



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid Boussouf Mila

Institut de Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentale

Solution analytique de quelques types des équations intégrales

**Préparé par : Khouloud Arama
Bouchera Bougherza**

Soutenue devant le jury

Hafida Laib	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Hayet Bouzeraieb	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Chafika Sakhane	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire : 2022/2023

TABLE DES MATIÈRES

Notations	1
Remerciements	2
Introduction	3
1 Équations intégrales linéaires	5
1.1 Définition générale d'équation intégrale	5
1.2 Unicité d'équations intégrales de Fredholm	8
1.2.1 Méthode de régularisation pour résoudre les EILF de premier espèce	10
1.2.2 Méthode décomposition Adomian pour résoudre les EILF de second espèce	11
1.2.3 Méthode des approximation successives pour résoudre les EILF de second espèce	14
1.3 Équations intégrales de Volterra	16
1.3.1 Méthode de solution en série pour résoudre les EILV de premier espèce	17
1.3.2 Méthode de décomposition modifiée pour résoudre les EILV de second espèce	19

1.3.3	Méthode de transformation de Laplace pour résoudre les EILV de second espèce	20
2	Équations intégrro-différentielles linéaires	24
2.1	Définition générale	24
2.2	Équations intégrro-différentielles de Fredholm	25
2.2.1	Méthode de calcul direct pour résoudre les EIDF de second espèce	26
2.2.2	Méthode de résolution en série pour résoudre les EIDF de second espèce	28
2.3	Équations intégrro-différentielles de Volterra	30
2.3.1	Méthode de décomposition Adomian pour résoudre les EIDV de second espèce	31
2.3.2	Méthode d'itération variationnelle pour résoudre les EIDV de second espèce	33
2.3.3	Méthode de la transformée de Laplace pour résoudre les EIDV de second espèce	35
2.3.4	Méthode de solution en série pour résoudre les EIDV de second espèce	38
2.3.5	Méthode de la transformation de Laplace pour résoudre les EIDV de premier espèce	41
2.3.6	Méthode d'itération variationnelle pour résoudre les EIDV de premier espèce	42
	Solution numérique des équations d'intégrro-différentielle à retard	45
2.4	Équation intégrro-différentielle à retard	45
2.5	Méthode de collocation pour résoudre les équations intégrro-différentielle à retard	46
2.6	Description de la méthode de collocation des EID	47
2.7	Exemple numérique	50
	Conclusion	52

NOTATIONS

EILF : Équation intégrale linéaire de Fredholm.

EILV : Équation intégrale linéaire de Volterra.

EID : Équation intégo-différentielle.

EIDF : Équation intégo-différentielle de Fredholm.

EIDV : Équation intégo-différentielle de Volterra.

EDO : Équation différentielle ordinaire

REMERCIEMENTS

Je remercie **ALLAH** , qui nous a donné la force , la santé et la volonté de commencer et de terminer ce mémoire.

Ce travail ne serait pas si riche sans le soutien de nos chers professeurs. Je les remercie pour leur patience et leur générosité tout au long du processus de préparation, en particulier notre enseignante de **Dr Hayet BOUZERAIEB** qui nous a guidé et orienté tout au long de la recherche et de l'écriture, ainsi que le professeur **Dr Mohamed KACIES** qui nous a apporté son aide précieuse par ses conseils. un grand merci également à la distinguée enseignant **Dr Amina DAOUI** qui a amélioré notre état d'esprit et nous a facilité toute difficulté.

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à l'enseignante **Dr Hafida LAIB** qui nous a honoré en acceptant la présidence du comité de soutenance de cette thèse. Je souhaite également remercier l'enseignante **Dr Chafika SAKHANE** pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Enfin, je voudrais remercier toutes nos familles qui nous ont soutenus tout au long de notre parcours scolaire par leur veille et leurs prières, ainsi que tous ceux qui nous ont soutenus de près ou de loin, que ce soit dans la famille, les amis, en particulier les étudiants en mathématiques en général et les collègues spécialisés en mathématiques fondamentales en particulier.

INTRODUCTION

Dans ce travail on étudie des équations intégrales qui sont une branche importante en mathématiques. Parmi ces équations, nous avons dans ce travail les équations intégrales linéaires de Volterra et Fredholm. Les équations intégrales de Volterra ont été présentées publiquement par le mathématicien Vito Volterra, et le scientifique Trjitzinsky les a expliquées dans ses travaux en 1908 sous la supervision du scientifique français Charles Émile Picard en 1911. Quant aux équations intégrales de Fredholm, elles ont été développées par le mathématicien Erik Ivar Fredholm. Ces équations jouent un rôle principale dans divers domaines scientifiques tels que la biologie, la chimie quantique et la physique, en aidant à analyser et comprendre les variations des quantités avec le temps.

L'objectif de cette étude est d'analyser et de comprendre les équations intégrales linéaires, ainsi que de présenter plusieurs méthodes pour résoudre ces équations. Ce travail est divisé en deux chapitres principaux :

Dans Le premier chapitre on donne les définitions des équations intégrales linéaires de Volterra et Fredholm, ainsi que certaines méthodes analytiques pour résoudre ces équations et quelques exemples.

Le dèrnier chapitre est encore plus technique. Ici on définit ce que sont les équations intégro-différentielles linéaires de Volterra et Fredholm, ainsi que certaines méthodes

analytiques pour résoudre ces équations et quelques exemples. Nous abordons également, dans la dernière partie de ce chapitre, la résolution numérique des équations intégo-différentielles à retard à l'aide de la méthode de Taylor d'ordre élevé.

CHAPITRE 1

ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES

Dans ce chapitre, nous discutons de l'étude des concepts d'équation différentielles intégrales et de leurs types, en donnant quelques méthodes analytiques pour résoudre les équations de Volterra et Fredholm, tout en présentant quelque exemples.

1.1 Définition générale d'équation intégrale

Une équation linéaire intégrale est l'équation dans laquelle la fonction inconnue $u(x)$ apparaît. Le type standard d'équation intégrale en $u(x)$ est de la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x, t) u(t) dt. \quad (1.1)$$

Où $g(x)$ et $h(x)$ sont les bornes d'intégration, λ est un paramètre constants, et $k(x, t)$ est une fonction connue de deux variables x et t , appelée noyau ou la noyau de l'équation intégrale. La fonction inconnue $u(x)$ qui sera déterminé apparaît à l'intérieur du signe intégrale. Dans bien d'autres cas, la fonction inconnue $u(x)$ à l'intérieur et à l'extérieur

du signe intégrale. Les fonctions $f(x)$ et $k(x, t)$ sont données à l'avance. Il est à noter que les limites d'intégration $g(x)$ et $h(x)$ peuvent être toutes deux variables constantes ou mixtes.

Remarque 1.1.1 Les équations intégrales apparaissent sous des nombreuses formes. Deux manières distinctes, qui dépendent des limites d'intégration, sont utilisées pour caractériser les équations intégrales à savoir :

i) Si les limites d'intégration sont fixes, l'équation intégrale est appelée une équation intégrale de Fredholm donnée sous la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt.$$

Où a et b sont constantes.

ii) Si au moins une limite est une variable, l'équation intégrale est appelée une équation intégrale de Volterra donnée sous la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt.$$

De plus, deux autres espèces distinctes, qui dépendent de l'apparence des fonctions inconnues $u(x)$, sont définies comme suit :

1) Si la fonction inconnue $u(x)$ n'apparaît que sous le signe intégral dans l'équation de Fredholm ou de Volterra, l'équation intégrale est dite de première espèce, respectivement équation intégrale de Fredholm ou Volterra.

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt,$$

où

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt.$$

2) Si la fonction inconnue $u(x)$ n'apparaît à la fois à l'intérieur et l'extérieur de signe dans

l'équation de Fredholm ou de Volterra, l'équation intégrale est appelée une équation intégrale de Fredholm ou de Volterra de deuxième espèce respectivement. Dans toutes les équations intégrales de Fredholm ou de Volterra présentées ci-dessus, les équations résultantes sont :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt,$$

où

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt.$$

Remarque 1.1.2

- i) Si la fonction $f(x) \neq 0$ on dit que l'équation intégrale linéaire non homogène.*
- ii) Si la fonction $f(x) = 0$ on dit que l'équation intégrale linéaire homogène.*

Exemples 1.1.1

1/ L'équation intégrale linéaire non homogène de Fredholm de première espèce :

$$0 = x^2 + 1 + \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt,$$

et l'équation intégrale linéaire non homogène de Fredholm de la deuxième espèce :

$$u(t) = x^2 + \sin(x) + 1 + \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt.$$

2/ L'équation intégrale linéaire homogène de Fredholm de première espèce :

$$0 = 4 \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt,$$

et l'équation intégrale linéaire homogène de Fredholm de la deuxième espèce :

$$u(x) = 4 \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt.$$

3/ L'équation intégrale linéaire homogène de Volterra de première espèce :

$$0 = - \int_0^x e^{(x-t)} u(t) dt,$$

et l'équation intégrale linéaire homogène de Volterra de la deuxième espèce :

$$u(x) = \int_0^x u(t) dt.$$

4/ L'équation intégrale linéaire non homogène de Volterra de première espèce :

$$0 = x - \int_0^x e^{(x-t)} u(t) dt,$$

et l'équation intégrale linéaire non homogène de Volterra de la deuxième espèce :

$$u(x) = 1 + x - \int_0^x u(t) dt.$$

1.2 Unicité d'équations intégrales de Fredholm

Définition 1.2.1 Pour les équations intégrales de Fredholm, les limites d'intégration sont fixes. De plus, la fonction inconnue $u(x)$ peut n'apparaître qu'à l'intérieur de l'équation intégrale, dans la forme suivant :

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x, t) u(t) dt. \quad (1.2)$$

C'est ce qu'on appelle l'équation intégrale de Fredholm de première espèce. Cependant, pour l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce, la fonction inconnue $u(x)$ apparaît à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral. la deuxième espèce est représentée par la forme suivant :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) u(t) dt. \quad (1.3)$$

Exemples 1.2.1

1/ L'équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce est définie comme suit :

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4} = \int_0^1 (x-t)u(t)dt.$$

2/ L'équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce est définie comme suit :

$$u(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} - \int_0^1 (x-t)u(t)dt.$$

Théorème 1.2.1 (Unicité de la solution) Si le noyau $k(x, t)$ dans l'intégrale de Fredholm l'équation on (1.3) est une fonction continue à valeurs réelles, bornée dans le carré $a \leq x \leq b$ et $a \leq t \leq b$ et si $f(x)$ est une fonction continue à valeurs réelles, alors une condition nécessaire à l'existence d'une solution unique pour Fredholm l'équation intégrale (1.3) est donnée par

$$|\lambda|M(b-a) < 1, \quad (1.4)$$

où

$$|k(x, t)| \leq M \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Au contraire, si la condition nécessaire (1.4) n'est pas vérifiée, alors une solution continue peut exister pour l'équation intégrale de Fredholm.

