الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire
Abdelhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département des Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Equations différentielles et méthode des sous et sur solutions

Préparé par : Yasmine Boudjeghim
Yassamine Chekkouf

Soutenue devant le jury

Badredine Boudjedaa	Prof	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Loubna Benaouicha	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Siham Bourourou	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année universitaire : 2022/2023

Remerciements

Nous remercions ALLAH, qui nous donne la force, la volonté et le moral pour accomplir mon étude de master en mathématique.

Un remerciement particulier à notre encadreuse de ce travail Mme.Loubna Benaouicha qui nous a proposé le thème de ce projet, pour sa disponibilité, son aide et ses précieux conseils.

Nos remerciements aux membres du jury qui nous se sont l'honneur d'avoir acceptent d'évaluer ce travail, de prendre soin et de l'enrichir par leurs propositions:

Le président : Prof. Badredine Boudjedaa.

L'examinateur : Mme. Siham Bourourou.

Nous remercions nos très chers parents, frères, sœurs, collègues qui nous ont encouragés, soutenu durant tout notre parcours.

Nous remercions les enseignants et les professeurs de mathématique et informatique, particulièrement ceux rattachés à la spécialité mathématique.

Merci

«Yasmine+ Yassamine»

Dédicace

Après çe long parcours d'études, du travail et de *préservérance.*

D'abord je remercie Allah *le tout puissant que m'a éclairé*

le bon cheminet qui m'a donné le pouvoir et la patience de compléter

ce difficile parcours et grâce à lui je suis la.

je dédie ce modeste travail à l'homme, mon précieux offre du dieu

qui m'a aidé de confronter toutes les obstacles dans ma vie.

*Si je réussite aujourd'hui c'est grâce à lui mon chére père :*Mehfoud.

À la femme qui a souffert sans me laisser soffrir *, elle m'a jamais*

refuser mes recommandations malgré toutes les conditions

l'amour de ma vie maman :Farida.

À ma chère sœur Nesrine et son fils Anis,*a mes frère :*Sif Eddine et Idris.

Pour ses soutiens morales et leurs conseils précieux durant

toute ma carrière d'étude .

À ma chère grand-mère :*zohra .*

À toutes mes belles maman :*Sabrina*, *Aziza*, *Hanane, Mounira*, *Nadjat*.

À toutes mes cousins spécialement : *Iman*, *Feriel*, *Lina*, *Amina*, *Anas .*

À mon *fioncé qui m'a encouragé .*

À ma chère bînome :*Yassamine*.

À mes chères camarades :*Chourouk*, *Rayane Dj*, *Rayane*, *Ibtissam*, *Chaima*.

À toute les nombres de professeurs de mathématiques .

«Yasmine»

Dédicace

En tout premier lieu, Je remercie Allah le tout- puissant de m'avoir donné la force et la patience afin de faire de ce travail.
Je dédie cet humble et modeste travail avec grand amour, sincérité et fierté.
Au paradis de Dieu sur terre, à la source de tendresse, le pouls de ma vie et ma chérie, à cette grande femme Maman de noblesse, d’affectation et d’encouragement de tous ce qui je lui dois.
À mon cher Papa, qui a toujours été mon soutien dans mes momont de détresse et fier à mon mois, je dois tous le respect qui Dieu lui accord santé et longue vie.
À mon soutien dans ma vie, au plus beau et précieux morceau de mon cœur, à mes princesses, mon chérie “mes soeurs” : Asma, Iman, Sara, Randa, Ikhlas avec mes souhaits de bonheurs de santé et de sucées.

Aux bourgeons de l’enfance et de poussins de la maison: Omayma, Safia, Baha, Iyad, Zaid, Moaid.

À mes chers amis et mon chemin compagne: Yasmine, Rayane, Ibtissam, Chourouk, Chaima, Wiam, Ghada et Chahinaze.

À tout les membres de Professeurs de mathématiques.

À mes camarades de promotion de 2éme Année Master Math 2023.

Et à tout qui compulse ce modeste travail.

«Yassamine»

الملـــخــــص

في هذا العمل قدمنا طريقة لدراسة وجود و وحدانية حل معادلة تفاضلية عادية، تسمى طريقة الحلول التحتية والفوقية.

تم تطبيق الطريقة على مشكل دوري مرتبط بمعادلة تفاضلية عادية من الدرجة الأولى والثانية.

<u>الكلمات المفتاحية :</u> الحلول التحتية والفوقية، مشكل دوري، معادلة تفاضلية عادية.

Résumé

Dans ce travail, nous avons présenté une méthode pour étudier l'existence et l'unicité d'une solution, pour une équation différentielle ordinaire, appelée méthode des sous et sur solutions.

La méthode est présentée dans un problème périodique associé à une équation différentielle ordinaire du premier et second ordre.

<u>Mots clés</u>: *Sous et sur solutions, problème périodique, équation différentielle ordinaire.*

Abstract

In this work, we have presented a method to study the existence and unicity of a solution, for an ordinary differential equation, called the upper and lower solutions methods.

The method is presented in a periodic problem associated with an ordinary first and second order differential equation.

<u>Keywords</u>: *Upper and lower solutions, periodic problem, ordinary differential equation.*

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES NOTATIONS

Certaines notations seront utilisées tout au long de cette mémoire que nous listons ci-dessous :

$\mathbb{R}$	: Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^n$	: Espace numérique réel à n dimensions cartésiennes $x_1, x_2, ..., x_n$.
$\mathbb{R}_+$	: Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{N}$	: Ensemble des entiers naturels 0, 1, 2,....
$\mathbb{N}^*$	: Ensemble des entiers naturels non nuls 1, 2,....
$\mathbb{C}$	: Ensemble des nombres complexes.
$[0, 2\pi]$	: Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités 0 et 2π.
$]0, 2\pi[$	: Intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités 0 et 2π.
$x^{(n)}(t) = \dfrac{d^n x}{dt^n}$	: Dérivée (n) de la variable x par rapport au temps.
$x^{(i)}$	: Ième dérivée.
max	: Fonction maximum.
min	: Fonction minimum.
$\lvert . \rvert$	: Valeur absolue ou norme sur $\mathbb{R}^2$.
$\lVert . \rVert$	: Norme sur $\mathbb{R}^n$.
A	: Un opérateur linéaire.

$C^k([0,2\pi])$	: Espace des fonctions k fois continue différentiable sur $[0,2\pi]$.

INTRODUCTION

Le thème de ce mémoire de master s'inscrit dans le cadre des équations différentielles et méthode des sous et sur solutions.

Le terme équation différentielle est apparu pour la première fois sous la plume de Leibniz (Philosophe et scientifique allemand, 1646-1716) en 1676, pour définir la relation entre les différentielles dx et dy des deux variables x et y.[16]

L'équation différentielle est une équation qui relie une fonction à un ou plusieurs de ses dérivés. Elles peuvent généralement être classés en deux types :

✓ Les équations différentielles ordinaires (EDO), où les fonctions inconnues recherchées ne dépendent que d'une seule variable.

✓ Les équations différentielles partielles (EDP), où les fonctions inconnues recherchées peuvent dépendre de plusieurs variables indépendantes.

Elles sont un outil puissant pour modéliser et analyser de nombreux phénomènes naturels et pratiques.

La méthode des sous et sur solutions est une méthode mathématique utilisée pour résoudre les problèmes différentiels. Elle consiste à encadrer la solution du problème par deux fonctions connues : une sous-solution et une sur-solution, fut initiée par

Scorza [28] en 1931. De lors, un grande nombre de contributions ont enrichi la théorie. Notamment, les extensions faites par Nagumo[24, 25, 26], Erbe[15], Mawhin [21, 22], Adjé [2, 3, 4], De Coster et Habets [10, 11, 12, 13].

La méthode des sous et sur-solutions est également utilisée pour prouver l'existence de solution à des problèmes différentiels. En effet, si on peut construire une sous-solution et une sur-solution qui se rencontrent en un point donné, alors la solution du problème existe en ce point.

Le but principale de ce travaille est pour prouver l'existence et localisation de solution pour les équations différentielles non linéaires, nous avons utilisé la méthode des sous et sur solutions.

Notre travail est divisé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on donne des notions et des résultats préliminaires sur les équations différentielles ordinaires : Existence et unicité pour le problème de Cauchy, EDO linéaire et non linéaire, quelques définitions et théorèmes.

Ensuite, le deuxième chapitre, on étudie un théorème d'existence sur un problème périodique associé à une équation différentielle ordinaire du premier ordre, en utilisant la méthode des sous et sur solutions.

Et le troisième chapitre, on étudie un théorème de l'existence des sous et sur solutions d'un problème périodique associé à une équation différentielle du second ordre. Et nous donnons des exemples dans cette dernière.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et notions fondamentales sur les équations différentielles ordinaires : linéaire et non linéaire, le problème de Cauchy.

