



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Bifurcations de l'application de Lozi

**Préparé par : Ferial Namoune
Rayane Laggoun**

Soutenue devant le jury

Smail Kaouache	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Rabah Bououden	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Allal Mehazzem	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire :2022/2023

Remerciements

Au terme de ce travail nous remercions *Allah* le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour le réaliser.

Tout d'abord nous souhaitons avant tout remercier notre professeur *Mr. Rabah BOUOUDENE* de nous avoir donné le privilège d'encadré nos travaux, il nous a fait des suggestions et des critiques pendant cette période.

Nous tenons à remercier également, Monsieur *Smaïl KAOUACHE* et Monsieur *Allal MEHAZZEM* pour m'avoir fait l'honneur d'être Examineur de ce mémoire.

Et nos remerciements les plus sincères vont à toute personne ayant eu la bonté et la patience de satisfaire notre curiosité et de nous aider dans notre travail par leurs précieux conseils, réponses et recommandations

Dédicaces

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

*A l'homme, mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon cher père **Lazhar**.*

*A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse mon adorable mère **Rahima***

*A ma chère sœur **Imane** et mon frères **Bilal** et **DhaïEdine** qui n'ont pas cessé de me conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études. Que Dieu les protège et leurs offre la chance et le bonheur.*

*A mon adorable les petites **Bidjad** et **Arkan** qui sait toujours comment procurer la joie et le bonheur pour toute la famille.*

Merci pour leurs amours et leurs encouragements.

*Sans oublier mon binôme **Rayane** pour son soutien moral, sa patience et sa compréhension tout au long de ce projet.*

Ferial.N

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à celui qui m'a toujours encouragée pour réaliser mes rêves ses sacrifices et son encouragement m'ont accompagnés tout au long du chemin.

Mon cher papa Larbi.

A la plus courageuse personne dans le monde , celle qui a souffert sans me laisser souffrir, tes prières étaient la lumière qui m'a montrée toujours la bonne voie .

Ma chère mama Noura.

À mes chères bien aimées, mon freres Imad et AbdElrahim, je vous remercie du fond du cœur pour votre soutien et vos encouragements. vous êtes le trésor de ma vie et ma source de force , Que Dieu vous protège et votre chemin soit illuminé.

A mon marie qui j'aime beaucoup Rachid .

À mes petits poussine et mes chers amours Yasmine et Soudjoud. Que Dieu les protège .

À Sans oublier mon binôme Ferial pour son soutien et son accompagnemet tout au long du chemin .

Rayane.L

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'application de Lozi. Au début de ce travail, nous rappelons quelques préliminaires sur les systèmes dynamiques discrets tel que : les points fixes et leurs stabilités, les orbites périodiques et leurs stabilités. Ensuite, nous présentons la dynamiques de l'application de Lozi en deux dimension, exploré les bifurcations et les comportements chaotiques de cette application. Cette étude des simulations numériques sont présentés pour illustrer notre travail.

Les mots clés

Système dynamique, Points fixes, Orbites périodiques, Bifurcations, chaos, Application de Lozi.

Abstract

The objective of this memory to study the application of Lozi. At beginning of this work, we point out some preliminaries on the discrete dynamical systems such as the fixed points and their stabilities, periodic orbits and their stabilities. Then, we present the dynamics of the application of Lozi in two dimension, explored the bifurcations and the chaotic behaviors of this application. This study numerical simulations are presented to illustrate our work.

Key words

System dynamic, point fixed, Orbit periodic, Bifurcations, chaos, Lozi map.

الملخص

الهدف من هذا المذكرة هو دراسة تطبيق لوزي. في بداية هذا العمل، نشير الى بعض المفاهيم على الأنظمة الديناميكية المنفصلة مثل النقاط الثابتة واستقرارها ومداراتها الدورية واستقرارها. بعد ذلك، قدمنا ديناميكيات تطبيق لوزي في بعدين، واستكشفنا التشعبات والسلوكيات الفوضوية لهذا التطبيق. يتم عرض المحاكاة العددية لهذه الدراسة لتوضيح عملنا.

الكلمات المفتاحية

النظام المتقطع، النقاط الثابتة، المدارات الدورية، الفوضى، التشعبات، تطبيق لوزي.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Préliminaires sur les systèmes dynamiques discrets	3
1.1 Systèmes dynamiques discrets	3
1.1.1 Trajectoires	4
1.1.2 Points fixes et orbites périodiques	4
1.1.3 Les orbites périodiques p-cycle	5
1.1.4 Points limites, ensembles limites et orbites apériodiques	7
1.1.5 Équivalence topologique des systèmes	8
1.2 Systèmes dynamiques discrets unidimensionnelles de premier ordre . .	9
1.2.1 Systèmes linéaires	10
1.2.2 Systèmes dynamiques non-linéaires	11
1.2.3 Systèmes dynamiques linéaires bi-dimensionnelles de premier ordre	11
1.2.4 Stabilité des systèmes dynamiques non-linéaires discrets bi-dimensionnelles	
17	
2 Bifurcation et chaos	20
2.1 Théorie des bifurcations	20

2.2	Chaos	24
2.2.1	Systèmes dynamiques chaotiques	25
2.2.2	Attracteurs, bassins d'attraction et frontières	26
2.2.3	Exposants de Lyapounov	27
2.2.4	Dimension fractale	31
2.2.5	Routes vers le chaos	33
3	Les Bifurcations de l'application de Lozi	37
3.0.6	Dynamique de l'application de Lozi	38
3.0.7	Bifurcations bissectrices	39
	Conclusion	44

TABLE DES FIGURES

1.1	Les points fixes de l'application $f(x) = 3x(1 - x)$	5
1.2	Les points 2-périodiques de l'application $f(x) = 3.4x(1 - x)$	6
2.1	Le graphe de l'application $f_c(x) = x^2 + x + c$ pour (a) $c = 0.5$. (b) $c = 0$. (c) $c = -0.5$	22
2.2	Bifurcation pli.	22
2.3	Bifurcation flip ou doublement de période.	23
2.4	Bifurcation de Neimark-Sacker super-critique. (a) Foyer stable pour $\mu < \mu_0$. (b) Courbe invariante fermée stable $\mu > \mu_0$	24
2.5	Attracteur de Lozi obtient pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$	27
2.6	Exposant de Lyapunov de l'application logistique (2.6) en fonction du paramètre a	29
2.7	Exposant de Lyapounov de l'application de Hénon pour $b = 0.3$ et $0.2 < a \leq 1.5$	30
2.8	Bifurcation vers le chaos par doublement de période (ex : l'application logistique pour $2.5 < a \leq 4$).	35
2.9	Pour $\mu = 0.025$ et $A = 0.5$ les itérés successifs ont lieu entre le graphe de g_μ et la bissectrice. La trajectoire passe lentement près des fantômes des points fixes qui existaient pour $\mu < 0$	36

3.1	Comportement de l'application de Lozi dans l'espace des paramètres. Les zones blanches correspondent à des trajectoires non bornées. Les bifurcations bissectrices ont lieu aux droites rouges, $a = 1 \pm b$ ce diagramme n'épuise pas tous les attracteurs possibles que l'application de Lozi peut présenter.	39
3.2	Diagramme de bifurcation pour $b = 0.1$. Notion que la bissectrice bifurcations avoir lieu à $a = 1 \pm b$	40
3.3	Diagramme de bifurcation pour $a = 1.5$. Notion que la bissectrice bifurcations avoir lieu à $b = \pm(a - 1)$	41

INTRODUCTION

Les systèmes dynamiques sont des modèles mathématiques utilisés pour décrire l'évolution d'un système au fil du temps. Ils peuvent être classés en deux catégories principales : les systèmes continus [27, 28] et les systèmes discrets [29, 30]. Les systèmes continus sont décrits par des équations différentielles, tandis que les systèmes discrets sont modélisés par des équations récurrentes. Dans cette mémoire, nous concentrerons sur les systèmes dynamiques chaotiques discrets, où le temps est discret et les valeurs des variables du système évoluent selon des règles de mise à jour déterministes. La caractéristique essentielle des systèmes dynamiques chaotiques discrets est leur sensibilité extrême aux conditions initiales. Cela signifie que même de petites différences dans les conditions initiales peuvent conduire à des comportements complètement différents à long terme. Le célèbre exemple de sensibilité aux conditions initiales est l'effet papillon, qui stipule qu'un battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut éventuellement provoquer une tornade au Texas. Cette sensibilité aux conditions initiales rend les systèmes dynamiques chaotiques discrets difficiles à prévoir et à contrôler, et introduit une dose d'aléatoire inhérente à leur comportement. Un autre aspect caractéristique des systèmes dynamiques chaotiques discrets est la présence d'attracteurs étranges. Les attracteurs étranges sont des ensembles de valeurs que les trajectoires du système tendent à approcher après un certain temps. Contrairement aux attracteurs réguliers, tels que les points fixes ou les cycles périodiques, les attracteurs étranges

sont caractérisés par leur structure fractale complexe et non répétitive. Ces structures fractales sont un autre indicateur du caractère chaotique des systèmes dynamiques discrets et témoignent de la richesse et de la diversité des comportements qu'ils peuvent manifester. Les systèmes dynamiques chaotiques discrets ont des applications dans de nombreux domaines scientifiques, tels que la physique, la biologie, l'économie et la météorologie [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37]. En physique, ils sont utilisés pour modéliser des phénomènes tels que la turbulence des fluides, la mécanique quantique chaotique et la dynamique des systèmes complexes. En biologie, les systèmes dynamiques chaotiques discrets sont employés pour étudier les modèles de croissance des populations, les oscillations neuronales et les comportements émergents dans les réseaux biologiques. En économie, ils peuvent aider à analyser les fluctuations des marchés financiers et la dynamique des systèmes économiques complexes. Dans ce mémoire nous allons étudier les systèmes dynamiques discrets parce qu'ils ont une grande importance pratique ou nous sommes concentrés sur l'étude de système dynamique chaotique. Nous allons divisé ce mémoire en trois chapitres : Dans premier chapitre nous rappelons quelques concepts sur les notions de base d'un système dynamique a temps discret. Dans le deuxième chapitre on va parler sur la théorie des bifurcations et le chaos. Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'application de Lozi.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES DISCRETS

1.1 Systèmes dynamiques discrets

Définition 1.1.1 [1]

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^m$. Un système dynamique discret noté $(D, \mathbb{N}, f)$ est une relation de la forme

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (1.1)$$

Ainsi, si $\circ$ représente la composition des applications, on a :

$$x_n = f^n(x_0). \quad (1.2)$$

Où

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f(x)}_{n \text{ fois}}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } f^0 = Id.$$

Définition 1.1.2 (Système dynamique discret autonome et non-autonome)

Lorsque la fonction f dans (1.1) dépend explicitement du temps le système est dit non-autonome. Dans le cas contraire, on dit que le système est autonome.

1.1.1 Trajectoires

Étant donné le point initial x_0 , on appelle orbite (ou trajectoire) du système (1.1) la suite :

$$O(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1) = f(x(0)), \dots, x(n+1) = f(x(n)), \dots\}.$$

1.1.2 Points fixes et orbites périodiques

Les points fixes et les orbites périodiques sont des trajectoires particulièrement simples mais qui jouent un rôle central dans l'étude des systèmes dynamiques.

Points fixes et leurs stabilités

Le point fixe c'est la trajectoire la plus simple.

Définition 1.1.3 (Points fixes)

Un point x^* est un point fixe du système (1.1) (où de l'application f) si

$$f(x^*) = x^*.$$

Parfois, ces points sont appelés points stationnaire ou points d'équilibres.

