t) + v_1 \beta_1 A k \frac{x_1(t)^{\beta_1} x_2(t)^{\beta_2}}{(x_1(t)^{\beta_1} + k x_2(t)^{\beta_2})^2} \\ x_2(t+1) = (1 - v_2 c_2) x_2(t) + v_2 \beta_2 A k \frac{x_1(t)^{\beta_1} x_2(t)^{\beta_2}}{(x_1(t)^{\beta_1} + k x_2(t)^{\beta_2})^2} \end{cases} \quad (3.30)$$

où $k = \alpha_2/\alpha_1$. Un système bidimensionnel

$$T : (x_1(t), x_2(t)) \rightarrow (x_1(t+1), x_2(t+1))$$

génère les séquences d'efforts de commercialisation résultant des décisions des deux concurrents. Les parts de marché correspondantes sont ensuite obtenues par (3.26)

CHAPITRE 4

ETUDE D'UN MODÈLE FINANCIER

La refabrication est un processus dans lequel les produits usagés sont désassemblés et leurs pièces sont réparées et utilisées dans la production de nouveaux produits.

Les activités de refabrication sont considérées comme protective de l'environnement parce qu'elles consistent à remettre en état des produits usagés et à les revendre .Cependant, les produits refabriqués Peuvent cannibaliser les ventes de nouveaux produits et réduire le profit des fabricants d'équipement d'origine (O.E.Ms : Original Equipment Manufacturers). Ces derniers préfèrent ne pas poursuivre le plan de remanufacturation.Cela peut encourager des concurrents tiers (T.P.Rs : Third-Party Remanufacturers) à rassembler et à recycler des produits usagés qui ont d'abord été vendus par l'O.E.M. Une telle compétition peut être analysé à l'aide du modèle de jeu d'oligopole. (voir [14])

4.1 Description du modèle duopole

Nous considérons deux entreprises qui opèrent sur le marché. La première est un fabricant d'équipement d'origine (O.E.M) qui ne produit que des produits originaux, tandis que l'autre est appelé le compétiteur tiers ne produit que des produits retournées différenciés. Nous considérons les hypothèses suivantes :

- L'O.E.M adopte une stratégie rationnelle limitée et maximise ses propres bénéfices, tandis que T.P.R adopte une stratégie adaptative et maximise sa part de marché afin d'atteindre un certain profit. Par conséquent, à la fois le statut de rentabilité du la part de marché influe sur l'appréciation de son effet opérationnel.
- (O.E.M) et (T.P.R) sont constamment en concurrence entre eux, et il y avait Seuls des renseignements partiels sur le marché sont disponibles pour les fabricants.
- Les variables de décision représentant les quantités de production sont réalisées dans des périodes discrètes, ($t = 0, 1, 2, \dots$) et limité à l'espace de phase $S = \{(q_n, q_r) : q_n, q_r > 0\}$.
- La première entreprise produit de nouveaux produits (originaux), q_n à la période t et le deuxième entreprise peut prendre des produits retournés q_r afin de refabriquer et de vendre à la période $t + 1$.
- La volonté de payer des consommateurs (C.W.P : Consumer's Willingness to Pay) est hétérogène et uniformément répartie dans l'intervalle $[0, 1]$, et la volonté de chaque consommateur de payer pour un produit est une fraction δ de sa volonté de payer pour un produit original.
- Si $\delta = 0$, alors le consommateur est seulement intéressé par les produits originaux, et ne sera pas acheter des produits réusinés retournés, mais si $\delta = 1$ alors le consommateur est prêt à payer le même prix pour l'original et le retour produits.

Les coûts marginaux des (O.E.M) et (T.P.R) sont c_n et c_r (respectivement) limités dans cette étude à $1 \geq c_n > c_r \geq 0$.

Ces constructions conduisent à des fonctions de demande inverse non li-

néaire ci-dessous :

$$p_n = 1 - \sqrt{q_n - \delta q_r}.$$

$$p_r = \delta(1 - \sqrt{q_n + q_r}).$$

Les deux entreprises admettent des fonctions de coûts linéaires de la forme :

$$C_i(q_i) = c_i q_i, i = n, r.$$

Par conséquent, les fonctions de profit de l'O.E.M et (T.P.R) sont :

$$\Pi_n = P_n q_n - C_n(q_n) = (1 - c_n - \sqrt{q_n + \delta q_r}) q_n. \quad (4.1)$$

$$\Pi_r = P_r q_r - C_r(q_r) = (\delta(1 - \sqrt{q_n + q_r}) - c_r) q_r. \quad (4.2)$$

Ensuite, nous obtenons les fonctions marginales de deux concurrents :

$$\frac{\partial \Pi_n}{\partial q_n} = (1 - c_n - \sqrt{q_n + \delta q_r}) - \frac{q_n}{2\sqrt{q_n + \delta q_r}}. \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \Pi_r}{\partial q_r} = \delta(1 - \sqrt{q_n + q_r}) - c_r - \frac{\delta q_r}{2\sqrt{q_n + q_r}}. \quad (4.4)$$

Le mécanisme d'ajustement de la production de l'O.E.M peut être modélisé comme suit :

$$q_n(t+1) = q_n(t) + \alpha q_n(t) \frac{\partial \Pi_n(t)}{\partial q_n(t)}, \quad (4.5)$$

Où $\alpha \geq 0$ est un paramètre qui représente la vitesse relative de l'ajustement de la sortie.