1.1 Équation différentielle ordinaire

Définition 1.1.1 *[1]*

Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \mapsto x(t)$ *et ses dérivées* $x', x'', ..., x^{(n)}$ *au point t définie par*

$$f(t, x, x', x'', ..., x^{(n)}) = 0 \ . \tag{1.1}$$

où f *n'est pas indépendante de sa dernière variable* $x^{(n)}$*. On prendra t dans un intervalle I de* $\mathbb{R}$ *(I peut être* $\mathbb{R}$ *tout entier).*

La solution x en général sera à valeur dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 1.1.1 *L'équation*

$$(t+5)x^4x^{(4)} + tx^{(3)} + \frac{3}{x^2+5}x'' + x' = 0 \ ,$$

est une équation différentielle ordinaire d'ordre 4 *.*

1.2 Équation différentielle la forme normale

Définition 1.2.1 *[1]*

On appelle équation différentielle la forme normale d'ordre n toute équation de la forme

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t), ..., x^{(n-1)}(t)) \ . \tag{1.2}$$

Exemple 1.2.1 *L'équation*

$$x^{(5)} = x^{(4)} + x^{(3)} + x'' + x' \ ,$$

est une équation différentielle ordinaire d'ordre 5 *sous la forme normale.*

1.3 Équation différentielle autonome

Définition 1.3.1 *[1]*

On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toute équation de la forme

$$f(x, x', x'', ..., x^{(n-1)}) = x^{(n)} \ . \tag{1.3}$$

Autrement dit, f ne dépend pas explicitement de t.

Exemple 1.3.1 *L'équation*

$$x' - 2(x+1) = 0 \ ,$$

est une équation de premier ordre autonome .

1.4 Équation différentielle ordinaire du premier ordre

Définition 1.4.1 *[8]*

Une équation différentielle ordinaire du premier ordre est une expression qui décrit une relation entre une fonction à une variable et sa dérivée première

$$f(t, x, x') = 0 \ ,$$

lorsque cette équation est résoluble en x' , on peut mettre sous la forme

$$x' = f(t, x) \ . \tag{1.4}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est appelé solution générale.

Exemple 1.4.1 *l'équation différentielle*

$$x' + x^3 - 2t = 0 \ ,$$

est du premier ordre avec $V = \mathbb{R}$ et $f(t, x, x') = x' + x^3 - 2t$.

1.4.1 Types d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

⋆Équations différentielles à variables séparables

Définition 1.4.2 *[8]*

Une équation différentielle du premier ordre est à variables séparables si elle peut se mettre sous la forme

$$g(x)x' = f(t)\ , \tag{1.5}$$

où f et g sont des fonctions continues.

Dans la pratique, on écrit $g(x)x' = f(t)$ de la façon suivante

$$g(x)\frac{dx}{dt} = f(t)\ \ .$$

Ce que l'on peut encore écrire

$$g(x)\ dx = f(t)\ dt\ \ ,$$

on intègre les deux cotés, ce qui donne

$$\int g(x)\ dx = \int f(t)\ dt \Leftrightarrow G(x) = F(t) + K\ \ ,$$

où G une primitive de g, F une primitive de f et K une constante arbitraire.

Exemple 1.4.2 *Soit l'équation*

$$x' = \frac{2tx}{1+t^2}\ \ .$$

On se ramène à

$$\frac{1}{x}\ dx = \frac{2t}{1+t^2}\ dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{x}\ dx = \int \frac{2t}{1+t^2}\ dt\ \ ,$$

on intègre, on obtient

$$\ln(x) = \ln(1+t^2) + C \Leftrightarrow x = e^C(1+t^2) = k(1+t^2) \ .$$

⋆Équations différentielles homogènes

Proposition 1.4.1 *[8]*

On appelle équation différentielle du premier ordre homogène toute équation de la forme

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right) \ , t \neq 0 \ , \tag{1.6}$$

où f est définie, continue sur $I \in \mathbb{R}$.

Pour intégrer cette équation on fait le changement d'inconnue suivant $x = ut$, soit encore $u = \frac{x}{t}$, $t \neq 0$ et donc

$$x'(t) = u(t) + tu'(t) \ ,$$

on remplace dans (1.6)*, on trouve*

$$tu'(t) = f(u) - u(t) \ ,$$

c'est une équation à variables séparables qui s'écrit sous la forme

$$\frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{t} \ .$$

Exemple 1.4.3 *Soit l'équation*

$$t^2x' = tx - x^2 \ .$$

On a

$$t^2x' = tx - x^2 \Leftrightarrow x' = \frac{x}{t} - \left(\frac{x}{t}\right)^2 \ ,$$

on pose : $u = \frac{x}{t}$, $t \neq 0$,
et donc

$$x'(t) = u(t) + tu'(t) \ ,$$

on remplace dans (1.6), *on trouve*

$$tu'(t) = -u^2(t) \ .$$

C'est une équation à variables séparables qui s'écrit sous la forme

$$\frac{u'}{-u^2} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{du}{-u^2} = \frac{dt}{t} \ ,$$

on intègre

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{-u^2} = \int \frac{dt}{t} &\Leftrightarrow \frac{1}{u} = \ln|t| + C \\ &\Leftrightarrow x = \frac{t}{\ln|t| + C} \ .\end{aligned}$$

1.5 Équation différentielle ordinaire du second ordre

Définition 1.5.1 *[8]*

Une équation différentielle du second ordre est de la forme

$$f(t, x, x', x'') = 0 \ . \tag{1.7}$$

1.6 Équations différentielles ordinaires linéaires

1.6.1 Cas d'une équation non homogène

Définition 1.6.1 *[5]*

Une équation différentielle ordinaire est dite linéaire d'ordre n, ($n \in \mathbb{N}^*$) *elle est de la forme suivante*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + ... + a_i(t)x^{(i)} + ... + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t) \ , \tag{1.8}$$

où $x^{(i)}$, $1 \leq i \leq n$ *sont les dérivées d'ordre* i *de la fonction* x *par rapport à* t, *et* a_i , $1 \leq i \leq n$ *sont des fonctions continues.*

Une solution de cette équation est une fonction $x(t)$, n *fois dérivable sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$.

Définition 1.6.2 *[8]*

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation différentielle de la forme

$$x' + a(t)x = c(t) \ , \tag{1.9}$$

où a *et* c *sont des fonctions continues.*

Définition 1.6.3 *[8]*

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation du type

$$x'' + ax' + bx = c(t) \ , \tag{1.10}$$

où a, b *sont des réels et* $c : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, et* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$.

1.6.2 Cas d'une équation homogène

Définition 1.6.4 *[5]*

L'équation linéaire homogène associée à l'équation différentielle (1.8) *si est de la forme*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + ... + a_i(t)x^{(i)} + ... + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \ . \tag{1.11}$$

Exemple 1.6.1 *(1) L'équation*

$$x''(t) - 5x'(t) + 4x = 0 \ ,$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficient constantes.

(2) L'équation

$$(2t-1)x'''(t) + 2tx'(t) - x(t) = \cos t \ ,$$

est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 3 *à cofficient dépendant de* t*.*

1.7 Équations différentielles ordinaires non linéaires

Définition 1.7.1 *[19]*

Si l'on veut des modèles un peu plus complexes (et donc plus proches de la réalité), on obtient en règle générale des équations non linéaires.

Ce sont, pour la plupart, des équations que l'on ne sait pas résoudre de façon exactes. Ces équations sont résolues dans d'autres espaces que $\mathbb{R}^n$ *comme les espaces de Banach et de Fréchet en utilisant la théorie des semi groupes combinée avec les théorèmes des points fixes.*

Exemple 1.7.1 *(1) L'EDO*

$$x''(t) = (x'(t))^4 + x^3(t) + x^2(t) - 1 \ ,$$

est une équation explicite polynomiale non linéaire.

(2) L'EDO

$$(x''(t))^3 x(t) + (x'(t))^2 = 3 \ ,$$

est une équation implicite polynomiale non linéaire.

1.8 Solution d'une équation différentielle

Définition 1.8.1 ***(Prolongement)***

Soient $x : I \to U$ *et* $\tilde{x} : \tilde{I} \to \tilde{U}$ *deux soulions de l'équation différentielle. On dit que* $\tilde{x}$ *est un prolongement de* x *si* $I \subset \tilde{I}$ *et*

$$\tilde{x}(t) = x(t), \quad \forall t \in I \ .$$

Définition 1.8.2 ***(Solution maximale)*** *[14]*

On dit qu'une solution $x : I \to \mathbb{R}^n$ *est maximale sur* I *si* x *n'admet pas de prolongement* $\tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ *avec* $\tilde{I} \supsetneq I$.

Définition 1.8.3 ***(Solution globale)*** *[14]*

Soit I *un intervalle inclus dans* $\mathbb{R}$. *Une solution* x *est dite globale dans* I *si elle est définie sur l'intervalle* I *tout entier.*

Remarque 1.8.1 *[14]*

Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.

Exemple 1.8.1 *Soit* $x' = x^2$ *sur* $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1. *On a d'une part la solution* $x(t) = 0$ *est une solution évidente,*
2. *Si* $x(t) \neq 0$, *on a* $x' = x^2$ *s'écrit* $\dfrac{x'}{x^2} = 1$, *alors* $\dfrac{dx}{x^2} = dt$, *d'où par intégration*

$$-\frac{1}{x(t)} = t + C \quad ,$$

alors

$$x(t) = -\frac{1}{t + C} \text{ (C est un constante) } .$$

Cette solution est maximale mais non globale, $x(t) = 0$ *est la seule solution globale.*

Théorème 1.8.1 ***(Régularité des solutions)*** *[14]*

Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *et* $k \in \mathbb{N}$. *Si* $f \in C^k(I \times \mathbb{R}^n)$, *alors toute solution de* (1.4) *est de classe* C^{k+1} *sur* I.