[Unicité de la solution]

Définition de EILF de première espèce

Définition 1.2.2 En étudiant les équations intégrale de Fredholm de la première espèce donne par :

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt, x \in D, \quad (1.6)$$

où D est un ensemble fermé et borné en nombres réels, et la fonction $f(x)$ et le noyau $k(x, t)$ reçoit des fonctions à valeur x réelles, et λ est un paramètre qui est souvent omis.

1.2.1 Méthode de régularisation pour résoudre les EILF de premier espèce

La méthode de régularisation consiste à remplacer le mauvais problème posé par un problème bien posé.

À l'approximation de l'équation intégrale de Fredholm

$$\mu u_\mu(x) = f(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) u_\mu(t) dt, x \in D, \quad (1.7)$$

où μ est un petit paramètre positif. Qui peut être réécrite :

$$u_\mu(x) = \frac{1}{\mu} f(x) - \frac{1}{\mu} \lambda \int_a^b k(x, t) u_\mu(t) dt, x \in D, \quad (1.8)$$

la solution u_μ converge vers la solution $u(x)$ lorsque $\mu \rightarrow 0$.

Exemple 1.2.1 Résoudre l'équation intégrale de Fredholm de première espèce par la méthode de régularisation suivant :

$$\frac{1}{4} e^x = \int_0^{\frac{1}{4}} e^{x-t} u_\mu(t) dt. \quad (1.9)$$

En utilisant la méthode de régularisation, l'équation (1.9) peut être transformée en

$$u_\mu(x) = \frac{1}{4\mu} e^x - \frac{1}{\mu} \int_0^{\frac{1}{4}} e^{x-t} u_\mu(t) dt. \quad (1.10)$$

L'équation (1.10) peut être écrite comme :

$$u_\mu(x) = \frac{1}{4\mu} e^x - \frac{\alpha}{\mu} e^x, \quad (1.11)$$

où

$$\alpha = \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-t} u_\mu(t) dt. \quad (1.12)$$

Pour déterminer α , nous substituons (1.11) dans (1.12), intégrons le résultat intégrale et résoudre pour trouver que :

$$\alpha = \frac{1}{1 + 4\mu}, \quad (1.13)$$

cela donne à son tour

$$u_\mu(x) = \frac{e^x}{1 + 4\mu}, \quad (1.14)$$

la solution exacte est :

$$u(x) = \lim_{\mu \rightarrow 0} u_\mu(x) = e^x. \quad (1.15)$$

Définition de EILF de seconde espèce

Définition 1.2.3 On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de second espèce, l'équation de la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt. \quad (1.16)$$

1.2.2 Méthode décomposition Adomian pour résoudre les EILF de second espèce

La méthode de décomposition Adomian consiste à décomposer la fonction inconnue $u(x)$ de toute équation en une somme d'un nombre infini de composants définis par série de décomposition

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad (1.17)$$

ou équivalent

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x). \quad (1.18)$$

Où les composantes $u_n(x), n \geq 0$, seront déterminé de manière récurrente. La méthode décomposition Adomian se préoccupe de trouver les composants $u_0, u_1, u_2, \dots$ individuellement. Comme nous l'avons vu précédemment, la détermination de ces composants peuvent être obtenus de manière simple grâce à une relation de récurrence

qui implique généralement des intégrales simples qui peuvent être facilement évaluées. Pour établir la relation de récurrence, on substitue (1.16) dans la relation de Fredholm équation intégrale pour (1.17) obtenir :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt, \quad (1.19)$$

ou équivalent

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) (u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \dots) dt. \quad (1.20)$$

La composante zéro $u_0(x)$ est identifiée par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe intégrale. Cela signifie que les composantes $u_j(x)$, $j \geq 0$ de la fonction inconnue $u(x)$ sont complètement déterminés en fixant la récurrence relation :

$$u_0(x) = f(x), \quad (1.21)$$

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b k(x, t) u_n(t) dt, n \geq 0,$$

ou équivalent

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x), \\ u_1(x) &= \lambda \int_a^b k(x, t) u_0(t) dt, \\ u_2(x) &= \lambda \int_a^b k(x, t) u_1(t) dt, \\ u_3(x) &= \lambda \int_a^b k(x, t) u_2(t) dt, \end{aligned}$$

et ainsi de suite pour les autres composants. Au vu de (1.22) les composantes $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots$ sont complétement déterminée. Par conséquent, la solution $u(x)$ de l'intégrale de Fredholm l'équation (1.16) est facilement obtenue sous forme de série en utilisant la série comme somme dans (1.17).

Exemple 1.2.2 Résoudre l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$u(x) = e^x - x + x \int_0^1 tu(t)dt. \quad (1.22)$$

La méthode de décomposition Adomian suppose que la solution $u(x)$ a une forme série donnée en. (1.17) En substituant la série de décomposition (1.17) en les deux côtés de (1.22) donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = e^x - x + x \int_0^1 t \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt, \quad (1.23)$$

ou équivalent

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = e^x - x + x \int_0^1 t (u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \dots) dt, \quad (1.24)$$

nous identifions la composante zéro par tous les termes qui ne sont pas inclus dans le signe intégrale. On obtient donc la relation de récurrence suivante :

$$u_0(x) = e^x - x, u_{k+1}(x) = x \int_0^1 tu_k(t)dt, k \geq 0. \quad (1.25)$$

En conséquence, on obtient :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= e^x - x, \\ u_1(x) &= x \int_0^1 tu_0(t)dt = x \int_0^1 t(e^t - t)dt = \frac{2}{3}x, \\ u_2(x) &= x \int_0^1 tu_1(t)dt = x \int_0^1 \frac{2}{3}t^2dt = \frac{9}{2}x, \\ u_3(x) &= x \int_0^1 tu_2(t)dt = x \int_0^1 \frac{2}{9}t^2dt = \frac{2}{27}x, \\ u_4(x) &= x \int_0^1 tu_3(t)dt = x \int_0^1 \frac{2}{27}t^2dt = \frac{2}{81}x, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Et ainsi de suite. L'utilisation de (1.17) donne la solution en série :

$$u(x) = e^x - x + \frac{2}{3}x(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \dots). \quad (1.26)$$

Remarquez que la série géométrique infinie du côté droit a $a_1 = 1$, et le rapport $r = \frac{1}{3}$. La somme de la série infinie est donnée par :

$$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}. \quad (1.27)$$

La solution en série (1.26) converge vers la solution sous forme fermée :

$$u(x) = e^x. \quad (1.28)$$

1.2.3 Méthode des approximation successives pour résoudre les EILF de second espèce

La méthode fournit un schéma qui peut être utilisé pour résoudre des problèmes de valeur initiale ou des équations intégrales. Cette méthode résout n'importe quel problème en trouvant des approximations successives de la solution par en commençant par une estimation initiale comme $u_0(x)$, appelée approximation zéro. Comme on le verra, l'approximation zéro est toute fonction sélective valeurs réelles qui sera utilisée dans une relation de récurrence pour déterminer l'autre approximations. Les valeurs les plus couramment utilisées pour les approximations zéro 0, 1 ou X. Bien sûr d'autres valeurs réelles peuvent également être choisies.

Étant donnée l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt. \quad (1.29)$$

La méthode des approximations successives introduit. Relation récurrente

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \text{la fonction constant,} \\ u_{n+1}(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u_n(t)dt, n \geq 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

La solution est détermininée en utilisant la limite :

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x). \quad (1.31)$$

Il est intéressant de souligner que la méthode de décomposition Adomian permet l'utilisation d'une formule d'itération de forme :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \text{tous les termes non inclus dans le signe intgral}, \\ u_1(x) &= \lambda \int_a^b k(x, t) u_0(t) dt, \\ u_2(x) &= \lambda \int_a^b k(x, t) u_1(t) dt, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ u_{n+1}(x) &= \lambda \int_a^b k(x, t) u_n(t) dt. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Exemple 1.2.3 Résoudre l'équation intégrale de Fredholm en utilisant la méthode des approximations successives :

$$u(x) = x + e^x - \int_0^1 x t u(t) dt. \quad (1.33)$$

Pour l'approximation zéro $u_0(x)$, on peut choisir :

$$u_0(x) = 0. \quad (1.34)$$

La méthode des approximations successives admet l'utilisation de l'itération formule :

$$u_{n+1}(x) = x + e^x - \int_0^1 x t u_n(t) dt, n \geq 0, \quad (1.35)$$

en substituant (1.34) à (1.35)

$$\begin{aligned}
 u_1(x) &= x + e^x - \int_0^1 xtu_0(t)dt = e^x + x, \\
 u_2(x) &= x + e^x - \int_0^1 xtu_1(t)dt = e^x - \frac{1}{3}x, \\
 u_3(x) &= x + e^x - \int_0^1 xtu_2(t)dt = e^x + \frac{1}{9}x, \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 u_{n+1}(x) &= x + e^x - \int_0^1 xtu_n(t)dt = e^x + \frac{(-1)^n}{3^n}x.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution $u(x)$ de (1.33) est donnée par :

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = e^x. \quad (1.36)$$

1.3 Équations intégrales de Volterra

Définition de EILV du première espèce

La forme standard des équations intégrales de Volterra de première espèce est donnée par :

$$f(x) = \int_0^x k(x, t)u(t)dt, \quad (1.37)$$

où le noyau $k(x, t)$ et la fonction $f(x)$ reçoivent des fonctions à valeurs réelles, et $u(x)$ est la fonction déterminée. Rappelons que la fonction inconnue $u(x)$ n'apparaît qu'à l'intérieur du signe intégral pour les équations intégrales de Volterra de première espèce.