Lorsque le (T.P.R) cherche à maximiser sa part de marché (M.S.M : Market Share Maximisation), il perd son profil (c-à-d, $\Pi_r = 0$). Ainsi, de l'équation (4.2), on obtient le rendement optimal du (T.P.R) comme :

$$\tilde{q}_{r_{MSM}} = \left(1 - \frac{c_r}{\delta}\right)^2 - q_n. \quad (4.6)$$

En outre, l'orsque le (T.P.R) cherche à maximiser des profits (P.M : Profit Maximisation), son bénéfice marginal est disparaît $\left(\frac{\partial \Pi_r}{\partial q_r} = 0\right)$. Ainsi, à partir de (4.4) on obtient la sortie optimale du (T.P.R) comme

$$\tilde{q}_{rPM} = 2 \frac{(\delta - c_r)^2 - 3\delta^2 q_n + (\delta - c_r) \sqrt{3\delta^2 q_n + (\delta - c_r)^2}}{9\delta^2}. \quad (4.7)$$

Le (T.P.R) prend en compte l'expansion de la part de marché et la maximisation des bénéfices en tant que moyenne pondérée et son attitude sur le marché est un compromis entre le profit et le part de marché, qui peut être représentée par un coefficient $v \in [0, 1]$, c'est-à-dire :

$$\tilde{q}_r = v\tilde{q}_{rMSM} + (1 - v)\tilde{q}_{rPM}$$

Où $v = 0$, $v = 1$ et $0 < v < 1$ indiquer la stratégie de maximisation des bénéfices de (T.P.R), la stratégie de maximisation de part de marché et la stratégie mixte respectivement.

Donc, de (4.6) et (4.7) nous obtenons la fonction de reaction du (TPR) suivante :

$$\tilde{q}_r = v((1 - \frac{c_r}{\delta})^2 - q_n) + 2(1 - v) \frac{(\delta - c_r)^2 - 3\delta^2 q_n + (\delta - c_r) \sqrt{3\delta^2 q_n + (\delta - c_r)^2}}{9\delta^2}. \quad (4.8)$$

Pour garder $\tilde{q}_r$ positif le (C.W.P) δ sera limité à l'intervalle $[\delta_0, 1]$ avec $\delta_0 > 2c_r$, on prend $\delta_0 = \frac{11}{5}c_r$.

En outre, le fabricant tiers (T.P.R) est un joueur adaptatif, il calcule sa production pour la période $t + 1$ par pondération de la production de la période précédente $q_r(t)$ et sa fonction de reaction $\tilde{q}_r(t)$.

En introduisant $\beta \in [0, 1]$ est la vitesse d'ajustement du (T.P.R), Le processus d'ajustement de la sortie du (T.P.R) défini par :

$$q_r(t + 1) = (1 - \beta)q_r(t) + \beta\tilde{q}_r(t). \quad (4.9)$$

Par ailleurs, la sortie du (T.P.R) dans la période $t + 1$ ne dépasse pas à la sortie de l'O.E.M pendant la période t , c'est-à-dire $q_r(t + 1) \leq q_n(t)$ le mécanisme

d'ajustement du (T.P.R) écrit comme suit :

$$q_r(t+1) = \min\{(1-\beta)q_r(t) + \beta\tilde{q}_r(t), q_n(t)\}. \quad (4.10)$$

À l'aide des équations (4.3), (4.8) et en combinant les équations (4.5) avec (4.10), on obtient un système dynamique discret à deux dimensions de remanufacturer le jeu duopole avec différentes stratégies de concurrence et des joueurs hétérogènes comme suit :

$$\begin{cases} q_n(t+1) = q_n(t) + \alpha q_n(t) \left[1 - c_n - \sqrt{q_n(t) + \delta q_r(t)} - \frac{q_n(t)}{2\sqrt{q_n(t) + \delta q_r(t)}} \right] \\ q_r(t+1) = \min\{(1-\beta)q_r(t) + \beta \left[v((1 - \frac{c_r}{\delta})^2 - q_n(t)) \right. \\ \left. + 2(1-v) \frac{(\delta - c_r)^2 - 3\delta^2 q_n(t) + (\delta - c_r) \sqrt{3\delta^2 q_n(t) + (\delta - c_r)^2}}{9\delta^2} \right], q_n(t)\} \end{cases} \quad (4.11)$$

