الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Ref :...............

Centre Universitaire Abd alhafid Boussouf
Mila

Institut de Mathématique et informatique **Département de Mathématique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Fondamentales

Traitement de la dégénérescence dans le problème de transport à quatre indices

Préparer par **:**

- **BENABDELKADER Ouafa**
- **BAKHI Housna**

Setenu devant les jurys:

BAZANIERE Abdelghafour	**MAA**	**C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila**	**Président**
FADEL Wahida	**MAA**	**C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila**	**Encadreur**
BOUFELGHA Ibrahim	**MAA**	**C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila**	**Examinateur**

Année universitaire : 2022/2023

Remerciements

Nous tenons à remercier avant tout "**ALLAH**" le tout puissant nous avoir donné le courage pour compléter ce mémoire. Après nous remercions madame "**FADEL Wahida**" de nous avoir encadrer, suivie et de ses efforts pour réussir ce travail également nous remercions monsieur "**BAKHI Saleh**" et tout ce qu'il nous aidons de près ou de loin. Encore nous remercions nos familles, nos enseignants du département de mathématiques et toute la famille de centre universitaire du Mila.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié la résolution d'un problème de transport à quatre indices en utilisant l'algorithme $AlPT_4$, développé par ZITOUNI en 2008.

De plus, nous avons proposé une nouvelle approche pour traiter la dégénérescence associée au problème. Nous avons effectué des simulations numériques qui ont donné des résultats satisfaisants.

Abstract

In this thesis, we focused on solving a four-index transportation problem using the $AlPT_4$, algorithm, proposed by ZITOUNI in 2008. Additionally, we proposed a new technique to adress the issue of degeneracy in the problem. We conducted numerical simulations, and the obtained results were satisfactory.

الملخص

في هذا البحث، ركزنا على حل مشكلة نقل ذات اربعة مؤشرات باستخدام خوارزمية $AlPT_4$ ، التي اقترحها $ZITOUNI$ في عام ٢٠٠٨. بالاضافة الى ذلك، قدمنا تقنية جديدة لمعالجة مشكلة التدهور المرتبطة بهذه المشكلة. من خلال التعامل بشكل مناسب مع التحديات العددية المتعلقة بتقارب هذه الطرق، وكانت النتائج المتحققة مرضية

Table des matières

Introduction générale

L'étude du transport routier de marchandises englobe toute les méthodes et activités visant à coordonner les flux physiques en optimisant tous les éléments intervenant dans chaque maillon de la chaîne. Le problème de transport à deux indices (PT2) est développé par Hitchcock en 1941, la recherche dans ce domaine a obtenu des résultats satisfaisants sur diverses extensions.Cette recherche admet deux principales orientations l'une théorique et l'autre opérationnelle. Sur le plan théorique, la recherche sur le problème de transport est développée au niveau macro avec le problème à n indices, et sur le plan opérationnelle, les résultats sont encore limité puisque l'application des modèles de transport à la réalité et complexe. C'est-à-dire le problème restant consiste à trouver des méthodes pour résoudre les problèmes particuliers.

Le problème de transport classifié selon le nombres d'indices en quatre groupes sont :

* les problèmes de transport à 2 indices.
* les problèmes de transport à 3 indices.
* les problèmes de transport à 4 indices.
* les problèmes de transport à n indices.

Dans ce mémoire nous nous intéressant au problème de transport à 4 indices noté PT_4 et ces indices sont : origines, destinations, types de marchandises et types de camions.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques rappels est généralités de convexité, de programmation mathématique et de calcul différentiel qui sont utilisés par la suite de mémoire.

Ensuite, nous faisons une présentation de problème de transport à deux indices.

Le troisième chapitre contient l'essentiel de notre travail, nous proposons une nouvelle technique pour résoudre le problème de dégénérescence pour le problème de transport à quatre indices et nous avons mise en œuvre l'algorithme avec succès.

Enfin, un exemple qui illustre le traitement de la dégénérescence entre l'ancienne et la nouvelle méthode sera proposée.

Chapitre 1

Quelques rappels et généralités

Il y a plusieurs branches des mathématiques l'un de ses branches c'est l'optimisation qui est cherché à modéliser et à résoudre les problèmes analytiquement ou numériquement, et à déterminer le meilleur élément d'un ensemble et choisit la meilleure configuration parmi tout les configurations possibles du système.

1.1 Formulation mathématique d'un problème d'optimisation classique

Un problème d'optimisation classique peut se formuler de la manière suivante :

Trouver un $x^* \in X$ tel que :

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in X$$

Ce que on note :

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x) \tag{1.1}$$

L'ensemble X peut être défini de la manière suivante :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n telque : g_i(x) = 0, i = \overline{1,k}, g_i(x) \leq 0, i = \overline{k+1,m}\} \tag{1.2}$$

$f(.)$ est appelée fonction objectif et $g(.)$ est appelée fonction contrainte.

* Si f et g_i, $i = \overline{1,m}$ sont linéaires alors le problème (1.1) et (1.2) est appelée programme linéaire.

* Si l'une des fonctions est non linéaires alors le problème est dit programme non linéaire avec contraintes (ou problème d'optimisation non linéaire avec contraintes).

* Si $X = \mathbb{R}^n$ le problème est dit programme non linéaire sans contraintes (problème d'optimisation non linéaire sans contraintes).

1.2 Rappel de calcul différentiel

1.2.1 Notations

* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ $(n < \infty)$ désigne l'espace euclidien $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ (produit n fois)

Un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ sera noté $(x_1, x_2, ..., x_n)$

* On note $e_1, e_2, ..., e_n$ les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^n$

$$(e_i)_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si : } i = j, \forall i, j = \overline{1, n} \\ \\ 0, \text{ si : } i \neq j \end{cases}$$

* Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\| x \|$ la norme euclidienne de x donnée par

$$\| x \| = (\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Définition (produit scalaire)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

On appelle produit scalaire sur E toute application ϕ notée $< ., . > : E \times E \to \mathbb{R}$

vérifiant les propriétés suivantes :

a/ Bilinéaire : $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : < \lambda x + \mu y, z > = \lambda < x, z > + \mu < y, z >$ et

$< x, \lambda y + \mu z > = \lambda < x, y > + \mu < x, z >$

b/ Symétrique : $\forall x, y \in E, < x, y > = < y, x >$

c/ Définie : $\forall x \in E, < x, x > = 0 \Rightarrow x \in O_E$

d/ Positive : $\forall x \in E, < x, x > \geq 0$

Le produit scalaire $< x, y >$ est aussi noté (x, y) ou encore $x.\ y$

1.2.2 Dérivée partielle

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est appelée i^{ime} dérivée partielle de f et définie par :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + t, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{t}$$

Remarque

Cette limite peut ne pas existe.

1.2.3 Gradient

Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent pour tout i, le gradient de f est définit comme suit :

$$(\bigtriangledown f(x))^T = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ ..., \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$$

Exemple

Soit $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + x_1^2 x_2$

Alors le gradient de f est :

$$\bigtriangledown f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1} + 2x_1x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$$

Définition (Dérivée directionnelle)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et soit $x \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} =< \bigtriangledown f(x), h >$$

La dérivée directionnelle de f en x de direction h.

Définition (Fonction différentiel)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue si, pour tout $d \in \mathbb{R}^n$, la dérivée directionnelle de f dans la direction d existe, alors la fonction f est dite différentiable.

1.2.4 Matrice Hessienne

Définition

On appelle Hessien de f la matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$

$$H(x) = \bigtriangledown^2 f(x) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})(x), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$$

Remarque

Si $f \in C^2(\Omega)$ alors $\bigtriangledown^2 f(x)$ est une matrice symétrique $\forall x \in \Omega$ (c'est le théorème de Schwartz).

1.3 Notions sur la convexité

1.3.1 Ensemble convexe

Définition

Un ensemble X de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe, si pour tout couple $(x,\, y)$ d'éléments de X le segment $[x,\, y]$ tout entier est inclus dans X. Autrement dit, X est convexe lorsque,

$\forall x,\, y \in X,\, \lambda \in [0,\, 1]$ le vecteur :

$$Z = \lambda x + (1-\lambda)y \in X$$

Propriétés

Soit une famille $\{X_i\}_{i=1,\dots,k}$ d'ensembles convexes, alors on a :

* $X = \bigcap\limits_{i=1}^{k} X_i$ est un ensemble convexe

* $X = \prod\limits_{i=1}^{k} X_i$ est un ensemble convexe

* Si X est convexe, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble $k = \{x/x = \lambda x_1,\, x \in X\}$ est convexe.

1.3.2 Fonction convexe

Définition

1/ Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide.

une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in X^2, \forall t \in [0,1], f(tx+(1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

2/ On dit que f est strictement convexe si :

$$\forall (x,y) \in X^2, \forall t \in [0,1], f(tx+(1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$$

3/ On dit que f est concave si $(-f)$ est convexe.