1.3.1 Méthode de solution en série pour résoudre les EILV de premier espèce

Nous considérons la solution $u(x)$ comme analytique, où il a des dérivées de tous les ordres, et il possède des séries de Taylor en $x = 0$ de la forme :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (1.38)$$

où les coefficients a_n seront déterminés de manière récurrente. Remplacement (1.38) dans (1.37) donne :

$$T(f(x)) = \int_0^X K(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt, \quad (1.39)$$

ou pour plus de simplicité, nous pouvons utiliser

$$T(f(x)) = \int_0^X K(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt, \quad (1.40)$$

où $T(f(x))$ est la série de Taylor pour $f(x)$.

Exemple 1.3.1 Résoudre l'équation intégrale de Volterra en utilisant la méthode de résolution en série :

$$\sin x - x \cos x = \int_0^x t u(t) dt. \quad (1.41)$$

En procédant comme précédemment, seuls quelques termes de la série de Taylor pour $\sin x - x \cos x$ et pour la solution $u(x)$ dans (1.41) sera utilisé. Intégration du côté droit on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{840}x^7 + \dots &= \int_0^X t (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt \\ &= \frac{1}{2}(a_0 x^2 + \frac{1}{3}a_1 x^3 + \frac{1}{4}a_2 x^4 + \frac{1}{5}a_3 x^5 + \frac{1}{6}a_4 x^6 + \dots). \end{aligned}$$

L'équation des coefficients de puissance similaires de x dans (1.42) donne :

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3!}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{5!} \dots$$

la solution sous forme de série est donnée par :

$$u(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \quad (1.42)$$

La solution exacte sont :

$$u(x) = \sin x. \quad (1.43)$$

Définition de EILV du second espèce

Définition 1.3.1 Dans les équations intégrales de Volterra, au moins l'une des limites d'intégrations est une variable. Pour les équations intégrales de Volterra de première espèce, la fonction inconnue $u(x)$ n'apparaît qu'à l'intérieur du signe intégral et la forme générale est :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u(t)dt. \quad (1.44)$$

Cependant, les équations intégrales de Volterra de deuxième espèce, la fonction inconnue $u(x)$ apparaît à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégrale.

La forme générale de ces équations est :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u(t)dt, \quad (1.45)$$

Exemple 1.3.2 Des équations intégrales de Volterra de première espèce sont :

$$xe^{-x} = \int_0^x e^{t-x}u(t)dt,$$

et

$$5x^2 + x^3 = \int_0^x (x-t)u(t)dt.$$

1.3.2 Méthode de décomposition modifiée pour résoudre les EILV de second espèce

Comme indiqué précédemment, la méthode de décomposition d'Adomian fournit la solution en une série infinie de composants. Les composantes $u_j, j \geq 0$, sont facilement calculé si le terme in homogène $f(x)$ dans l'équation intégrale Volterra :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u(t)dt, \quad (1.46)$$

Consiste en une polynôme. Cependant, si fonction $f(x)$ consiste en un composé combinaison de deux ou plusieurs polynôme, fonctions trigonométriques, hyperbolique fonctions, et autres l'évaluation des composants $u_j, j \geq 0$ nécessite travail fastidieux. Une modification fiable de la méthode l'Adomian de composition il a été développée par Wazwaz. La modification de méthode de composition facilitera le processus de calcul et accélérer la convergence de la solution en série. La décomposition modifiée méthode sera appliquée, le cas échéant, toutes les équations intégrales et les équations différentielles de tout ordre. Il est intéressant de noter que la méthode de décomposition que la modifiée dépend principalement du découpage de la fonction $f(x)$ en deux parties, elle ne peut pas être alors utilisée si la fonction $f(x)$ est composée d'un seul terme. La méthode de décomposition modifiée sera décrite et employée dans cette section. Pour donner une description claire de la technique, nous rappelons que la norme. La méthode de décomposition Adomian admet l'utilisation de la relation récurrence :

$$\begin{aligned} u_n(x) &= f(x), \\ u_{k+1}(x) &= \lambda \int_0^x k(x, t)u_k(t)dt, k \geq 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Exemple 1.3.3 Résoudre l'équation intégrale de Volterra en utilisant la méthode la décomposition modifiée :

$$u(x) = 2x + \sin x + x^2 - \cos x + 1 - \int_0^x u(t)dt. \quad (1.48)$$

La fonction $f(x)$ est composée de cinq terme. Par essai on divise $f(x)$ donnée par :

$$f(x) = 2x + \sin x + x^2 - \cos x + 1. \quad (1.49)$$

En deux parties, les deux premiers termes et les trois termes suivants pour trouver :

$$f_1(x) = 2x + \sin x,$$

$$f_2(x) = x^2 - \cos x + 1.$$

Nous utilisons ensuite la formule de récurrence modifiée obtenir :

$$u_0(x) = 2x + \sin x,$$

$$u_1(x) = x^2 - \cos x + 1,$$

$$u_{k+1}(x) = - \int_0^x k(x, t) u_k(t) dt = 0, k \geq 1.$$

Il est évident que chaque composante de $u_j, k \geq 1$.

$$u(x) = 2x + \sin x. \quad (1.50)$$

1.3.3 Méthode de transformation de Laplace pour résoudre les EILV de second espèce

La méthode de la transformation de Laplace est une technique puissance qui peut être utilisée pour résolution de problèmes de valeur initiale et d'équations intégrales. Nous supposons que le lecteur a utilisé la méthode de la transformation de Laplace, et la méthode de Laplace inverse transformation pour résoudre des équations ordinaires. Les détails et propriétés de la méthode de Laplace dans les équations ordinaires des textes.

Dans le théorème de convolution pour le Laplace transformée, il été dit que si le noyau

$k(x, t)$ de l'équation intégrale :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u(t)dt, \quad (1.51)$$

dépend de la différence $x - t$, alors on l'appelle un noyau de différence. Exemples du noyau de différence sont e^{x-t} , $\cos(x - t)$ et $x - t$. L'équation intégrale peut ainsi s'exprimer comme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x - t)u(t)dt, \quad (1.52)$$

Considérons deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ qui possèdent les conditions nécessaires pour l'existence de la transformée de Laplace pour chacun. Laissez de Laplace se transformer pour les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ soit donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1(x)\} &= F_1(s), \\ \mathcal{L}\{f_2(x)\} &= F_2(s). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Le produit de convolution de Laplace de ces deux fonctions est défini par :

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x - t)f_2(t)dt, \quad (1.54)$$

où

$$(f_2 * f_1)(x) = \int_0^x f_2(x - t)f_1(t)dt, \quad (1.55)$$

rappeler que

$$(f_1 * f_2)(x) = (f_2 * f_1)(x). \quad (1.56)$$

On peut facilement montrer que la transformation de Laplace du produit de convolution $(f_1 * f_2)(x)$ est donné par :

$$\mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(x)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^x f_1(x - t)f_2(t)dt\right\} = F_1(s)F_2(s). \quad (1.57)$$

nous examinerons les équations intégrales spécifiques de Volterra où le noyau est un noyau de différence. Rappelons que nous appliquerons la méthode de transformation

de Laplace l'inverse de transformation de Laplace. En prenant des transformation de Laplace des deux côtés de (1.52) on trouve :

$$U(s) = F(s) + \lambda \mathcal{K}(s)U(s), \quad (1.58)$$

où

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(x)\}, \mathcal{K}(s) = \mathcal{L}\{K(x)\}, F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}. \quad (1.59)$$

Résoudre (1.58) pour $U(s)$ donne :

$$U(s) = \frac{F(s)}{1 - \lambda \mathcal{K}}, \lambda \mathcal{K} \neq 1. \quad (1.60)$$

La solution $u(x)$ est obtenue en prenant la transformation de Laplace inverse des deux côtés de (1.60) où l'on trouve :

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{1 - \lambda \mathcal{K}}\right\}. \quad (1.61)$$

Les équations seront illustrée par l'étude des exemples suivants.

Exemple 1.3.4 Résoudre l'équation intégrale de Volterra en utilisant la méthode de transformation de Laplace :

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt. \quad (1.62)$$

Remarquez que le noyau $k(x - t) = 1$, $\lambda = 1$. En prenant la transformation de Laplace deux côtés (1.62) de sorte que :

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{1 * u(x)\}, \quad (1.63)$$

ou équivalent :

$$U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}U(s), \quad (1.64)$$

ou équivalent

$$U(s) = \frac{1}{s - 1}. \quad (1.65)$$

En prenant la transformation de Laplace inverse des deux côtés de (1.65), la valeur exacte

solution est donc donnée par :

$$u(x) = e^x. \tag{1.66}$$

CHAPITRE 2

ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Dans ce chapitre, nous étudions les concepts de taux intégral-différentielle linéaire et certaines de leur types, en abordant certaines méthodes analytique pour résoudre les équations intégral-différentielles de Volterra et Fredholm, et en donnons quelques exemple.

2.1 Définition générale

Une équation intégral-différentielle est une équation dans laquelle la fonction inconnue $u(x)$ apparaît sous un signe entier et contient une dérivée ordinaire $u^{(n)}(x)$ également.

Une équation intégrro-différentielle standard est de la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x, t)u(t)dt. \quad (2.1)$$

Où $g(x)$, $h(x)$, $f(x)$, λ et le noyau $k(x, t)$ sont tels que précédemment.