4.2 Analyse de la stabilité locale

Cette section analyse la stabilité locale en cherchant des états d'équilibre possibles et analyse leur stabilité. Système (4.11) a une singularité à (0,0), donc seulement sans frontières Nash équilibres $E = (q_n^*, q_r^*)$, avec $q_n^* \geq q_r^* > 0$ seront pris en considération. À cette effet, on peut distinguer les deux cas $f_r > q_n^*$ et $f_r \leq q_n^*$, où

$$f_r = (1-\beta)q_r^* + \beta \left[v((1 - \frac{c_r}{\delta})^2 - q_n^*) + 2(1-v) \frac{(\delta - c_r)^2 - 3\delta^2 q_n^* + (\delta - c_r) \sqrt{3\delta^2 q_n^* + (\delta - c_r)^2}}{9\delta^2} \right]$$

1. $f_r > q_n^*$

En imposant des conditions à l'état stable $q_i(t+1) = q_i(t) = q_i^*$, $i = n, r$, dans le système (4.11) on peut voir que (4.11) a le point fixe

$$E = (q_n^*, q_r^*)$$

Où

$$q_n^* = q_r^* = \frac{4(1 - c_n)^2(\delta + 1)}{(2\delta + 3)^2} \quad (4.12)$$

Qui est un équilibre de Nash du jeu à condition que $c_n \neq 1$ et $f_r > \frac{4(1 - c_n)^2(\delta + 1)}{(2\delta + 3)^2}$

La matrice jacobienne du système (4.11) pour ce cas examiné à la forme

$$J(q_n, q_r) = \begin{bmatrix} 1 + \varphi & \phi \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Où

$$\varphi = \alpha \left[(1 - c_n - \sqrt{q_n + \delta q_r}) - \frac{q_n}{\sqrt{q_n + \delta q_r}} \left(1 + \frac{q_n + 2\delta q_r}{4(q_n + \delta q_r)} \right) \right]$$

et

$$\phi = \alpha \delta q_n \frac{1}{2\sqrt{q_n + \delta q_r}} \left(\frac{q_n}{2(q_n + \delta q_r)} - 1 \right)$$

En particulier la matrice jacobienne à E peut être écrite comme

$$J(E) = \begin{bmatrix} 1 + \varphi & \phi \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Où

$$\varphi = \alpha \left[(1 - c_n - \sqrt{(1 + \delta)q_n^*}) - \frac{q_n^*}{\sqrt{(1 + \delta)q_n^*}} \left(1 + \frac{1 + 2\delta}{4(1 + \delta)} \right) \right]$$

et

$$\phi = \alpha \delta q_n^* \frac{1}{2\sqrt{(1 + \delta)q_n^*}} \left(\frac{1}{2(1 + \delta)} - 1 \right)$$

Son équation caractéristique est

$$\lambda^2 - \text{Tr}(J)\lambda + \text{Det}(J) = 0$$

où

$$\text{Tr}(J) = 1 + \varphi = 1 - \alpha \frac{(1 - c_n)(4\delta + 3)}{2(2\delta + 3)(1 + \delta)}$$

et

$$\text{Det}(J) = \alpha \delta \frac{(1 - c_n)(2\delta + 1)}{2(2\delta + 3)(1 + \delta)}$$

Maintenant, on introduit les deux quantités

$$\alpha_n^{NS} = \frac{2(2\delta + 3)(1 + \delta)}{\delta(1 - c_n)(1 + 2\delta)}$$

et

$$\alpha_n^F = \frac{4(2\delta + 3)(1 + \delta)}{(1 - c_n)(-2\delta^2 + 3\delta + 3)}$$

Par conséquent, la stabilité de E est résumée dans la proposition suivante

Proposition 4.2.1

Si le point E fixe existe, il sera localement asymptotiquement stable si la condition suivante est valide

$$\alpha < \min\{\alpha_n^F, \alpha_n^{NS}\} \quad (4.15)$$

Preuve.

Supposons que le point E fixe existe, alors il sera localement asymptotique stable si les valeurs propres de la matrice jacobienne J(E) sont à l'intérieur du cercle unitaire du plan complexe.

$$\begin{cases} 1 - \text{Det}(J) > 0, \\ 1 - \text{Tr}(J) + \text{Det}(J) > 0, \\ 1 + \text{Tr}(J) + \text{Det}(J) > 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

La première condition peut être écrite comme :

$$1 - \alpha\delta \frac{(1 - c_n)(2\delta + 1)}{2(2\delta + 3)(1 + \delta)} > 0$$

ce qui implique que

$$\alpha < \frac{2(2\delta + 3)(1 + \delta)}{\delta(1 - c_n)(1 + 2\delta)} = \alpha_n^{NS} \quad (4.17)$$

La deuxième condition est :

$$1 - \text{Tr}(J) + \text{Det}(J) = \alpha \frac{1 - c_n}{2} > 0, \text{ qui est toujours satisfait.}$$

La troisième condition est :