Preuve.

On raisonne par récurrence sur k.

• $k = 0$: f continue.

Par hypothèse $x : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable, donc continue. Par conséquent $x'(t) = f(t, x(t))$ est continue, donc x de classe C^1.

• Si le résultat est vrai à l'ordre $k-1$, alors x est au moins de classe C^k. Comme f est de classe C^k, il s'ensuit que x' est de classe C^k comme composée de fonctions de classe C^k, donc x est de classe C^{k+1}. ■

1.9 Existence et unicité pour le problème de Cauchy

Définition 1.9.1 ***(Problème de Cauchy)*** *[5]*

Le problème de Cauchy étant donnés par

1. *Un interval $I \subset \mathbb{R}$,*
2. *Une fonction f, définie et continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$*

$$f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(t, x) \mapsto f(t, x) \ ,$$

trouver une fonction $x \in C^1(I)$ telle que

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & , \forall t \in I \ \ , \forall x \in \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0 & , t_0 \in I \qquad (\text{Condition Initiale}) \end{cases} . \tag{1.12}$$

Définition 1.9.2 ***(Solution du problème de Cauchy)*** *[27]*

Une solution du problème de Cauchy sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 $x : I \mapsto \mathbb{R}^n$ telle que

i. *Pour tout $t \in I$, $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$,*

ii. *x est continue sur I,*

iii. *Pour tout $t \in I$*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \ . \tag{1.13}$$

Preuve.

Soit $x : I \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur un intervalle ouvert I qui contient t_0 et que $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.

Supposons que x est une solution du problème de Cauchy (1.12). Alors x est dérivable sur I et vérifie

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \tag{1.14}$$

En intégrant les deux membres de t_0 à t, on obtient pour tout $t \in I$

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds ,$$

ce qui donne, en remplaçant $x(t_0)$ par x_0

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \text{ ,} pour\ tout\ t \in I .$$

Inversement, supposons que pour tout $t \in I$, x vérifie

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds , \tag{1.15}$$

alors, d'aprés la continuité de x et f, donc la dérivabilité de la fonction $t \mapsto f(t, x(t))$, on obtient

$$x'(t) = f(t, x(t)) \text{ , } pour\ tout\ t \in I , \tag{1.16}$$

de plus x vérifie $x(t_0) = x_0$ ce qui signifie que x est solution du problème (1.12). ■

Exemple 1.9.1 *Soit le problème suivant*

$$\begin{cases} x' = e^{-t^2} + x^2 \quad , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \quad et \quad 0 < |x| < b \\ x(0) = 0 \end{cases} ,$$

ce problème est un proplème de Cauchy.

La fonction f est définie par $(t,x) \mapsto f(t,x) = e^{-t^2} + x^2$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \mathbb{R}$ avec la condition initiale $x(t_0) = x(0) = 0$.

On a x est une fonction continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc par intégration sur $[0,t]$ de la fonction f on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_0^t x'(s)\,ds = \int_0^t f(s,x(s))\,ds \\
&\Longrightarrow x(t) - x(0) = \int_0^t \left[e^{-s^2} + x^2(s)\right]\,ds \\
&\Longrightarrow x(t) = \int_0^t f(s,x(s))\,ds\,.
\end{aligned}$$

1.9.1 Existence et l'unicité globale

Définition 1.9.3 *[27]*

Soient I un intervalle réel, D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : I \times D \mapsto \mathbb{R}^n$. Soient $(t_0, x_0) \in I \times D$. On dit que f est globalement lipschitzienne, c'est à dire qu'il existe $L > 0$ tel que pour tout $(t,y),(t,x)$ dans $I \times \mathbb{R}^n$

$$\|f(t,y(t)) - f(t,x(t))\| \leq L\|y(t) - x(t)\|\,.$$

Théorème 1.9.1 *[27]*

On suppose $f \in C(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est globalement lipschitzienne par rapport à deuxième variable. Alors, $\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ il existe une solution globale du problème (1.12).

Exemple 1.9.2 *Le système suivant est un problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{5}{4} x(t)^{\frac{1}{5}} \\ x(0) = 0 \end{cases}. \tag{1.17}$$

On pose :

$$f(t,x(t)) = \frac{5}{4}x(t)^{\frac{1}{5}} \quad .$$

(1) *Cette fonction est de classe* C^1 *car* (f *est une polynôme caractéristique).*

(2) *Montrons que* f *est globalement lipschitzienne :*

$\exists\, L > 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ *telle que*

$$\begin{aligned} \| f(t,x_1(t)) - f(t,x_2(t)) \| &= \| \frac{5}{4}x_1(t)^{\frac{1}{5}} - \frac{5}{4}x_2(t)^{\frac{1}{5}} \| \\ &\leq \frac{5}{4}\| x_1(t)^{\frac{1}{5}} - x_2(t)^{\frac{1}{5}} \| \quad , \end{aligned}$$

alors, f *est globalement lipschitzienne.*

De (1) *et* (2) *on a la solution du problème* (1.17) *existe et unique.*

1.9.2 Existence et l'unicité locale

Définition 1.9.4 ***(Fonction localement lipschitzienne)*** *[27]*

Soient I *un intervalle réel,* D *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. $f : I \times D \mapsto \mathbb{R}^n$. *Soient* $(t_0, x_0) \in I \times D$ *et* $J \subset D$ *un voisinage du point* x_0.

On dit que f *est localement lipschitzienne par rapport à la variable* x *dans le voisinage* J *si il existe une constante* $L > 0$, *et il existe un voisinage* $U \subset I$ *du point* t_0 *tels que*

$$\|f(t,x_1(t)) - f(t,x_2(t))\| \leq L\|x_1(t) - x_2(t)\| \quad ,$$

pour $(t,x_1(t)),(t,x_2(t))$ *dans* $U \times J$.

Théorème 1.9.2 ***(Unicité)*** [7]

Soient U *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *et* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction continue et localement Lipschitzienne en* x, *alors pour tout* $(t_0, x_0) \in U$, *le problème* (1.12) *admet une solution maximale unique.*

1.10 Espaces Fonctionnels

Définition 1.10.1 ***(Espace de Banach)*** *[9]*

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ *(sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *) qui est complet pour la métrique associée à cette norme.*

Définition 1.10.2 ***(Espace vectoriel normé)*** *[9]*

Soit X un espace vectoriel. On appelle norme sur X une application de X dans $\mathbb{R}_+$ *habituellement notée* $\|.\|$ *vérifiant pour tout* $x, y \in X$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{k}$

1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \ \|x\|$ *(homogénéité) ,*

2) $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$ *et ,*

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire) .*

1.11 Théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Théorème 1.11.1 *[19]*

Soit X un espace de Banach. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions dans* $L^1(X, X)$ *et soit* f *une fonction de X dans X tell que* $f > 0$*. On suppose que*

i. La suite $(f_n(x))_{n\in N}$ *converge vers* $f(x)$*, pour presque tout* $x \in X$ *,*

ii. Il existe une fonction $g \in L^1(X, \mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \|f_n(x)\| \leq g(x), \ \textit{pour tout } x \in X \ .$$

Alors la fonction f *est intégrable et on a*

$$f \in L^1(X, X) \ , \ \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0 \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\, dx = \int_X f(x)\, dx \ .$$

CHAPITRE 2

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU 1^{er} ORDRE ET MÉTHODE DES SOUS ET SUR SOLUTIONS

La première partie de ce chapitre nous avons donné le théorème du point fixe de Brouwer et en particulier les hypothèses des éléments de ce théorème. Dans la deuxième partie on présente le résultat d'existence de solution d'un problème périodique du première ordre grâce aux notions des sous et sur solutions.

2.1 Théorème du point fixe de Brouwer 1910

Définition 2.1.1 ***(Ensemble compact)*** *[20]*

Les parties compactes de $(\mathbb{R}, |.|)$ *sont les parties à la fois fermées et bornées.*

Définition 2.1.2 ***(Ensemble convexe)*** *[18]*

Un sous-ensemble C *de* $\mathbb{R}^n$ *est dit convexe si et seulement si*

$$\forall x, y \in C : [x, y] = \{(1-t)x + ty,\ t \in [0, 1]\} \subseteq C \ .$$

Définition 2.1.3 ***(Opérateur continu)*** *[30]*

Soient E *et* F *deux espaces normés, un opérateur* A *défini sur un sous ensemble* $S \subset E$ *dans* F *est dit continu au point* x_0 *de* S *si on a la propriété suivant :*

Pour tout suite $(x_n)_n$ *de* S *converge vers* x_0*, la suite* $A(x_n)$ *converge vers* $A(x_0)$ *c'est à dire*

$$\lim_{n\to+\infty} A(x_n) = A(\lim_{n\to+\infty} x_n) = A(x_0) \ .$$

Définition 2.1.4 ***(Point fixe)*** *[9]*

Soit A *une application d'un ensemble* X *dans lui même. On appelle point fixe tout point* $x \in X$ *tel que*

$$A(x) = x \ .$$

Théorème 2.1.1 ***(Point fixe de Brouwer)*** *[29]*

Soit C *un compact, convexe non vide de* $\mathbb{R}^n$ *et* $A : C \to C$ *une application continue, alors* A *admet au moins un point fixe dans* C*.*

Définition 2.1.5 ***(La fonction périodique)*** *[17]*

On appelle période d'une fonction $f \in C(\mathbb{R}, X)$ *le plus petit nombre réel positif non nul* T *tel que*

$$f(x+T) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

2.2 Présentation du problème

[6] On considère le problème périodique

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in [0, 2\pi] \\ x(0) = x(2\pi) \end{cases} , \tag{2.1}$$

où $f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Définition 2.2.1 *(Sous-solution) [6]*

Une fonction $\alpha \in C^1([0, 2\pi])$ est une sous-solution du problème (2.1) *si*

(a) $\forall t \in [0, 2\pi] \ , \ \alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t))$;

(b) $\alpha(0) \leq \alpha(2\pi)$.