2.2 Équations intégrro-différentielles de Fredholm

Les équations intégrro-différentielles de Fredholm, qui apparaissent lorsque l'on convertit des équations différentielles en équation intégrale. Les équations intégrro-différentielles de Fredholm contiennent la fonction inconnue $u(x)$ et l'une de ses dérivées $u^{(n)}(x)$, $n \geq 1$, à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégrale. Les limites d'intégration dans ce cas sont fixes comme dans les équations intégrales de Fredholm. L'équation est étiquetée comme intégrro-différentielle et intégrale opérateurs dans la même équation il est important de noter que les conditions initiales doivent être données pour les équations intégrro-différentielles de Fredholm pour obtenir la solution particulière. L'équation intégrro-différentielle de Fredholm apparaît dans la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt. \quad (2.2)$$

Où $u^{(n)}$ indique la n ème dérivée de $u(x)$. Autres dérivées de moindre ordre peuvent apparaître avec $u^{(n)}$ sur le côté gauche.

Définition de l'EIDF de seconde espèce

Nous focaliserons notre étude sur les équations faisant intervenir des noyaux séparables où le noyau $k(x, t)$ peut être exprimé comme une somme finie de la forme :

$$k(x, t) = \sum_{k=1}^n g_k(x)h_k(t), \quad (2.3)$$

sans perte de généralité, nous ferons notre analyse sur un noyau à un terme $k(x, t)$ de la forme :

$$k(x, t) = g(x)h(t). \quad (2.4)$$

D'autres cas peuvent être examinés de la même manière. Le noyau non séparable en utilisant l'expansion de Taylor pour le noyau concerné. Cependant, seuls les noyaux séparables seront présentés dans ce texte.

2.2.1 Méthode de calcul direct pour résoudre les EIDF de second espèce

La forme standard de l'équation intégro-différentielle de Fredholm est donnée par :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t)u(t)dt, u^{(k)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq n-1, \quad (2.5)$$

où $u^{(n)}(x)$ indique la nième dérivée de $u(x)$ par rapport à x et b_k sont les conditions initiales. La substitution de (2.4) dans (2.5) donne :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x) \int_a^b h(x)u(t)dt, u^{(k)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq n-1. \quad (2.6)$$

Nous pouvons facilement observer que l'intégrale définie dans l'équation (2.6) intégro-différentielle implique un intégrande qui dépend complètement de la variable t . Cela signifie que l'intégrale définie du côté droit de (2.6) est équivalente à une constante. En d'autres termes, nous posons :

$$\alpha = \int_a^b h(x)u(t)dt. \quad (2.7)$$

En conséquence, l'équation (2.6) devient :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \alpha g(x). \quad (2.8)$$

En intégrant les deux côté de (2.8) fois de 0 à x , et en utilisant les conditions initiales prescrites, nous pouvons trouver une expression pour $u(x)$ qui implique la constante α en plus de la variable x . Cela signifie que nous pouvons écrire :

$$u(x) = v(x, \alpha). \quad (2.9)$$

En remplaçant (2.8) dans le côté droit de (2.9), en évaluant l'intégrale et en résolvant l'équation résultante, nous déterminons une valeur numérique pour la constante α cela conduit à la solution exacte $u(x)$ obtenue en substituant la valeur résultante de α dans (2.9). Il est important de rappeler que cette méthode conduit toujours à la solution exacte et non à des composants en série.

Exemple 2.2.1 Résoudre l'équation intégro-différentielle de Fredholm suivante :

$$u'(x) = 3 + 6x + x \int_0^1 tu(t)dt, u(0) = 0,$$

cette équation peut être écrite comme :

$$u'(x) = 3 + 6x + \alpha x, u(0) = 0,$$

obtenu en fixant :

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt, \quad (2.10)$$

en intégrant les deux côtés de (2.2.1) de 0 à x , et en utilisant la condition initiale donnée, on obtient :

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2. \quad (2.11)$$

Remplacer (2.11) dans (2.10) et évaluer le rendement intégrale

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt = \frac{7}{4} + \frac{1}{8}\alpha,$$

donc on trouve :

$$\alpha = 2.$$

La solution exacte est donnée par :

$$u(x) = 3x + 4x^2.$$

2.2.2 Méthode de résolution en série pour résoudre les EIDF de second espèce

La méthode de solution en série était utilisée auparavant, où la forme générique de la série de Taylor pour une solution analytique $u(x)$ à $x = 0$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (2.12)$$

La méthode de résolution en série sera utilisée pour résoudre les équation intégral-différentielles de Fredholm. On suppose que la solution $u(x)$ de l'équation intégral-différentielle de Fredholm

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) u(t) dt, u^{(j)}(0) = a_j, 0 \leq j \leq k-1, \quad (2.13)$$

est analytique, et possède donc une série de Taylor de la forme donnée en (2.12). Où les coefficients a_n seront déterminés de manière récurrente. La substitution de (2.12) dans les deux membres de (2.13) donne :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^{(k)} = T(f(x)) + \lambda \int_a^b k(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt. \quad (2.14)$$

Où pour plus de simplicité nous utilisons :

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^{(k)} = T(f(x)) + \lambda \int_a^b k(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt, \quad (2.15)$$

où $T(f(x))$ est la série de Taylor pour $f(x)$. L'équation intégrale (2.13) sera convertie en une intégrale traditionnelle dans (2.14) ou (2.15) où au lieu d'intégrale la fonction

inconnue $u(x)$, les termes de la forme $t^n, n \geq 0$ seront intégrés. Noter que parce que nous recherchons une solution en série, alors si $f(x)$ inclut des fonctions élémentaires telles que des fonctions trigonométriques, des fonctions exponentielles, ...etc, alors les développements de Taylor pour les fonctions impliquées dans $f(x)$ doivent être utilisés. De plus, les équations initiales données doivent être utilisées dans l'hypothèse de série (2.12).

Nous intégrons d'abord le côté droit de l'intégrale dans (2.14) ou (2.15), et recueillons les coefficients de même puissances de x . Nous égalons ensuite les coefficients de même puissances de x des deux côtés de l'équation résultante pour obtenir une relation de récurrence en $a_j, j \geq 0$, la résolution de la relation de récurrence conduira à une détermination complète des coefficients $a_j, j \geq 0$. Après avoir déterminé les coefficients $a_j, j \geq 0$, la solution en série suit immédiatement après la substitution des coefficients dérivés dans (2.12). La solution exacte peut être obtenue si une telle solution exacte existe. S'il n'est pas possible d'obtenir une solution exacte, la série obtenue peut être utilisée à des fins numériques. Dans ce cas, plus nous évaluons de termes, plus le niveau de précision attesté est élevé.

Il est intéressant de noter que l'utilisation de la méthode de résolution en série pour résoudre les équations intégro-différentielles de Fredholm donne des solutions exactes si la solution $u(x)$ est un polynôme cependant, si la solution est n'importe quelle autre fonction élémentaire telle que $\sin x, \exp x, \dots$ etc, la méthode des séries donne la solution exacte après avoir arrondi quelques coefficients $a_j, j \geq 0$.

Exemple 2.2.2 Résoudre l'équation intégro-différentielle de Fredholm en utilisant la méthode de résolution en série

$$u'(x) = 4 + 4x + \int_{-1}^1 (1 - xt)u(t)dt, u(0) = 1. \quad (2.16)$$

En substituant $u(x)$ par la série

$$u'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)', \quad (2.17)$$

dans les deux côtés de l'équation (2.16) conduit à :

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = 4 + 4x + \int_{-1}^1 \left((1 - xt) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dt. \quad (2.18)$$

Remarquez que $a_0 = 1$ d'après les conditions initiales données. L'évaluation de l'intégrale du côté droit donne :

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots = 6 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 + \frac{2}{7}a_6 + \frac{2}{9}a_8 + \left(4 - \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{5}a_3 - \frac{2}{7}a_5 - \frac{2}{9}a_7\right)x. \quad (2.19)$$

La mise en équation des coefficients de même puissances de x des deux côtés de (2.19) donne :

$$a_1 = 6, a_n = 0, n \geq 2, \quad (2.20)$$

la solution exacte est donnée par :

$$u(x) = 1 + 6x,$$

où nous avons utilisé $a = 1$ à partir de la condition initiale.

2.3 Équations intégral-différentielles de Volterra

Les équations intégral-différentielles de Volterra apparaissent lorsque nous convertissons la valeur initiale problèmes aux équations intégrales. L'équation intégral-différentielle de Volterra contient la fonction inconnue $u(x)$ et une de ses dérivée $u^{(n)}(x)$, $n \geq 1$ à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral. Au moins une des limites de l'intégration dans ce cas est une variables comme dans les équation intégrales de Volterra. L'équation est appelé intégral-différentiel parce que les opérateurs différentiels et intégraux sont impliqués dans la même équation.

Il est important de noter que les conditions initiales doit être donnée pour les équations intégral-différentielles de Volterra afin de détermine la solution particulière l'équation

intégro-différentielle de Volterra apparaît dans la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u(t)dt. \quad (2.21)$$

Où $u^{(n)}$ indique la nième dérivée de $u(x)$, autres dérivés de moindre ordre peut apparaître avec $u^{(n)}$ sur le côté gauche.