Graphiquement les points fixes d'une applications linéaire sont donnés par l'intersection entre le graphe de f et la droite $y = x$ comme le montre la Figure (1.1).

Exemple 1.1.1

Les points fixes de l'application logistique $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ ($0 < a \leq 4$) sont les solutions de l'équation $x = ax(1 - x)$.

Donc le système précédant a deux points fixes $x_1^* = 0$ et $x_2^* = \frac{a-1}{a}$.

Graphiquement les points fixes sont donnés par l'intersection entre le graphe de f et la droite $y = x$.

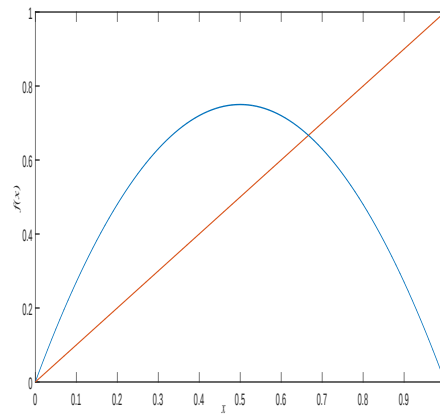


FIGURE 1.1 – Les points fixes de l'application $f(x) = 3x(1 - x)$.

Définition 1.1.4

Un point fixe x^* est stable si pour tous $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x_0 - x^*\| \leq \delta \text{ implique } \|x_n - x^*\| \leq \epsilon \text{ pour tous } n \geq 1. \quad (1.3)$$

Autrement dit, une fois que nous avons choisi à quel point nous voulons rester près de x^* au future (choix de ϵ), nous pouvons trouver à quel point nous devons commencer au début (existence de δ).

Définition 1.1.5

Un point fixe x^* qui n'est pas stable est dit instable.

1.1.3 Les orbites périodiques p-cycle

Définition 1.1.6 (p -cycles)

Par définition, un p -cycle est un p -uplet $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ tel que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, on a $f(x_{k-1}) = x_k$ et $f(x_{p-1}) = x_p = x_0$; p étant le plus petit entier supérieur ou égale à 1 possédant cette propriété. On dira que tout point du cycle est p -périodique.

Remarque 1.1.1 1. Un point fixe est un point périodique de période 1.

2. Un point fixe x est dit p périodique d'un transformation f s'il est point fixe de f^p sans être un point fixe de f^l , $1 \leq l < p$, (l est entier).

3. Un point p périodique de f est un point fixe de f^p

Exemple 1.1.2

Soit le système dynamique gouverné par l'application logistique $f(x) = ax(1 - x)$ ($0 < a \leq 4$).

Les points 2-périodiques sont solutions du système

$$\begin{cases} f^2(x) = x, \\ f(x) \neq x. \end{cases}$$

Si $2 < a \leq 4$ ce système à deux solutions :

$$x_1 = \frac{a + 1 + \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{a + 1 - \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a},$$

qui sont les points d'un cycle de période 2. Graphiquement les points d'un cycle de période 2 sont l'intersection entre le graphe de $f^2 = f \circ f$ et la droite $y = x$, tel que $f(x) \neq x$ comme le montre la Figure (1.2).

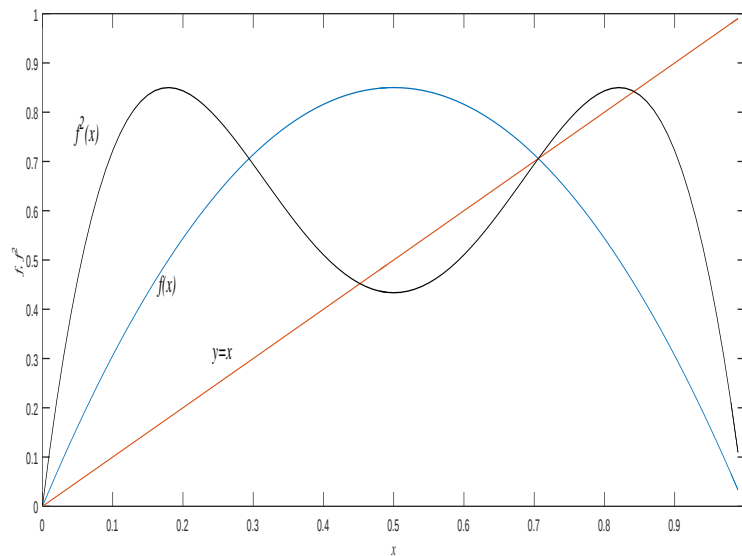


FIGURE 1.2 – Les points 2-périodiques de l'application $f(x) = 3.4x(1 - x)$.

Définition 1.1.7 Une orbite périodique $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ d'un système dynamique gouverné par une application f est stable si tous point $x_i, i = 0, 1, \dots, p - 1$ est un point fixe stable du système dynamique gouverné par l'application f^p .

Définition 1.1.8 Une orbite périodique $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ qui n'est pas stable est dite instable.

1.1.4 Points limites, ensembles limites et orbites apériodiques

Soit $O(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ une orbite d'un système dynamique

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1.4)$$

x_0 est une condition initiale donnée.

Définition 1.1.9 Un point z est dit point limite de l'orbite $O(x_0)$ s'il existe une sous suite $\{x_{n_k} : k = 0, 1, \dots\}$ de $O(x_0)$ tel que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_{n_k} - z\| = 0. \quad (1.5)$$

Remarque 1.1.2 1. Une orbite stationnaire a un seul point limite (point fixe).

2. Une orbite $O(x_0)$ p -périodique a exactement p points limites : $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$.

Définition 1.1.10

L'ensemble $L(x_0)$ de tous les points limites d'une orbite $O(x_0)$ est dit ensemble limite.

L'égalité fondamentale entre $L(x_0)$ et son image par l'application f est

$$f(L(x_0)) = L(x_0).$$

Définition 1.1.11

1. Une orbite $O(x_0)$ est dite asymptotiquement stationnaire si son ensemble limite est un point stationnaire (point fixe), et elle est asymptotiquement périodique si son ensemble limite est une orbite périodique.
2. Une orbite $O(x_0)$ est dite éventuellement périodique de période p s'il n'est pas périodique mais il existe un $m > 0$ tel que $f^{p+k}(x) = f^k(x)$ pour tous $k \geq m$ (i.e. $f^k(x)$ est un point périodique pour $k \geq m$). Si $p = 1$, $O(x_0)$ est dite éventuellement stationnaire.

Par conséquent, toute orbite éventuellement stationnaire (resp éventuellement périodique) est asymptotiquement stationnaire (resp asymptotiquement périodique). L'inverse n'est pas toujours vrai comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.1.3

Pour le système dynamique $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, l'orbite $O(\frac{1}{2})$ est asymptotiquement stationnaire mais n'est pas éventuellement stationnaire.

Définition 1.1.12

Une orbite $O(x_0)$ est dite **apériodique** si son ensemble limite $L(x_0)$ à un nombre infini d'éléments.

D'après ce qui précède, il est clair que soit $O(x_0)$ est asymptotiquement périodique ($L(x_0)$ est fini), ou apériodique ($L(x_0)$ est infini). Il n'est pas facile d'établir théoriquement le caractère apériodique d'une orbite, car cela dépend de son comportement asymptotique. Le résultat suivant assure l'existence d'orbite apériodique pour les systèmes dynamiques discrets dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1.3 (Théorème de Li-Yorke [2])

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow I$ une application continue. Supposons que f a une orbite périodique de période 3. Alors f a des orbites périodiques de période p pour tout $p \geq 1$ et il y a un ensemble infini S contenu dans I telle que chaque orbite issu à partir d'un point de S est apériodique.

1.1.5 Équivalence topologique des systèmes

Nous allons aborder dans cette sous section la notion d'équivalence entre deux systèmes, cette notion est très importante pour l'étude des systèmes dynamiques, surtout pour les systèmes qui ont des comportements complexes. Soient D et E deux espaces métriques et $f : D \rightarrow D$, $g : E \rightarrow E$ deux applications définissant sur D et G respectivement deux systèmes dynamiques.

Définition 1.1.13

Soient (D, f) et (E, g) deux systèmes dynamiques. On dit qu'ils sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme (une application continue et bijective) $h : D \rightarrow E$ tel que $h \circ f = g \circ h$.

Théorème 1.1.4

Soient (D, f) et (E, g) deux systèmes dynamiques. Supposons qu'ils sont topologiquement conjugués par un homéomorphisme $h : D \rightarrow E$. Alors

1. L'application $h^{-1} : E \rightarrow D$ vérifie aussi la définition et assure donc l'équivalence topologique entre les systèmes (D, f) et (E, g) .
2. $h \circ f^n = g^n \circ h$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Si $x^* \in D$ est un point périodique de f de période fondamentale p alors $h(x^*) \in E$ est un point périodique de g de période fondamentale p .

Remarque 1.1.5 1. L'application $h : D \rightarrow E$ correspond tout simplement à un changement de variables qui transforme f en g .

2. Selon ce concept, et pour un point fixe hyperbolique, nous pouvons donner une description approximative du comportement local du système dynamique. Ceci est précisé par le théorème de Hartman-Grobman [3].

1.2 Systèmes dynamiques discrets unidimensionnelles de premier ordre

On dit que le système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{1.6}$$

est de dimension 1 si la variable d'état x est une scalaire, i.e. $x \in \mathbb{R}$. Souvent f dépend d'un ou de plusieurs paramètres que nous appellerons paramètres de bifurcations. Dans ce cas le système (1.6) devient

$$x_{n+1} = f(x_n, a), \tag{1.7}$$

où $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$.

1.2.1 Systèmes linéaires

Après une translation d'origine, un système dynamique linéaire d'ordre un, de dimension un, peut toujours être mise sous la forme :

$$x_{n+1} = Sx_n, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1.8)$$

On est dans un cas où le second nombre permet l'obtention de la solution sous forme explicite, pour une condition initiale x_0 quelconque.

$$x_n = S^n x_0. \quad (1.9)$$

L'origine ($x = 0$) de l'axe des x , est le seul point fixe et d'après (1.8) et (1.9), on voit que la nature de ce point est complètement déterminée par le nombre réel S , appelé *multiplicateur* du point fixe $x = 0$. En effet

1. Si $|S| < 1$, quel que soit x_0 l'orbite $O(x_0)$ du système (1.8) tend vers le point fixe $x = 0$. Ce point 0 est dit *attractif*, ou encore *asymptotiquement stable*.
2. Si $|S| > 1$, quel que soit x_0 l'orbite $O(x_0)$ du système (1.8) s'éloigne de 0 quand n augmente. Ce point 0 est alors dit *répulsif* ou *instable*.

La nature du point fixe 0 dépend aussi du signe du multiplicateur S . En effet,

1. si S est positif la suite des points engendrées par (1.8) est telle que x_n a toujours le même signe que x_0 . 0 est appelé dans ce cas *point de type 1* ;
2. par contre si S est négatif la suite des points engendrée par (1.8) est telle que le signe de x_n dépend de n . Cette suite oscille autour du point fixe 0. 0 est alors appelé *point de type 2*

Dans le contexte linéaire, $|S| = 1$ correspond à un cas banal, car si $S = 1$ tout point de l'axe des x est un point fixe, et si $S = -1$, tout point de l'axe des x est un point fixe de

$$x_{n+1} = S^2 x_n. \quad (1.10)$$

Lorsque 0 est attractif, le domaine d'attraction de 0, est l'ensemble des points x_0 qui donne une suite tendant vers 0. Il est ici constitué par tout l'axe des x .