Définition 2.2.2 *(Sur-solution) [6]*

Une fonction $\beta \in C^1([0, 2\pi])$ est une sur-solution du problème (2.1) *si*

(a) $\forall t \in [0, 2\pi] \ , \ \beta'(t) \geq f(t, \beta(t))$;

(b) $\beta(0) \geq \beta(2\pi)$.

2.3 Existence de solutions C^1

Théorème 2.3.1 *les résultats dans la référence [6]*

On suppose qu'il existe α et β sont des sous et sur solution de problème périodique (2.1), *telles que $\alpha \leq \beta$. Et soit l'ensemble S définie par*

$$S = \{(t, x) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}; \ \ \alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)\} \ .$$

On suppose que f est continue sur S. Alors le problème (2.1) *admet au moins une solution* $x \in C^1([0, 2\pi])$ *telle que*

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi] .$$

Preuve.

Considérons le problème modifié suivant

$$\begin{cases} x' = f(t, \sigma(t, x)), & pour\ t \in]0, 2\pi[\\ x(0) = x(2\pi) \end{cases} , \tag{2.2}$$

où $\sigma : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue définie par

$$\sigma(t, x) = \begin{cases} \alpha(t) , & si\ \ x < \alpha \\ x(t) , & si\ \ \alpha \leq x \leq \beta \\ \beta(t) , & si\ \ \beta < x \end{cases} . \tag{2.3}$$

D'après le problème de Cauchy dans le chapitre 1, le problème (2.2) est équivalent à l'équation intégrale

$$x(t) = \int_0^{2\pi} f(s, \sigma(s, x(s)))\, ds . \tag{2.4}$$

Et pour démontre le théorème (2.3.1) on utilisons deux étapes :

Etape (1) :

On montre que toute solution du problème (2.1) satisfait

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi] .$$

⋆ **Première cas :**

Montrons que

$$\alpha(t) \leq x(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi] . \tag{2.5}$$

On suppose par l'absurde qu'il existe $t \in [0, 2\pi]$ tel que $x(t) - \alpha(t) < 0$. Puisque $(x - \alpha) \in C^1([0, 2\pi])$, il existe $t_0 \in [0, 2\pi]$ tel que

$$\min_{t \in [0,2\pi]} \{x(t) - \alpha(t)\} = x(t_0) - \alpha(t_0) < 0 \; .$$

- Si $t_0 \in]0, 2\pi[$, alors $x'(t_0) - \alpha'(t_0) = 0$ et puisque x est une solution de (2.1) et $x(t_0) < \alpha(t_0)$ alors

$$x'(t_0) - \alpha'(t_0) = f(t_0, \alpha(t_0)) - \alpha'(t_0) \geq 0 \; ,$$

ce qui est une contradiction.

- Si $t_0 \in \{0, 2\pi\}$, alors

$$\min_{t \in [0,2\pi]} \{x(t) - \alpha(t)\} = x(0) - \alpha(0) = x(2\pi) - \alpha(2\pi) < 0 \; .$$

Donc, $x(0) - \alpha(0) \leq 0 \leq x(2\pi) - \alpha(2\pi)$, $\alpha(t)$ sous-solution de problème (2.1) alors, on a

$$x(0) = x(2\pi) \;\; et \;\; \alpha(0) \leq \alpha(2\pi) \;\; i.e \;\; x(0) - \alpha(0) \leq x(2\pi) - \alpha(2\pi) \; .$$

D'ou

$$x(0) - \alpha(0) = x(2\pi) - \alpha(2\pi) = 0 \; .$$

Donc, pour t assez petit, on a $x(t) - \alpha(t) < 0$ et

$$\int_0^t [x'(s) - \alpha'(s)] \, ds = \int_0^t [f(s, \alpha(s)) - \alpha'(s)] \, ds \geq 0 \; ,$$

c'est à dire $x(t) - \alpha(t) \geq 0$. D'ou la contradiction.

⋆ **Second cas :**

Montrons que

$$x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi] \; . \tag{2.6}$$

On suppose par l'absurde qu'il existe $t \in [0, 2\pi]$ tel que $x(t) - \beta(t) > 0$. Puisque $(x - \beta) \in C^1([0, 2\pi])$, il existe $t_0 \in [0, 2\pi]$ tel que

$$\max_{t\in[0,2\pi]} \{x(t) - \beta(t)\} = x(t_0) - \beta(t_0) > 0 \ .$$

- Si $t_0 \in]0, 2\pi[$, alors $x'(t_0) - \beta'(t_0) = 0$ et puisque x est une solution de (2.1) et $x(t_0) > \beta(t_0)$ alors

$$x'(t_0) - \beta'(t_0) = f(t_0, \beta(t_0)) - \beta'(t_0) \leq 0 \ ,$$

ce qui est une contradiction.

- Si $t_0 \in \{0, 2\pi\}$, alors

$$\max_{t\in[0,2\pi]} \{x(t) - \beta(t)\} = x(0) - \beta(0) = x(2\pi) - \beta(2\pi) > 0 \ .$$

Donc, $x(0) - \beta(0) \geq 0 \geq x(2\pi) - \beta(2\pi)$, $\beta(t)$ sur-solution de problème (2.1) alors, on a

$$x(0) = x(2\pi) \ \ et \ \ \beta(0) \geq \beta(2\pi) \ \ i.e \ \ x(0) - \beta(0) \geq x(2\pi) - \beta(2\pi) \ .$$

D'ou

$$x(0) - \beta(0) = x(2\pi) - \beta(2\pi) = 0 \ .$$

Donc, pour t assez petit, on a $x(t) - \beta(t) > 0$ et

$$\int_0^t [x'(s) - \beta'(s)] \, ds = \int_0^t [f(s, \beta(s)) - \beta'(s)] \, ds \leq 0 \ ,$$

c'est à dire $x(t) - \beta(t) \leq 0$. D'ou la contradiction.

Alors, d'après les deux cas, on a

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi] \ .$$

Etape(2) :

Dans cette étape nous allons montrer que le problème (2.1) admet au moins une solution. Pour cela nous allons transformer le problème (2.1) en un problème de point fixe et appliquer le théorème de Brouwer (théorème (2.1.1)). C'est à dire, montrer que T est continu.

Il est clair que x est une solution du problème (2.2) si et seulement si x est un point fixe de T tel que T est un opérateur défini comme suit

$$T : C([0, 2\pi]) \to C([0, 2\pi])$$
$$x \mapsto Tx \ ,$$

tel que pour tout $x \in C([0, 2\pi])$ et pour tout $t \in [0, 2\pi]$

$$Tx(t) = \int_0^{2\pi} f(s, \sigma(s, x(s)))\, ds \ .$$

Les points fixes de cet opérateur sont solutions de l'équation intégrale, donc solutions du problème (2.1). Pour montrer l'existence de solutions du problème (2.2) il suffit de montrer que T admet un point fixe en vérifiant que les hypothèses du théorème de Brouwer (Théorème (2.1.1)) sont satisfaites :

$*$ **T est continu :**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge dans $C([0, 2\pi])$ vers un certain élément x. Alors pour $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}
|Tx_n(t) - Tx(t)| &= | \int_0^{2\pi} f(s, \sigma(s, x_n(s)))\, ds - \int_0^{2\pi} f(s, \sigma(s, x(s)))\, ds \,| \\
&\leq \int_0^{2\pi} \sup_{s\in[0,2\pi]} |\, f(s, \sigma(s, x_n(s))) - f(s, \sigma(s, x(s)))\,|\, ds \\
&\leq \int_0^{2\pi} \sup_{s\in[0,2\pi]} |\, h_n(s) - h(s)\,|\, ds \\
&\leq 2\pi \|h_n - h\|_{L^1} \ ,
\end{aligned}$$

où pour tout $s \in [0, 2\pi]$

$$h_n(s) = f(s, \sigma(s, x_n(s))) ,$$

et

$$h(s) = f(s, \sigma(s, x(s))) .$$

Puisque f et σ sont continues et que la suite $(x_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x(s)$, alors la suite $(h_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $h(s)$ pour presque tout $s \in [0, 2\pi]$ et puisque f et σ sont bornées, alors d'aprés le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (théorème (1.11.1)), on a $\|h_n - h\|_{L^1} \longrightarrow 0$. Donc pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|Tx_n(t) - Tx(t)| \longrightarrow 0$. D'ou $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Tx. Par conséquance T est continu.

Alors, d'après le théorème de Brouwer (2.1.1), on déduite que T admet une point fixe x dans $C([0, 2\pi])$ qui est solution du problème (2.1).