2.3.1 Méthode de décomposition Adomian pour résoudre les EIDV de second espèce

La méthode de décomposition Adomian donne la solution en une série infinie de composantes qui peuvent être déterminées de façon récurrents. La série obtenue peut donner la solution exacte si une telle solution existe. On peut supposer un intégro-différentiel de Volterra équation du seconde espèce donnée par :

$$u''(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t)u(t)dt, u(0) = a_0, u'(0) = a_1, \quad (2.22)$$

intégrer deux fois les deux membre de (2.22) de à x conduit

$$u(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x, t)u(t)dt\right), \quad (2.23)$$

où les conditions initiales $u(0)$ et $u'(0)$ sont utilisées, et L^{-1} opérateur intégral nous utilisons alors la série de décomposition

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x). \quad (2.24)$$

Dans les deux côtés de (2.23) pour obtenir :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x, t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right)dt\right), \quad (2.25)$$

ou équivalent

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_0(t)dt\right) \\ + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_1(t)dt\right) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_2(t)dt\right) + \dots, \end{aligned} \quad (2.26)$$

pour déterminer les composantes $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$,... de la solution $u(x)$, on fixe la relation de récurrence

$$u_0(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x))$$

,

$$u_{k+1}(x) = L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_k(t)dt\right), k \geq 0, \quad (2.27)$$

Exemple 2.3.1 Utiliser la méthode d'Adomian pour résoudre l'équation intégral-différentielle de Volterra

$$u'(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt, u(0) = 0. \quad (2.28)$$

En appliquant l'opérateur intégral L^{-1} défini par :

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x (\cdot)dx. \quad (2.29)$$

Aux deux côtés de (2.28) un fois de 0 à x et en utilisant la condition initiale donnée, nous obtenons :

$$u(x) = x - L^{-1}\left(\int_0^x u(t)dt\right), \quad (2.30)$$

en utilisant la série de décomposition (2.24), et en utilisant la relation de récurrence (2.27). On

obtenir

$$\begin{aligned}
 u_0(x) &= x, \\
 u_1(x) &= -L^{-1}\left(\int_0^x u_0(t)dt\right) = \frac{1}{3!}x^3, \\
 u_2(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x u_1(t)dt\right) = \frac{1}{5!}x^5, \\
 u_3(x) &= -L^{-1}\left(\int_0^x u_2(t)dt\right) = \frac{1}{7!}x^7.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Et ainsi de suite. Cela donne la solution sous forme de série

$$u(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots, \tag{2.32}$$

et donc la solution exacte est donnée par :

$$u(x) = \sin x. \tag{2.33}$$

2.3.2 Méthode d'itération variationnelle pour résoudre les EIDV de second espèce

La méthode de l'itération variationnelle a été utilisée pour traiter les équations intégrales de Volterra en les convertissant en une valeur initiale ou en la convertissant en une équation intégro-différentielle équivalente. La méthode fournit des approximations successives à convergence rapide de la solution exacte si une solution de forme fermée existe et non des composants comme dans la méthode de décomposition d'Adomian. La méthode de l'itération variationnelle gère les problèmes linéaires et non linéaires de la même manière sans avoir besoin de restriction spécifique telles que les polynômes dits Adomiens dont nous avons besoin pour des problèmes non linéaires. L'équation intégro-différentielle standard d'ordre 1 est de la forme :

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)dt. \tag{2.34}$$

où $u^{(i)}(x) = \frac{d^i u}{dx^i}$, et $u(0), u'(0), u''(0), \dots, u^{(i-1)}(0)$ sont les condition initiales. La fonctionnelle de correction pour l'équation intégral-différentielle (2.34) est :

$$u^{(n+1)}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi)(u_n^{(i)}(\xi) - f(\xi) - \int_0^\xi k(\xi, r)u_n(r)dr). \quad (2.35)$$

La méthode d'itération variationnelle est utilisée en appliquant deux étapes essentielles. Il faut d'abord déterminer le multiplicateur de Lagrange λ qui peut être identifié de manière optimale par intégration par parties et en utilisant une variation restreinte ayant a détermination des approximations successives $u_{n+1}(x), n \geq 1$ de la solution $u(x)$ l'approximation zéro $u(x)$ peut être n'importe quelle fonction sélective. Cependant, les valeur initiale $u(0), u'(0), \dots$ sont utilisées de préférence pour l'approximation sélective par zéro $u_0(x)$ comme on le verra plus loin. Par conséquent, la solution est donnée par :

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x). \quad (2.36)$$

Il est de résumer les multiplicateurs de Lagrange tels qu'ils sont dérivés :

$$\begin{aligned} u' + f(u(\xi), u'(\xi)) &= 0, \lambda = -1, \\ u'' + f(u(\xi), u'(\xi), u''(\xi)) &= 0, \lambda = \xi - x, \\ u''' + f(u(\xi), u'(\xi), u''(\xi), u'''(\xi)) &= 0, \lambda = -\frac{1}{2!}(\xi - x)^2, \\ u^{(n)} + f(u(\xi), u'(\xi), u''(\xi), \dots, u^{(n)}(\xi)) &= 0, \lambda = (-1)^n \frac{1}{(n-1)!}(\xi - x)^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Exemple 2.3.2 Utiliser la méthode d'itération variationnelle pour résoudre l'équation intégral-différentiel de Volterra

$$u'(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt, u(0) = 1. \quad (2.38)$$

La fonctionnelle de correction pour cette équation est donnée par :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x (u_n'(\xi) - 1 - \int_0^\xi u_n(r)dr)d\xi. \quad (2.39)$$

Où nous avons utilisé $\lambda = -1$ pour les équations intégral-différentielles du premier ordre comme indiqué dans (2.37).

On peut utiliser la condition initiale pour sélectionner $u_0(x) = u(0) = 1$. L'utilisation de cette sélection dans la fonctionnelle de correction donne l'approximation successive suivante :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1, \\ u_1(x) &= u_0(x) - \int_0^x (u'_0(\xi) - 1 - \int_0^\xi u_0(r)dr)d\xi = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2, \\ u_2(x) &= u_1(x) - \int_0^x (u'_1(\xi) - 1 - \int_0^\xi u_1(r)dr)d\xi = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4, \\ u_3(x) &= u_2(x) - \int_0^x (u'_2(\xi) - 1 - \int_0^\xi u_2(r)dr)d\xi = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6, \end{aligned} \tag{2.40}$$

et ainsi de suite. La méthode d'itération variationnelle admet l'utilisation de

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x), \tag{2.41}$$

qui donne la solution exacte :

$$u(x) = e^x. \tag{2.42}$$

2.3.3 Méthode de la transformée de Laplace pour résoudre les EIDV de second espèce

La méthode de la transformée de Laplace a été utilisée auparavant pour résoudre les équations intégrales de Volterra du premier et du second espèce. Les détails et les propriétés de la méthode de la transformée de Laplace peuvent être trouvés dans les textes d'équations différentiels ordinaires.

Avant de commencer à appliquer cette méthode, nous résumons certains des concepts présentés dans le théorème de convolution de la transformée de Laplace, il a été déclaré que si le noyau $k(x, t)$ de l'équation intégrale

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u(t)dt, \tag{2.43}$$

dépend de la différence $x - t$, on parle alors de noyau de différence. L'équation intégral-différentielle peut donc être exprimée comme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x-t)u(t)dt, \quad (2.44)$$

considérons deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ qui possèdent les conditions nécessaires à l'existence de la transformée de Laplace pour chacune. Soit les transformées de Laplace pour les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ données par :

$$\mathcal{L}f_1(x) = F_1(s), \mathcal{L}f_2(x) = F_2(s). \quad (2.45)$$

Le produit de convolution de Laplace de ces deux fonctions est défini par :

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt, \quad (2.46)$$

ou

$$(f_2 * f_1)(x) = \int_0^x f_2(x-t)f_1(t)dt, \quad (2.47)$$

rappeler que

$$(f_1 * f_2)(x) = (f_2 * f_1)(x), \quad (2.48)$$

on peut facilement montrer que la transformation de la Laplace du produit de convolution $(f_1 * f_2)(x)$ est donné par :

$$\mathcal{L}(f_1 * f_2)(x) = \mathcal{L}\left\{\int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt\right\} = F_1(s)F_2(s). \quad (2.49)$$

Pour résoudre les équations intégral-différentielles de Volterra en utilisant la méthode de la transformée de Laplace des dérivées de $u(x)$. On peut facilement montrer.

$$\mathcal{L}u^{(n)}(x) = s^n \mathcal{L}u(x) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots u^{(n-1)}(0), \quad (2.50)$$

Cela donne simplement

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}u'(x) &= s\mathcal{L}u(x) - u(0) = sU(s) - u(0), \\
 \mathcal{L}u''(x) &= s^2\mathcal{L}u(x) - su(0) - u'(0) = s^2U(s) - su(0) - u'(0), \\
 \mathcal{L}u'''(x) &= s^3\mathcal{L}u(x) - s^2u(0) - su'(0) - u''(0) \\
 &= s^3U(s) - s^2u(0) - su'(0) - u''(0) \\
 \mathcal{L}u^{iv}(x) &= s^4\mathcal{L}u(x) - s^3u(0) - s^2u'(0) - su''(0) - u'''(0) \\
 &= s^4U(s) - s^3u(0) - s^2u'(0) - su''(0) - u'''(0),
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

et ainsi de suit pour les dérivées d'ordre supérieur.

La méthode de la transformée de Laplace peut être appliquée de manière similaire à la approche utilisée auparavant, nous appliquons d'abord la transformée de Laplace aux deux côtés de (2.44), utilisons la transformée de Laplace appropriée pour la dérivée de $u(x)$, puis résoudre pour $U(x)$. Nous utilisons ensuite la transformée de Laplace inverse des deux côtés de l'équation résultante pour obtenir la solution $u(x)$ de l'équation.

Exemple 2.3.3 *Utiliser la méthode de la transformée de Laplace pour résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra*

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt, u(0) = 1, \tag{2.52}$$

remarquer que le noyau $k(x-t) = 1$, prendre la transformée de Laplace des deux côtés de (2.52)

$$\mathcal{L}(u'(x)) = \mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(1 * u(x)), \tag{2.53}$$

de sorte que

$$sU(s) - u(0) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}U(s). \tag{2.54}$$

Obtenu en utilisant la condition initiale donnée et en résolvant pour $U(s)$, nous trouvons

$$U(s) = \frac{1}{s-1}, \tag{2.55}$$

en prenant la transformation de Laplace inverse des deux côtés de (2.55), la solution exacte est donnée par :

$$u(x) = \exp x.$$

2.3.4 Méthode de solution en série pour résoudre les EIDV de second espèce

La fonction réelle $u(x)$ est dite analytique si elle a des dérivées de tous ordres telles que la série de Taylor en tout point b de son domaine

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(b)}{n!} (x - b)^n, \quad (2.56)$$

Converge vers $u(x)$ au voisinage de b . Pour simplifier, la forme générique de la série de Taylor à $x = 0$ peut être écrite comme dans

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (2.57)$$

cette section, nous appliquerons la méthode de résolution en série pour résoudre les équations intégral-différentielles de Volterra de deuxième espèce. On supposera que la solution $u(x)$ de l'équation intégral-différentielle de Volterra

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) u(t) dt, u^{(k)}(0) = k! a_k, 0 \leq k \leq (n - 1), \quad (2.58)$$

est analytique, et possède donc une série de Taylor de la forme donnée en (2.57), où les coefficients a_n , seront déterminés de manière récurrente.