Théorème (caractérisation des fonctions convexes)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $X \subset \Omega$ un convexe de Ω, soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1/ f est convexe sur X

2/ $f(y) \geq f(x) + < \bigtriangledown f(x),\, y - x >, \forall x,\, y \in X$

3/ $< \bigtriangledown f(y) - \bigtriangledown f(x), y - x > \geq 0, \forall x, y \in X$

Remarque

Lorsque f est définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, $f \in C^1(I)$, l'équivalence de 1 et 3 dans le théorème s'écrit :

f est convexe sur $I \Leftrightarrow < \bigtriangledown f(y) - \bigtriangledown f(x), y - x > \geq 0$

$\Leftrightarrow (f'(y) - f'(x))\ (y - x) \geq 0,\ \forall x,\, y \in I$

$\Leftrightarrow f'$ est croissante sur I

$\Leftrightarrow f''(x) \geq 0,\ \forall x \in I$ et si $f \in X^2$

Remarque

On a l'équivalence entre la convexité stricte et les inégalités 2 et 3 rendues strictes pour $x \neq y$.

Théorème (caractérisation de la convexité avec la matrice hessienne)

Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert convexe $X \subset \mathbb{R}$, alors f est convexe ssi la matrice hessienne $\bigtriangledown^2 f(x)$ est semi-définie positive pour tout $x \in X$ c-à-d :

$$< \bigtriangledown^2 f(x)h,\, h > \geq 0,\ \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Théorème

Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert convexe X de $\mathbb{R}^n$, alors f est strictement convexe si la matrice hessienne est définie positive pour tout $x \in X$ c-à-d :

$$< \bigtriangledown^2 f(x)h, h >> 0, \forall h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

En effet :

Supposons que $\bigtriangledown^2 f(x)$ est définie positive pour tout $x \in X$, la formule de Taylor-Maclaurin donne :

$$\forall (x, y) \in C^2, x \neq y : f(y) = f(x) + < \bigtriangledown f(x), y - x > + \frac{1}{2} < \bigtriangledown^2 f(x + t(y - x))(y - x), y - x >$$

D'où $f(y) > f(x) + < \bigtriangledown f(x),\, y - x >,\, \forall x,\, y \in X,\, x \neq y$

donc f est strictement convexe d'après le théorème.

Remarque

La réciproque est fausse.

Proposition

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, X étant un convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors :

1/ Tout minimum local de f sur X est un minimum global.

2/ Si f est strictement convexe, il y a au plus un point de minimum global.

Chapitre 2

Problème de transport à deux indices

On présente dans ce chapitre les définitions, les propriétés, les conditions d'optimalité et des méthodes pour la résolution du problème de transport à deux indices.

2.1 Position du problème

Supposons que l'offre totale d'un problème de transport est égale la demande, alors :

On appelle les sources par S_1, S_2, ..., S_m et D_1, D_2, ..., D_n les destinations

On présente les stations suivantes :

x_{ij} : quantité transporté de S_i à D_j

c_{ij} : coût unitaire du transport de S_i à D_j

a_i : offre de la source S_i

b_j : demande de la destination D_j

On suppose que les a_i et b_j sont positif $a_i \geq 0$ et $b_j \geq 0$

Il s'agit de minimiser le coût de transport

La fonction objectif sous la forme :

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sous contraintes :

Offre : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $\forall i = \overline{1, m}$.

Demande : $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $\forall j = \overline{1, n}$.

Positivité : $x_{ij} \geq 0$.

2.2 La forme matricielle

Le problème de transport écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{cases} \min Z = c^T x \\ Ax = d \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Où $x = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, ..., x_{2n}, ..., x_{mn})$

c'est-à-dire que l'on déroule la matrice x_{ij} suivante les lignes, la même chose pour

$c = (c_{11}, c_{12}, ..., c_{1n}, c_{21}, ..., c_{2n}, ..., c_{mn})$

On a nm variables et $n + m$ contraintes.

Le vecteur $d = (a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n)$

La matrice A suivante pour $m = 3$, $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

La somme des m premières lignes donne

$$L_1 + L_2 + ... + L_n = (1, 1, ..., 1)$$

Ainsi, la somme des lignes $m + 1$ à $m + n$ donne

$$L_{n+1} + L_{n+2} + ... + L_{n+m} = (1, 1, ..., 1)$$

Si on combine ces deux résultats, on obtient

$$L_1 + L_2 + ... + L_n - L_{n+1} - L_{n+2} - ... - L_{n+m} = 0$$

ceci implique que

$$rang(A) < m + n$$

Proposition :

La matrice A donne les propriétés suivantes :

1- Chaque colonne contient exactement deux entrées non nulles et que sont égaux.

2- Le rang de A est égale à $m+n-1$.

3- Chacun des ligne est une combinaison linéaire des autres lignes.

4- Il y a toujours une ligne de trop que l'on peut éliminer.

5- Il y a exactement $m+n-1$ variables de base réalisable.

Preuve (propriété) :

En renumérotant si nécessaire, il suffit de montrer que les lignes

L_2, L_3, ..., L_{m+n} sont linéairement indépendant pour cela, posons :

$$a_2L_2 + a_3L_3 + ... + a_{m+n}L_{m+n} = 0$$

A cause de la structure de la matrice, ceci implique immédiatement que :

$$a_{m+1} = a_{m+2} = ... = a_{m+n} = 0$$

2.3 Tableaux de transport

Le tableau de transport T est un tableau rectangulaire de m lignes $(i = \overline{1,m})$ associé aux sources S_i et de n colonnes $(j = \overline{1,n})$ associé aux destinataires D_j

Chaque intersection entre une ligne i et une colonne j est une case $(i,\ j)$ de T contient des quantités

- Le coût unitaire c_{ij} de transport de S_i vers D_j.

- La valeur de la variable x_{ij}.

Le tableau T est on outre bordé par une colonne marginale contenant les disponibilités $a_i(i = \overline{1,m})$ est une ligne marginale contenant les demandes $b_j(j = \overline{1,n})$.

c_{11}	c_{12}	c_{13}	$\ldots$	c_{1n}	a_1
c_{21}	c_{22}	c_{23}	$\ldots$	c_{2n}	a_2
c_{31}	c_{32}	c_{33}	$\ldots$	c_{3n}	a_3
c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}	$\ldots$	c_{mn}	a_m
b_1	b_2	b_3	$\ldots$	b_n	

2.4 Dual du problème de transport

Problème de transport donné :

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} = e^T x$$

les contraintes :

$$\forall i = \overline{i, m}, \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \Leftrightarrow A_1 x = a$$

$$\forall j = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \Leftrightarrow A_2 x = b$$

$$x_{ij} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

la forme compact

$$\min Z = c^T x$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \\ -A_1 \\ \\ A_2 \\ \\ -A_2 \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} a \\ \\ -a \\ \\ b \\ \\ -b \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0$$

le dual est :

$$\max Z = a^T u_+ - a^T u_- + b^T v_+ - b^T v_-$$

$$\begin{bmatrix} A_1^T & -A_1^T & A_2^T & -A_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \\ v_+ \\ v_- \end{bmatrix} \leq c$$

$$u_+, u_-, v_+, v_- \geq 0$$

avec $u = u_+ - u_-$ et $v = v_+ - v_-$, on a :

$$\max Z = a^T u + b^T v$$

$$A_1^T u + A_2^T v \leq c$$

$$u, v \text{ libre}$$

$$A_1^T u + A_2^T v \leq c \Leftrightarrow u_i + v_j \leq c_{ij}$$

On a x la solution optimale, selon les conditions KARUSH-KUHN-TUCHER on a :

$$x^T(c - A_1^T u - A_2^T v) = 0$$

On a les relations :

$$u_i + v_j = c_{ij}, \, \forall x_{ij} > 0$$

Si x est solution de base non dégénéré, on a bien la décomposition $u_i + v_j = c_{ij}$ pour les indices des variables de base.

Théorème (Condition de réalisabilité)[4]

Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de transport admet une solution réalisable si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Preuve

Si x est une solution qui vérifié les contraintes, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ceci implique

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Inversement, si

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = T,$$

on pose :

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{T} \geq 0$$

Montrons que x vérifié les contraintes :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j = a_i \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j}{T} = a_i$$

Et

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j = b_j \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{T} = b_j$$

Par conséquent, le problème admet une solution réalisable.

Théorème (conditions d'optimalité)[4]

Soit x une solution réalisable, alors x est optimale si et seulement s'il existe un vecteur

$(u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n)^T \in \mathbb{R}^M$ (où $M = m + n$)

Tel que :

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \text{ pour } x_{ij} = 0$$

Et

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ pour } x_{ij} > 0$$

Preuve

Considérons la formulation suivante du problème (PT) :

$$\min[c^T x : x \geq 0,\ Ax = b]$$

Alors, son dual qu'on note (DPT) est formulé comme suit :

$$\max[b^T x : Ay \leq c,\ y \in \mathbb{R}^M]$$

Soient $y = (u_i, v_j)^T \in \mathbb{R}^M$ avec $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ une solution réalisable du problème (DPT), alors une solution réalisable $x = x_{ij}$ du problème (PT) est optimale si et seulement si la condition de complémentarité suivante est vérifié :

$$(c - A^T y)^T x = 0$$

C'est-à-dire :

$$(c_{ij} - u_i + v_j)^T x_{ij} = 0 \tag{2.1}$$

donc :

1- Si $x_{ij} = 0$, alors il vient des formulations des deux problèmes duaux que $U_i + V_j \leq c_{ij}$ car on a $(c - A^T y)^T x \geq 0$.

2- Si $x_{ij} > 0$, alors il vient de la condition 4 que $u_i + v_j = c_{ij}$.