$1 + \text{Tr}(J) + \text{Det}(J) = 2 + \alpha \frac{1 - c_n}{2(2\delta + 3)(1 + \delta)} (2\delta^2 - 3\delta - 3) > 0$, qui peut être écrit comme :

$$\alpha < \frac{4(2\delta + 3)(1 + \delta)}{(1 - c_n)(-2\delta^2 + 3\delta + 3)} = \alpha_n^F \quad (4.18)$$

On a

$$\alpha_n^{NS} - \alpha_n^F = 2(2\delta + 3)(1 + \delta) \left[\frac{-6\delta^2 + \delta + 3}{\delta(2\delta + 1)(-2\delta^2 + 3\delta + 3)(1 - c_n)} \right]$$

Clairement le dénominateur et $2(2\delta + 3)(1 + \delta)$ sont positifs . Ainsi, $\alpha_n^{NS} - \alpha_n^F$ a le même signe de $-6\delta^2 + \delta + 3$ qui est un polynôme du second degré de δ ayant les deux racines $\delta_1 = \frac{1 + \sqrt{73}}{12}$ et $\delta_2 = \frac{1 - \sqrt{73}}{12} < 0$

Par conséquent, $\alpha_n^{NS} > \alpha_n^F$ pour

$0 \leq \delta < \frac{1 + \sqrt{73}}{12}$, mais $\alpha_n^{NS} < \alpha_n^F$ pour $\frac{1 + \sqrt{73}}{12} < \delta \leq 1$.

Il s'ensuit que pour $\delta \in \left[0, \frac{1 + \sqrt{73}}{12}\right]$ les trois conditions du jury sont satisfaites si $\alpha < \alpha_n^F$ et pour $\delta \in \left[\frac{1 + \sqrt{73}}{12}, 1\right]$ les trois conditions du jury sont satisfaites si $\alpha < \alpha_n^{NS}$

■

La région de stabilité locale de l'équilibre Cournot-Nash E est déterminée par (4.15). Par conséquent, la condition (4.15) définit les surfaces dans l'espace de paramètre sur lequel une bifurcation doublement de période et bifurcation Neimark-Sacker s'effectuent. Le seuil pour le flip bifurcation est

$$\alpha = \alpha_n^F = \frac{4(2\delta + 3)(1 + \delta)}{(1 - c_n)(-2\delta^2 + 3\delta + 3)}.$$

De plus, le seuil de la bifurcation Neimark-Sacker est donné par

$$\alpha = \alpha_n^{NS} = \frac{2(2\delta + 3)(1 + \delta)}{\delta(1 - c_n)(1 + 2\delta)}$$

En différenciant α_n^F par rapport à δ on obtient

$$\frac{\partial \alpha_n^F}{\partial \delta} = \frac{8(8\delta^2 + 12\delta + 3)}{(1 - c_n)(-2\delta^2 + 3\delta + 3)^2} > 0$$

En outre, en différenciant α_n^{NS} par rapport à δ on obtient

$$\frac{\partial \alpha_n^{NS}}{\partial \delta} = \frac{-2(8\delta^2 + 12\delta + 3)}{(1 - c_n)(2\delta^2 + \delta)^2} < 0$$

Par conséquent, pour $\delta \in [0, \frac{1+\sqrt{73}}{12}]$ la région de stabilité de l'équilibre E devient large avec l'augmentation de δ , et il perd sa stabilité par bifurcation de doublement du période. Tandis que, pour $\delta \in [\frac{1+\sqrt{73}}{12}, 1]$ la région de stabilité de l'équilibre E diminue avec l'augmentation de δ , et il perd sa stabilité par la bifurcation Neimark-Sacker comme le montre la figure 4.1.

$$2.f_r < q_n^*$$

Dans ce cas, l'équilibre de Nash $E = (q_n^*, q_r^*)$ satisfait $q_n^* > q_r^*$, Où

$$q_n^* = 2 \frac{(1 - c_n)^2 - 3\delta q_r^* + (1 - c_n) \sqrt{3\delta q_r^* + (1 - c_n)^2}}{9}$$

est

$$q_r^* = v(1 - \frac{c_r}{\delta})^2 - q_n^* + 2(1 - v) \frac{(\delta - c_r)^2 - 3\delta^2 q_n^* + (\delta - c_r) \sqrt{3\delta q_n^* + (\delta - c_r)^2}}{9\delta^2}$$

La matrice jacobienne du système (4.11) à l'équilibre E est donnée par

$$J(q_n^*, q_r^*) = \begin{bmatrix} 1 + \varphi & \phi \\ \psi & 1 - \beta \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Où,

$$\varphi = \alpha \left[1 - c_n - \sqrt{q_n^* + \delta q_r^*} - \frac{q_n^*}{\sqrt{q_n^* + \delta q_r^*}} \left(\frac{3}{2} - \frac{q_n^*}{4(q_n^* + \delta q_r^*)} \right) \right],$$

$$\phi = -\alpha q_n^* \left(\frac{\delta}{2 \sqrt{q_n^* + \delta q_r^*}} - \frac{\delta q_n^*}{4(q_n^* + \delta q_r^*) \sqrt{q_n^* + \delta q_r^*}} \right)$$

et

$$\psi = \beta \left(-v + 2 \frac{1 - v}{3\delta^2} \left(-1 + \frac{\delta - c_r}{2 \sqrt{3\delta^2 q_n^* + (\delta - c_r)^2}} \right) \right)$$