Étant donné un point initial x_0 , le point x_1 obtenu à partir de (1.8) est appelé le conséquent de x_0 . En écrivant (1.8) sous la forme :

$$x_n = S^{-1}x_{n+1}, \quad (1.11)$$

on définit la récurrence inverse, (1.8) étant la récurrence directe. Au point x_0 correspond un point x_{-1} donné par (1.11), qui est appelé antécédent de rang un de x_0 . Si (1.8) correspond à une transformation ponctuelle f , (1.11) correspond à la transformation inverse f^{-1} . Dans le cas linéaire, il est évident que f^{-1} est toujours uniforme, c'est-à-dire, un point x_0 possède un antécédent de rang n et un seul. Le point x_{-n} issu de x_0 est l'antécédent de rang n .

Remarque 1.2.1 Notons que si on a un système dynamique linéaire défini par l'application $f(x) = Sx$ donc le multiplicateur du point fixe $x^* = 0$ est donné par $S = f'(x^*)$.

1.2.2 Systèmes dynamiques non-linéaires

Soit le système dynamique non-linéaire défini par :

$$x_{n+1} = f(x_n, a), \quad (1.12)$$

$a \in \mathbb{R}^m$ est le paramètre de bifurcation et $f(x)$ étant une fonction uniforme de classe C^1 de la variable réelle x , ne pouvant être ramenée à la forme (1.8) par un changement linéaire de variables.

1.2.3 Systèmes dynamiques linéaires bi-dimensionnelles de premier ordre

La caractérisation des trajectoires dans les systèmes linéaires autonomes bidimensionnels de premier ordre fournit les fondements conceptuels de la généralisation de

l'analyse pour les systèmes dynamiques non linéaires, de rang supérieur, non autonomes. Soit le système dynamique discret linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = a_{11}x_{1,n} + a_{12}x_{2,n}, \\ x_{2,n+1} = a_{21}x_{1,n} + a_{22}x_{2,n}. \end{cases}, \quad -\infty < x_1, x_2 < +\infty. \quad (1.13)$$

avec la condition initiale (x_{10}, x_{20}) . Où $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sont des constantes réelles. Le système (1.13) peut s'écrire sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. L'origine O est le seul point fixe de l'application f (si $\det(I - A) \neq 0$) définie par

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_{1,n} + a_{12}x_{2,n} \\ a_{21}x_{1,n} + a_{22}x_{2,n} \end{pmatrix}.$$

Une solution du système linéaire (1.14), est une trajectoire $\{X_n\}_{n \geq 0}$ où $X_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix}$ pour tout entier positif n . Donc la valeur de X_n dans les périodes $1, 2, 3, \dots, n$ est

$$\begin{aligned} X_1 &= AX_0, \\ X_2 &= AX_1 = A^2X_0, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ X_n &= AX_{n-1} = A^nX_0. \end{aligned}$$

Dans le cas où la matrice A n'est pas une matrice diagonale et qu'il existe l'interdépendance dans l'évolution des variables d'état, ils existent des méthodes d'algèbre linéaire (Forme normale de Jardon) qui permettent de transformer le système à variable d'état interdépendantes à un système à variables d'état indépendantes ou partialement indépendantes.

Matrice de Jordan

Cette sous section résume les propositions fondamentales de l'algèbre linéaire utilisée dans la dérivation et l'analyse qualitative des systèmes dynamiques discrets bidimensionnels.

Lemme 1.2.1

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice 2×2 , tel que $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour tous i et j .

1. Si la matrice A a deux valeurs propres réelles distinctes $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, alors il existe une matrice 2×2 non singulière Q et une matrice diagonale D , telle que $A = QDQ^{-1}$.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et Q est une matrice 2×2 inversible dont les colonnes sont les vecteurs propres de la matrice A .

2. Si la matrice A a deux valeurs propres réelles répétées $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ alors il existe une matrice 2×2 non singulière Q , telle que $A = QDQ^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

3. Si la matrice A a deux valeurs propres complexes conjuguées, $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ et $w = u \pm iv$ sont les vecteurs propres associés alors il existe une matrice 2×2 non singulière, Q , telle

que $A = QDQ^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

et Q est une matrice 2×2 inversible de plus $Q = (v, u)$.

Caractérisation des solutions d'un système dynamique linéaire

Pour caractériser les solutions du système dynamique bidimensionnel

$$X_{n+1} = AX_n, \quad (1.15)$$

avec $X \in \mathbb{R}^2$ et A une matrice carrée 2×2 on s'intéresse dans un premier temps au système

$$Y_{n+1} = DY_n, \quad (1.16)$$

avec $X = QY$ et $D = Q^{-1}AQ$ (D et Q sont les matrices définies dans le lemme (1.2.1) et on déduit la caractérisation des solutions du système (1.15) en utilisant la relation $X = QY$.

Pour simplifier la notation dans ce qui vient on pose $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

♦ Valeurs propres réelles distincts

Soit le système dynamique

$$Y_{n+1} = DY_n, \quad (1.17)$$

avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Donc $Y_n = D^n Y_0$ avec $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ i.e.

$$\begin{cases} x_n = (\lambda_1)^n x_0, \\ y_n = (\lambda_2)^n y_0. \end{cases} \quad (1.18)$$

avec $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est une condition initiale du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Si $|\lambda_2| < |\lambda_1| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0.$$

Le point 0 est un point fixe attractif, ou asymptotiquement stable (*un nœud stable*).

- (a) Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, la suite des points générée à partir de $M_0(x_0, y_0)$ tend vers 0 sans oscillation autour de l'un des axes OX, OY . 0 est appelé *nœud stable de type 1*.
- (b) Si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, ou $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, la suite des points générée à partir de $M_0(x_0, y_0)$ tend vers 0 en oscillant autour de OY dans le premier cas, et autour de OX dans le second. 0 est appelé *nœud stable de type 2*.
- (c) Si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, la suite des points générée à partir de $M_0(x_0, y_0)$ tend vers 0 en oscillant autour des deux axes OX, OY . 0 est appelé *nœud stable de type 3*.

2. Si $|\lambda_2| > |\lambda_1| > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \pm\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \pm\infty.$$

0 est appelé *nœud instable* qui selon les signes de λ_1, λ_2 peut être de type 1, 2, ou

3. On dit aussi que 0 est un *nœud répulsif*.

- 3. Si $|\lambda_2| < 1, |\lambda_1| > 1$, 0 est un point fixe instable qui sera appelé un *col*. Le signe de λ_1, λ_2 permet encore de distinguer *les cols de type 1, 2 ou 3*.
- 4. Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, 0 est appelé un *nœud étoile de type 1* ($\lambda_1 = \lambda_2 > 0$), de *de type 2* ($\lambda_1 = -\lambda_2$) ou *de type 3* ($\lambda_1 = \lambda_2 < 0$) attractif, ou répulsif, selon $|\lambda_1| < 1$, ou $|\lambda_1| > 1$.

♦ Valeurs propres réelles égales

Considérons le système dynamique (1.17) avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc $Y_n = D^n Y_0$ avec $D^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}$ i.e.

$$\begin{cases} x_n = \lambda^n x_0, \\ y_n = n\lambda^{n-1} x_0 + \lambda^n y_0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Pour $\lambda > 0$ et $\frac{x}{x_0} > 0$ les trajectoires sont situées sur les courbes invariantes d'équation

$$y = \frac{y_0}{x_0} x + \frac{\ln(\frac{x}{x_0})}{\lambda \ln(\lambda)} x. \quad (1.20)$$

1. Si $\lambda > 1$ Le point fixe 0 est alors appelé *un nœud impropre attractif*.
2. Si $0 < \lambda < 1$ Le point fixe 0 est alors appelé *un nœud impropre répulsif*.

♦ Valeurs propres complexes

Considérons le système dynamique (1.17) avec $D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Considérons la représentation géométrique des valeurs propres, en posant $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$ avec $0 < \theta < \pi$ alors $\lambda_{1,2} = a \pm ib = re^{\pm i\theta}$.

1. Si $r = 1$, Le point fixe 0 est appelé *centre* (un point fixe *centre* est *stable* mais n'est pas *asymptotiquement stable*)
2. Si $r \neq 1$,
 - (a) Si $|r| < 1$, l'origine est appelée *foyer stable*
 - (b) Si $|r| > 1$, l'origine est appelée *foyer instable*

1.2.4 Stabilité des systèmes dynamiques non-linéaires discrets bi-dimensionnelles

Un système non-linéaire discret de dimension 2 est donné par

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ f_2 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

ou bien

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = f_2(x_n, y_n). \end{cases} \quad (1.21)$$

$f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ étant des fonctions continues, uniformes, non-linéaires, des variables réelles x, y . Les propriétés des solutions du système (1.21) sont très complexes par rapport à celles de la récurrence (1.13). En particulier, les solutions ne s'expriment pas, sauf cas exceptionnel, à l'aide des fonctions transcendentes connues, sous forme finie, et il est nécessaire de les caractériser à travers les singularités du système (1.21).

1. Points fixes :

Le cas non-linéaire conduit donc à la possibilité d'existence de plusieurs points fixes. Soit X^* un point fixe pour le système (1.21), alors si $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ sont au moins une fois différentiables (classe C_1) au point $X^* = (x^*, y^*)$, un développement de Taylor au voisinage de X^* donne

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(X^*) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)(X^*)(x_n - x^*) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(X^*)(y_n - y^*) + \bar{X}, \\ y_{n+1} = f_2(X^*) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)(X^*)(x_n - x^*) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(X^*)(y_n - y^*) + \bar{Y}. \end{cases}$$

$\bar{X}$ et $\bar{Y}$ sont les termes non linéaires. Lorsque X est très proche de X^* les termes non-linéaires deviennent négligeables devant le terme linéaire et le système non-

linéaire est approximé par le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} - x^* = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)(X^*)(x_n - x^*) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(X^*)(y_n - y^*), \\ y_{n+1} - y^* = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)(X^*)(x_n - x^*) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(X^*)(y_n - y^*). \end{cases} \quad (1.22)$$

Après un changement des variables $X' = X - X^*$ le point fixe se ramène à l'origine 0 et (1.22) devient

$$\begin{cases} x'_{n+1} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)(X^*)x'_n + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(X^*)y'_n, \\ y'_{n+1} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)(X^*)x'_n + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(X^*)y'_n. \end{cases}$$

i.e.

$$X'_{n+1} = JX'_n,$$

où

$$J = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)(X^*) & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(X^*) \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)(X^*) & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(X^*) \end{pmatrix}$$

est la matrice *Jacobienne* de f en X^* . Comme dans le cas linéaire, en général, les multiplicateurs (valeurs propres de J) λ_1, λ_2 fixent le comportement des trajectoires de notre système, mais ici seulement pour des conditions initiales prises dans un voisinage (suffisamment petit) au point fixe X^* . Les cas où un multiplicateur (ou les deux) est (ou sont) de module égal à un, qui se présentent dans le cas linéaire comme des cas frontières séparant deux structures de trajectoires discrètes différentes, ne permettent plus de définir l'allure des courbes invariantes à partir de l'approximation linéaire de (1.21). En effet si $|\lambda_1| = 1$, ou $|\lambda_2| = 1$, ou $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, cette caractéristique de frontière, entre deux comportements qualitatifs différents, entraîne que les trajectoires de l'approximation linéaire ne sont pas en général conservées, aussi petit que soit le voisinage $\mathcal{D}$ du point fixe X^* . Ce sont les non-linéarités $\bar{X}, \bar{Y}$, qui fixent l'allure de ces trajectoires à l'intérieur de $\mathcal{D}$. On dit alors qu'il y a *cas critique au sens de Lyapounov*.

Théorème 1.2.2 (a) *Si tous les valeurs propres de la matrice Jacobien J ont des modules strictement inférieurs à l'unité, alors le point fixe X^* du système (1.21) est localement*

asymptotiquement stable.