De plus, nous avons

$$x'(t) = f(t, \sigma(t, x(t))) ,$$

et donc x' est continue, ce qui implique que $x \in C^1([0, 2\pi])$. On en déduit que x est un solution du problème (2.1). Et d'après la première étape x vérifié

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi] .$$

■

Exemple 2.3.1 *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} x' + \sin x = 1 \ , \ \textit{pour } t \in [0, 2\pi] \\ x(0) = x(2\pi) \end{cases} . \tag{2.7}$$

La fonction $\alpha(t) = \dfrac{\pi}{2}$ *est une sous-solution de ce problème car*

$$\begin{aligned}\alpha'(t) + \sin(\alpha(t)) - 1 &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \\ &= 1 - 1 = 0\ ,\end{aligned}$$

avec $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = \dfrac{\pi}{2}$.

La fonction $\beta(t) = \dfrac{3\pi}{2}$ *est une sous-solution de ce problème car*

$$\begin{aligned}\beta'(t) + \sin(\beta(t)) - 1 &= \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 1 \\ &= -1 - 1 = -2 < 0\ ,\end{aligned}$$

avec $\beta(0) = \beta(2\pi) = \dfrac{3\pi}{2}$.

De plus, on a $\alpha(t) \leq \beta(t),\ \forall t \in [0, 2\pi]$.

En vertu du théorème (2.3.1), *ce problème admet une solution* x *vérifiant*

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi]\ ,$$

ce qui nous permet de dire que

$$\frac{\pi}{2} \leq x(t) \leq \frac{3\pi}{2}, \quad \forall t \in [0, 2\pi]\ .$$

Corollaire 2.3.1 *Soit* $f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue telle que pour* $r_1 \leq r_2$ *et* $\forall t \in [0, 2\pi]$

$$f(t, r_1).f(t, r_2) \leq 0\ .$$

Alors, ce problème admet au moins une solution $x \in C^1([a, b])$ *telle que*

$$r_1 \leq x(t) \leq r_2, \quad \forall t \in [0, 2\pi]\ .$$

Preuve.

Soit $f(t,r_1).f(t,r_2) \leq 0$. Cela implique que soit

(1) $f(t,r_1) \geq 0$ *et* $f(t,r_2) \leq 0$ ou ,

(2) $f(t,r_1) \leq 0$ *et* $f(t,r_2) \geq 0$.

Soit r_1 sous-solution de (2.1), alors on a $r_1 \leq f(t,r_1)$ puisque r_1 est une constante, cela implique que $0 \leq f(t,r_1)$ si r_2 est une sur-solution, on a $r_2 \geq f(t,r_2)$, donc $0 \geq f(t,r_2)$, ceci a donné lieu au cas (1) ci-dessus.

Si nous avons r_2 comme sous-solution et r_1 comme sur-solution, nous avons cas (2).

Donc, puisque r_1 et r_2 sont sous et sur solutions vérifiant les hypothèses du corollaire, alors d'après le théorème (2.3.1), il existe une solution $x(t)$ telle que

$$r_1 \leq x(t) \leq r_2, \quad \forall t \in [0,2\pi] .$$

■

CHAPITRE 3

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU 2^{e} ORDRE ET MÉTHODE DES SOUS ET SUR SOLUTIONS

Dans ce chapitre on donne un résultat d'existence de solution d'un problème du second ordre, on utilise la méthode des sous et sur solutions et le théorème du point fixe de Schauder.

3.1 Théorème du point fixe de Schauder 1930 et d'Ascoli-Arzela

Définition 3.1.1 ***(Opérateur linéaire)*** *[30]*

Soit E et F deux espaces vectoriel sur le corps $\Bbbk$, et $A : E \to F$. On dit que l'opérateur A est linéaire si

(1) $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \Bbbk, \quad A(x + y) = A(x) + A(y)$;

(2) $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

Définition 3.1.2 ***(Ensemble relativement compact)*** *[23]*

$A(C)$ est dit relativement compact si $\overline{A(C)}$ (adhérence de $A(C)$) est compact.

Théorème 3.1.1 ***(Point fixe de Schauder)*** *[23]*

Soit X un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}^n$ et C une partie non vide de X fermé et convexe. Si A est une application continue de C dans C telle que $A(C)$ soit relativement compact, alors A admet un point fixe.

Théorème 3.1.2 ***(Ascoli-Arzela)*** *[31]*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}^n$, $A(C) \subset C(I, \mathbb{R}^n)$, $A(C)$ est relativement compact si

1. *$A(C)$ est bornée, c'est à dire qu'il existe $M > 0$:*

$$|Ax(t)| \leq M, \ \forall t \in I \ \text{ et } \ Ax \in A(C) \ ,$$

2. *$A(C)$ est équicontinu c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$:*

$$\forall t_1, t_2 \in I, |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |Ax(t_1) - Ax(t_2)| < \varepsilon, \ \forall Ax \in A(C) \ .$$

3.2 Présentation du problème

[12] On considère le problème périodique

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in [0, 2\pi] \\ x(0) = x(2\pi), \; x'(0) = x'(2\pi) \end{cases}, \tag{3.1}$$

où $f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Définition 3.2.1 *(Sous-solution) [12]*

Une fonction $\alpha \in C^2(]0, 2\pi[) \bigcap C^1([0, 2\pi])$ *est une sous-solution du problème* (3.1) *si*

(a) $\forall t \in]0, 2\pi[\;, \; \alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t))$;

(b) $\alpha(0) = \alpha(2\pi) \;, \; \alpha'(0) \geq \alpha'(2\pi)$.

Définition 3.2.2 *(Sur-solution) [12]*

Une fonction $\beta \in C^2(]0, 2\pi[) \bigcap C^1([0, 2\pi])$ *est une sur-solution du problème* (3.1) *si*

(a) $\forall t \in]0, 2\pi[\;, \; \beta''(t) \leq f(t, \beta(t))$;

(b) $\beta(0) = \beta(2\pi) \;, \; \beta'(0) \leq \beta'(2\pi)$.

3.3 Existence de solutions C^2

Théorème 3.3.1 *les résultats dans la référence [23]*

On suppose qu'il existe α *et* β *sont des sous et sur solutions du problème périodique* (3.1), *telles que* $\alpha \leq \beta$. *Et soit l'ensemble* S *est définie par*

$$S = \{(t, x) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}; \;\; \alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)\} .$$

On suppose que f *est continue sur* S. *Alors le problème* (3.1) *admet au moins une solution*

$x \in C^2([0, 2\pi])$ *telle que*

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi] .$$

Preuve.

Considérons le problème modifié suivant

$$\begin{cases} x'' - x = f(t, \sigma(t, x)) - \sigma(t, x) & pour\ t \in]0, 2\pi[\\ x(0) = x(2\pi), \ \ x'(0) = x'(2\pi) \end{cases}, \tag{3.2}$$

où $\sigma : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue définie par

$$\sigma(t, x) = \begin{cases} \alpha(t) , & si\ \ x < \alpha \\ x(t) , & si\ \ \alpha \leq x \leq \beta \\ \beta(t) , & si\ \ \beta < x \end{cases} . \tag{3.3}$$

Le problème (3.2) est équivalent à l'équation intégrale

$$x(t) = x(0) + \int_0^{2\pi} G(t, s) f(s)\, ds, \quad \forall t \in [0, 2\pi] , \tag{3.4}$$

où G est la fonction de Green définie par

$$G(t, x) = \begin{cases} \dfrac{t(s - 2\pi)}{2\pi} & si\ \ 0 \leq t \leq s \leq 2\pi \\ \dfrac{s(t - 2\pi)}{2\pi} & si\ \ 0 \leq s \leq t \leq 2\pi \end{cases} . \tag{3.5}$$

Preuve.

Trouvons la solution du problème linéaire suivant

$$\begin{cases} x''(t) = f(t) \\ x(0) = x(2\pi), \ \ x'(0) = x'(2\pi) \end{cases} .$$

En effet : on considère l'équation

$$x''(t) = f(t) \ .$$

En intégrant une première fois les deux membres entre 0 et t, on obtient

$$\int_0^t x''(s)\, ds = \int_0^t f(s)\, ds \ ,$$

c'est-à-dire

$$x'(t) - x'(0) = \int_0^t f(s)\, ds \ ,$$

et donc

$$x'(t) = \int_0^t f(s)\, ds + x'(0) \ .$$

Ensuite par une deuxième intégration, on trouve

$$x(t) - x(0) = \int_0^t ds \int_0^s f(\tau)\, d\tau + \int_0^t x'(0)\, ds \ ,$$

c'est-à-dire

$$x(t) = \int_0^t (t-s) f(s)\, ds + t x'(0) + x(0) \ .$$

Comme on a : $x(0) = x(2\pi)$ et $x'(0) = x'(2\pi)$ alors :

$$x(0) = \int_0^{2\pi} (2\pi - s) f(s)\, ds + 2\pi x'(0) + x(0) \ ,$$

ce qui donne

$$x'(0) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2\pi - s) f(s)\, ds \ .$$