Son équation caractéristique est :

$$\lambda^2 - \text{Tr}(J)\lambda + \text{Det}(J) = 0$$

Où $Tr(J) = \varphi - \beta + 2$ et $Det(J) = (1 + \varphi)(1 - \beta) - \psi\phi$ Selon le critère de stabilité du jury, l'équilibre E sera localement asymptotiquement stable si

$$\begin{cases} 1 - Det(J) > 0, \\ 1 - Tr(J) + Det(J) > 0, \\ 1 + Tr(J) + Det(J) > 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Ou de manière équivalente

$$\begin{cases} \psi\phi + \beta\varphi + \beta > \varphi, \\ \psi\phi + \beta\varphi < 0, \\ \psi\phi + 2\beta + \beta\varphi < 4 + 2\varphi. \end{cases} \quad (4.21)$$

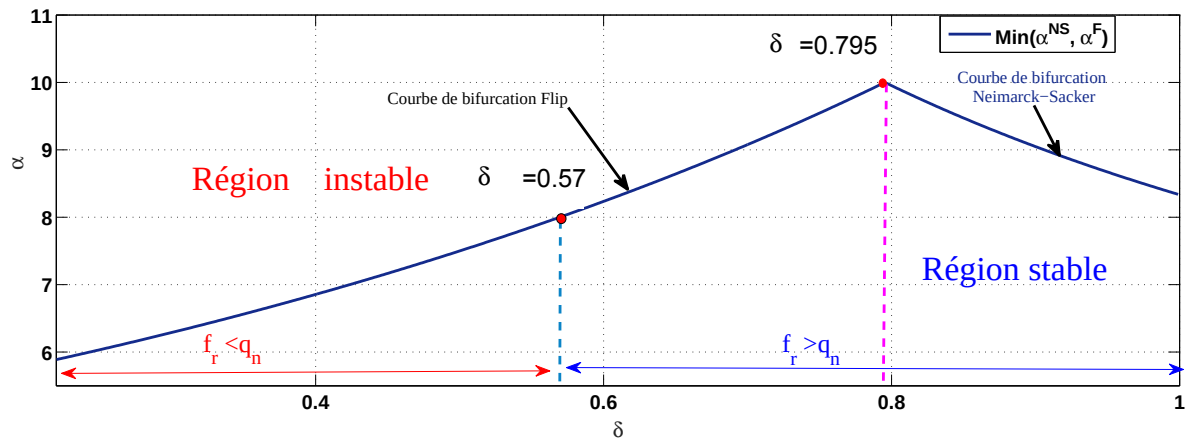


FIGURE 4.1 – La région de stabilité dans le plan (δ, α) , pour $\beta = 0.1, c_n = 0.2, c_r = 0.1$ et $v = 0.1$

4.3 Analyse numérique du modèle

Notre but principal dans cette section est de mettre en évidence la dynamique complexe du jeu duopole avec des joueurs hétérogènes décrits par le système dynamique (4.11). Voici les valeurs des paramètres, qui peuvent être faci-

lement utilisées pour étudier les propriétés de stabilité locales des points d'équilibres : $\beta = 0.1$, $c_n = 0.2$, $c_r = 0.1$, $v = 0.1$ et α , δ sont considérés comme paramètres de bifurcation. Selon la condition de stabilité (4.15), La figure (4.1) est une représentation de la région de stabilité. du point d'équilibre E dans le plan du paramètre (δ, α) . Comme le montre cette figure, la stabilité de la région d'équilibre de Nash augmente avec une augmentation de δ dans l'intervalle $(0.573, 0.7953)$. Par conséquent, dans cette plage une (C.W.P) plus élevée améliorerait la stabilité du jeu. En outre, l'équilibre peut perdre sa stabilité grâce à la bifurcation de flip lorsque la couple (δ, α) traverse la courbe de stabilité. Pour $(0.7953, 1)$ la région de stabilité diminue avec une augmentation de δ et devient plus petit, ce qui signifie que dans cette plage un (C.W.P) plus élevé déstabiliserait le jeu et quand le pair (δ, α) traverse la stabilité une bifurcation Neimark-Sacker se produit.