(b) Si la matrice Jacobien J admet au moins une valeur propre de module strictement supérieur à l'unité, alors le point fixe X^ est instable.*

(c) Si certaines valeurs propres de la matrice J sont sur le cercle du rayon de l'unité et les autres à l'intérieur, on ne peut pas conclure la stabilité locale du point fixe X^ .*

2. m -cycles :

Un m -cycle est défini comme point fixe de f^m qui n'est pas point fixe de f^k , $1 \leq k < m$, (k, m entiers). Il est donc constitué par m points dans le plan (x, y) , et possède, comme un point fixe, deux multiplicateurs λ_1, λ_2 .

CHAPITRE 2

BIFURCATION ET CHAOS

2.1 Théorie des bifurcations

On dit qu'une solution d'un système dynamique correspond à une bifurcation sous l'effet d'une variation de paramètre, lorsqu'elle est une frontière entre deux comportements qualitatifs différents de solutions. Plus précisément, soit le système dynamique :

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu), \quad (2.1)$$

μ étant un paramètre réel, $f(x, \mu)$ une fonction continue de la variable réelle x (le cas générale x vecteur dans $\mathbb{R}^m$) et de μ . S'il existe un $\epsilon > 0$, aussi petit que l'on veut, tel que la structure des singularités (points fixes, orbites périodiques) de (2.1) est différente pour $\mu < \mu_0$, $\mu > \mu_0$, ($|\mu - \mu_0| < \epsilon$), la valeur μ_0 du paramètre μ est appelée **point de bifurcation**. Dans cette section on présentera trois types de bifurcations qui sont : la bifurcation fold, bifurcation flip et la bifurcation de Neimark-Sacker.

1. Bifurcation fold ou pli :

La bifurcation pli est une bifurcation catastrophique. Ça signifie que, quand le paramètre de contrôle varie, on a une apparition de deux cycles d'ordre k , de

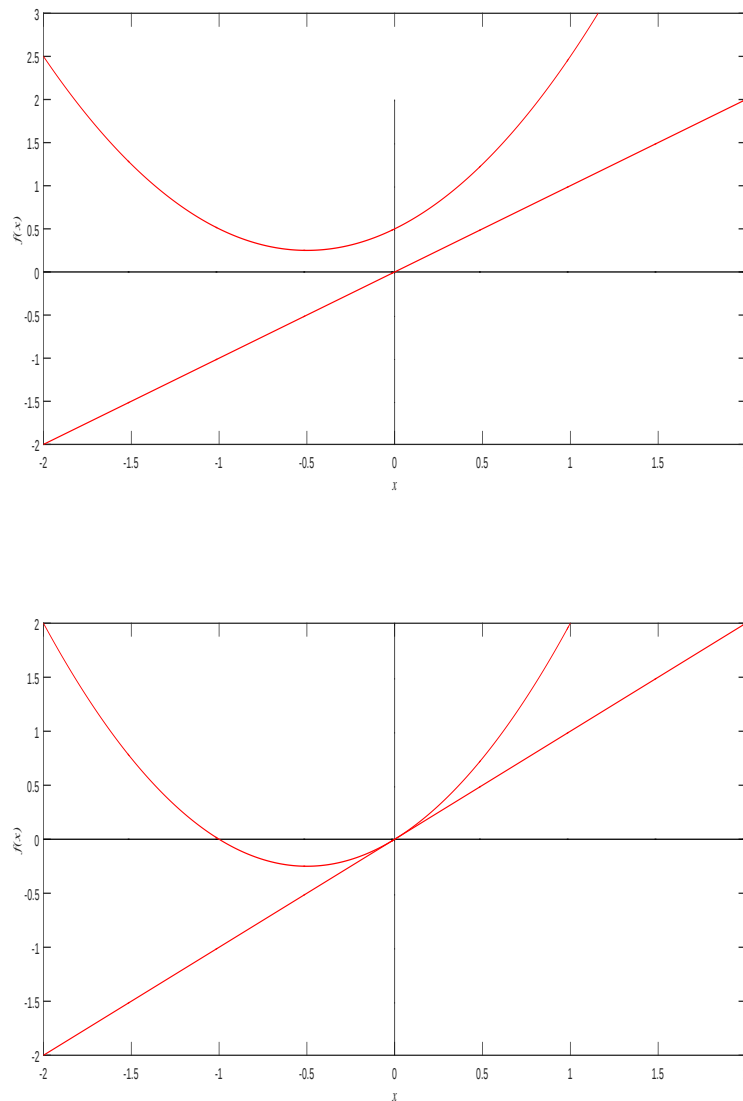
stabilités différentes. A la bifurcation, les deux cycles sont confondus et avec un multiplicateur S égal à 1. Pour comprendre le mécanisme de cette bifurcation, passons maintenant à un exemple spécifique.

Exemple 2.1.1

Soit le système dynamique défini par l'application (2.2),

$$f_c(x) = x^2 + x + c, \quad (2.2)$$

c est le paramètre de bifurcation. Les graphes des applications f_c quand $c > 0$, $c = 0$ et $c < 0$ sont donnés dans la Figure (2.1). Les points fixes de (2.2) sont solutions de



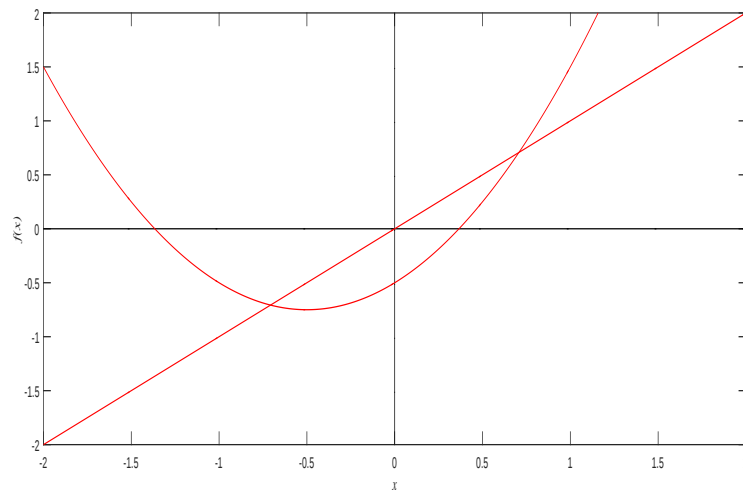


FIGURE 2.1 – Le graphe de l'application $f_c(x) = x^2 + x + c$ pour (a) $c = 0.5$. (b) $c = 0$. (c) $c = -0.5$.

l'équation $x^2 + x + c = x$. Pour $c > 0$, il n'y a pas de point fixe. Pour $c = 0$, il y a un seul point fixe $x_1 = 0$. Pour $c < 0$, il y a deux points fixes $x_{1,2} = \mp \sqrt{-c}$. L'itération (2.2) présente une bifurcation pli à $c = 0$ au point fixe $x = 0$ avec un multiplicateur $f'_0(0) = 1$. Pour $a < 0$, les multiplicateurs des points $x_1 = \sqrt{-c}$ et $x_2 = -\sqrt{-c}$ sont $2\sqrt{-c} + 1 > 1$ (x_1 est répulsif) et $0 < -2\sqrt{-c} + 1 < 1$ (x_2 est attractif) respectivement. Le diagramme de bifurcation dans l'espace (c, x) est présenté sur la figure (2.2).

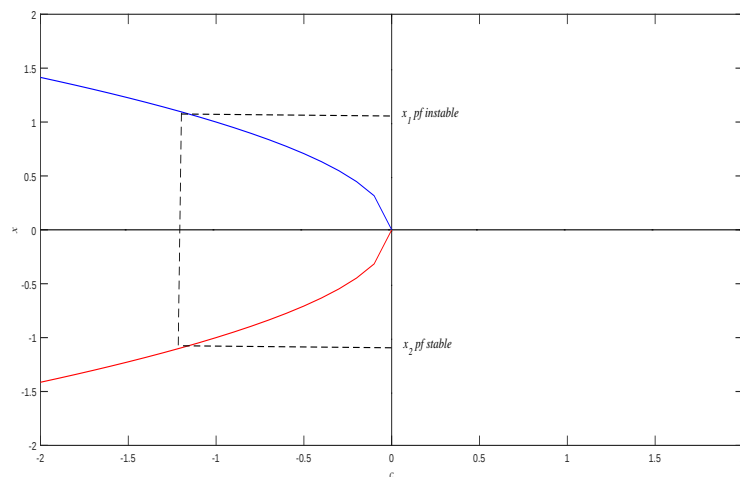


FIGURE 2.2 – Bifurcation pli.

2. Bifurcation flip ou doublement de période

Cette bifurcation a lieu, lorsqu'un cycle d'ordre k stable a un multiplicateur qui passe par la valeur $S = -1$. Ce cycle devient alors instable et donne naissance à un cycle d'ordre $2k$ stable. Afin de clarifier ce genre de bifurcation nous traitons l'exemple suivant :

Exemple 2.1.2

Soit l'application logistique f définie par :

$$f_a(x) = ax(1 - x), \quad (2.3)$$

a est le paramètre de bifurcation. L'application f présente une bifurcation de doublement de période en $a = 3$ au point fixe $x_1 = \frac{a-1}{a}$ avec un multiplicateur $S = -1$. Le diagramme de bifurcation dans l'espace (a, x) est donné par la figure (2.3).

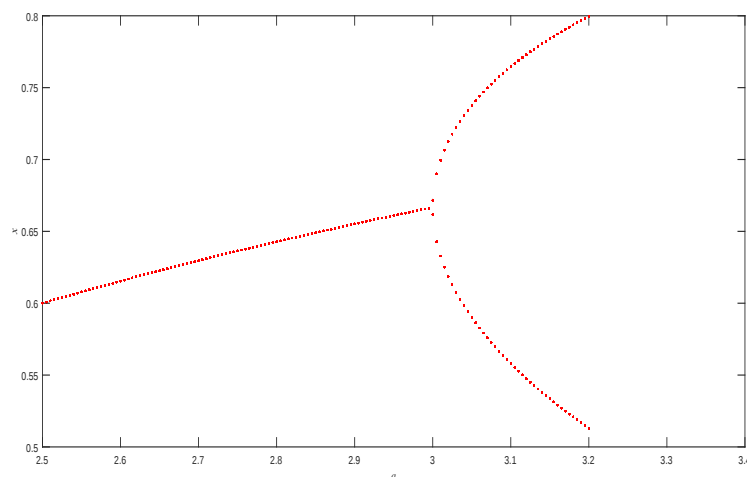


FIGURE 2.3 – Bifurcation flip ou doublement de période.

3. Bifurcation de Neimark-Sacker

La bifurcation de Neimark-Sacker est définie pour un système de dimension plus grand que 1, cette bifurcation est caractérisé par la naissance (quand le paramètre de bifurcation μ dépasse le point de bifurcation μ_0) d'une courbe invariante fermée à partir d'un point fixe, lorsque le point fixe change de stabilité via une paire de valeurs propres complexes avec un module unitaire. La bifurcation peut être

super-critique figure (2.4) ou sous-critique figure (??), donnant lieu à une courbe invariante fermée stable ou instable, respectivement.