2.5 Résolution du problème

Pour découvrir la solution optimale de transport on engager par déterminer une solution réalisable et après cela on améliore cette solution jusqu'à l'obtention de la solution optimale.

Nous exposant brièvement quelque méthodes d'initialisation du notre problème avant d'en proposer la méthode du simplexe appliqué a ce dernier.

2.5.1 Méthodes d'initialisation

La méthode d'initialisation les plus connues sont toute basées sur le même principe décrit :

Étape 1 : Déterminer une case $(i,\ j)$ de la grille désignée par la méthode utilisée.

Étape 2 : Comparer a_i et b_j et aller à (2, 1), (2, 2)ou (2, 3) selon le cas :

(2, 1) : Si $a_i < b_j$: $x_{ij} = a_i$, remplacer b_j par $b_j - x_{ij}$ et a_i par 0 et supprimer la ligne i.

(2, 2) : Si $a_i > b_j$: $x_{ij} = b_j$, remplacer a_i par $a_i - x_{ij}$ et b_j par 0 et supprimer la colonne j.

(2, 3) : Si $a_i = b_j$: Affecter $x_{ij} = a_i = b_j$ et pose $a_i = b_j = 0$, nous trouvons dans un cas dégénéré on supprime alors la ligne i, à mois quelle ne soit la seule ligne restante du tableau, au quel cas il faut supprimer la colonne j.

Étape 3 : Répéter l'algorithme sur le tableau réduit jusqu'à ce que tous les a_i soient 0. Saturant une rangée à chaque étape, nous obtiendrons une solution d'au plus $m + n - 1$ variable non nulles. Il y a m lignes et n colonnes qu'on sature l'une après l'autre, sauf lors de la dernière affectation où une ligne et une colonne sont saturées simultanément.

Méthode du coin Nord-ouest

Certainement c'est la méthode la plus facile à mettre en œuvre et de complexité minimale, elle consiste à déterminer la variable de plus petit indice où il est possible d'affecter une quantité, sa simplicité la rendue très populaire. Par contre, la solution trouvée n'a aucune raison d'être près de la solution optimale.

Méthode du coût minimum

Étape 1 : On commencer par chercher la variable x_{ij} avec le coût de transport minimum.

Étape 2 : On sature sa valeur et on sature la ligne ou colonne correspondante.

Étape 3 : Répéter la procédure avec les cases non saturés.

Étape 4 : Si une variable satisfait à la fois la contrainte de ligne et de colonne, ne saturer qu'une d'entre elles.

Étape 5 : Lorsqu'il ne reste plus qu'une case saturer sa ligne et sa colonne.

Méthode de Vogel

Cette méthode mise sur la minimisation d'un système de pénalité. On appelle la pénalité d'une rangée, la différence de coût entre la case de plus petit coût et celle du deuxième plus petit coût de la rangée.

Étape 1 : Détermination d'une case (i, j) de la grille.

1.1 : Évaluer la différence entre les deux plus petits coûts de chaque ligne et de chaque colonne (pénalité).

1.2 : Identifier la rangée correspondant à la plus grande pénalité.

1.2.1 : Si cette rangée est unique alors choisir la case (i, j) la moins coûteuse de cette rangée.

1.2.2 : Si la pénalité maximale est associée à plusieurs lignes ou colonnes alors, l'un ou l'autre des cas suivants se présente :

(a) Si le coût minimal d'une des lignes (ou colonnes) concernées est aussi le coût minimale de sa colonne (ligne) alors choisir la case (i, j) ainsi désignée.

(b) Si aucun des coûts ne répond aux exigences décrites en (a), alors calculer les "pénalités secondes"des rangées touchées par la pénalité maximal.

La pénalité seconde d'une ligne (colonne)est donnée par la différence entre le deuxième plus petit coût de cette ligne (colonne) et le plus petit coût de la colonne (ligne) où apparait ce coût, si dans une des rangées, il existe plusieurs case de coût égale au deuxième plus petit coût, alors calculer toute les pénalités secondes associées à ces cases. Choisir alors la case (i, j) de moindre coût dans la rangée pour la quelle la pénalité seconde prend la plus grand valeur.

Étape 2 et 3 : Ces étapes de la procédure d'initialisation sont effectuées en recalculant les pénalités à chaque itération.

2.6 Méthode du simplexe appliqué au problème de transport

Voila la démarche que sera employée :

1- Détermination d'une solution réalisable de base.

2- Évaluer les coût duaux

* $m+n-1$ équation à $m+n$ inconnues : fixés $u_1 = 0$.

* Résoudre récursivement le système $u_i + v_j - c_{ij} = 0$ pour tout $x_{ij} > 0$.

3- Pour toutes les cases hors-base évaluer la quantité $\overline{c_{ij}} = c_{ij} - u_i - v_j$.

4- La solution de base sera optimale si tous les $\overline{c_{ij}} > 0$.

5- Sinon,

(a) Choisir la case qui minimiser la valeur de $\overline{c_{ij}} < 0$.

(b) Trouver la boucle (une séquence de 4 cellules au moins, telle que : deux cellules consécutives sont dans la même ligne au même colonne) impliquant la nouvelle variable et un sous ensemble des variables existantes.

(c) Trouver la cellule impaire dans la boucle contenant la variable avec la plus petite valeur θ.

(d) Augmenter de θ toutes les variables d'indice pair dans la boucle et réduire de θ toutes les variables d'indice impair.

(e) Les valeurs des variables hors-boucle ne changent pas et recommencer le processus.

2.7 Autre types de problèmes de transport

2.7.1 Cas où l'offre dépasse la demande

Il s'agit du cas :

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

les contraintes

Proposition : $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i,\ \forall i = \overline{1,m}$

demande : $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \forall j = \overline{1,n}.$

positivité : $x_{ij} \geq 0.$

Avec l'hypothèse que le proposition dépasse la demande

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Il suffit d'ajouter une destination fictive et de ramener le problème au cas traité antérieurement, on notera par D_0 la nouvelle destination fictive, notion est d'envoyer toute le surplus des sources à D_0, écrit :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i0} + a_i, \forall i = \overline{1,m}$$

avec $x_{i0} \geq 0$ qui représente le surplus de la source i.

restant à préciser de b_0

$$b_0 = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \geq 0$$

Par construction

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

On choisit certainement $c_{i0} = 0$ car la destination est fictive.

Chapitre 3

Problème de transport à quatre indices

Dans ce chapitre, on parle au problème de transport à quatre indices et de la méthode de résolution. On utilise l'algorithme $AlPT_4$ et on présente l'algorithme $AlPT_4$ modifié pour traité la dégénérescence.

3.1 Position du problème

Supposons que l'offre total d'un problème de transport égal la demande égal la quantité de marchandises et égale la moyenne de transport, alors :

On appelle :

les sources par S_1, S_2, ..., S_m

Les destinations par D_1, D_2, ..., D_n

Les types de marchandises par M_1, M_2, ..., M_p

Les types de camions par T_1, T_2, ..., T_q

On présente les stations suivantes :

x_{ijkl} : Quantité transporté de S_i à D_j.

c_{ijkl} : Coût unitaire transporté de S_i à D_j.

α_i : offre de la source S_i

β_j : Demande de la destination D_j

γ_k : Quantité de marchandise M_k

δ_l : Moyenne de transport T_l

Supposons que les α_i, β_j, γ_k et δ_l sont positif

Le problème de transport axial «de somme axial» à quatre

indices sans capacités (PT4) est :

$$Minimiser Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} c_{ijkl}x_{ijkl}$$

Les contraintes

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} x_{ijkl} = \alpha_i \text{ Pour tout } i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} x_{ijkl} = \beta_j \text{ Pour tout } j = \overline{1,n}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q} x_{ijkl} = \gamma_k \text{ Pour tout } k = \overline{1,p}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} x_{ijkl} = \delta_l \text{ Pour tout } l = \overline{1,q}$$

$$x_{ijkl} \geq 0 \text{ Pour tout } (i,j,k,l)$$

Dans ce problème $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, \delta_l, x_{ijkl}$ et c_{ijkl} sont donnés et tels que pour tout on a $\alpha_i > 0$, $\beta_j > 0, \gamma_k > 0, \delta_l > 0$ et $c_{ijkl} \geq 0$

la formulation est équivalente au programme linéaire :

$$\min Z = c^t x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

avec

* $x = (x_{1111}, ..., x_{mnpq})^T \in \mathbb{R}^M$

* $c = (c_{1111}, ..., c_{mnpq})^T \in \mathbb{R}^M$

* $d = (d_{1111}, ..., d_{mnpq})^T \in \mathbb{R}^M$

* $b = (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_n, \gamma_1, ..., \gamma_p, \delta_1, ..., \delta_q)^T \in \mathbb{R}^M$

* A est une $M \times N$ matrice

*$M = m + n + p + q$ et $N = mnpq$

3.2 Préliminaires

3.2.1 Matrice des coefficients

Dans cette représentation $x = (x_{1111}, x_{1211}, ..., x_{mnpq})$ on associé à chaque $i, j, k, l \in 1, ..., m \times 1, ..., n \times 1, ..., p \times 1, ..., q$ un vecteur $p_{ijkl} \in \mathbb{R}^M$.