La figure (4.2) quelque diagrammes de bifurcation par rapport à δ pour $\alpha = 6.68$, $\beta = 0.1$, $c_n = 0.2$, $c_r = 0.1$ et $v = 0.1$, à partir de cette figure, par les valeurs décroissantes de δ on peut voir que pour $\delta \in (0.573, 1)$ l'équilibre de Nash E est localement asymptotiquement stable, il y a une bifurcation lorsque $\delta \approx 0,7754$ apparaît un cycle de période 2 et se bifurque rapidement en un cycle de période 4 comme le montre la figure 4.2(b) qui coexiste avec le Nash équilibre E jusqu'à $\delta \approx 0.614$ qui bifurque s'équentiellement à un cycle de période 8 il coexiste avec le point fixe qui perd sa stabilité à $\delta \approx 0,573$, et un cycle période de 8 bifurque en période 16 lorsque $\delta \approx 0,526$ puis la période doublant possibilités de bifurcation augmentent considérablement et le comportement chaotique apparaît à $\delta \approx 0.506$ où attracteurs multi-pièces manifeste et le nombre de pièces diminue avec la diminution de δ jusqu'à ce qu'il devienne un attracteur chaotique d'une seule pièce lorsque $\delta < 0.3$ (comme le montre dans la figure (4.3)).

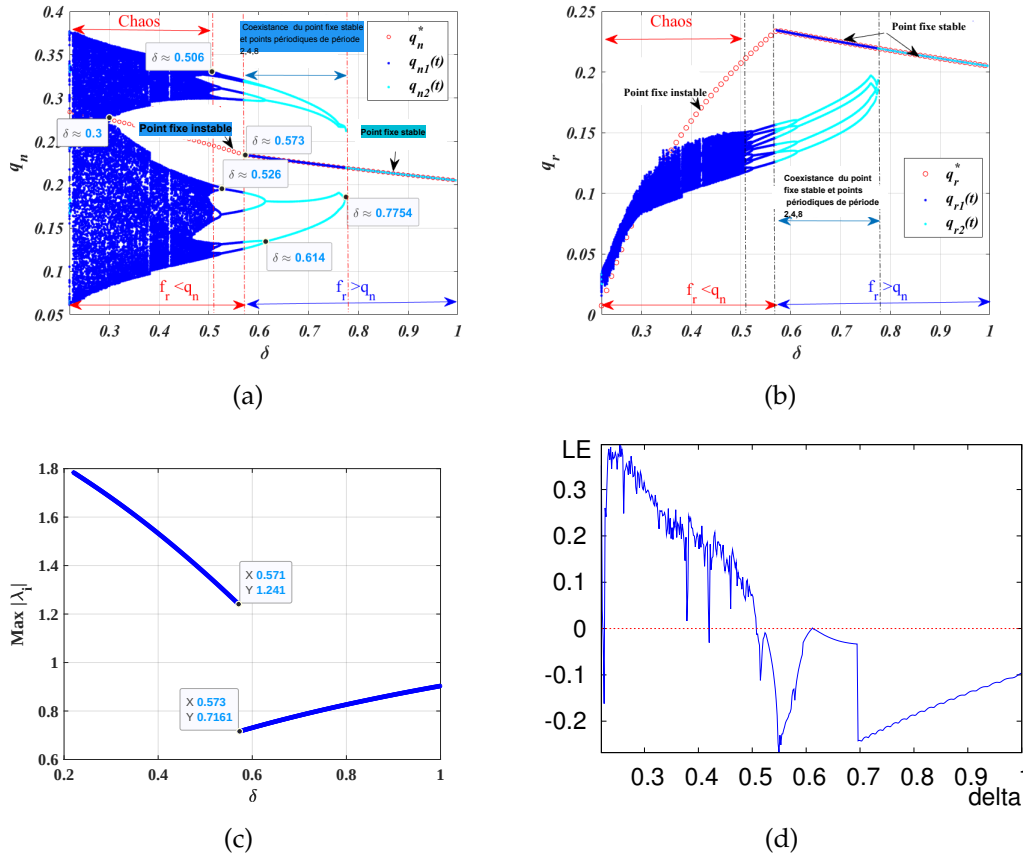


FIGURE 4.2 – Diagramme de bifurcation en fonction de δ pour $\alpha = 6.68, \beta = 0.1, c_n = 0.2, c_r = 0.1$ et $v = 0.1$. 4.2(a) Le diagramme de bifurcation de la solution q_n . 4.2(b) Le diagramme de bifurcation de la solution q_r . 4.2(c) Rayon des valeurs propres correspondant à l'équilibre de nash E. 4.2(d) Les exposants de lyapunov maximum.