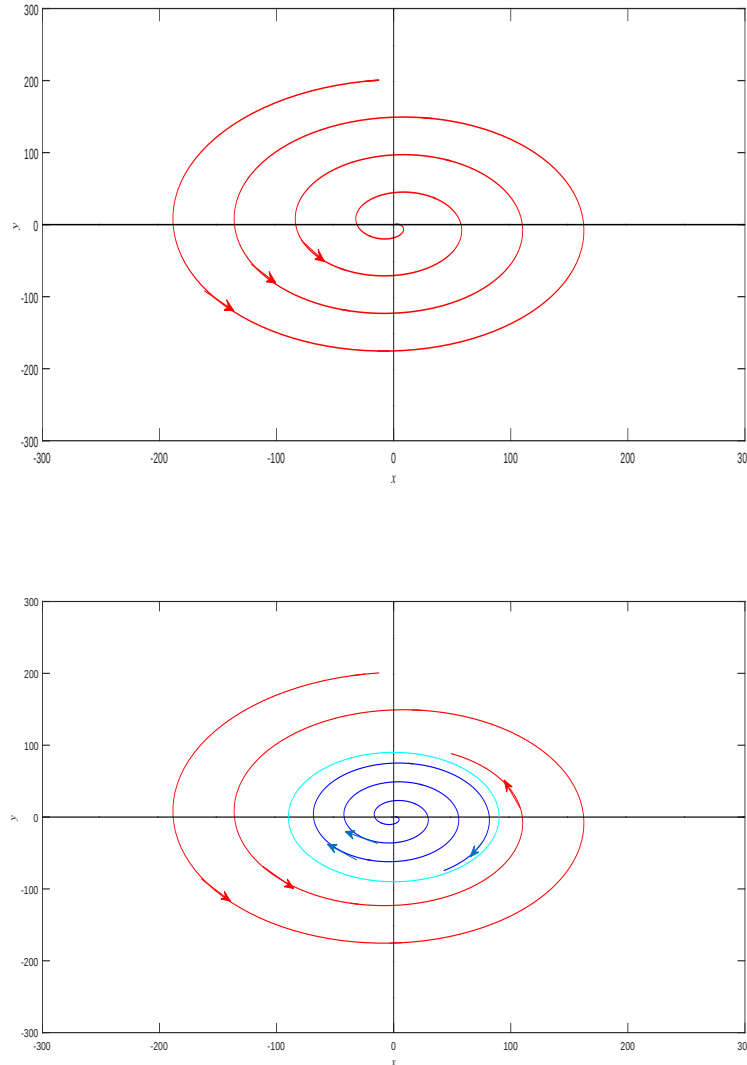


FIGURE 2.4 – Bifurcation de Neimark-Sacker super-critique. (a) Foyer stable pour $\mu < \mu_0$. (b) Courbe invariante fermée stable $\mu > \mu_0$.

2.2 Chaos

Le monde qui nous entoure paraît souvent imprévisible, désordonné, hasardeux et chaotique. Un système chaotique est un système simple ou complexe, sensible aux conditions initiales et qui présente un caractère répétitif, une forte récurrence. Une

petite perturbation peut entrainer une instabilité ou un déséquilibre gigantesque non prédictible à long terme. Ainsi les dispositifs simples peuvent donner lieu à des phénomènes complexes. Un système chaotique est l'inverse d'un système parfaitement régulier. Nous essayons dans la section suivante de donner une définition du chaos, due à R.L Devaney [4].

2.2.1 Systèmes dynamiques chaotiques

On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématiques du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle du chaos. Avant de donner une définition du chaos, due à R.L Devaney [4], quelques définitions de base sont nécessaires.

Définition 2.2.1

$f : J \rightarrow J$ est dite *topologiquement transitive* si pour toute paire d'ensembles ouverts $U, V \subset J$ il existe $k > 0$ tel que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Définition 2.2.2

$f : J \rightarrow J$ a une *sensibilité aux conditions initiales* s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in J$ et tout voisinage N_x de x , il existe $y \in N_x$ et $n > 0$ tels que $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Intuitivement, une application possède une sensibilité aux conditions initiales si il existe des points arbitrairement proches de x qui finissent par s'éloigner de x par au moins δ sous l'itération de f . Nous passons maintenant à l'un des thèmes principaux dans les systèmes dynamiques, la notion du chaos. Nous présentons ici une définition particulière donnée par Devaney [4], car elle s'applique à un grand nombre d'exemples et généralement il est facile à vérifier.

Définition 2.2.3

Soit V un ensemble. L'application $f : V \rightarrow V$ est dite *chaotique sur V* si

1. f possède une sensibilité aux conditions initiales,
2. f est topologiquement transitive,

3. les points périodiques sont denses dans V .

Pour résumer, une application chaotique possède trois propriétés : l'imprévisibilité, elle est indécomposable et elle a un élément de régularité. Un système chaotique est imprévisible en raison de la sensibilité aux conditions initiales. Il ne peut pas être décomposé en deux sous-systèmes (deux sous-ensembles ouverts et invariants) qui ne se chevauche pas sous f en raison de la transitivité topologique. Et, au milieu de ce comportement aléatoire, nous avons quand même un élément de régularité, ce sont les points périodiques denses.

2.2.2 Attracteurs, bassins d'attraction et frontières

L'analyse du comportement à long terme d'un système dynamique nécessite une définition de l'attracteur, qui s'applique aux ensembles plus généraux que les points fixes et les orbites périodiques.

Définition 2.2.4 [6]

Soit $U \supset \mathbb{R}^q$ un ouvert et soit l'application $f : U \rightarrow U$. Un ensemble fermé et borné $A \subset U$ est un **attracteur** si $f(A) = A$ et s'il existe $r > 0$ tel que $d(x_0, A) < r$ implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, A) = 0$.

Les attracteurs jouent un rôle fondamental dans l'étude du comportement à long terme d'un système dynamique. Certains de ces attracteurs ont une géométrie très compliquée au point que certains d'entre eux ont été appelés **attracteurs étranges**. Les attracteurs peuvent être classés dans trois catégories [5] :

1. Point fixe (un seul point),
2. orbite périodique (un ensemble fini des points),
3. un attracteur chaotique (attracteur étrange) est tout autre type d'attracteurs.

Définition 2.2.5

Étant donné un attracteur A , nous appelons le **bassin d'attraction** de A l'ensemble de toutes les conditions initiales x_0 , telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, A) = 0$.

Différents bassins d'attraction sont séparés par des frontières des bassins. La géométrie de ces frontières est souvent aussi complexe que la géométrie des attracteurs eux-mêmes. La figure (2.5) présente l'attracteur de l'application de Lozi défini par (2.4) :

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a |x| + by \\ x \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

où a et b sont les paramètres de bifurcations.

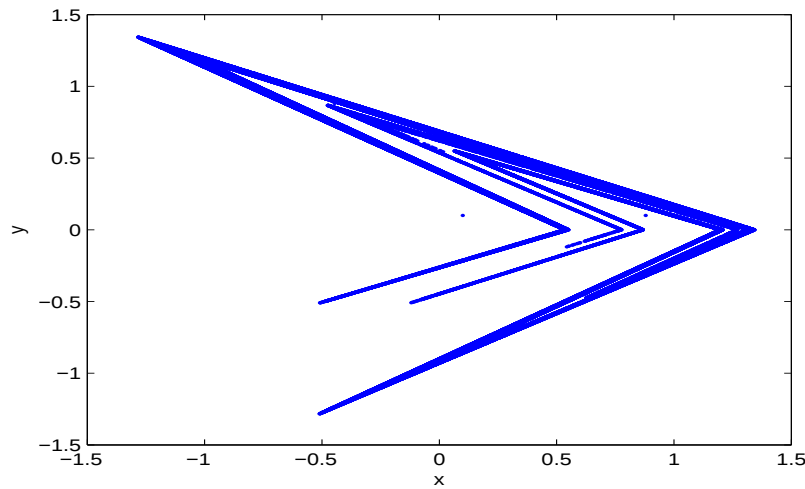


FIGURE 2.5 – Attracteur de Lozi obtenu pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$.

2.2.3 Exposants de Lyapounov

Dans l'analyse d'un système dynamique, l'exposant de Lyapounov permet de quantifier la stabilité ou l'instabilité de ses mouvements. Un exposant de Lyapounov est : soit un nombre réel (fini), soit vaut $+\infty$ ou $-\infty$. Un mouvement instable a un exposant de Lyapounov positif, un mouvement stable, a un exposant de Lyapounov négatif. Les mouvements bornés d'un système linéaire ont un exposant de Lyapounov négatif ou nul. L'exposant de Lyapounov peut servir à étudier la stabilité (ou l'instabilité) des points d'équilibres des systèmes non linéaires. Nous allons définir dans cette sous-section la notion de l'exposant de Lyapounov et montrer comment on s'en sert pour étudier des systèmes chaotiques et même détecter la présence du chaos dans des systèmes.

1. Cas d'un systèmes dynamiques de dimension 1 :

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Choisissons deux conditions initiales très proches, soit x_0 et $x_0 + \epsilon$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel. On pourra alors trouver un réel μ tel que après n itérations :

$$|f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)| \simeq \epsilon \exp(n\mu),$$

d'où

$$\log \left| \frac{f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)}{\epsilon} \right| \simeq n\mu,$$

En faisant ϵ tendre vers zéro, on trouve :

$$\mu \simeq \log \left| \frac{d f^n(x_0)}{d x_0} \right|$$

Finalement, en faisant tendre n vers l'infini et en utilisant la règle de dérivation en chaîne,

$$\frac{d}{dx} f^n(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)$$

on obtient :

$$\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(x_i)|. \quad (2.5)$$

μ est appelé exposant de Lyapounov. Par sa définition, l'exposant de Lyapounov caractérise la stabilité d'une orbite $O(x_0)$. Si $\mu > 0$ l'orbite $O(x_0)$ est instable. Si $\mu < 0$, elle est stable. La figure (2.6) donne l'exposant de Lyapounov de l'application logistique (2.6) pour $3 < a \leq 4$.

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n). \quad (2.6)$$

2. Cas d'un systèmes dynamiques de dimension 2 :

Donnons maintenant une généralisation de la notion de l'exposant de Lyapunov

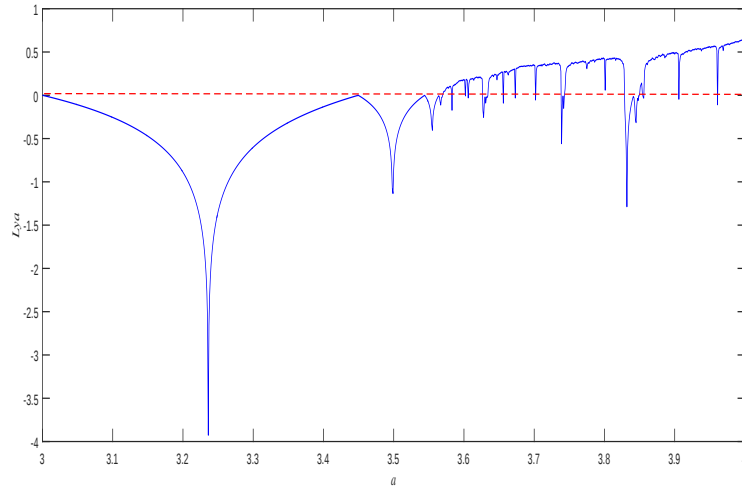


FIGURE 2.6 – Exposant de Lyapunov de l’application logistique (2.6) en fonction du paramètre a .

dans le cas multi-dimensionnel. Soit $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et soit