Les premiers coefficients a_k peuvent être déterminés en utilisant la condition initiale de sorte que

$$a_0 = u(0), a_1 = u'(0), a_2 = \frac{1}{2!} u''(0), a_3 = \frac{1}{3!} u'''(0), \quad (2.59)$$

ainsi de suite, les autres coefficients a_k , de (2.57) seront déterminés en appliquant la méthode de résolution en série à l'équation intégral-différentielle de Volterra (2.58). La

substitution de (2.57) dans les deux membres de (2.58) donne :

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) = T(f(x)) + \int_0^x k(x, t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt, \quad (2.60)$$

ou pour puis de simlicité nous utilisons

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^{(n)} = T(f(x)) + \int_0^x k(x, t)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt. \quad (2.61)$$

Où $T(f(x))$ est la série de Taylor pour $f(x)$. L'équation intégro-différentielle (2.58) sera convertie en une intégrale traditionnelle dans (2.60) ou (2.61) où au lieu d'intégrer la fonction inconnue $u(x)$, des termes de la forme $t^n, n \geq 0$ seront intégrés remarquez que parce que nous recherchons une solution en série, alors si $f(x)$ inclut des fonctions élémentaires telles que des fonctions trigonométriques, des fonctions exponentielles,...etc, alors les développements de Taylor pour les fonctions impliquées dans $f(x)$ doivent être utilisés.

Nous intégrons d'abord le côté droit de l'intégrale dans (2.60) ou (2.61) ; et réveillons les coefficients de puissances similaires de x dans les deux côtés de l'équation résultante pour déterminer une relation de récurrence dans $a_j, j \geq 0$. La résolution de la relation de récurrence conduira à une détermination complète des coefficients $a_j, j \geq 0$ où certains de ces coefficients $a_j, j \geq 0$, la solution en série suit immédiatement la substitution des coefficients dérivés dans (2.58). La solution exacte peut être obtenue si une telle solution exacte existe. S'il n'est pas possible d'obtenir une solution exacte, la série obtenue peut être utilisée à des fins numérique. Dans ce cas, plus nous évaluons de termes, plus le niveau de précision atteint est élevée.

Exemple 2.3.4 *Utiliser la méthode de solution en série pour résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra*

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t) dt, u(0) = 1, \quad (2.62)$$

en substituant $u(x)$ par la série

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (2.63)$$

dans les deux côtés de l'équation (2.62) conduit à

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = 1 + \int_0^x k(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt. \quad (2.64)$$

En différenciant le côté gauche une fois par rapport à x , et en évaluant l'intégrale du côté droit, nous trouvons

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n. \quad (2.65)$$

Où nous avons initié l'exposant de x des deux côtés et utilisé $a_0 = 0$ à partir de la condition initiale donnée. La mise en équation des coefficients de puissances similaires de x des deux côtés de (2.65) donne la relation de récurrence

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{n(n-1)} a_{n-1}, n \geq 1, \quad (2.66)$$

où ce résultat donne :

$$a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \frac{1}{(2n-1)!}, \quad (2.67)$$

Pour $n \geq 0$ la substitution de ce résultat dans (2.63) donne la solution en série

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n+1}, \quad (2.68)$$

qui converge vers la solution exacte :

$$u(x) = \sinh x. \quad (2.69)$$

Définition de EIDV de première espèce

La forme standard de l'équation intégro-différentielle de Volterra de première espèce est donnée par :

$$\int_0^x k_1(x, t) u(t) dt + \int_0^x k_2(x, t) u^{(n)}(t) dt = f(x), k_2(x, t) \neq 0, \quad (2.70)$$

où les conditions initiales sont imposées. L'équation intégro-différentielle de Volterra de première espèce (2.70) peut être convertie en une équation intégrale de Volterra de seconde espèce, pour $n = 1$, en intégrant la seconde intégrale dans (2.70) par parties. Les équations intégro-différentielles de Volterra de première espèce seront traitées dans cette section par la méthode de la transformation de Laplace et la méthode d'itération variationnelle.

2.3.5 Méthode de la transformation de Laplace pour résoudre les EIDV de premier espèce

La méthode la transformée de Laplace été utilisée auparavant pour résoudre les équations intégrales de Volterra de la première et de la seconde espèce.

L'analyse portera sur les équations où les noyaux $k_1(x, t)$ et $k_2(x, t)$ de (2.70) sont des noyaux de différence. Cela signifie que chaque noyau dépend de la différence $(x-t)$ prendre la transformée de Laplace des deux côtés de (2.70) donne :

$$\mathcal{L}(k_1(x, t) * u(x)) + \mathcal{L}(k_2(x, t) * u^{(n)}(x)) = \mathcal{L}(f(x)), \quad (2.71)$$

de sorte que

$$k_1(s) * U(s) + k_2(s)(s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)) = \mathcal{L}(f(s)), \quad (2.72)$$

où

$$U(s) = \mathcal{L}(u(x)), k_1(s) = \mathcal{L}(k_1(x)), k_2(s) = \mathcal{L}(k_2(x)), F(s) = \mathcal{L}(f(x)), \quad (2.73)$$

en utilisant les conditions initiales donnée et en résolvant pour $U(s)$, nous trouvons

$$U(s) = \frac{F(s) + k_2(s)(s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0))}{k_1(s) + s^n k_2(s)}, \quad (2.74)$$

à condition que

$$k_1(s) + s^n k_2(s) \neq 0. \quad (2.75)$$

En prenant la transformation de Laplace inverse des deux côtés de (2.74), la solution exacte est facilement obtenue :

Exemple 2.3.5 Résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra de première espèce suivante

$$\int_0^x (x-t)u(t)dt + \int_0^x (x-t)^2 u'(t)dt = 3x - 3 \sin x, u(0) = 0. \quad (2.76)$$

Prendre la transformation de Laplace des deux côtés donne :

$$\frac{1}{s^2}U(s) + \frac{1}{s^3}(sU(s) - u(0)) = \frac{3}{s^2} - \frac{3}{1+s^2}, \quad (2.77)$$

où en utilisant la condition initiale donnée et en résolvant pour $U(s)$ nous obtenons

$$U(s) = \frac{1}{1+s^2}, \quad (2.78)$$

en prenant la transformation de Laplace inverse des deux côtés, nous trouvons

$$u(x) = \sin x. \quad (2.79)$$

2.3.6 Méthode d'itération variationnelle pour résoudre les EIDV de premier espèce

La forme standard de l'équation intégro-différentielle de Volterra de première espèce est donnée par :

$$\int_0^x k_1(x,t)u(t)dt + \int_0^x k_2(x,t)u^{(n)}(t)dt = f(x), k_2(x,t) \neq 0. \quad (2.80)$$

Condition initiales sont prescrites. Nous différencions d'abord les deux côtés de (2.80) pour le convertir en une équation intégro-différentielle de Volterra équivalente du second espèce, où la règle de Leibnitz doit être utilisée pour différencier les intégrales

du côté gauche, d'où nous obtenons :

$$u^n(x) = \frac{f'(x)}{k_2(x, x)} - \frac{k_1(x, x)}{k_2(x, x)}u(x) - \frac{1}{k_2(x, x)} \int_0^x \frac{\theta(k_1(x, t))}{\theta x} u^n(t) dt, \quad (2.81)$$

$$- \frac{1}{k_2(x, x)} \int_0^x \frac{\theta(k_2(x, t))}{\theta x} u^n(t) dt, k_2(x, t) \neq 0,$$

comme indiqué précédemment, pour utiliser la méthode d'itération variationnelle, nous devons d'abord déterminer le multiplicateur de Lagrange λ . Le multiplicateur de Lagrange λ peut être déterminé sur la base des équations intégral-différentielles résultantes, où la règle suivante pour λ

$$u^n(x) + f(u(t), u'(t), u''(t), \dots, u^n(x)) = 0, \lambda = (-1)^n \frac{1}{(n-1)!} (t-x)^{(n-1)}, \quad (2.82)$$

a été dérivé. Ayant λ déterminé, une formule d'itération, doit être utilisée pour la détermination des approximations successives $u_{(n+1)}(x), n \geq 0$ de la solution $u(x)$. L'approximation zéro de peut être n'importe quelle fonction sélective. Cependant, on utilise de préférence les valeurs initiales $u(0), u'(0), \dots$, pour l'approximation sélective du zéro vers le haut comme on le verra plus loin. Par conséquent, la solution est donnée par :

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x). \quad (2.83)$$

Exemple 2.3.6 Résoudre l'équation intégral-différentielle de Volterra de première espèce

$$\int_0^x (x-t+1)u'(t)dt = e^x + \frac{1}{2}x^2 - 1, u(0) = 1, \quad (2.84)$$

dérivée une fois les deux membres de (2.84) par rapport à x donne l'équation intégral-différentielle de Volterra de seconde espèce

$$u'(x) = e^x + x - \int_0^x u'(t)dt, \quad (2.85)$$

la correction fonctionnelle pour équation (2.85) est donnée par :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left(u'_n(t) - e^t - t + \int_0^t u'_n(r) dr \right) dt, \quad (2.86)$$

où nous avons utilisé $\lambda(t) = -1$. L'approximation zéro $u_0(x)$ peut être choisie par $u_0(x) = 1$. Cela donne les approximations successives

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1, \\ u_1(x) &= e^x + \frac{1}{2!}x^2, \\ u_2(x) &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3, \\ u_3(x) &= e^x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4, \\ u_4(x) &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5, \\ u_5(x) &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned} \quad (2.87)$$

Cela donne

$$u_n(x) = x + \left(1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots \right), \quad (2.88)$$

la solution exacte est donc donnée par :

$$u(x) = x + \cosh x. \quad (2.89)$$

SOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS D'INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE À RETARD