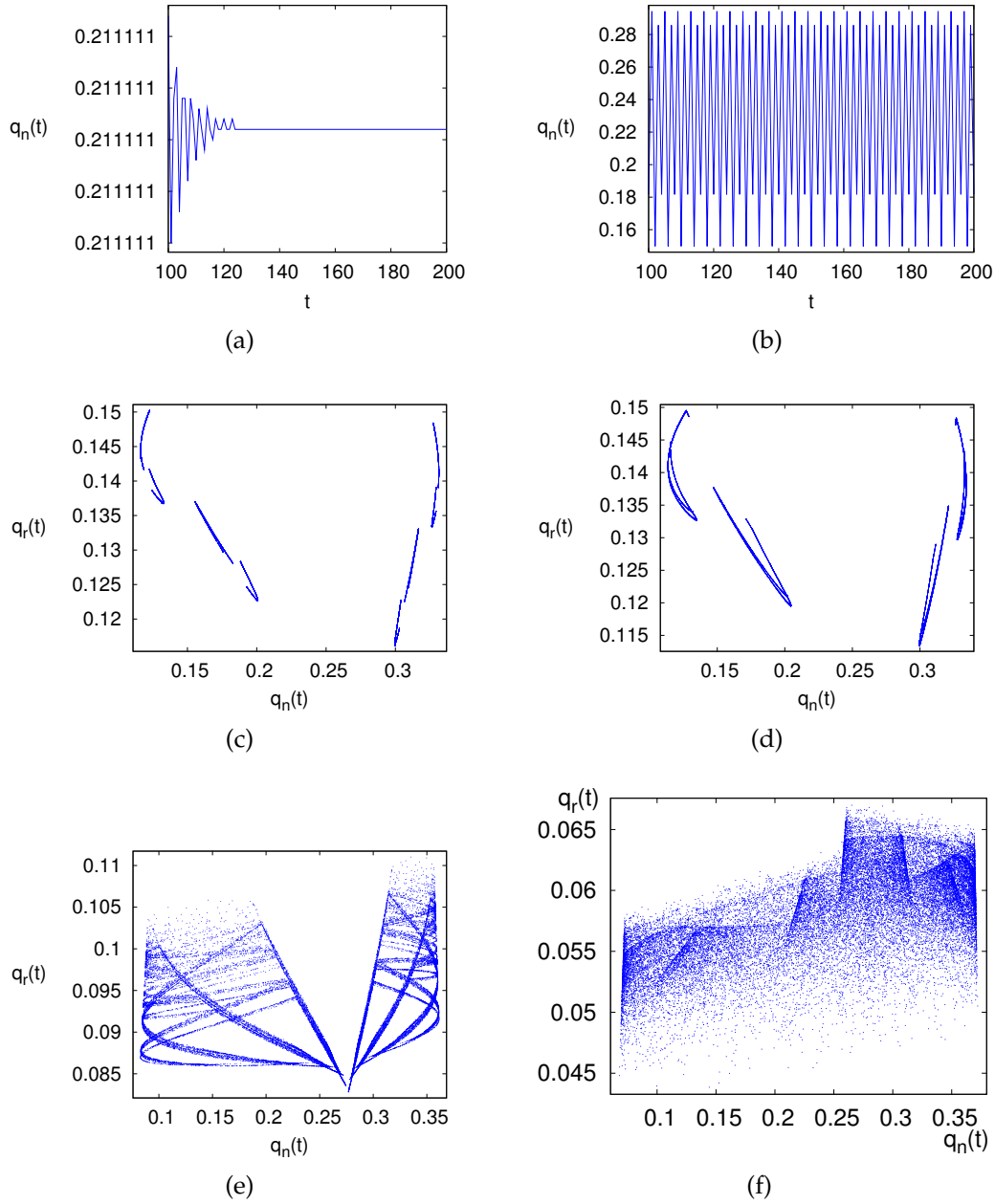


FIGURE 4.3 – Séries chronologiques et portait de phase du système (4.11) pour certain valeurs de δ avec $\alpha = 6.68, \beta = 0.1, c_n = 0.2, c_r = 0.1$ et $v = 0.1$. 4.3(a) Point fixe stable pour $\delta = 0.9$. 4.3(b) Cycle de période 4 pour $\delta = 0.7$. 4.3(c) Attracteur chaotique de 8-pièces pour $\delta = 0.5$. 4.3(d) Attracteur chaotique de 4-pièces pour $\delta = 0.48$. 4.3(e) Attracteur chaotique de 2-pièces pour $\delta = 0.3$. 4.3(f) Attracteur chaotique avec 1-pièce pour $\delta = 0.25$.

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire est l'étude d'un modèle financier discret bi-dimensionnel. Dans les deux premiers chapitres nous avons rassemblé les outils nécessaires pour cette étude (point fixe, stabilité, bifurcations et chaos). Dans le troisième chapitre nous avons introduit certains concepts des marchés oligopolistiques.

Après avoir ces moyens essentiels nous avons les appliqués à un modèle financier qui est décrit par un système dynamique discret d'ordre 1 de dimension 2, il a défini la compétition entre L'O.E.M et le (T.P.R).