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.7)$$

le système dynamique défini par f . Commençons par préciser qu’un système m -dimensionnel possédera m exposant de Lyapunov μ_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Chacun d’entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système. Pour chaque $n \geq 1$ considérons la matrice jacobien de l’application f^n (notons le $J_n(x_0)$) évalué en un point x_0 . Tout comme dans le cas de dimension 1 nous avons :

$$J_n(x_0) = \prod_{i=1}^n J(x_i), \quad (2.8)$$

où $x_i = f^i(x_0)$ sont les points de l’orbite $O(x_0)$ et $J(x)$ est la matrice jacobien de l’application f évaluée en un point x . Pour calculer les μ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, nous nous intéressons à :

$$f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)$$

Posons $x'_0 = x_0 + \epsilon$ et opérons un développement limite d’ordre 1 de $f^n(x_0)$ au

voisinage de x'_0) :

$$x_n - x'_n = J_n(x_0)(x_0 - x'_0),$$

Si $J_n(x_0)$ est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_t telle que : $D_n(x_0) = P_t^{-1}J_n(x_0)P_t$, où $D_n(x_0)$ est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de $J_n(x_0)$. Notons ces valeurs propres par θ_i , $i = 1, \dots, m$. On définit alors les m exposants de Lyapounov de la manière suivante :

$$\mu_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\theta_i^n), \quad i = 1, \dots, m.$$

La figure (2.7) donne les deux exposants de Lyapounov de l'application de Hénon définie par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + by_n, \\ y_{n+1} = x_n. \end{cases} \quad (2.9)$$

pour $b = 0.3$ et $0.2 < a \leq 1.5$. Les exposants de Lyapounov d'une orbite périodique

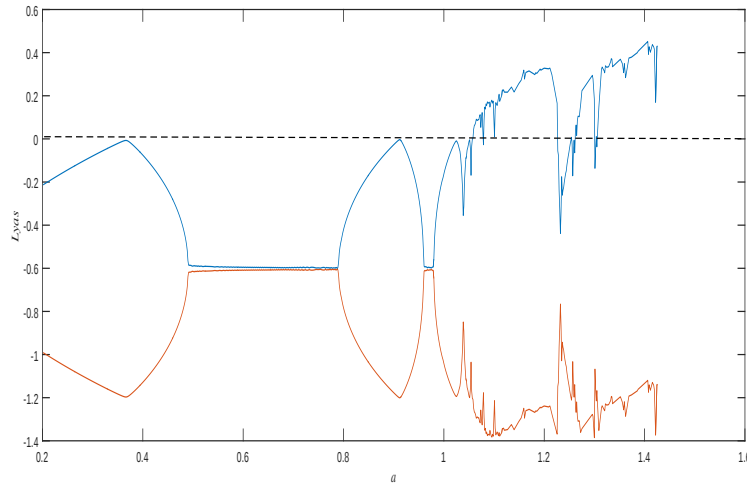


FIGURE 2.7 – Exposant de Lyapounov de l'application de Hénon pour $b = 0.3$ et $0.2 < a \leq 1.5$.

attractive sont également négatifs. Si l'un des exposants est nul on a un point de bifurcation. Si l'un des exposants est positif alors on a la sensibilité aux conditions initiales, c'est-à-dire il y a le chaos.

2.2.4 Dimension fractale

L'étude d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^q$ invariant, fermé et borné (attracteur) d'un système dynamique gouverné par une application f comprend souvent la détermination d'un nombre représentant la dimension de A selon une définition appropriée de cette propriété. Ce nombre peut être assez important surtout quand A est un attracteur chaotique. Par exemple, un point a la dimension 0, un segment a la dimension 1, un carré plein (intérieur et bord) a la dimension 2, un cube plein (intérieur et limite) a la dimension 3, etc. Cette idée intuitive n'est pas assez sophistiquée pour les objets géométriques complexes, y compris les attracteurs étranges. Il peut arriver que différentes définitions de dimension attribuent différents nombres à l'un des sous-ensembles complexes de $\mathbb{R}^q$, pour les quels l'idée intuitive de dimension a échoué. De plus, ces nombres ne peuvent pas être des nombres entiers. Un objet géométrique dont la dimension (dans une définition appropriée) n'est pas un entier s'appelle une fractale [7]. Quelques définitions différentes de dimension fractales seront abordées dans cette section [8].

1. Dimension de Hausdorff :

Soit l'espace A . On recouvre l'espace A au moyen d'une réunion dénombrable de parties notées A_i , chacune étant de diamètre inférieur à r . Pour tout s réel positif ou nul, on considère la quantité $\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(A_i)^s$. On introduit la quantité :

$$H_r^s(A) = \inf_{\text{diam}(A_i) < r} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(A_i)^s / A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

La fonction H_r^s est décroissante, ce qui assure l'existence d'une limite (éventuellement infinie) quand on fait tendre r vers 0. D'où la définition :

$$H^s(X) = \lim_{r \rightarrow 0} H_r^s(X).$$

H^s s'appelle mesure de Hausdorff s -dimensionnelle. La dimension de Hausdorff s'appuie sur la mesure de Hausdorff. La dimension de Hausdorff de $A \subset \mathbb{R}^n$ est

définie par [29] :

$$D_H = \sup \{s, H^s(A) = +\infty\} = \inf \{s, H^s(A) = 0\},$$

où $H^s(A)$ est la mesure de Hausdorff de l'ensemble A : Ce type de dimension dépend uniquement des propriétés métriques de l'espace dans lequel se trouve l'ensemble.

2. Dimension de capacité :

L'idée de la dimension de capacité est la suivante. Supposons que A soit un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$. Choisissez $\epsilon > 0$ et sélectionnez des hyper-cubes (segments dans $\mathbb{R}$, carrés dans $\mathbb{R}^2$, cubes dans $\mathbb{R}^3$, etc.) du rayon ϵ . Notons par $N(\epsilon)$ le plus petit nombre nécessaire pour couvrir A . Posons

$$D_C = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{N(\epsilon)}{-\ln(\epsilon)}.$$

D_C est appelé la dimension de capacité de l'ensemble A [8].

3. Dimension de corrélation :

Soit $O(x_1)$ une trajectoire d'un système dynamique (la condition initiale est notée x_1). La dimension de corrélation de l'ensemble $O(x_1)$ est calculée de la manière suivante :

Étant donné un nombre réel positif r , nous formons l'intégrale de corrélation donné par :

$$C(r) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 - n} \sum_{i \neq j}^n H(r - \|x_i - x_j\|), \quad (2.10)$$

où

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}, \quad (2.11)$$

est la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathbb{R}^+$. La somme compte le nombre de paires de vecteurs plus proches que r lorsque $l < i, j < n$ et $i \neq j$, où $n^2 - n$ est le nombre total de paires avec $i \neq j$. Par conséquent, le rapport entre les deux représente le ratio des paires qui sont plus proches que r , et $C(r)$ mesure la densité

de paires de vecteurs distincts qui sont plus proches que r .

Définition 2.2.6

La dimension de corrélation D_{Cor} de $O(x_1)$ est définie par :

$$D_{Cor} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(C(r))}{\ln(r)}. \quad (2.12)$$

4. Dimension Kaplan et Yorke (Lyapunov) :[30]

Soit $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$, les n exposants de Lyapunov d'un attracteur d'un système dynamique et soit j le grand entier naturel tel que :

$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_j \geq 0$. Alors la dimension de Kaplan et Yorke (Lyapunov) est donnée par :

$$D_{KY} = \frac{\sum_{i=1}^j \mu_i}{|\mu_{j+1}|}.$$

Si aucun j existe alors $D_{KY} = 0$ (comme le cas d'un point hyperbolique stable) ; et si l'attracteur est chaotique alors $D_{KY} > 0$ est un nombre fractionnaire.

2.2.5 Routes vers le chaos

Une route vers le chaos est une séquence spécifique de bifurcations menant d'une évolution totalement prévisible (possède par exemple un point fixe stable) à une évolution chaotique. Une caractéristique remarquable, découverte dans les années 1980, est que ces séquences sont souvent qualitativement identiques, même si les systèmes physiques sont totalement différents. C'est ce qu'on appelle l'universalité des routes du chaos. On a pu mettre en évidence trois grands scénarios de passage d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre. Trois routes typiques ont été mises en évidence pour les systèmes dissipatifs, chacune associée à un type de bifurcation : la route de doublement de période associée à la bifurcation flip ou doublement de période, la route d'intermittence associée à la bifurcation fold ou nœud col et la route de Ruelle-Takens associée à la bifurcation de Neimark-Sacker.

Cascade de doublements de période

Cette route décrit le passage d'une situation où le système dynamique atteint un état d'équilibre (c'est-à-dire un point fixe stable) à un régime chaotique par une succession de bifurcation de type doublement de période. Lorsque le paramètre de bifurcation μ augmente, le point fixe stable est remplacé en $\mu = \mu_0$ par un 2-cycle stable (le point fixe existe toujours pour $\mu > \mu_0$ mais il est instable). Ensuite, en $\mu = \mu_1$, ce cycle perd sa stabilité et est remplacé par un 4-cycle stable. Et ainsi de suite : l'orbite périodique de période 2^{j-1} observée pour $\mu < \mu_j$ perd sa stabilité pour $\mu = \mu_j$ et est remplacée par une orbite périodique de période 2^j stable. La suite croissante $(\mu_j)_{j \geq 0}$ des valeurs de bifurcations tend vers une limite μ_C . En $\mu = \mu_C$, un régime chaotique apparaît. Les valeurs de bifurcations $(\mu_j)_{j \geq 0}$ sont spécifiques au système considéré, ainsi que leur valeur limite μ_C . Par contre, leur accumulations en μ_C suit une progression géométrique :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\mu_{j+1} - \mu_j}{\mu_{j+2} - \mu_{j+1}} = \delta, \quad (2.13)$$

où δ est un nombre universel : $\delta = 4.66920\dots$. Cela signifie que l'exposant δ est identique dans tous les systèmes où une telle séquence de doublements de périodes conduisant au chaos est observée : une similitude qualitative entre comportements asymptotiques implique une identité quantitative. Ce scénario est observé par exemple dans l'application logistique (2.6) avec $3 < a \leq 4$, comme le montre la figure (2.8).

Par intermittence

La route appelée intermittence décrit la persistance de phases régulières et prévisibles dans une dynamique globalement chaotique. L'idée principale est qu'après la disparition d'un point fixe stable x_μ^* via une bifurcation nœud-col pour $\mu = 0$, la dynamique reste lente au voisinage de x_μ^* , comme si elle connaissait la présence d'un fantôme du point fixé [11]. L'exemple typique est le système discret :

$$x_{n+1} = g_\mu(x_n) = -\mu + x_n - Ax_n^2, \quad (2.14)$$

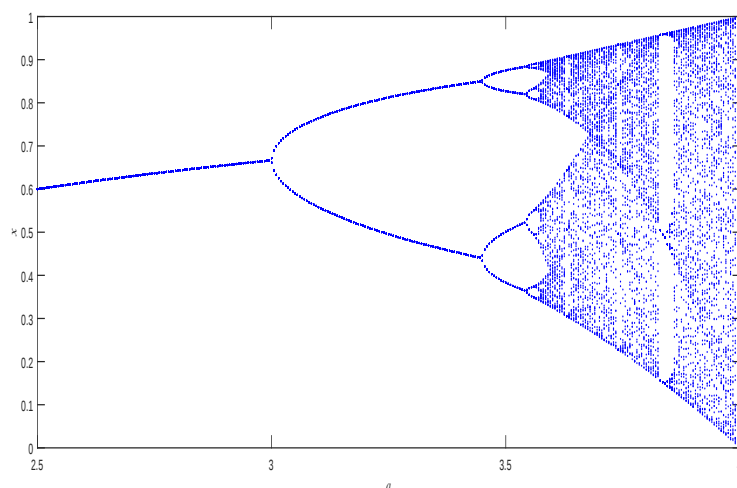


FIGURE 2.8 – Bifurcation vers le chaos par doublement de période (ex : l'application logistique pour $2.5 < a \leq 4$).

où $A > 0$ et μ est le paramètre de bifurcation. Pour $\mu = 0$ le système (2.14) a un seul point fixe $x^* = 0$; pour $\mu < 0$ il y a deux points fixes $\pm \sqrt{\frac{-\mu}{A}}$ l'un est stable l'autre est instable; pour $\mu > 0$ il n'y a plus de points fixes. Cependant, $g_\mu(x) \simeq x$ au voisinage de 0, de sorte que la trajectoire reste longtemps dans cette région et qu'un régime régulier et lent est observé, qui suit grossièrement la loi d'évolution $x_{n+1} = x_n - \mu$ tant que $Ax_n \ll 1$ et $Ax_n^2 \ll \mu$ figure (2.9).