Seulement quatre composantes du vecteur P_{ijkl} sont non nulles, elles sont situé dans les lignes i, $m + j$, $m + n + k$ et $m + n + p + l$, et ayant 1 comme valeur commune. La matrice A des coefficients est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} P_{1111} & \dots & P_{1npq} & P_{2111} & \dots & P_{2npq} & \dots & P_{m111} & \dots & P_{mnpq} \\ 1 & \dots & 1 & & \dots & & \dots & & & \\ & \dots & & 1 & \dots & 1 & \dots & & & \\ & \dots & & & \dots & & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & & 1 & \dots & & \dots & 1 & \dots & \end{pmatrix}$$

Les autres éléments de A sont tout nuls.

Contrairement au problème de transport à deux indices, la matrice A n'est pas totalement unimodulaire car elle possède des mineurs qui n'appartiennent pas à l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$.

Notons que

$$rang(A) = M + N - 3$$

3.2.2 Tableau de transport

On appel tableau de transport le tableau qui présente les données du problème. Ce tableau est de M lignes et de N colonnes, deux lignes marginales et aussi une colonne marginale. Les cases de ces N colonnes de la première et la deuxième ligne marginale sont réservées aux valeurs des quantités, c_{ijkl} et x_{ijkl} respectivement. Les cases de la colonne marginale sont réservées aux valeurs des quantités α_i, β_j, γ_k et δ_l respectivement. Finalement, l'entrée de la case du tableau située à la ligne correspondante à $\alpha_{i'}$ et à la colonne P_{ijkl} est 1 si $i = i^{'}$ et 0 ailleurs. Même pour $\beta_{j'}$, $\gamma_{k'}$ et $\delta_{l'}$. On donne un exemple ci-dessous.

c_{1111}	c_{1211}	$\dots$	c_{mnpq}	/
x_{1111}	x_{1211}	$\dots$	x_{mnpq}	/
1	1	$\dots$	0	α_1
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\dots$	1	α_m
1	0	$\dots$	0	β_1
0	1	$\dots$	0	β_2
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\dots$	1	β_n
1	1	$\dots$	0	γ_1
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\dots$	1	γ_p
1	1	$\dots$	0	δ_1
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\dots$	1	δ_q

3.2.3 Cycle

On appelle cycle, tout ensemble μ contenant un nombre $\omega\omega > 1$ de case $(i,\, j,\, k,\, l)$ dont les vecteurs P_{ijkl} correspondants sont liés, mais toute sous famille de $(\omega - 1)$ éléments de cette famille de vecteurs est libre.

Les vecteurs P_{ijkl} correspondant à un cycle μ vérifiant la relation

$$\sum_{(i,j,k,l)\in\mu} \alpha_{ijkl} P_{ijkl} = 0, \text{ avec } \alpha_{ijkl} \neq 0.$$

Les nombres α_{ijkl} sont appelés coefficients du cycle.

Définition

* La solution réalisable x de (PT4) est dite de base si les colonnes de la matrice A_x obtenue de A gardant seulement les colonnes correspondant aux variables $x_{ijkl} > 0$ sont linéairement indépendantes

* Une solution réalisable de base est dite non dégénérée si :

$$rang(A_x) = rang(A)$$

* Soit x une solution réalisable de base, le 4-uplet $(i,\, j,\, k,\, l)$ tel que $x_{ijkl} > 0$ est appelé case intéressante, dans le cas contraire $(i,\, j,\, k,\, l)$ est non intéressante

3.3 Résolution du problème

Théorème (condition de réalisabilité)[18]

Le problème (PT4) admet une solution réalisable si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k = \sum_{l=1}^{q} \delta_l$$

Preuve

Supposons que le problème (PT4) ait une solution réalisable x_{ijkl}

Alors :

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k = \sum_{l=1}^{q} \delta_l = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} x_{ijkl}$$

La condition :$\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j = \sum\limits_{k=1}^{p} \gamma_k = \sum\limits_{l=1}^{q} \delta_l$ est contrôler
On pose $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j = \sum\limits_{k=1}^{p} \gamma_k = \sum\limits_{l=1}^{q} \delta_l = H$
On prend un vecteur x tel que $x_{ijkl} = \frac{\alpha_i \beta_j \gamma_k \delta_l}{H^3}$Pour tout (i, j, k, l), on peut aisément contrôler que x une solution réalisable pour le problème (PT4)

Théorème (condition d'optimalité)[18]

Soit x une solution réalisable pour le problème (PT_4), alors x est optimale si et seulement s'il existe un vecteur

$$(u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_p, t_1, ..., t_q)^T \in \mathbb{R}^M$$

Tel que

$$u_i + v_j + w_k + t_l \leq c_{ijkl}$$

pour

$$x_{ijkl} = 0$$

et

$$u_i + v_j + w_k + t_l = c_{ijkl}$$

pour

$$x_{ijkl} > 0$$

Preuve

La formulation

$$\min[c^T x : x \geq 0, Ax = b]$$

son dual qu'on note (DPT4) est formulé :

$$max[b^T y : y \leq c, y \in \mathbb{R}^M]$$

Soit $y = (u_i, v_j, w_k, t_l)^T \in \mathbb{R}^M$ avec $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, p}$ et $l = \overline{1, q}$ une solution réalisable du problème (DPT4) alors une solution réalisable $x = x_{ijkl}$ du problème (TP4) est optimale si et seulement si la condition de complémentarité est vérifiée

$$(c - A^T y)^T x = 0$$

i.e

$$(c_{ijkl} - u_i + v_j + w_k + t_l)^T x_{ijkl} = 0$$

Alors

1- Si $x_{ijkl} = 0$ donc il vient des formulation des deux problèmes duaux que $u_i + v_j + w_k + t_l \leq c_{ijkl}$

car $(c - A^T y)^T x \geq 0$.

2- Si $x_{ijkl} > 0$ donc il vient de la condition 3.3

que

$$(u_i) + v_j + w_k + t_l = c_{ijkl}$$

3.4 Méthode de résolution

3.4.1 L'algorithme $AlPT_4$

La méthode de résolution autoriser d'avoir une solution réalisable initiale de base pour un problème de transport à deux indices peut être généralisée pour un problème de transport à quatre indice elle constituer deux phase :

Phase 1 : (Détermination d'une solution réalisable initiale de base)

1- Choisir la case de moindre coût

$$c_{i'j'k'l'} = \min c_{ijkl}$$

et prendre leur indice $(i'j'k'l')$.

2- Donner à une variable quelconque $x_{i'j'k'l'}$ la valeur

$$x_{i'j'k'l'} = \min(\alpha_{i'}, \beta_{j'}, \gamma_{k'}, \delta_{l'})$$

3- Substituer les quantités $\alpha_{i'}$, $\beta_{j'}$, $\gamma_{k'}$ et $\delta_{l'}$ par $\alpha_{i'} - x_{i'j'k'l'}$, $\beta_{j'} - x_{i'j'k'l'}$, $\gamma_{k'} - x_{i'j'k'l'}$ et $\delta_{l'} - x_{i'j'k'l'}$ (respectivement).

3- Si $x_{i'j'k'l'} = \alpha_{i'}$, alors prendre $x_{i'jkl} = 0, \forall(i, j, k) \neq (j', k', l')$ i,e la ligne i' dans le tableau de transport est supprimer, de la même création, supprimer la ligne j', k' ou l' dans le tableau de transport, si $x_{i'j'k'l'} = \beta_{j'}$, $x_{i'j'k'l'} = \gamma_{k'}$, ou $x_{i'j'k'l'} = \delta_{l'}$ (respectivement).

4- Répéter les trois opérations précédent jusqu'à ce que toute les valeurs des variables x_{ijkl} soit déterminer.

Phase 2 : (amélioration d'une solution réalisable de base)

Soit $x^{(0)}$ une solution initial de base prendre $r = 0$.

a/ Déterminer l'ensemble $I^{(r)}$ des cases $(ijkl)$ intéressantes.

Si $I^{(r)} = m + n + p + q - 3$, donc le problème est non dégénéré, alors en passe à

l'étape (b).

Si $I^{(r)} < m + n + p + q - 3$, donc le problème est dégénéré, on complète le nombre des cases

jusqu'à $m + n + p + q - 3$ comme suit :

On appelle E_b l'ensemble des cases intéressantes et E_h l'ensemble des autres cases

n'appartient pas à E_b.