On remplace $x'(0)$ dans l'expression de $x(t)$, on trouve

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(0) + \int_0^t (t-s)f(s)\,ds + t\left[\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi - s)f(s)\,ds\right] \\
&= x(0) - \frac{t}{2\pi}\int_0^t (2\pi - s)f(s)\,ds - \frac{t}{2\pi}\int_t^{2\pi}(2\pi - s)f(s)\,ds + \int_0^t (t-s)f(s)\,ds \\
&= x(0) + \int_0^t \frac{-t(2\pi - s) + 2\pi(t-s)}{2\pi}f(s)\,ds + \int_t^{2\pi}\frac{-t(2\pi - s)}{2\pi}f(s)\,ds \\
&= x(0) + \int_0^t \frac{s(t-2\pi)}{2\pi}f(s)\,ds + \int_t^{2\pi}\frac{t(s-2\pi)}{2\pi}f(s)\,ds \\
&= x(0) + \int_0^{2\pi}\left[\frac{st}{\pi} - (s-t)\right]f(s)\,ds \\
&= x(0) + \int_0^{2\pi} G(t,s)f(s)\,ds\ ,
\end{aligned}$$

où G est la fonction de Green définie par l'expression (3.5). ■

Et pour démontre le théorème (3.3.1) on utilisons deux étapes :

• **Etape 1 :**

On montre que toute solution du problème (3.1) satisfait

$$\alpha(t) \le x(t) \le \beta(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi]\ .$$

⋆ **Première cas :**

Montrons que

$$\alpha(t) \le x(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi]\ .$$

On suppose par l'absurde qu'il existe $t \in [0, 2\pi]$ tel que $x(t) - \alpha(t) < 0$. Puisque $(x - \alpha) \in C^2([0, 2\pi])$, il existe $t_0 \in [0, 2\pi]$ tel que

$$\min_{t\in[0,2\pi]}\{x(t) - \alpha(t)\} = x(t_0) - \alpha(t_0) < 0\ .$$

- Si $t_0 \in]0, 2\pi[$, alors $x''(t_0) - \alpha''(t_0) \geq 0$, et puisque x est une solution de (3.1) et $x(t_0) < \alpha(t_0)$, alors

$$\begin{aligned} x''(t_0) - \alpha''(t_0) &= f(t_0, \alpha(t_0)) + x(t_0) - \alpha(t_0) - \alpha''(t_0) \\ &= [f(t_0, \alpha(t_0)) - \alpha''(t_0)] + [x(t_0) - \alpha(t_0)] \\ &< 0 \ , \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction.

- Si $t_0 \in \{0, 2\pi\}$, alors

$$\min_{t \in [0,2\pi]} \{x(t) - \alpha(t)\} = x(0) - \alpha(0) = x(2\pi) - \alpha(2\pi) < 0 \ ,$$

Donc, $x'(2\pi) - \alpha'(2\pi) \leq 0 \leq x'(0) - \alpha'(0)$, $\alpha(t)$ sous-solution de problème (3.1) alors, on a

$$x'(0) = x'(2\pi) \quad et \quad \alpha'(0) \geq \alpha'(2\pi) \quad i.e \quad x'(2\pi) - \alpha'(2\pi) \leq x'(0) - \alpha'(0) \ ,$$

d'ou

$$x'(0) - \alpha'(0) = x'(2\pi) - \alpha'(2\pi) = 0 \ .$$

Donc, pour t assez petit, on a $x(t) - \alpha(t) < 0$ et

$$\begin{aligned} \int_0^t [x''(s) - \alpha''(s)] \, ds &= \int_0^t [f(s, \alpha(s)) + x(s) - \alpha(s) - \alpha''(s)] \, ds \\ &= \int_0^t [f(s, \alpha(s)) - \alpha''(s)] + [x(s) - \alpha(s)] \, ds \\ &< 0 \ , \end{aligned}$$

c'est à dire $x'(t) - \alpha'(t) < 0$. D'ou la contradiction.

⋆ **Second cas :**

Montrons que

$$x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi] \ .$$

On suppose par l'absurde qu'il existe $t_0 \in [0, 2\pi]$ tel que $x(t) - \beta(t) > 0$. Puisque $(x - \beta) \in C^2([0, 2\pi])$, il existe $t_0 \in [0, 2\pi]$ tel que

$$\max_{t\in[0,2\pi]} \{x(t) - \beta(t)\} = x(t_0) - \beta(t_0) > 0 \ .$$

- Si $t_0 \in]0, 2\pi[$, alors $x''(t_0) - \beta''(t_0) \le 0$, et puisque x est une solution de (3.1) et $x(t_0) > \beta(t_0)$, alors

$$\begin{aligned} x''(t_0) - \beta''(t_0) &= f(t_0, \beta(t_0)) + x(t_0) - \beta(t_0) - \beta''(t_0) \\ &= [f(t_0, \beta(t_0)) - \beta''(t_0)] + [x(t_0) - \beta(t_0)] \\ &> 0 \ , \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction.

- Si $t_0 \in \{0, 2\pi\}$, alors

$$\max_{t\in[0,2\pi]} \{x(t) - \beta(t)\} = x(0) - \beta(0) = x(2\pi) - \beta(2\pi) > 0 \ ,$$

Donc, $x'(0) - \beta'(0) \le 0 \le x'(2\pi) - \beta'(2\pi)$, $\beta(t)$ sur-solution de problème (3.1) alors, on a

$$x'(0) = x'(2\pi) \ \ et \ \ \beta'(0) \le \beta'(2\pi) \ \ i.e \ \ x'(0) - \beta'(0) \le x'(2\pi) - \beta'(2\pi) \ ,$$

d'ou

$$x'(0) - \beta'(0) = x'(2\pi) - \beta'(2\pi) = 0 \ .$$

Donc, pour t assez petit, on a $x(t) - \beta(t) > 0$ et

$$\begin{aligned} \int_0^t [x''(s) - \beta''(s)] \, ds &= \int_0^t [f(s, \beta(s)) + x(s) - \beta(s) - \beta''(s)] \, ds \\ &= \int_0^t [f(s, \beta(s)) - \beta''(s)] + [x(s) - \beta(s)] \, ds \\ &> 0 \ , \end{aligned}$$

c'est-à-dire $x'(t) - \beta'(t) > 0$. D'ou la contradiction.

Alors, d'après les deux cas, on a

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi] .$$

• **Etape 2 :**

Dans cette étape nous allons montrer que le problème (3.1) admet au moins une solution. Pour cela nous allons transformer le problème (3.1) en un problème de point fixe et nous allons appliquer le théorème de Schauder (Théorème (3.1.1)).

Il est clair que x est une solution du problème (3.2) si et seulement si x est un point fixe de T tel que T est un opérateur défini comme suit

$$\begin{aligned} T : C([0, 2\pi]) &\to C([0, 2\pi]) \\ x &\mapsto Tx , \end{aligned}$$

tel que pour tout $x \in C([0, 2\pi])$ et pour tout $t \in [0, 2\pi]$

$$Tx(t) = \int_0^{2\pi} G(t, s)[f(s, \sigma(s, x(s))) - \sigma(s, x(s))] \, ds . \tag{3.6}$$

Les points fixes de cet opérateur sont solutions de l'équation intégrale, donc solutions du problème (3.2). Pour montrer l'existence de solutions du problème (3.2) il suffit de montrer que T admet un point fixe en vérifiant que les hypothèses du théorème de Schauder (Théorème (3.1.1)) sont satisfaites. C'est-à-dire, montrer que T est continu et que $T(C([0, 2\pi]))$ est relativement compact. Pour montrer cette dernière hypothèse nous allons utiliser le théorème d'Ascoli-Arzela (Théorème (3.1.2)), c'est-à-dire vérifier que $T(C([0, 2\pi]))$ est borné et équicontinu.

$*$ **T est continu :**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers x dans $C([0,2\pi])$. Alors, pour tout $t \in [0,2\pi]$

$$\begin{aligned}
| Tx_n(t) - Tx(t)| &= | \int_0^{2\pi} G(t,s)[f(s,\sigma(s,x_n(s))) - \sigma(s,x_n(s)) - f(s,\sigma(s,x(s))) + \sigma(s,x(s))]\, ds | \\
&\leq \max_{s,t\in[0,2\pi]} |G(t,s)| \int_0^{2\pi} \sup_{s\in[0,2\pi]} |[f(s,\sigma(s,x_n(s))) - \sigma(s,x_n(s))] - [f(s,\sigma(s,x(s))) - \sigma(s,x(s))]|\, ds \\
&\leq \max_{s,t\in[0,2\pi]} | G(t,s) | \int_0^{2\pi} \sup_{s\in[0,2\pi]} |y_n(s) - y(s)|\, ds \\
&\leq \max_{s,t\in[0,2\pi]} | G(t,s) | \, \|y_n - y\|_{L^1} ,
\end{aligned}$$

où pour tout $s \in [0,2\pi]$

$$y_n(s) = f(s,\sigma(s,x_n(s))) - \sigma(s,x_n(s)) ,$$

et

$$y(s) = f(s,\sigma(s,x(s))) - \sigma(s,x(s)) .$$

Puisque f et σ sont continues et que la suite $(x_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x(s)$, alors la suite $(y_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y(s)$ presque par tout $s \in [0,2\pi]$ et puisque f et σ sont bornées, alors d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue(Théorème (1.11.1)), on a $\|y_n - y\|_{L^1} \longrightarrow 0$. Donc, pour tout $t \in [0,2\pi]$: $|Tx_n(t) - Tx(t)| \longrightarrow 0$. D'ou, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Tx. Par conséquence T est continu.