Scénario de Ruelle et Takens

L'énoncé exact de cette route est assez technique car il faut introduire une topologie sur l'espace des champs de vecteurs, afin de définir la proximité de deux systèmes dynamiques continus. Sa formulation approximative est écrite : un système dynamique continu connaissant trois bifurcations de Hopf successives possède généralement un attracteur étrange. Chaque bifurcation de Hopf correspond à l'apparition d'un mode instable. La déclaration ci-dessus peut être reformulée : *La perte de stabilité de 3 modes avec des fréquences dont les rapports de paires sont irrationnels mène au chaos*. Ce résultat a profondément modifié l'image que les scientifiques ont sur le chaos : la vision qui prévalait auparavant, due à Landau, nécessitait la perte de stabilité d'une infinité de modes pour que l'évolution devienne apparemment erratique et imprévisible. En

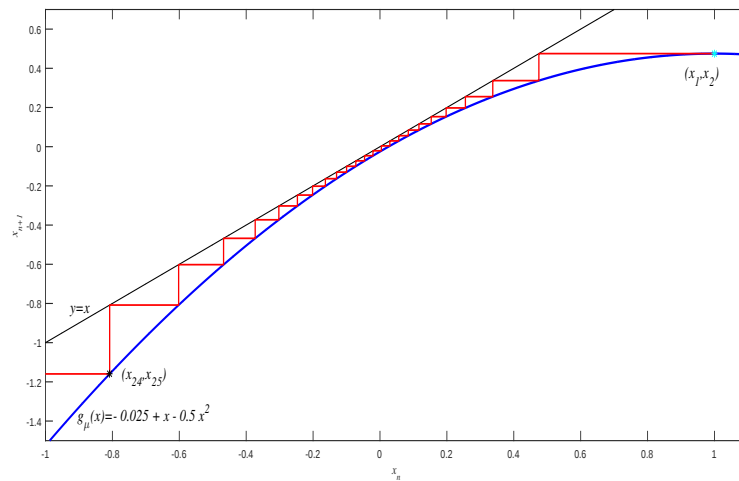


FIGURE 2.9 – Pour $\mu = 0.025$ et $A = 0.5$ les itérés successifs ont lieu entre le graphe de g_μ et la bissectrice. La trajectoire passe lentement près des fantômes des points fixes qui existaient pour $\mu < 0$

conséquence, on pensait que le chaos ne surviendrait que dans des systèmes à une infinité de degrés de liberté. Le scénario de Landau s'est révélé beaucoup trop restrictif : le couplage non linéaire de trois modes dont les rapports de fréquence par paire sont irrationnels suffit à générer un attracteur étrange [11].

CHAPITRE 3

LES BIFURCATIONS DE L'APPLICATION DE LOZI

En 1978, Lozi introduit dans une courte papier [12] une application à deux dimensions dont les équations et les attracteurs ressemblent à ceux de l'application de Hénon [13]. Simplement un terme quadratique dans l'application de Hénon est remplacé par une terme linéaire par morceaux . Ce fait permet de prouver rigoureusement le caractère chaotique de certains attracteurs [14] et une analyse détaillée de son bassin d'attraction [15].

L'application de Lozi est donnée par l'équation suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - a|x_n| = f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = bx_n = g(x_n, y_n). \end{cases} \quad (3.1)$$

Où a, b sont des paramètres réels non nuls . A l'intérieur de la région ou les orbites restent bornée, l'application de Lozi peut présenter un comportement régulier chaotique. Le but de ce travail est de montrer que l'application de Lozi présente également une particularité type de bifurcation récemment trouvé dans une classe d'application linéaire unidimensionnel discontinues par morceaux [16] . Un phénomène similaire dans les

applications continues a été également décrit dans [17]. La principale caractéristique de cette bifurcation est la présence d'un continuum de cycles stables. Ainsi, au point de bifurcation même, l'attracteur dans l'espace des phase contient un ensemble infini d'orbites réguliers. En fonction des paramètres, le passage peut s'effectuer aussi bien de régimes réguliers à des régimes réguliers qu'à des régimes chaotiques.

3.0.6 Dynamique de l'application de Lozi

Il est d'usage de commencer l'étude d'un système dynamique par un catalogue de ses points fixes, attracteurs périodiques, etc, en accordant une attention particulière à leur stabilité et à leur évolution avec les paramètres du système. Nous commençons par collecter certaines de ces caractéristique pour l'application de Lozi dont aurons besoin dans les sections suivantes :

Pour des considérations de stabilité, nous avons besoin de la matrice jacobienne de $L(x, y)$ qui est :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -\text{sgn}(x) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Remarquons que $J(x, y)$ ne dépend du point de l'orbite que par $\text{sgn}(x)$. En conséquence, nous notons sa valeur par $J_+ = J(x > 0, y)$ et $J_- = J(x < 0, y)$. De plus, puisque $\det J_+ = -b$, nous ne considérons que les application avec $|b| \leq 1$, afin d'avoir des systèmes non-expansifs. En particulier, les applications avec $b = \pm 1$ préservant la surface. C'est très simple pour de montrer que pour $|b| \leq 1$ l'application de Lozi n'a pas des points fixes si $a \leq b - 1$. Il a P_1 comme point fixe unique si $b - 1 < a \leq 1 - b$ un point fixe P_2 , si $a > 1 - b$, avec

$$P_1(a, b) = \left(\frac{1}{1 + a - b}, \frac{1}{1 + a - b} \right), P_2(a, b) = \left(\frac{1}{1 - a - b}, \frac{1}{1 - a - b} \right)$$

De plus $J(P_1) = J_+$, $J(P_2) = J_-$. Seul P_1 est stable et cela se produit pour les systèmes avec des valeurs de paramètre (b, a) à l'intérieure du triangle avec des sommets $(1, 0), (-1, 2), (-1, -2)$ dans l'espace des paramètres.

Concernent les cycles de période $T = 2$, il est facile de voir qu'ils existent, si l'on garde $|b| < 1$ pour $a > 1 - b$. Leurs éléments sont (z_1, bz_2) et (z_2, bz_1) avec

$$z_1 = \frac{1 - b + a}{(1 - b)^2 + a^2}, z_2 = \frac{1 - b - a}{(1 - b)^2 + a^2}.$$

ils sont stables pour les valeurs des paramètres (b, a) à l'intérieur du triangle à sommets $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,2)$ dans l'espace des paramètres

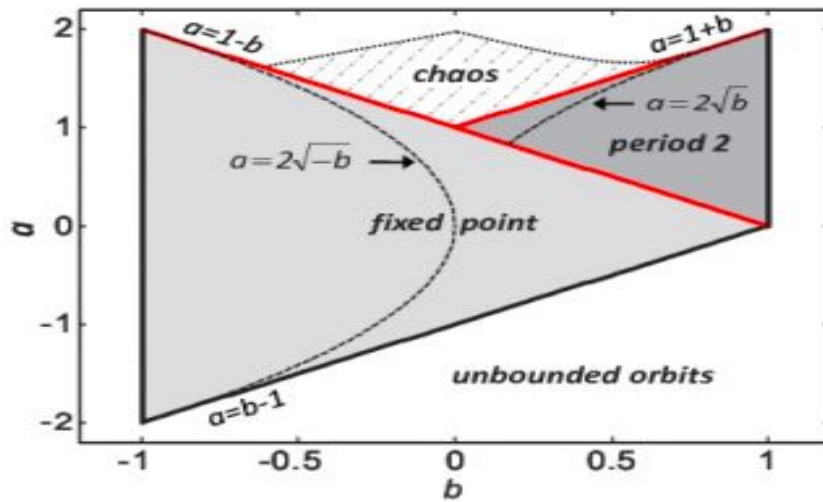


FIGURE 3.1 – Comportement de l'application de Lozi dans l'espace des paramètres. Les zones blanches correspondent à des trajectoires non bornées. Les bifurcations bissectrices ont lieu aux droites rouges, $a = 1 \pm b$ ce diagramme n'épuise pas tous les attracteurs possibles que l'application de Lozi peut présenter.

3.0.7 Bifurcations bissectrices

Considérons le diagramme de bifurcations illustré à la figure (3.2) pour $b = 0.1$ et $0.8 < a < 1.8$. Il présente un point de bifurcation $a = 0.9$ d'un point fixe vers une orbite 2-périodique. Une deuxième point de bifurcation c'est $a = 1.1$ d'une orbite 2-périodique vers le chaos. De même, sur la figure (3.3) pour $a = 1.5$ et $-0.75 < b < 0.75$ deux bifurcation se produisent à ± 0.5 . Le système est chaotique pour $a = 1.1$ sur la figure (3.2) et $-0.5 < b < 0.5$ sur la figure (3.3). Notons que les lignes verticales de ces diagramme de bifurcation comme nous le verrons, ils représentent des ensembles infinis d'orbites périodiques. C'est la caractéristique la plus saillante de la phénomène dont nous traitons ici. Nous l'appelons bifurcations bissectrices.

Commençons par expliquer l'approche que nous suivons pour localiser algébriquement quelles valeurs de a et b dans l'espace des paramètres donnent lieu à un ensemble infini de cycles simultanés. Nous résolvons d'abord les cas des périodes deux et quatre suggérer par les figures (3.3) et nous illustrons suffisamment la procédure. Après cela, nous déterminons les éléments des cycles, cette procédure nous permet de comprendre l'origine et la structure des attracteurs donnés par les lignes verticales qui apparaissent dans les diagrammes de bifurcation. Les périodes trois sont ensuite analysées de la même manière et montrent qu'elles sont à l'origine d'un modèle différent. Ordre supérieur les attracteurs périodiques peuvent être étudiés dans le même sens, bien sûr au prix d'une algèbre plus compliquée.

La stabilité des cycles peut également être résolue. Étant donné une période- N orbites de $L(x, y)$, ses éléments sont des points fixes de $L^{[N]}(x, y)$ et leur stabilité est déterminée simultanément par le plus grand des modules des valeurs propres de la matrice jacobienne de $L^{[N]}(x, y)$, évalué à n'importe lequel des points périodiques.