On appelle aussi E_s l'ensemble des cases complémentaires tel que :

$E_s \cup E_b$ est libre.

b/ Pour tout $(i, j, k, l) \in I^{(r)}$, Résoudre le système linéaire

$$u_i^{(r)} + v_j^{(r)} + w_k^{(r)} + t_l^{(r)} = c_{ijkl}$$

c/ Pour tout $(i, j, k, l) \notin I^{(r)}$ déterminer

$$\Delta_{ijkl}^{(r)} = c_{ijkl} - (u_i^{(r)} + v_j^{(r)} + w_k^{(r)} + t_l^{(r)})$$

Si la condition d'optimalité

$$\Delta_{ijkl}^{(r)} \geq 0, \forall (i, j, k, l) \notin I^{(r)}$$

Alors la solution $x^{(r)}$ est optimale

Fin

Sinon

d/ Définir

$$\Delta_{i_0 j_0 k_0 l_0}^{(r)} = \min_{(ijkl)} \Delta_{ijkl}^{(r)} \text{ tel que } \Delta_{ijkl}^{(r)} < 0$$

e/ Définir un cycle $\mu^{(r)}$ contenant certain cases attachant (i, j, k, l) et la base non attachant

(i_0, j_0, k_0, l_0) correspondantes à $\Delta_{i_0, j_0, k_0, l_0}^{(r)}$

Prendre

$$\sigma^{(r)} = \{(i, j, , k, l) : (i, j, k, l) \text{ formant le cycle } \mu^{(r)}\}$$
$$\sigma^{(r)-} = \{(i, j, k, l) : (i, j, k, l) \in \sigma^{(r)} \text{ et } \alpha_{ijkl} < 0\}$$

Définir

$$\theta^{(r)} = \min_{(i,j,k,l)\in\sigma^{(r)-}} (x^{(r)}_{ijkl} / - \alpha_{ijkl})$$

Après

$$x^{(r+1)} = \{x^{(r)}_{ijkl} + \alpha_{ijkl}\theta^{(r)}, (i, j, k, l) \in \sigma^{(r)}\} \cup \{x^{(r)}_{ijkl}, (i, j, k, l) \notin \sigma^{(r)}\}$$

f/ Prendre $r = r + 1$ et répéter les étapes de a/ à e/ jusqu'à ce que la condition d'optimalité soit contrôler.

3.4.2 L'algorithme $AlPT_4$ modifié

L'algorithme $AlPT_4$ modifié basé à l'algorithme $AlPT_4$ avec une modification à la phase 1 pour traité la dégénérescence.

Phase 1 : (Détermination d'une solution réalisable initiale de base)

1- Choisir la case de moindre coût

$$c_{i'j'k'l'} = \min c_{ijkl}$$

et prendre leur indice $(i'j'k'l')$.

2- Donner à une variable quelconque $x_{i'j'k'l'}$ la valeur

$$x_{i'j'k'l'} = \min(\alpha_{i'}, \beta_{j'}, \gamma_{k'}, \delta_{l'})$$

Si

$$\alpha_{i'} = \beta_{j'} \vee \alpha_{i'} = \gamma_{k'} \vee \alpha_{i'} = \delta_{l'} \vee \beta_{j'} = \gamma_{k'} \vee \beta_{j'} = \delta_{l'} \vee \gamma_{k'} = \delta_{l'}$$

Alors, on retourne à l'étape (1) et choisir la case du deuxième moindre coût.

Sinon on passe à l'étape (3).

3- Substituer les quantités $\alpha_{i'}$, $\beta_{j'}$, $\gamma_{k'}$ et $\delta_{l'}$ par $\alpha_{i'} - x_{i'j'k'l'}$, $\beta_{j'} - x_{i'j'k'l'}$, $\gamma_{k'} - x_{i'j'k'l'}$ et $\delta_{l'} - x_{i'j'k'l'}$ (respectivement).

3- Si $x_{i'j'k'l'} = \alpha_{i'}$, alors prendre $x_{i'jkl} = 0, \forall(i, j, k) \neq (j', k', l')$ i,e la ligne i' dans le tableau de transport est supprimer, de la même création, supprimer la ligne j', k' ou l' dans le tableau de transport, si $x_{i'j'k'l'} = \beta_{j'}$, $x_{i'j'k'l'} = \gamma_{k'}$, ou $x_{i'j'k'l'} = \delta_{l'}$ (respectivement).

4- Répéter les trois opérations précédent jusqu'à ce que toute les valeurs des variables x_{ijkl} soit déterminer.

Phase 2 : (amélioration d'une solution réalisable de base)

Soit $x^{(0)}$ une solution initial de base prendre $r = 0$.

a/ Déterminer l'ensemble $I^{(r)}$ des cases $(ijkl)$ intéressantes

b/ Pour tout $(i, j, k, l) \in I^{(r)}$, Résoudre le système linéaire

$$u_i^{(r)} + v_j^{(r)} + w_k^{(r)} + t_l^{(r)} = c_{ijkl}$$

c/ Pour tout $(i, j, k, l) \notin I^{(r)}$ déterminer

$$\Delta_{ijkl}^{(r)} = c_{ijkl} - (u_i^{(r)} + v_j^{(r)} + w_k^{(r)} + t_l^{(r)})$$

Si la condition d'optimalité

$$\Delta_{ijkl}^{(r)} \geq 0, \, \forall (i, j, k, l) \notin I^{(r)}$$

Alors la solution $x^{(r)}$ est optimale

Fin

Sinon

d/ Définir

$$\Delta_{i_0 j_0 k_0 l_0}^{(r)} = \min_{(ijkl)} \Delta_{ijkl}^{(r)} \text{ tel que } \Delta_{ijkl}^{(r)} < 0$$

e/ Définir un cycle $\mu^{(r)}$ contenant certain cases attachant (i, j, k, l) et la base non attachant

(i_0, j_0, k_0, l_0) correspondantes à $\Delta_{i_0, j_0, k_0, l_0}^{(r)}$

Prendre

$$\sigma^{(r)} = \{(i, j, , k, l) : (i, j, k, l) \text{ formant le cycle } \mu^{(r)}\}$$

$$\sigma^{(r)-} = \{(i, j, k, l) : (i, j, k, l) \in \sigma^{(r)} \text{ et } \alpha_{ijkl} < 0\}$$

Définir

$$\theta^{(r)} = \min_{(i,j,k,l) \in \sigma^{(r)-}} (x_{ijkl}^{(r)} / - \alpha_{ijkl})$$

Après

$$x^{(r+1)} = \{x_{ijkl}^{(r)} + \alpha_{ijkl} \theta^{(r)}, (i, j, k, l) \in \sigma^{(r)}\} \cup \{x_{ijkl}^{(r)}, (i, j, k, l) \notin \sigma^{(r)}\}$$

f/ Prendre $r = r + 1$ et répéter les étapes de a/ à e/ jusqu'à ce que la condition d'optimalité

soit contrôler.

3.4.3 Exemple

m=2, n=2, p=2, l=2.

$\alpha_1 = 7$	$\beta_1 = 6$	$\gamma_1 = 2$	$\delta_1 = 1$
$\alpha_2 = 3$	$\beta_2 = 4$	$\gamma_2 = 8$	$\delta_2 = 9$

$ijkl$	1111	1112	1121	1122	1211	1212	1221	1222	2111	2112	2121	2122	2211	2212	2221	2222
c_{ijkl}	17	15	32	5	18	45	12	6	7	23	11	28	9	8	10	14

L'algorithme $AlPT_4$:

On utilise la méthode du coût minimale :

Phase 1 :
1/
* Choisir la case de moindre coût :

$$\min c_{ijkl} = c_{1122}$$

donc :

$$ijkl = 1122$$

* Affectation de la case choisit :

$$x_{1122} = \min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_2) = \min(7, 6, 8, 9)$$

Donc :

$$x_{1122} = 6$$

*
$\alpha_1 = \alpha_1 - 6$
$\beta_1 = \beta_1 - 6$
$\gamma_2 = \gamma_2 - 6$
$\delta_2 = \delta_2 - 6$

$\alpha_1 = 1$	$\beta_1 = 0$	$\gamma_1 = 2$	$\delta_1 = 1$
$\alpha_2 = 3$	$\beta_2 = 4$	$\gamma_2 = 2$	$\delta_2 = 3$

$$x_{i1kl} = 0, \forall\ (i,\ k,\ l) \neq (1,\ 2,\ 2)$$

* Alors :

$ijkl$	1111	1112	1121	1122	1211	1212	1221	1222	2111	2112	2121	2122	2211	2212	2221	2222
c_{ijkl}	0	0	0	6	18	45	12	6	0	0	0	0	9	8	10	14

2/
* Choisir la case de moindre coût :

$$\min\ c_{ijkl} = c_{1222}$$

donc :

$$ijkl = 1222$$

* Affectation de la case choisit :

$$x_{1222} = \min(\alpha_1,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \delta_2) = \min(1,\ 4,\ 2,\ 3)$$

Donc :

$$x_{1222} = 1$$

*
$\alpha_1 = \alpha_1 - 1$
$\beta_2 = \beta_2 - 1$
$\gamma_2 = \gamma_2 - 1$
$\delta_2 = \delta_2 - 1$

$\alpha_1 = 0$	$\beta_1 = 0$	$\gamma_1 = 2$	$\delta_1 = 1$
$\alpha_2 = 3$	$\beta_2 = 3$	$\gamma_2 = 1$	$\delta_2 = 2$

$$x_{1jkl} = 0, \forall\ (j,\ k,\ l) \neq (2,\ 2,\ 2)$$

* Alors :

$ijkl$	1111	1112	1121	1122	1211	1212	1221	1222	2111	2112	2121	2122	2211	2212	2221	2222
x_{ijkl}	0	0	0	6	0	0	0	1	0	0	0	0	9	8	10	14

3/
* Choisir la case de moindre coût :

$$\min c_{ijkl} = c_{2212}$$

donc :

$$ijkl = 2212$$

* Affectation de la case choisit :

$$x_{2212} = \min\,(\alpha_2,\, \beta_2,\, \gamma_1,\, \delta_2) = \min(3,\, 3,\, 2,\, 2)$$

Donc :

$$x_{2212} = 2$$

*
$\alpha_2 = \alpha_2 - 2$
$\beta_2 = \beta_2 - 2$
$\gamma_1 = \gamma_1 - 2$
$\delta_2 = \delta_2 - 2$