$*$ **T$(C[0,2\pi])$ est relativement compact :**

(1) $T(C[0,2\pi])$ est borné :

Soit $x \in C[0,2\pi]$. Puisque les fonctions α et β sont bornées (car elles sont continues dans le compact $[0,2\pi]$). Alors, il existe deux constantes m_1 et m_2 telles que

$$\forall t \in [0,2\pi], \quad |\alpha(t)| \leq m_1 \quad et \quad |\beta(t)| \leq m_2 .$$

Pour $M = \max\{m_1, m_2\}$, nous avons

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad \max\{|\alpha(t)|, |\beta(t)|\} \leq M \ .$$

On en déduit alors que

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad |\sigma(t, x(t))| \leq M \ .$$

D'autre part, f étant continue sur le compact $[0, 2\pi]$, on en conclu que

$$\exists\, M_1 > 0, \forall t \in [0, 2\pi] : |f(t, \sigma(t, x(t)))| \leq M_1 \ .$$

D'ou

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &= \Big| \int_0^{2\pi} G(t,s)[f(s, \sigma(s, x(s))) - \sigma(s, x(s))]\, ds \Big| \\
&\leq \max_{t,s\in[0,2\pi]} | G(t,s) | \int_0^{2\pi} \sup_{s\in[0,2\pi]} | [f(s, \sigma(s, x(s))) - \sigma(s, x(s))] |\, ds \\
&\leq \max_{t,s\in[0,2\pi]} | G(t,s) | \int_0^{2\pi} \sup_{s\in[0,2\pi]} \big[| f(s, \sigma(s, x(s))) | + | \sigma(s, x(s)) |\big]\, ds \\
&\leq \max_{t,s\in[0,2\pi]} | G(t,s) | \int_0^{2\pi} (M_1 + M)\, ds \\
&\leq 2\pi M_2 (M_1 + M) \ ,
\end{aligned}$$

où $M_2 = \max_{t,s\in[0,2\pi]} | G(t,s) |$. Donc l'ensemble $T(C[0, 2\pi])$ est borné.

(2) $T(C[0,2\pi])$ *est équicontinu :*

Soient $t_1, t_2 \in [0,2\pi]$ telle que $t_2 \leq t_1$, et soit $\varepsilon > 0$ .Puisque G est uniformément continue, alors

$$\begin{aligned}
\exists\, \delta > 0 : |t_2 - t_1| < \delta \Longrightarrow |G(t_2,s) - G(t_1,s)| &= |\ \frac{st_2}{\pi} - (s - t_2) - \frac{st_1}{\pi} + (s - t_1)\ | \\
&= |\ \frac{s}{\pi}(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1)\ | \\
&= |\ (\frac{s}{\pi} + 1)(t_2 - t_1)\ | \\
&\leq |\ \frac{s}{\pi} + 1 \ ||\ t_2 - t_1\ |,\ \forall s \in [0,2\pi] \\
&\longrightarrow 0,\ \textit{lorsque}\ t_2 \leq t_1\ .
\end{aligned}$$

D'où pour $x \in C([0,2\pi])$

$$\begin{aligned}
|Tx(t_2) - Tx(t_1)| &= |\int_0^{2\pi} [G(t_2,s) - G(t_1,s)]\,[f(s,\sigma(s,x(s))) - \sigma(s,x(s))]\ ds\ | \\
&\leq \int_0^{2\pi} |\ G(t_2,s) - G(t_1,s)\ | \sup_{s\in[0,2\pi]} |\ f(s,\sigma(s,x(s))) - \sigma(s,x(s))\ | \,ds \\
&\leq (M_1 + M) \int_0^{2\pi} |\ G(t_2,s) - G(t_1,s)\ |\, ds \\
&\longrightarrow 0\ ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $T(C[0,2\pi])$ est équicontinu.

D'après le théorème d'Ascoli-Arzela (Théorème (3.1.2)) $T(C[0,2\pi])$ est relativement compact. Par suite, par le théorème de point fixe de Schauder (Théorème (3.1.1)) T admet une point fixe x dans $C([0,2\pi])$ qui est solution du problème (3.2).

De plus, nous avons

$$x''(t) = x(t) + f(t,\sigma(t,x(t))) - \sigma(t,x(t))\ ,$$

et donc x'' est continue, ce qui implique que $x \in C^2([0,2\pi])$. On en déduit que x est un solution du problème (3.1). Et d'après la première étape x vérifié

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi] \ .$$

■

3.4 Exemples

Exemple 3.4.1 *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} \varepsilon^2 x'' - x^3 + \sin^3 t = 0 \ , \ pour \ t \in [0, 2\pi] \\ x(0) = x(2\pi), \ \ x'(0) = x(2\pi) \end{cases} ,$$

où $\varepsilon > 0$ est une paramétre assez petit.

La fonction $\alpha(t) = \sin t - 2\varepsilon$ est une sous-solution de ce problème car

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \alpha''(t) - \alpha^3(t) + \sin^3 t &= \varepsilon^2(-\sin t) - (\sin t - 2\varepsilon)^3 + \sin^3 t \\ &= -\varepsilon^2 \sin t - \left(\sin^3 t + 4\varepsilon^2 \sin t - 4\varepsilon \sin^2 t - 2\varepsilon \sin^2 t - 8\varepsilon^3 + 8\varepsilon^2 \sin t\right) + \sin^3 t \\ &= -13\varepsilon^2 \sin t + 6\varepsilon \sin^2 t + 8\varepsilon^3 \\ &= \varepsilon \left[6 \sin^2 t - 13\varepsilon \sin t + 8\varepsilon^2\right] \\ &= \varepsilon \left[(2 \sin t - 2\varepsilon)^2 + 2 \sin^2 t + 4\varepsilon^2 - 5\varepsilon \sin t\right] \\ &> 0 \ , \end{aligned}$$

avec $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = -2\varepsilon$ et $\alpha'(0) = \alpha'(2\pi) = 1$.

La fonction $\beta(t) = \sin t + 2\varepsilon$ est une sur-solution de ce problème car

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \beta''(t) - \beta^3(t) + \sin^3 t &= \varepsilon^2(-\sin t) - (\sin t + 2\varepsilon)^3 + \sin^3 t \\ &= -\varepsilon^2 \sin t - \left(\sin^3 t + 4\varepsilon^2 \sin t + 4\varepsilon \sin^2 t + 2\varepsilon \sin^2 t + 8\varepsilon^3 + 8\varepsilon^2 \sin t\right) + \sin^3 t \\ &= -13\varepsilon^2 \sin t - 6\varepsilon \sin^2 t - 8\varepsilon^2 \\ &= -\varepsilon \left[6\varepsilon \sin^2 t + 13\varepsilon \sin t + 8\varepsilon^2\right] \\ &< 0 \ , \end{aligned}$$

avec $\beta(0) = \beta(2\pi) = 2\varepsilon$ *et* $\beta'(0) = \beta'(2\pi) = 1$.

De plus, on a $\alpha(t) \leq \beta(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$.

En vertu du théorème (3.3.1), *ce problème admet une solution x vérifiant*

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi] ,$$

ce qui nous permet de dire que

$$\sin t - 2\varepsilon \leq x(t) \leq \sin t + 2\varepsilon, \quad \forall t \in [0, 2\pi] ,$$

c'est à dire

$$x(t) = \sin t + O(\varepsilon) .$$

Exemple 3.4.2 *On considère le problème*

$$\begin{cases} x'' + \sin x = h(t) \text{ , } pour\ t \in [0, 2\pi] \\ x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi) \end{cases} ,$$

On suppose que $h \in C^0([0, 2\pi])$ *et* $||h||_{C^0} \leq 1$.

Nous avons $\alpha(t) = \frac{\pi}{2}$ *est une sous-solution de ce problème car*

$$\begin{aligned} \alpha''(t) + \sin \alpha(t) - h(t) &= \sin \tfrac{\pi}{2} - h(t) \\ &= 1 - h(t) \\ &\geq 0 \ , \end{aligned}$$

avec $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = \frac{\pi}{2}$ *et* $\alpha'(0) = \alpha'(2\pi) = 0$.

La fonction $\beta(t) = \frac{3\pi}{2}$ *est une sur-solution de ce problème car*

$$\begin{aligned} \beta''(t) + \sin \beta(t) - h(t) &= \sin \tfrac{3\pi}{2} - h(t) \\ &= -1 - h(t) \\ &\leq 0 \ , \end{aligned}$$

avec $\beta(0) = \beta(2\pi) = \frac{3\pi}{2}$ *et* $\beta'(0) = \beta'(2\pi) = 0$.

Puisque h est continue et $\alpha \leq \beta$, *d'après le théorème* (3.3.1), *ce problème admet une solution x telle que*

$$\frac{\pi}{2} \leq x(t) \leq \frac{3\pi}{2}, \quad \forall t \in [0, 2\pi] \ .$$

Remarque 3.4.1 *Comme nous allons le voir dans l'exemple suivant, le théorème* (3.3.1) *n'est pas valable si* $\alpha \geq \beta$.

Exemple 3.4.3 *On considère le problème*

$$\begin{cases} x'' = -x + \sin t \ , \ \textit{pour } t \in [0, 2\pi] \\ x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi) \end{cases} ,$$

On voit que $\alpha(t) = 1$ *est une sous-solution de ce problème car*

$$\alpha''(t) + \alpha(t) - \sin(t) = 1 - \sin t \geq 0 \ ,$$

et $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = 1$ *et* $\alpha'(0) = \alpha'(2\pi) = 0$.