L'analyse de ce modèle, nous avons atteind aux cas suivants :

le premier cas : L'équilibre de Nash est stable pour $\delta \in [0, \frac{1+\sqrt{73}}{12}]$ ainsi que la region de stabilité devient plus large quand δ augmente et l'équilibre perd la stabilité via une bifurcation Flip.

le deuxième cas : l'équilibre E est stable si $\delta \in [\frac{1+\sqrt{73}}{12}, 1]$ et son region de stabilité plus petite avec l'augmentation de δ , il perd son stabilité par la bifurcation de Neimark-sacker.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Cournot, *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*. Paris (1838).
- [2] A. Désilles, *Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret*. 2003.
- [3] A. Gasri, *Chaos et synchronisation(généralisé) dans les systèmes dynamiques*, Thèse de doctorat, Université Frères Mentouri-Constantine-1, 2018.
- [4] A. Ouannas, *Sur la synchronisation des Systèmes chaotiques discrets*, Thèse de doctorat, Université Frères Mentouri-Constantine-1, 2015.
- [5] A. Richard Holmgren, *A first course in discrete dynamical systems*, Springer-Verlag New York, 1996.
- [6] A. Senouci, *Systèmes dynamiques chaotiques et synchronisation*, Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider -Biskra, 2020.
- [7] A. Suarez, J. Morales and R. Quere, *Chaos prediction in an MMIC frequency divider in millimetric band*. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 8(1) : 21-23, (1998).
- [8] Baptista, MS, *Cryptography with chaos*, Physics Letters A vol. 240, no. 1-2, pp. 50-54, 1998.
- [9] Bischi G. I, C. Chiarella, M. Kopel, F. Szidarovszky, *Nonlinear Oligopolies stability and bifurcations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.

- [10] Bischi G. I, *discrete dynamical systems in economics : two seminal models and their developments*, Departement of economics, Society, Politics (DESP), University di Urbino (Italy).
- [11] Dang-vu, H et Delcarte, C, *Bifurcations et Chaos* . Paris : Ellipses, 2000.
- [12] F. Gordillo, R. Ortega and J. Aracil *Hopf bifurcation in indirect field-oriented control of induction motors*. Automatica, 38 : 829-835, (2002).
- [13] Garfinkel, Alan and Spano, Markl and Ditto, William L and Weiss, James N, *Controlling cardiac chaos*, Science, pp. 1230-1235, 1992.
- [14] H. Meskine, M-S. Abdelwahab, R. Lozi, *Nonlinear dynamic and chaos in a remanufacturing duopoly game with heterogeneous players and nonlinear inverse demand functions*, Journal of Difference Equations and Applications , 2023 (Article corrigé).
- [15] Hilborn, R, *Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford Student Edition, 1994.
- [16] I. Talbi, *Système dynamique non linéaire et phénomène de chaos*, Mémoire de magistère Univ. Mentouri-Constantine 1, 2010.
- [17] J. Morales, A. Suarez, and R. Quéré, *Chaos dans un diviseur de fréquence monolithique en bande millimétrique*. In 10 èmes Journées Nationales Microondes, Saint-Malo, 21-23 mai(1997).
- [18] K. Djeddi, *Systèmes dynamiques à temps discret et applications en biologie : Etude statistiques et résultats numériques*, Thèse de doctorat, Université Frères Mentouri-Constantine-1, 2021.
- [19] Kaplan, D. and Glass, L, *Finite-difference equations. Understanding nonlinear dynamics*. New-York , Springer-Verlag, 1995, 1-53.
- [20] L. Jouini, *Quantification et synchronisation du chaos dans les systèmes dynamiques discrets* ,Thèse de doctorat, Univ.Laarbi tebessi-Tébessa, 2021.
- [21] Li, Tien-Yien and Yorke, James A. (1975). "Period Three Implies Chaos." *The American Mathematical Monthly*, 82(10), 985-992.
- [22] M. Laabid, *Contrôle et synchronisation de quelques types de systèmes dynamiques chaotiques* , Thèse de doctorat Univ.Abd Elhafid Boussouf Mila, 2021.

- [23] Moon. F. C, *Chaotic and fractal dynamics systèmes : introduction for applied scientists and engineers* . John Wiley and Sons. 2008.
- [24] O. Megherbi, *Etude et réalisation d'un système sécurisé à base de systèmes chaotiques* , Thèse de Doctorat, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, 2013.
- [25] P. Dimitri, *Systèmes à temps discret commande numérique des procédés*, support de cours, Toulouse, 7 avril 2003.
- [26] Poincaré. H, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (vol. 3). Gauthier-Villars, 1899.
- [27] R. Bououden, *Systèmes dynamiques discrets*, Cours de master, Univ Abd Elhafid Boussouf Mila, 2018-2019.
- [28] R. J. Field and M. Burger, *Oscillations and traveling waves in chemical systems*. New York, Wiley,(1995).
- [29] Ruelle, D et Takens, F, *On the nature of turbulence*. Commun Math Phys 1971, 20, 167-192.
- [30] Saber N. Elaydi *Discrete Chaos With Application In Science And Engineering*, 2 ed Trinity University San Antonio, Texas, U. S. A.
- [31] T. Menacer, *Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires* , Thèse de doctorat, Université Frères Mentouri-Constantine-1, 2014.
- [32] Y. Yahiaoui *Sur certains aspects des Systèmes dynamiques discrets bidimensionnels* , Mémoire de magister, Université Abderrahmane Mira-Béjaia, 2009.
- [33] Zhang, W. B, *Discrete Dynamical Systems, Bifurcations and Chaos in Economics*. Elsevier, Boston, 2006.