$\alpha_1 = 0$	$\beta_1 = 0$	$\gamma_1 = 0$	$\delta_1 = 1$
$\alpha_2 = 1$	$\beta_2 = 1$	$\gamma_2 = 1$	$\delta_2 = 0$

$$x_{i1kl} = 0,\ \forall\ (i,\, j,\, l) \neq (2,\, 2,\, 2)$$

$$x_{ijk1} = 0,\ \forall\ (i,\, j,\, k) \neq (2,\, 2,\, 1)$$

* Alors :

$ijkl$	1111	1112	1121	1122	1211	1212	1221	1222	2111	2112	2121	2122	2211	2212	2221	2222
c_{ijkl}	0	0	0	6	18	45	12	6	0	0	0	0	0	2	0	14

4/
* Choisir la case de moindre coût :

$$\min c_{ijkl} = c_{2222}$$

donc :

$$ijkl = 2222$$

* Affectation de la case choisit :

$$x_{2222} = \min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2) = \min(1, 1, 1, 1)$$

Donc :

$$x_{2222} = 1$$

*
$\alpha_2 = \alpha_2 - 1$
$\beta_2 = \beta_2 - 1$
$\gamma_2 = \gamma_2 - 1$
$\delta_2 = \delta_2 - 1$

$\alpha_1 = 0$	$\beta_1 = 0$	$\gamma_1 = 0$	$\delta_1 = 0$
$\alpha_2 = 0$	$\beta_2 = 0$	$\gamma_2 = 0$	$\delta_2 = 0$

$$x_{2jkl} = 0, \forall (j, k, l) \neq (2, 2, 2)$$

$$x_{i2kl} = 0, \forall (i, k, l) \neq (2, 2, 2)$$

$$x_{ij2l} = 0, \forall (i, j, l) \neq (2, 2, 2)$$

$$x_{ijk2} = 0, \forall (i, j, k) \neq (2, 2, 2)$$

* Alors :

$ijkl$	1111	1112	1121	1122	1211	1212	1221	1222	2111	2112	2121	2122	2211	2212	2221	2222
c_{ijkl}	0	0	0	6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	1

Phase 2 :

1/

a/ Déterminer $I^{(0)}$.

Les x_{ijkl} sont déterminé mais :

Le nombre des variables de x_{ijkl} non nuls $x_{ijkl} = 4$ et $m + n + p + q - 3 = 5$, Alors :

$$x_{ijkl} < m+n+p+q-3$$

On appelle E_b l'ensemble des variables de x_{ijkl} non nuls et E_h l'ensemble des autres indices qui

n'appartient pas à E_b, tel que :

$$E_b = \{(1122), (1222), (2212), (2222)\}$$

$E_h = \{(1111), (1112), (1121), (1211), (1212), (1221), (2111), (2112), (2121), (2122), (2211),$

$(2221)\}$

Soit $E_s = \{(1111)\}$, vérifiant que $E_b \cup E_s$ est libre.

$$\alpha_1 P_{1111} + \alpha_2 P_{1122} + \alpha_3 P_{1222} + \alpha_4 P_{2212} + \alpha_5 P_{2222} = 0$$

Alors :

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_4+\alpha_5=0 \\ \alpha_1+\alpha_2=0 \\ \alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=0 \\ \alpha_1+\alpha_4=0 \\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_5=0 \\ \alpha_1=0 \\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=0$$

Alors libre.

Donc $I^0 = E_b \cup E_s$:

$$I^0 = \{(1111), (1122), (1222), (2212), (2222)\}$$

Et

$$x^0 = \{x_{1111}=0,\ x_{1122}=6,\ x_{1222}=1,\ x_{2212}=2,\ x_{2222}=1\}$$

b/ $u_i^0 + v_j^0 + w_k^0 + t_l^0 = c_{ijkl}$, $(ijkl) \in I^{(0)}$, $u_1 = v_1 = w_1 = 0$

$$\begin{cases} u_1^{(0)}+v_1^{(0)}+w_1^{(0)}+t_1^{(0)}=17 \\ u_1^{(0)}+v_1^{(0)}+w_2^{(0)}+t_2^{(0)}=5 \\ u_1^{(0)}+v_2^{(0)}+w_2^{(0)}+t_2^{(0)}=6 \\ u_2^{(0)}+v_2^{(0)}+w_1^{(0)}+t_2^{(0)}=8 \\ u_2^{(0)}+v_2^{(0)}+w_2^{(0)}+t_2^{(0)}=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1^{(0)}=17 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ w_2^{(0)}+t_2^{(0)}=5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ v_2^{(0)}+w_2^{(0)}+t_2^{(0)}=6 \ldots\ldots\ldots\ldots(3) \\ u_2^{(0)}+v_2^{(0)}+t_2^{(0)}=8 \ldots\ldots\ldots\ldots(4) \\ u_2^{(0)}+v_2^{(0)}+w_2^{(0)}+t_2^{(0)}=14 \ldots..(5) \end{cases}$$

De (1) :

$$t_1^{(0)} = 17$$

De (2) et (3) :

$$v_2^{(0)} + 5 = 6 \Rightarrow v_2^{(0)} = 1$$

De (4) et (5) :

$$w_2^{(0)} + 8 = 14 \Rightarrow w_2^{(0)} = 6$$

De (3) :

$$7 + t_2^{(0)} = 6 \Rightarrow t_2^{(0)} = (-1)$$

De (4) :

$$u_2^{(0)} + 1 - 1 = 8 \Rightarrow u_2^{(0)} = 8$$

c/

Pour tout $(i,\, j,\, k,\, l) \notin I^{(0)}$, $\Delta_{ijkl}^{(0)} = c_{ijkl} - (u_i^0 + v_j^0 + w_k^0 + t_l^0)$

$\Delta_{1112}^{(0)} = 15 - (0 + 0 + 0 - 1) = 16$

$\Delta_{1121}^{(0)} = 32 - (0 + 0 + 6 + 17) = 9$

$\Delta_{1211}^{(0)} = 18 - (0 + 1 + 0 + 17) = 0$

$\Delta_{1212}^{(0)} = 45 - (0 + 1 + 0 - 1) = 45$

$\Delta_{1221}^{(0)} = 12 - (0 + 1 + 6 + 17) = -12$

$\Delta_{2111}^{(0)} = 7 - (8 + 0 + 0 + 17) = -18$

$\Delta_{2112}^{(0)} = 23 - (8 + 0 + 0 - 1) = 16$

$\Delta_{2121}^{(0)} = 11 - (8 + 0 + 6 + 17) = -20$

$\Delta_{2122}^{(0)} = 28 - (8 + 0 + 6 - 1) = 15$

$\Delta_{2211}^{(0)} = 9 - (8 + 1 + 0 + 17) = -17$

$\Delta_{2221}^{(0)} = 10 - (8 + 1 + 6 + 17) = -22$

d/

$\Delta_{i_0 j_0 k_0 l_0}^{(0)} = \min \Delta_{ijkl}^{(0)}$ tel que : $\Delta_{ijkl} < 0$

$\Delta_{i_0 j_0 k_0 l_0}^{(0)} = \Delta_{2221}^{(0)}$, donc (2221) entrant de la base

e/ Prendre $\sigma^{(0)}$ et $\sigma^{(0)-}$ et définir $\theta^{(0)}$

$$\alpha_{1111}P_{1111}+\alpha_{1122}P_{1122}+\alpha_{1222}P_{1222}+\alpha_{2212}P_{2212}+\alpha_{2222}P_{2222}=-P_{2221}$$

$$\begin{cases}\alpha_{1111}+\alpha_{1122}+\alpha_{1222}=0\\ \alpha_{2212}+\alpha_{2222}=-1\\ \alpha_{1111}+\alpha_{1122}=0\\ \alpha_{1222}+\alpha_{2212}+\alpha_{2222}=-1\\ \alpha_{1111}+\alpha_{2212}=0\\ \alpha_{1122}+\alpha_{1222}+\alpha_{2222}=-1\\ \alpha_{1111}=-1\\ \alpha_{1122}+\alpha_{1222}+\alpha_{2212}P_{+}\alpha_{2222}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_{1111}=-1\\ \alpha_{1122}=1\\ \alpha_{1222}=0\\ \alpha_{2212}=1\\ \alpha_{2222}=-2\end{cases}$$

alors :

$$\sigma^{(0)}=\{(1111),(1122),(1222),(2212),(2221),(2222)\}$$

Et

$$\sigma^{(0)-}=\{(1111),(2222)\}$$

Donc

$$\theta^{(0)}=\min(\frac{x_{1111}}{-\alpha_{1111}},\frac{x_{2222}}{-\alpha_{2222}})=\min(0,\frac{1}{2})=0$$

Alors x ne change pas (car $x_{ijkl}=x_{ijkl}-\alpha_{i'j'k'l'}\theta^{(r)}$) et x_{1111} sortant de la base.