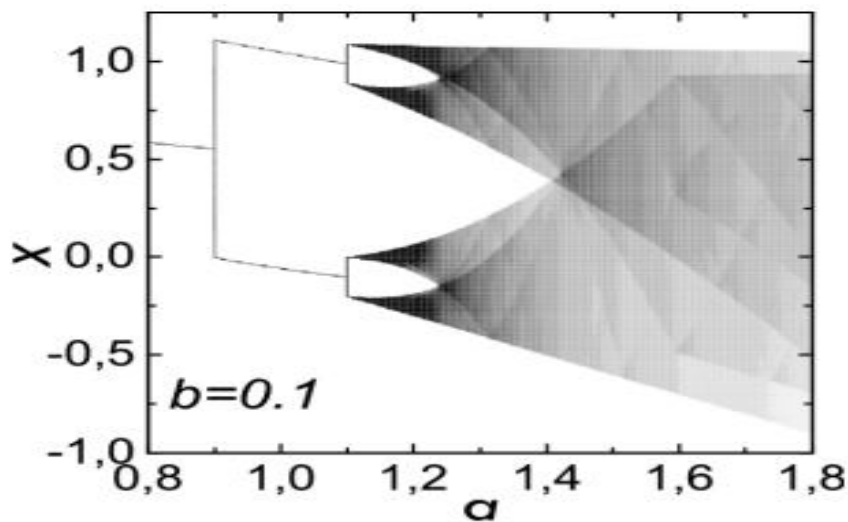


FIGURE 3.2 – Diagramme de bifurcation pour $b = 0.1$. Notion que la bissectrice bifurcations avoir lieu à $a = 1 \pm b$

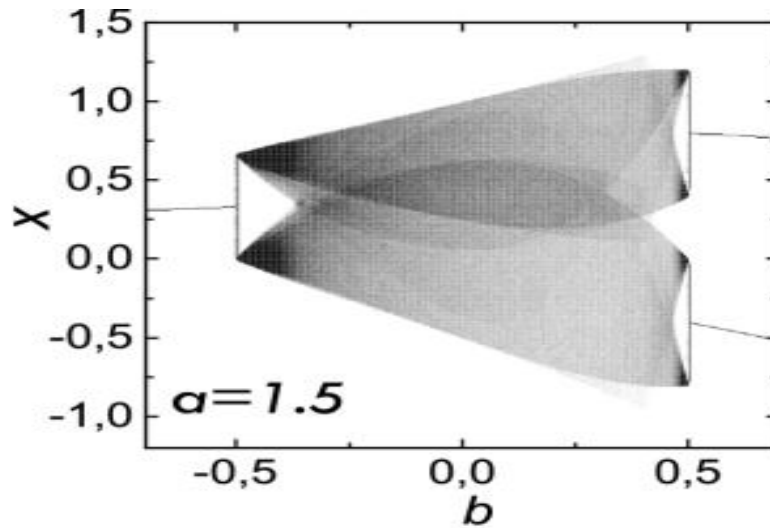


FIGURE 3.3 – Diagramme de bifurcation pour $a = 1.5$. Notion que la bissectrice bifurcations avoir lieu à $b = \pm(a - 1)$

Continuité des attracteurs de périodique 2

Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ un cycle de période-2 de l'application de Lozi. Ensuite, nous utilisons l'équation aux différence du second ordre équivalente

$$x_{n+1} = 1 - a|x_n| + bx_{n-1}$$

La condition de périodicité de ce système donne

$$x_2 = 1 - a|x_1| + bx_2$$

$$x_1 = 1 - a|x_2| + bx_1$$

Les 2-cycles correspondants de l'application de Lozi seront $((x_1, bx_2), (x_2, bx_1))$.

Lorsque les équations du système ci dessus sont équivalentes alors il existe une infinité de solutions et donc des orbites 2-périodique. D'un point de vue algébrique cela signifie que le coefficient et les matrices augmentées doivent tous deux avoir un rang égal 1 :

$$\begin{vmatrix} \text{sign}(x) & 1 - b \\ 1 - b & \text{sign}(x) \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \text{asign}(x_1) & 1-b & 1 \\ 1-b & \text{asing}(x_2) & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (3.3)$$

qui donnent la contrainte : $a + b = 1$, avec $a > 0$. Alors il existe deux familles à un paramètre de 2-cycles dans $\mathbb{R}^2$. (S_1, S_2) et (U_1, U_2) avec

$$S_1 = (x, b \frac{1-ax}{1-b}), S_2 = (\frac{1-ax}{1-b}, bx), (0 < x < \frac{1}{a}).$$

$$U_1 = (x, b \frac{1+ax}{1-b}), U_2 = (\frac{1+ax}{1-b}, bx), (\frac{-1}{a} < x < 0).$$

Pour une trajectoire de période-2, la matrice jacobienne de l'application $L^{[2]}(x, y)$ est le produit matriciel de $J(x, y)$ évalué aux points de l'orbite. Pour la famille S nous avons $J(S_1)J(S_2) = J_+^2$, dont les valeurs propres sont $(a^2 + 2b \pm |a| \sqrt{a^2 + 4b}/2)$. Dans le cas critique, $a + b = 1$, elles se réduisent aux valeurs 1 et $(1-a)^2$, et donc ces orbites sont stables dès que $0 < a < 2$.

Pour la famille U on a $J(U_1)J(U_2) = J_-^2$, dont les valeurs propres dans le cas critique sont 1 et $(1+a)^2 > 1$, avec $a > 0$. Ces orbites sont donc instables.

Continuité d'attracteurs de période 4

La recherche d'ensembles d'orbites de période-4 donne les résultats suivants. Premièrement, les contraintes sur les paramètres sont $a = 1 + b$, et $0 < b < 1, 1 < a < 2$, pour que le rang des matrices correspondant soit égal à trois, permettant ainsi l'existence d'une famille à un paramètre des solutions. Deuxièmement, si (x_i, y_i) désigne les éléments du cycle, avec $i = 1, \dots, 4$ alors

$$x_1 = \mu + 2b\beta, x_2 = \mu - (b-1)\beta, x_3 = -\mu, x_4 = -\mu + (b+1)\beta.$$

$$y_1 = bx_4, y_2 = bx_1, y_3 = bx_2, y_4 = bx_3.$$

Où nous avons utilisé le paramètre réel $0 < \mu < 1$ et la définition $\beta = \frac{1}{(1+b^2)}$. Les orbites de période-4 alternent le signe de ses composantes. Ceci peut être facilement déduit de l'expression des cycles. Par conséquent, la matrice jacobienne correspondante

se lit simplement $(J_+J_-)^2$, dont les valeurs propres sont 1 et $(1 - a)^4$ dans le cas critique. Par conséquent, les orbites de période-4 sont stables.

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous avons étudié les bifurcations de l'application de Lozi, qui présente également une particularité des types des bifurcations trouvés dans une classe des applications linéaires discontinues par morceaux unidimensionnelles. La principale caractéristique de cette bifurcation est la présence des orbites p - périodiques continues. . Il y a une étude sur les concepts de système dynamiques discrets tels que les points fixes et leurs stabilités, les orbites périodiques et leurs stabilités, les bifurcations et le chaos.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Martelli, *Discrete dynamical systems*. Springer, 2007.
- [2] T. Yien Li, J. A. Yorke, Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(1975) 985-992.
- [3] W. Tucker, L. Kocarev, Z. Galias and S. Lian , *Intelligent computing Based on chaos*. Spring-Verlog Berlin Heidelberg ,2009.
- [4] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*. In Admission-wiskey, Redwood city, CA 37, 2003.
- [5] R. Abraham, L. Gardini, C. Mira, *Chaos in discrete Dynamical systemes*. Springer, 1997.
- [6] D. Rulle, F. Takens, On the Nature of Tubulence. *Commun, Math, Phy*, 20(1971) 167.
- [7] M. Barnsley, *Fractals everywhere*. Academic Press, Inc, Boston, MA, 1988.
- [8] O. Galor, *Discrete dynamical systems and chaos*. Longman Scientific, 1992.
- [9] P. A. P. Moran, Additive functions of intervals and Hausdorff measure. *Proc. Cambridge philos. Soc*, 42 (1946) 15-23.
- [10] P. Frederickson, J. L. Kaplan, E.D. Yorke and J.A. Yorke, The liapunov Dimension of Strange Attractors. *J.Diff. Eq*, 49 (1985) 185-207.
- [11] D. Stauffer, H. E. Stanley and A. Lesne, *From Newton to Mandelbrot : A primer in theoretical physics*. Springer, 2017.

- [12] R. Lozi, Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon. *Journal de physique*. 39(1978) C5-9.
- [13] M. Hénon., A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Comm. Math. Phys.* 5069(1976) 77.
- [14] M. Misiurewicz, Strange attactors for the Lozi mapping. *N. M. Acad. Sci.* 357(1980) 348- 358.
- [15] D. Baptistsa, R. Severino, The Basin of attraction of Lozi mappings. *J. Bifurcation Chaos*, 19(2009) 1043-1049.
- [16] V. Botella-Soler, J. A. Oteo and J. Ros, *Dynamics of a map with a power-law tail*. *J Phy A : Math Theor* , 42(2009) 385101-23.
- [17] L. Gardini, I. Sushko and A. L. Naimzada, *Growing through chaotic intervals*. *J Econ Theory* , 143 541-557, 2008.
- [18] I. Sushko, L. Gardini, Degenerate bifurcations and border collisions in piecewise smooth 1D and 2D maps. *J. Bifurcation Chaos*, 20, 7(2020), 2045-2070.
- [19] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. York *An introduction to dynamical systems* . Springer, NY, 1996.
- [20] Z. Elhadj, J. C. Sprott, A new simple 2-D piecewise linear map . *J. Syst. Sci. Complex. bf*, 23(2010) 379-389, .
- [21] H. E. Nusse, J. A. York, Border collisions bifurcations including “period two to period three” for piecewise smooth systems . *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 57(1992) 39-57, .
- [22] S. Banerjee, C. Grebogi, border- collisions bifurcations in two-dimensional smooth maps. *Phy. Rev. E* 59(1999) 4052-61.
- [23] M. A. Aziz-Alaoui, C. Robert, and C. Grebogi, Dynamics of a Hénon-Lozi-type map. *Chaos, Solitons and fractals*, 12(2001) 2323-2341,.
- [24] M. Di Bernardo, C. J, Chappney, A. R. Champneys, and K. Kowalczyk *Piecewise-smooth dynamical systems : theory and applications* Springer-Verlag , 2008.

- [25] R. L. Devaney, A piecewise linear model for the zones of instability of an area-preserving map. *Physica D*, 10(1984) 387-383, .
- [26] D. Aharonov, R. L. Devaney and U. Elias, The dynamics of a piecewise linear map and its smooth approximation. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 7351(1997), 372-387 . .
- [27] E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* 20 (1963), 130-141.
- [28] O. E. Rössler : An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A* 57(1976), 397-398.
- [29] M. A. Hénon, two dimensional mapping with a strange attractor, *Commun Math Phys*, 50,1 (1976), 69-77.
- [30] R. Lozi, Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon, *Journal de Physique*, 39 ,C5(1978), 9-10.
- [31] L. Illing, Digital communication using chaos and non linear dynamics. *Nonlinear Anal* ,71,12(2009) 2958-2964.
- [32] G. I. Bischi, L. Gardini, M. Kopel, Analysis of global bifurcations in a market share attraction model. *J. Econ. Dyn. Control*, 24,(5) (2000) 855-879.
- [33] Q. Lin, K. W.Wong. J. Chen, An enhanced variable-length arithmetic coding and encryption scheme using chaotic maps. *J. Syst. Softw*,86,5 (2013) 1384-1389.
- [34] D. Lopez-Mancilla, C. Cruz-Hernandez, Output Synchronization of Chaotic Systems : Model-Matching Approach with Application to Secure Communication. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*,5,2(2005) 141-156.
- [35] A. Khan, M. Ahmad Bhat, Hybrid Projective Synchronization of Fractional Order Chaotic Systems with Fractional Order in the Interval (1,2). *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*,16,(4) (2016) 350-365.
- [36] J. Liu , S. J. Li, New hybrid conjugate gradient method for unconstrained optimization. *Appl. Math. Comput*, 245 (2014) 36-43.
- [37] S. J. Chen,V. S Vassiliadis, Solution of general nonlinear optimization problems using the penalty/modified barrier method with the use of exact Hessians. *Comput. Chem. Eng*, 27 (4) (2003) 501-525.