2.4 Équation intégrro-différentielle à retard

Équation intégrro-différentielle à retard est un type d'équation intégrro-différentielle. formellement, l'approche de collocation décrite pour les problèmes de valeur initiale dans EDO est facilement étendue aux équations intégrales ou aux équations intégrro-différentielle de type Volterra [4] :

$$x(t) = g(t) + \int_{t_0}^t k(t,s)x(s)ds, t \in [t_0, T], \quad (2.90)$$

ou

$$x'(t) = f(t, x(t)) + \int_{t_0}^t k(t,s)x(s)ds, t \in [t_0, T], \quad (2.91)$$

et pour retarder les problèmes, par exemple pour

$$x'(t) = f(t, x(t), x(\theta(t))) + W_{\theta_x}(t), t \in [t_0, T]. \quad (2.92)$$

Ici, le retard $\tau(t)$ dans la fonction de retard $\theta(t) = t - \tau(t)$ peut être non nul, $\tau(t) \geq \tau_0 > 0$ pour $t \in [t_0, T]$, ou nul, lorsque $\theta(t) = qt = t - (1-q)t$ ($0 < q < 1$) avec $t_0 = 0$. L'intégrale de retard W_θ à la forme :

$$W_\theta = \int_{\theta(t)}^t k_2(t, s, x(s), x'(t)) ds \quad (2.93)$$

2.5 Méthode de collocation pour résoudre les équations intégro-différentielle à retard

Dans cet section, nous étudions une méthode numérique pour la solution d'équation à retard intégro-différentielle de la forme :

$$X'(t) = g(t) + \int_{t-\tau}^t k(t, s) X(s) ds \quad (2.94)$$

pour $t \in [0, T]$ et $X(t) = \Phi(t)$ pour $t \in [-\tau, 0]$, où les fonctions g, k, Φ sont suffisamment lisses. L'existence et l'unicité de la solution (2.94) peut être trouvé. Les équations de retard intégro-différentielle sont devenues importantes dans la modélisation mathématique des phénomènes biologiques et physiques.

Récemment, la solution numérique des équations intégro-différentielles de retard. Brunner[4] a appliqué la méthode de collocation polynomiale pour approximer la solution de (2.94). Wu et Gan [7] ont utilisé des méthodes linéaires multi-étapes basées sur une règle de quadrature pour trouver une solution numéérique d'équations intégro-différentielles à retarde de Volterra singulièrement perturbées.

La méthode polynomiale de Taylor pour approximer la solution des équation intégrales a été proposée. S. Yalçınbaş [8] a appliqué la méthode de Taylor pour la résolution de certaines équations intégrales de Volterra-Fredholm. Akyüz-Dascioğlu et Sezer [1] et

Darania et Lvaz [5] ont utilisé la méthode de Taylor pour trouver une solution approchée des équations intégro-différentielles de Volterra-Fredholm.

Notre but est d'approximer la solution de (2.94) dans l'espace $S_m^{(0)}(\Pi_N)$, L'espace des fonctions splines polynomiales continues de degré m , En utilisant des polynômes de Taylor.

2.6 Description de la méthode de collocation des EID

Dans cette section, Nous supposons sans perte de généralité que $T = \tau r$, où $r \in \mathbb{N}^*$. Soit Π_N une partition uniforme de l'intervalle $l = [0, T]$ défini par $t_n^i = i\tau + nh$, $n = 0, 1, \dots, N, i = 0, 1, \dots, r - 1$, Où le pas est donné par $h = \frac{\tau}{N}$. On définit les sous-intervalles $\sigma_n^i = [t_n^i, t_{n+1}^i]$, $i = 0, 1, \dots, r - 1$. De plus, on note π_m l'ensemble de tous les polynômes réels de degré n'excédant pas m . On définit l'espace spline polynomial réel de degré m et de continuité comme suit :

$$S_m^{(0)}(\Pi_N) = \left(u \in C(l, \mathbb{R}) : u_n^i = u \mid \sigma_n^i \in \pi_m, n = 0, 1, \dots, N - 1, i = 0, 1, \dots, r - 1 \right).$$

Il est facile de voir que $S_m^{(0)}(\Pi_N)$ est un espace vectoriel réel, et sa dimension est donnée par :

$$\dim \left(S_m^{(0)}(\Pi_N) \right) = rNm + 1,$$

On cherche une approximation u dans l'espace spline $S_{m-1}^{(0)}(\Pi_N)$ de la solution X de (2.94). Par la continuité de u , les polynômes u_n^i vérifient $u_n^i(t_n^i) = u_{n-1}^i(t_n^i)$ pour $n = 1, \dots, N - 1$ et $u_0^i(t_0^i) = u_{N-1}^i(t_0^i)$ pour $i = 1, \dots, r - 1$. Pour trouver les coefficients des polynômes u_n^i , $n = 0, 1, \dots, N - 1, i = 0, 1, \dots, r - 1$, on utilise un polynôme de Taylor sur chaque sous-intervalle sur σ_n^i .

premièrement, on approximation la solution exacte X dans l'intervalle σ_0^0 par le polynôme

$$u_0^0(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{X^{(j)}(0)}{j!} t^j, t \in \sigma_0^0, \quad (2.95)$$

Pour trouver $X(0)$, on dérive (2.94) j -fois

$$X^{(j+1)}(t) = g^{(j)}(t) + \left(\int_{t-\tau}^0 k(t,s)\Phi(s)ds \right)^{(j)} + \sum_{i=0}^{j-1} \left[\gamma_1^{(i)} k(t,t)X(t) \right]^{j-1-i} + \int_t^0 \gamma_1^{(j)} k(t,s)X(s)ds, \quad (2.96)$$

Alors

$$X^{(j+1)}(0) = g^{(j)}(0) + \left(\int_{t-\tau}^0 k(t,s)\Phi(s)ds \right)^{(j)}(0) + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1-i} \binom{j-1-i}{l} \left[\gamma_1^{(i)} k(t,t) \right]^{j-1-i-l} (0) X^{(l)}(0)$$

pour $j = 0, 1, \dots, m$, où $X(0) = \Phi(0)$.

Deuxièmement, nous approchons X par le polynôme u_n^0 ($n \in 1, 2, \dots, N-1$) sur l'intervalle σ_n^0 tel que

$$u_n^0(t) = \sum_{j=0}^m \frac{U_{n,0}^{(j)}(t_n^0)}{j!} (t - t_n^0); t \in \sigma_n^0, \quad (2.97)$$

Où $U_{n,0}$ est la solution exacte de l'équation intégro-différentielle

$$U'_{n,0}(t) = g(t) + \int_{t-\tau}^0 k(t,s)\Phi(s)ds + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^0}^{t_{i+1}^0} k(t,s)u_i^0(s)ds + \int_{t_n^0}^t k(t,s)U_{n,0}(s)ds, \quad (2.98)$$

Pour $t \in \sigma_n^0$ tel que $U_{n,0}(t_n^0) = u_{n-1}^0(t_n^0)$ Les coefficients $(u_{n,0}^{(j)}(t_n^0))$ sont donnés par la formule suivante

$$\begin{aligned} U_{n,0}^{(j+1)}(t_n^0) &= g^{(j)}(t_n^0) + \left(\int_{t-\tau}^0 k(t,s)\Phi(s)ds \right)^{(j)}(t_n^0) \\ &+ \sum_{i=0}^{j-1} [\gamma_1^{(i)} k(t,t)U_{n,0}(t)]^{(j-1-i)}(t_n^0) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^0}^{t_{i+1}^0} \gamma_1^{(j)} k(t_n^0, s)u_i^0(s)ds \\ &= g^{(j)}(t_n^0) + \left(\int_{t-\tau}^0 k(t,s)\Phi(s)ds \right)^{(j)}(t_n^0) + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1-i} \binom{j-1-i}{l} [\gamma_1^{(i)} k(t,t)]^{(j-1-i-l)}(t_n^0) U_{n,0}^{(l)}(t_n^0) \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{l=0}^m \frac{U_{i,0}^{(l)}(t_i^0)}{l!} \int_{t_i^0}^{t_{i+1}^0} \gamma_1^{(i)} k(t_n^0, s)(s - t_i^0)^l ds, \end{aligned} \quad (2.99)$$

pour $j \in 0, 1, \dots, m$ et $U_{n,0}(t_n^0) = u_{n-1}^0(t_n^0)$,

troisièmement, pour que X soit approché par u_0^p ($p \in 1, 2, \dots, r-1$) sur l'intervalle σ_0^p x

doit être approché par $u_k^j (0 \leq k \leq N-1) et 0 \leq j < p$ sur chaque intervalle de tel que

$$u_0^p(t) = \sum_{j=0}^m \frac{U_{0,p}^{(j)}(t_0^p)}{j!} (t - t_0^p)^j; t \in \sigma_0^p, \quad (2.100)$$

Où $U_{0,p}$ est la solution exacte de l'équation intégro-différentielle

$$U_{0,p}(t) = g(t) + \int_{t-\tau}^{t_0^p} k(t,s) u^{p-1}(s) ds + \int_{t_0^p}^t k(t,s) U_{0,p}(s) ds, \quad (2.101)$$

pour $t \in \sigma_0^p$ tel que $U_{0,p}(t_0^p) = u_{N-1}^{p-1}(t_0^p)$, où $u^i = u$ sur l'intervalle $\sigma^i = [t_0^i, t_0^{i+1}]$ pour $i \in 0, 1, \dots, r-1$.

Les coefficients $U_{0,p}^{(j)}(t_0^p)$ sont donnés par la formule suivante :

$$\begin{aligned} U_{0,p}^{(j+1)}(t_0^p) &= g^{(j)}(t_0^p) - \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1-i} \binom{j-1-i}{l} [\gamma_1^{(j)} k(t, t-\tau)]^{(j-1-i-l)}(t_0^p) U_{0,p-1}^{(j)}(t_0^{p-1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{l=0}^m \frac{U_{i,p-1}^{(l)}(t_i^{p-1})}{l!} \int_{t_i^{p-1}}^{t_{i+1}^{p-1}} \gamma_1^{(j)} k(t_0^p, s) (s - t_i^{p-1})^l ds \\ &+ \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1-i} \binom{j-1-i}{l} [\gamma_1^{(i)} k(t, t)]^{(j-1-i-l)}(t_0^p) U_{0,p}^{(l)}(t_0^p) \end{aligned} \quad (2.102)$$

pour $j \in 0, 1, \dots, m$ et $U_{0,p}(t_0^p) = u_{N-1}^{p-1}(t_0^p)$.