$$x^{(1)}=\{x_{1122}=6,\ x_{1222}=1,\ x_{2212}=2,\ x_{2221}=0,\ x_{2222}=1\}$$

2/

a/ Déterminer $I^{(1)}$:

$$I^{(1)}=\{(1122),\ (1222),\ (2212),\ (2221),\ (2222)\}$$

b/ $u_i^{(1)}+v_j^{(1)}+w_k^{(1)}+t_l^{(1)}=c_{ijkl}$, $(ijkl)\in I^{(1)}$, $u_1=v_1=w_1=0$

$$\begin{cases}u_1^{(1)}+v_1^{(1)}+w_2^{(1)}+t_2^{(1)}=5\\ u_1^{(1)}+v_2^{(1)}+w_2^{(1)}+t_2^{(1)}=6\\ u_2^{(1)}+v_2^{(1)}+w_1^{(1)}+t_2^{(1)}=8\\ u_2^{(1)}+v_2^{(1)}+w_2^{(1)}+t_1^{(1)}=10\\ u_2^{(1)}+v_2^{(1)}+w_2^{(1)}+t_2^{(1)}=14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}w_2^{(1)}+t_2^{(1)}=5\text{..........................}(1)\\ v_2^{(1)}+w_2^{(1)}+t_2^{(1)}=6\text{................}(2)\\ u_2^{(1)}+v_2^{(1)}+t_2^{(1)}=8\text{.................}(3)\\ u_2^{(1)}+v_2^{(1)}+w_2^{(1)}+t_1^{(1)}=10\text{......}(4)\\ u_2^{(1)}+v_2^{(1)}+w_2^{(1)}+t_2^{(1)}=14\text{.....}(5)\end{cases}$$

De (2) et (1) :

$$v_2^{(1)}+5=6\Rightarrow v_2^{(1)}=1$$

De (3) :

$$u_2^{(1)} + t_2^{(1)} + 1 = 8 \Rightarrow u_2^{(1)} + t_2^{(1)} = 7 .... (6)$$

De (5) et (6) :

$$7 + 1 + w_2^{(1)} = 14 \Rightarrow w_2^{(1)} = 6$$

De (2) :

$$1 + 6 + t_2^{(1)} = 6 \Rightarrow t_2^{(1)} = -1$$

De (5) :

$$u_2^{(1)} + 1 + 6 - 1 = 14 \Rightarrow u_2^{(1)} = 8$$

De (4) :

$$8 + 1 + 6 + t_1^{(1)} = 10 \Rightarrow t_1^{(1)} = -5$$

c/

Pour tout $(i,\, j,\, k,\, l) \notin I^{(1)}$, $\Delta_{ijkl}^{(1)} = c_{ijkl} - (u_i^{(1)} + v_j^{(1)} + w_k^{(1)} + t_l^{(1)})$

$\Delta_{1111}^{(1)} = 17 - (0 + 0 + 0 - 5) = 22$

$\Delta_{1112}^{(1)} = 15 - (0 + 0 + 0 - 1) = 16$

$\Delta_{1121}^{(1)} = 32 - (0 + 0 + 6 - 5) = 31$

$\Delta_{1211}^{(1)} = 18 - (0 + 1 + 0 - 5) = 22$

$\Delta_{1212}^{(1)} = 45 - (0 + 1 + 0 - 1) = 45$

$\Delta_{1221}^{(1)} = 12 - (0 + 1 + 6 - 5) = 10$

$\Delta_{2111}^{(1)} = 7 - (8 + 0 + 0 - 5) = 4$

$\Delta_{2112}^{(1)} = 23 - (8 + 0 + 0 - 1) = 16$

$\Delta_{2121}^{(1)} = 11 - (8 + 0 + 6 - 5) = 2$

$\Delta_{2122}^{(1)} = 28 - (8 + 0 + 6 - 1) = 15$

$\Delta_{2211}^{(1)} = 9 - (8 + 1 + 0 - 5) = 5$

La condition d'optimalité est vérifié.

Donc la solution optimal est :

$$x_{1122} = 6,\; x_{1222} = 1,\; x_{2212} = 2,\; x_{2221} = 0,\; x_{2222} = 1$$

On résout le même exemple précédent avec l'algorithme $AlPT_4$ modifié :

3.4.4 Exemple

m=2, n=2, p=2, l=2.

$\alpha_1 = 7$	$\beta_1 = 6$	$\gamma_1 = 2$	$\delta_1 = 1$
$\alpha_2 = 3$	$\beta_2 = 4$	$\gamma_2 = 8$	$\delta_2 = 9$

$ijkl$	1111	1112	1121	1122	1211	1212	1221	1222	2111	2112	2121	2122	2211	2212	2221	2222
c_{ijkl}	17	15	32	5	18	45	12	6	7	23	11	28	9	8	10	14

On utilise la méthode du coût minimal modifié :

Phase 1 :
1/
* Choisir la case de moindre coût :

$$\min c_{ijkl} = c_{1122}$$

donc :

$$ijkl = 1122$$

* Affectation de la case choisit :

$$x_{1122} = \min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_2) = \min(7, 6, 8, 9)$$

Donc :

$$x_{1122} = 6$$

*
$\alpha_1 = \alpha_1 - 6$
$\beta_1 = \beta_1 - 6$
$\gamma_2 = \gamma_2 - 6$
$\delta_2 = \delta_2 - 6$

$\alpha_1 = 1$	$\beta_1 = 0$	$\gamma_1 = 2$	$\delta_1 = 1$
$\alpha_2 = 3$	$\beta_2 = 4$	$\gamma_2 = 2$	$\delta_2 = 3$

$$x_{i1kl} = 0, \forall\ (i,\ k,\ l) \neq (1,\ 2,\ 2)$$

* Alors :

$ijkl$	1111	1112	1121	1122	1211	1212	1221	1222	2111	2112	2121	2122	2211	2212	2221	2222
c_{ijkl}	0	0	0	6	18	45	12	6	0	0	0	0	9	8	10	14

2/
* Choisir la case de moindre coût :

$$\min c_{ijkl} = c_{1222}$$

donc :

$$ijkl = 1222$$

* Affectation de la case choisit :

$$x_{1222} = \min(\alpha_1,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \delta_2) = \min(1,\ 4,\ 2,\ 3)$$

Donc :

$$x_{1222} = 1$$

*
$\alpha_1 = \alpha_1 - 1$
$\beta_2 = \beta_2 - 1$
$\gamma_2 = \gamma_2 - 1$
$\delta_2 = \delta_2 - 1$

$\alpha_1 = 0$	$\beta_1 = 0$	$\gamma_1 = 2$	$\delta_1 = 1$
$\alpha_2 = 3$	$\beta_2 = 3$	$\gamma_2 = 1$	$\delta_2 = 2$

$$x_{1jkl} = 0, \forall\ (j,\ k,\ l) \neq (2,\ 2,\ 2)$$

* Alors :

$ijkl$	1111	1112	1121	1122	1211	1212	1221	1222	2111	2112	2121	2122	2211	2212	2221	2222
x_{ijkl}	0	0	0	6	0	0	0	1	0	0	0	0	9	8	10	14

3/
* Choisir la case de moindre coût :

$$\min\, c_{ijkl} = c_{2212}$$

donc :

$$ijkl = 2212$$

* Affectation de la case choisit :

$$x_{2212} = \min\,(\alpha_2,\, \beta_2,\, \gamma_1,\, \delta_2) = \min(3,\, 3,\, 2,\, 2)$$

On a :

$$\gamma_1 = \delta_2$$

Alors on passe à l'étape 1 et on choisit la case du deuxième coût moindre :

** La case du deuxième moindre coût :

$$\min\, c_{ijkl} = c_{2211}$$

donc :

$$ijkl = 2211$$

** Affectation de la case choisit :

$$x_{2211} = \min\,(\alpha_2,\, \beta_2,\, \gamma_1,\, \delta_1) = \min(3,\, 3,\, 2,\, 1)$$

Donc :

$$x_{2211} = 1$$

**
$\alpha_2 = \alpha_2 - 1$
$\beta_2 = \beta_2 - 1$
$\gamma_1 = \gamma_1 - 1$
$\delta_2 = \delta_2 - 1$

$\alpha_1 = 0$	$\beta_1 = 0$	$\gamma_1 = 1$	$\delta_1 = 0$
$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 = 2$	$\gamma_2 = 1$	$\delta_2 = 2$

$$x_{ijk1} = 0, \forall\ (i,\ j,\ k) \neq (2,\ 2,\ 1)$$

* Alors :

$ijkl$	1111	1112	1121	1122	1211	1212	1221	1222	2111	2112	2121	2122	2211	2212	2221	2222
x_{ijkl}	0	0	0	6	0	0	0	1	0	0	0	0	1	8	0	14

4/
* Choisir la case moindre :

$$\min\ c_{ijkl} = c_{2212}$$

donc :

$$ijkl = 2212$$

* Affectation de la case choisir :

$$x_{2212} = \min\ (\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_1,\ \delta_2) = \min\ (2,\ 2,\ 1,\ 2)$$

Donc :

$$x_{2212} = 1$$

*
$\alpha_2 = \alpha_2 - 1$
$\beta_2 = \beta_2 - 1$
$\gamma_1 = \gamma_1 - 1$
$\delta_2 = \delta_2 - 1$

$\alpha_1 = 0$	$\beta_1 = 0$	$\gamma_1 = 0$	$\delta_1 = 0$
$\alpha_2 = 1$	$\beta_2 = 1$	$\gamma_2 = 1$	$\delta_2 = 1$

$$x_{ij1l} = 0, \forall\ (i,\ j,\ l) \neq (2,\ 2,\ 2)$$

* Alors :