La fonction $\beta(t) = -1$ *est une sur-solution de ce problème car*

$$\beta''(t) + \beta(t) - \sin(t) = -1 - \sin t \leq 0 \ ,$$

avec $\beta(0) = \beta(2\pi) = -1$ *et* $\beta'(0) = \beta'(2\pi) = 0$.

Mais le problème n'admet pas de solutions.

En effet, soit l'équation

$$x''(t) = -x(t) + \sin t \ .$$

En multipliant les deux membres par $\sin t$ *et en intégrant de* 0 *à* 2π, *on trouve*

$$\int_0^{2\pi} x''(t) \sin t \ dt = \int_0^{2\pi} (-x(t) + \sin t) \sin t \ dt \ .$$

D'aprés l'intégration par parties,

$$\text{on pose :} \quad \begin{cases} x_1'(t) = x''(t) \\ x_2(t) = \sin t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1(t) = x'(t) \\ x_2'(t) = \cos t \end{cases} ,$$

$$\text{alors} \quad \int_0^{2\pi} x''(t) \sin t \, dt = [x'(t) \sin t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} x'(t) \cos t \, dt$$
$$= - \int_0^{2\pi} x'(t) \cos t \, dt \, ,$$

$$\text{on pose :} \quad \begin{cases} x_1'(t) = x'(t) \\ x_2(t) = \cos t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2'(t) = -\sin t \end{cases} ,$$

$$\text{alors} \quad - \int_0^{2\pi} x'(t) \cos t \, dt = -\left([x(t) \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} x(t) \sin t \, dt \right)$$
$$= -x(2\pi) - \int_0^{2\pi} x(t) \sin t \, dt \, ,$$

et

$$\int_0^{2\pi} (-x(t) + \sin t) \sin t \, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt - \int_0^{2\pi} x(t) \sin t \, dt = - \int_0^{2\pi} x(t) \sin t \, dt \, ,$$

car

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = [2 \sin t \cos t]_0^{2\pi} = [\sin(2t)]_0^{2\pi} = 0 \, .$$

Alors le problème n'admet pas de solutions bien qu'il admet une sous-solution et une sur-solution.

Corollaire 3.4.1 *Soit* $f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que pour* $r_1 \leq r_2$ *et* $\forall t \in [0, 2\pi]$

$$f(t, r_1) \leq 0 \leq f(t, r_2) \ .$$

Alors, ce problème admet au moins une solution $x \in C^2([0, 2\pi])$ *telle que*

$$r_1 \leq x(t) \leq r_2, \quad \forall t \in [0, 2\pi] \ .$$

Exemple 3.4.4 *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} x''(t) = kx^{2n+1} + h(t) \ , \quad pour \ t \in [0, 2\pi] \\ x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi) \end{cases} ,$$

où $k > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *et* $h \in C([0, 2\pi])$*. On pose :* $r_1 = -\left(\frac{\|h\|_\infty}{k}\right)^{\frac{1}{2n+1}}$ *et* $r_2 = \left(\frac{\|h\|_\infty}{k}\right)^{\frac{1}{2n+1}}$.

Nous avons

$$f(t, r_1) = -\|h\|_\infty \leq 0 \ \ et \ \ f(t, r_2) = \|h\|_\infty + h(t) \geq 0 \ .$$

On a ainsi

$$f(t, r_1) \leq 0 \leq f(t, r_2) \ .$$

D'après le corollaire (3.4.1)*, il existe une solution x telle que*

$$r_1 \leq x(t) \leq r_2, \quad \forall t \in [0, 2\pi] \ .$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a présenté quelques résultats d'existence de méthode des sous et sur solutions d'un problème périodique associé à une équation différentielle ordinaire du premier et second ordre. Ces résultats, ont été obtenus par l'application de la théorie du point fixe, en particulier on utilisé le théorème du point fixe de Schauder et Brouwer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Abdallah, S. Benali, *Quelques résultats de moyennisation pour les équations différentielle*, Mémoire de master, Université de Ibn Khaldoun, Tiaret, 2020.

[2] A. Adjé, *Sur et sous solutions dans les équations différentielles discon- tinues avec conditions aux limites non linéaires*, dissertation doctorale, Univ. Cath. de Louvain, Belgique, 1987.

[3] A. Adjé, *Sur et sous solutions dans les équations semi-linéaires de type elliptyque avec conditions aux limites non linéaires*, Portu. Math. Vol. 49 Fasc.2, 1992, 131-146.

[4] A. Adjé, *Sur et sous solutions généralisées et problèmes aux limites du second ordre*, Bull. Soc. Math. Bel. 42(1990), 3, B. ser, 347-368.

[5] A. Alicherif, O. Rahis, *Les équations différentielles ordinaires*, Mémoire de master, Université Abdelhamid Ibn Badis, Mostaganem, 2016.

[6] S.E. Ariaku, E.C. Mbah, C.C. Asogwa and P.U. Nwokoro, *Lower and upper solutions of first order non-linear ordinary differential equations*, International Journal of scientific engineering and science, 3(11)(2019), 59-61.

[7] V. Arnold, *Equations différentielles ordinaires*, Ed Mir Moscou, 1974.

[8] C. Benzaaza, S. Benzaaza, *Résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires*, Mémoire de master, Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi, Bordj Bou Arréridj,

2021.

[9] S. Bouasla, *Etude de la positivité de la solution d'un problème à valeurs aux limites de type intégrale pour une équation différentielle d'ordre deux*, Mémoire de master, Université de 8 Mai 1945, Guelma, 2020.

[10] D. Coster and P. Habets, *An overview of the method of lower and upper solutions for ODEs*, Pub. de l'inst. Math. Pure et App, Louvain-la Neuve, Belgique, 1998.

[11] D. Coster and P. Habets, *The lower and upper solutions method for boundary value problems*, In : Handbook of differential equations, ODE, A. Canada, P. Drabek , A. Fondaed, Elsevier, 2004, 69-160.

[12] D. Coster and P. Habets, *Two points boundary value Problems : lower and upper solutions*, Elsevier, Amsterdam et al, 2006, 502, ISBN0-444-52200-X.

[13] D. Coster and P. Habets, *Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems : Classical and recent results*, C.I.S.M. courses and lectures 371, Springer-Verlag, New-York, 1996, 1-79.

[14] J.P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, ISBN 2-86883-891-X, EDP Sciences, 2006.

[15] L.H. Erbe, *Non linear boundary value problems for second order differential equations*, J. differential equations 7, 1970, 459-472.

[16] L. Halpern, *Equations différentielles etude mathématique et numérique*, Cours de 1ère année MACS, SuP Galilée L'école d'ingénieurs de l'institut Galilée, 99 avenue Jean - Baptiste-Clément 93430 Villetaneuse, 2016.

[17] A. Ibeghouchene, *La stepanov-pseudo presque périodicité et applications*, Mémoire de master, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, 2016.

[18] A. Kheraghel, *Elements d'analyse convexe (dans $\mathbb{R}^n$) : théorie fondamentale et exercice*, Edition université de Sétif (2001).

[19] F. Laaiadi, *Le théorème de point fixe de krasnoselskii et ses applications au équation différentielle impulsive*, Mémoire de master, Université de Ahmed Draya, Adrar, 2017.

[20] J.P. Marco, H. Boumaza, B. Collas, S. Collion, M. Dellinger, Z. Faget, L. Lazzarini, F. Schaffhauser, *Mathématiques analyse : Cours complet avec 600 tests et exercices corrigés*, 1ed Paris ,France : Pearson, 2009.

[21] J. Mawhin, *Non linear perturbations of Fredholm mappings in normed spaces and applications to differential equations*, Univ.de Brasilia, Trabalho de Matematica no 61, 1974.

[22] J. Mawhin and K. Schmitt, *Upper and lower solutions and semi-linear second order elliptic equation with non-linear boundary conditions*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 97A, 1984, 199-207.

[23] Y. Mazouz, M. Miloudi et K. Ziat, *L'existence de solutions d'un problème périodique de second ordre par la méthode des sous et sur solution*, Mémoire de master, Université Ibn Khaldoun, Tiaret, 2019.

[24] M. Nagumo, *On principally linear elliptic differential equations of the second order*, Osaka Math. J. 6, 1954, 207-229.

[25] M. Nagumo, *Uber des Randwert problem der nichtlinearen gewöhnlichen differential gleichungen zweiter ordnung*, Proc. Physi-Maths. Soc. Japan 24, 1942, 845-851.

[26] M. Nagumo, *Uber die Differential gleichung* $y'' = f(t, y, y')$, Proc.Physi- Maths. Soc. Japan (3)19, 1937, 861-866.

[27] R. Nichani, *Sur les équations différentielles ordinaires aléatoires*, Mémoire de master, Université de Ahmed Draya, Adrar, 2021.

[28] D. Scorza, *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande pergli integrali di una equazione differenziali del secondo ordine*, Math.Ann.105, 1931 , 133-143.

[29] D.R. Smart, *Fixed Point Theorem*, Cambridge Tracts in Mathematics, No.66, Cambridge university press, London.New York, 1974.

[30] A. Smati, *Etude des conditions entre les opérateurs compacts, normaux et positifs*, Thèse de Doctorat, Université Mohamed Boudiaf M'sila (2018).

[31] E. Zeidler, *Nonlineat functionnal analysis of epidemics*, World Scientific Publishing, Co. Pte. Ltd. 2009.