Enfin, sur l'intervalle $\sigma_n^p (n \in 1, 2, \dots, N-1)$, le polynôme est défini par la formule suivante :

$$u_n^p(t) = \sum_{j=0}^m \frac{U_{n,p}^{(j)}(t_n^p)}{j!} (t - t_n^p)^j; t \in \sigma_n^p, \quad (2.103)$$

où $U_{n,p}$ est la solution exacte de l'équation intégro-différentielle

$$\begin{aligned} U_{n,p}'(t) &= g(t) + \int_{t-\tau}^{t_0^p} k(t,s) u^{p-1}(s) ds + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^p}^{t_{i+1}^p} k(t,s) u_i^p(s) ds \\ &+ \int_{t_n^p}^t k(t,s) U_{n,p}(s) ds, \end{aligned} \quad (2.104)$$

pour $t \in \sigma_n^p$ tel que $U_{n,p}(t_n^p) = u_{n-1}^p(t_n^p)$.

les coefficients $U_{n,p}^{(j)}(t_n^p)$ sont donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
 U_{n,p}^{(j+1)}(t_n^p) &= g^{(j)}(t_n^p) - \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1-i} \binom{j-1-i}{l} [\gamma_1^{(i)} k(t, t - \tau)]^{j-1-i-l} (t_n^p) U_{n,p-1}^{(l)}(t_n^{p-1}) \\
 &+ \sum_{i=n}^{N-1} \sum_{l=0}^m \frac{U_{i,p-1}^{(l)}(t_i^{p-1})}{l!} \int_{t_i^{p-1}}^{t_{l+1}^{p-1}} \gamma_1^{(j)} k(t_n^p, s) (s - t_i^{p-1})^l ds \\
 &+ \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1-i} \binom{j-1-i}{l} [\gamma_1^{(i)} k(t, t)]^{j-1-i-l} (t_n^p) U_{n,p}^{(l)}(t_n^p) \\
 &+ \sum_{i=n}^{n-1} \sum_{l=0}^m \frac{U_{i,p}^{(l)}(t_i^p)}{l!} \int_{t_i^p}^{t_{l+1}^p} \gamma_1^{(j)} k(t_n^p, s) (s - t_i^p)^l ds
 \end{aligned} \tag{2.105}$$

pour $j \in 0, 1, \dots, m$ et $U_{n,p}(t_n^p) = u_{n-1}^p(t_n^p)$.

2.7 Exemple numérique

Exemple 2.7.1 Considérons l'équation intégro-différentielle de retard

$$X'(t) = g(t) + \int_{t-1}^t k(t, s)x(s)ds, t \in [0, 3], \tag{2.106}$$

avec $\Phi(t) = \sin(t) + 1$ pour $t \in [-0.5, 0]$, $k(t, s) = \cos(t + s + 1) + 2$, et g est choisi pour que la solution exacte soit $x(t) = \sin(t) + 1$.

Les erreurs absolues pour $(m, N) \in (4, 4), (5, 5), (7, 7), (8, 8)$ à $t = 0, 0.5, \dots, 3$ sont présentés dans le tableau I.

$$e(m, N) = \max |x(t) - u(t)|, t = 0, 0.5, \dots, 3$$

avec $(m, N) = (4, 4), (5, 5), (7, 7), (8, 8)$.

Exemple 2.7.2 Considérons l'équation intégro-différentielle de retard

$$X'(t) = g(t) + \int_{t-1}^t k(t, s)x(s)ds, t \in [0, 6], \tag{2.107}$$

Avec $\Phi(t) = \cos(t) \exp(-t)$ pour $t \in [-1, 0)$, $k(s, t) = (t - s) \exp(t - s)$, et g est choisi pour que la solution exacte soit $x(t) = \cos(t) \exp(-t)$

t	m=4,N=4	m=5,N=5	m=7,N=7	m=8,N=8
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.5	$0.104 * 10^{-5}$	$0.100 * 10^{-8}$	$0.100 * 10^{-8}$	$0.100 * 10^{-9}$
1.0	$0.213 * 10^{-5}$	$0.700 * 10^{-8}$	$0.100 * 10^{-8}$	$0.111 * 10^{-8}$
1.5	$0.303 * 10^{-5}$	$0.130 * 10^{-7}$	$0.100 * 10^{-8}$	$0.900 * 10^{-9}$
2.0	$0.412 * 10^{-5}$	$0.260 * 10^{-7}$	$0.300 * 10^{-8}$	$0.217 * 10^{-8}$
2.5	$0.619 * 10^{-5}$	$0.470 * 10^{-7}$	$0.900 * 10^{-8}$	$0.600 * 10^{-9}$
3.0	$0.100 * 10^{-4}$	$0.890 * 10^{-7}$	$0.150 * 10^{-7}$	$0.300 * 10^{-9}$

TABLE 2.1 – Erreurs absolues pour la solution de (2.106)

t	m=5,N=5	m=6,N=6	m=8,N=8	m=9,N=9
0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	$0.805 * 10^{-6}$	$0.143 * 10^{-7}$	$0.253 * 10^{-9}$	$0.535 * 10^{-10}$
2	$0.215 * 10^{-5}$	$0.208 * 10^{-7}$	$0.592 * 10^{-9}$	$0.197 * 10^{-9}$
3	$0.418 * 10^{-5}$	$0.363 * 10^{-7}$	$0.123 * 10^{-8}$	$0.980 * 10^{-10}$
4	$0.788 * 10^{-5}$	$0.686 * 10^{-7}$	$0.208 * 10^{-8}$	$0.598 * 10^{-9}$
5	$0.148 * 10^{-4}$	$0.130 * 10^{-6}$	$0.402 * 10^{-8}$	$0.113 * 10^{-8}$
6	$0.281 * 10^{-4}$	$0.246 * 10^{-6}$	$0.764 * 10^{-8}$	$0.214 * 10^{-8}$

TABLE 2.2 – Erreurs absolues pour la solution de (2.107)

CONCLUSION

Dans cet mémoire, nous avons présenté des solutions de quelques équations intégrales linéaires de Volterra et Fredholm.

Nous avons proposé une méthode collocation basés sur l'utilisation de polynômes de Taylor pour approximer la solution du équation intégral-différentielle à retard dans l'espace spline $\left(S_{m-1}^{(0)}(\Pi_N)\right)$, nous avons montré que la solution numérique est convergente, cette méthode est simple .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.Akyüz-Dascioğlu and M.Sezer , *A Taylor polynomial approach for solving high-order linear Fredholm integro-differential equations in the most general form*, International Journal of Computer Mathematics 84(2007), 527-539.
- [2] A.Bellou and M.Bousselsal , *Numerical solution of delay integro-differential equation by using Taylor collocation method*, math.meth.sci 37(2014), 1491-1506.
- [3] A.Bellou and M.Bousselsal , *A Taylor collocation method for solving delay integral equations* , Numer algor 65(2014), 1843-1857.
- [4] H.Brunner , *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations*, Cambridge University Press, 2004.
- [5] P.Darania and K.Ivaz , *Numerical solution of nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations*, Computers and Mathematics with Applications 56(2008), 2197-2209.
- [6] A.M.Wazwaz , *Linear and nonlinear integral equation method and applications*, Springer, New York, 2011.
- [7] S.Wu and S.Gan , *Errors of linear multistep methods for singularly perturbed Volterra delay integro-differential equations*, Mathematics and Computers in Simulation 79(2009) , 3148-3159.

- [8] S.Yalçınba , *Taylor polynomial solutions of nonlinear Volterra-Fredholm integral equations*, Applied Mathematics and Computation 127(2002), 195-206.

الملخص

يهدف هذا العمل لتقديم أهم المفاهيم المتعلقة بالمعادلات التكاملية و المتكاملة التفاضلية الخطية لفريدهولم و فولتيرا نظرا لاستخداماتها في عدة تطبيقات علمية. كما تمت دراسة العديد من الطرق العددية و التحليلية لهذا النوع من المعادلات، و تم تقديم أمثلة لإيجاد الحل الصحيح و الدقيق. تم أيضا مناقشة حل عددي لمعادلات التكامل و التفاضل التأخرية باستخدام طريقة تايلور للتجميع

الكلمات المفتاحية : المعادلات التكاملية التفاضلية الخطية لفريدهولم, المعادلات المتكاملة التفاضلية الخطية لفولتيرا, الطرق العددية و التحليلية, الحل الصحيح, الحل الدقيق, حل عددي لمعادلات التكامل و التفاضل التأخرية باستخدام طريقة تايلور للتجميع

Résumé

Ce travail vise à présenter les concepts clés des équations intégrales et intégral-différentielles linéaires de Fredholm et de Volterra en raison de leurs utilisations dans plusieurs applications scientifiques. Nous avons également étudié de nombreuses méthodes numériques et analytiques pour résoudre ce type d'équations, en fournissant des exemples de recherche de la solution correcte et précise. Nous avons également abordé la Solution numérique de retard équations d'intégral-différentielle à l'aide de Taylor méthode de collocation.

Mots clés: équations intégrales différentielles linéaires de Fredholm, équations intégrales différentielles linéaires de Volterra, équations intégral-différentielles linéaires de Fredholm, équations intégral-différentielles linéaires de Volterra, méthodes numériques et analytiques, solution correcte, solution précise, Solution numérique de retard équations d'intégral-différentielle à l'aide de Taylor méthode de collocation.

Abstract

This work aims to present the key concepts of linear integral and integro-differential equations of Fredholm and Volterra, due to their applications in various scientific fields. We have also studied numerous numerical and analytical methods to solve this type of equations, providing examples for finding the correct and accurate solution. Additionally, we have addressed the numerical solution of delay integro-differential equations using the Taylor collocation method.

Keywords: linear integral differential equations of Fredholm, linear integral differential equations of Volterra, linear integro-differential equations of Fredholm, linear integro-differential equations of Volterra, numerical and analytical methods, correct solution, accurate solution, numerical solution of delay integro-differential equations using the Taylor collocation method.