$ijkl$	1111	1112	1121	1122	1211	1212	1221	1222	2111	2112	2121	2122	2211	2212	2221	2222
c_{ijkl}	0	0	0	6	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	14

5/
* Choisir la case moindre :

$$\min c_{ijkl} = c_{2222}$$

donc :

$$ijkl = 2222$$

* Affectation de la case choisir :

$$x_{2222} = \min\,(\alpha_2,\, \beta_2,\, \gamma_2,\, \delta_2) = \min\,(1,\, 1,\, 1,\, 1)$$

On a :

$$\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = \delta_2$$

mais il n'y a pas d'autre case, Alors :

$$x_{2222} = 1$$

*

$\alpha_2 = \alpha_2 - 1$
$\beta_2 = \beta_2 - 1$
$\gamma_2 = \gamma_2 - 1$
$\delta_2 = \delta_2 - 1$

$\alpha_1 = 0$	$\beta_1 = 0$	$\gamma_1 = 0$	$\delta_1 = 0$
$\alpha_2 = 0$	$\beta_2 = 0$	$\gamma_2 = 0$	$\delta_2 = 0$

Phase 2 :

1/

a/ Déterminer $I^{(0)}$.

$$I^0 = \{(1111),\, (1122),\, (1222),\, (2212),\, (2222)\}$$

Et

$$x^0 = \{x_{1122} = 6,\, x_{1222} = 1,\, x_{2211} = 1,\, x_{2212} = 1,\, x_{2222} = 1\}$$

b/ $u_i^0 + v_j^0 + w_k^1 + t_l^0 = c_{ijkl},\ (ijkl) \in I^{(0)},\ u_1 = v_1 = w_1 = 0$

$$\begin{cases} u_1^{(0)} + v_1^{(0)} + w_1^{(0)} + t_1^{(0)} = 5 \\ u_1^{(0)} + v_1^{(0)} + w_2^{(0)} + t_2^{(0)} = 6 \\ u_1^{(0)} + v_2^{(0)} + w_2^{(0)} + t_2^{(0)} = 9 \\ u_2^{(0)} + v_2^{(0)} + w_1^{(0)} + t_2^{(0)} = 8 \\ u_2^{(0)} + v_2^{(0)} + w_2^{(0)} + t_2^{(0)} = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_2^{(0)} + t_2^{(0)} = 5 \text{..........................}(1) \\ v_2^{(0)} + w_2^{(0)} + t_2^{(0)} = 6 \text{................}(2) \\ u_2^{(0)} + v_2^{(0)} + t_1^{(0)} = 9 \text{.................}(3) \\ u_2^{(0)} + v_2^{(0)} + t_2^{(0)} = 8 \text{.................}(4) \\ u_2^{(0)} + v_2^{(0)} + w_2^{(0)} + t_2^{(0)} = 14 \text{.....}(5) \end{cases}$$

De (1) et (2) :

$$v_2^{(0)} + 5 = 6 \Rightarrow v_2^{(0)} = 1$$

De (5) :

$$u_2^{(0)} + 1 + 5 = 14 \Rightarrow u_2^{(0)} = 8$$

De (3) :

$$8 + 1 + t_1^{(0)} = 9 \Rightarrow t_1^{(0)} = 0$$

De (4) :

$$8 + 1 + t_2^{(0)} = 8 \Rightarrow_t 2^{(0)} = (-1)$$

De (5) :

$$8 + 1 + w_2^{(0)} - 1 = 14 \Rightarrow w_2^{(0)} = 6$$

c/

Pour tout $(i,\, j,\, k,\, l) \notin I^{(0)}$, $\Delta_{ijkl}^{(0)} = c_{ijkl} - (u_i^0 + v_j^0 + w_k^0 + t_l^0)$

$\Delta_{1111}^{(0)} = 17 - (0 + 0 + 0 + 0) = 17$

$\Delta_{1112}^{(0)} = 15 - (0 + 0 + 0 - 1) = 16$

$\Delta_{1121}^{(0)} = 32 - (0 + 0 + 6 + 0) = 26$

$\Delta_{1211}^{(0)} = 18 - (0 + 1 + 0 + 0) = 17$

$\Delta_{1212}^{(0)} = 45 - (0 + 1 + 0 - 1) = 45$

$\Delta_{1221}^{(0)} = 12 - (0 + 1 + 6 + 0) = 5$

$\Delta_{2111}^{(0)} = 7 - (8 + 0 + 0 + 0) = -1$

$\Delta_{2112}^{(0)} = 23 - (8 + 0 + 0 - 1) = 16$

$\Delta_{2121}^{(0)} = 11 - (8 + 0 + 6 + 0) = -3$

$\Delta_{2122}^{(0)} = 28 - (8 + 0 + 6 - 1) = 15$

$\Delta_{2221}^{(0)} = 10 - (8 + 1 + 6 + 0) = -5$

d/

$$\Delta^{(0)}_{i_0 j_0 k_0 l_0} = \min \Delta^{(0)}_{ijkl} \text{ tel que : } \Delta_{ijkl} < 0$$

$\Delta^{(0)}_{i_0 j_0 k_0 l_0} = \Delta^{(0)}_{2221}$, donc (2221) entrant de la base

e/

Prendre $\sigma^{(0)}$ et $\sigma^{(0)-}$ et définir $\theta^{(0)}$

$$\alpha_{1122}P_{1122} + \alpha_{1222}P_{1222} + \alpha_{2211}P_{2211} + \alpha_{2212}P_{2212} + \alpha_{2222}P_{2222} = -P_{2221}$$

$$\begin{cases} \alpha_{1122} + \alpha_{1222} = 0 \\ \alpha_{2211} + \alpha_{2212} + \alpha_{2222} = -1 \\ \alpha_{1122} = 0 \\ \alpha_{1222} + \alpha_{2211} + \alpha_{2212} + \alpha_{2222} = -1 \\ \alpha_{2211} + \alpha_{2212} = 0 \\ \alpha_{1122} + \alpha_{1222} + \alpha_{2222} = -1 \\ \alpha_{2211} = -1 \\ \alpha_{1122} + \alpha_{1222} + \alpha_{2212}P_{+}\alpha_{2222} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1122} = 0 \\ \alpha_{1222} = 0 \\ \alpha_{2211} = -1 \\ \alpha_{2212} = 1 \\ \alpha_{2222} = -1 \end{cases}$$

alors :

$$\sigma^{(0)} = \{(1122), (1222), (2211), (2212), (2221), (2222)\}$$

Et

$$\sigma^{(0)-} = \{(2211), (2222)\}$$

Donc

$$\theta^{(0)} = \min(\frac{x_{2211}}{-\alpha_{2211}}, \frac{x_{2222}}{-\alpha_{2222}}) = \min(1, 1) = 1$$

Alors x_{2211} sortant de la base.

$$x^{(1)} = \{x_{1122} = 6,\ x_{1222} = 1,\ x_{2212} = 2,\ x_{2221} = 0,\ x_{2222} = 1\}$$

2/

a/ Déterminer $I^{(1)}$:

$$I^{(1)} = \{(1122),\ (1222),\ (2212),\ (2221),\ (2222)\}$$

b/ $u^{(1)}_i + v^{(1)}_j + w^{(1)}_k + t^{(1)}_l = c_{ijkl}$, $(ijkl) \in I^{(1)}$, $u_1 = v_1 = w_1 = 0$

$$\begin{cases} u_1^{(1)} + v_1^{(1)} + w_2^{(1)} + t_2^{(1)} = 5 \\ u_1^{(1)} + v_2^{(1)} + w_2^{(1)} + t_2^{(1)} = 6 \\ u_2^{(1)} + v_2^{(1)} + w_1^{(1)} + t_2^{(1)} = 8 \\ u_2^{(1)} + v_2^{(1)} + w_2^{(1)} + t_1^{(1)} = 10 \\ u_2^{(1)} + v_2^{(1)} + w_2^{(1)} + t_2^{(1)} = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_2^{(1)} + t_2^{(1)} = 5 \text{.........................}(1) \\ v_2^{(1)} + w_2^{(1)} + t_2^{(1)} = 6 \text{................}(2) \\ u_2^{(1)} + v_2^{(1)} + t_2^{(1)} = 8 \text{.................}(3) \\ u_2^{(1)} + v_2^{(1)} + w_2^{(1)} + t_1^{(1)} = 10 \text{......}(4) \\ u_2^{(1)} + v_2^{(1)} + w_2^{(1)} + t_2^{(1)} = 14 \text{.....}(5) \end{cases}$$

De (2) et (1) :

$$v_2^{(1)} + 5 = 6 \Rightarrow v_2^{(1)} = 1$$

De (3) :

$$u_2^{(1)} + t_2^{(1)} + 1 = 8 \Rightarrow u_2^{(1)} + t_2^{(1)} = 7 \text{..................}(6)$$

De (5) et (6) :

$$7 + 1 + w_2^{(1)} = 14 \Rightarrow w_2^{(1)} = 6$$

De (2) :

$$1 + 6 + t_2^{(1)} = 6 \Rightarrow t_2^{(1)} = -1$$

De (5) :

$$u_2^{(1)} + 1 + 6 - 1 = 14 \Rightarrow u_2^{(1)} = 8$$

De (4) :

$$8 + 1 + 6 + t_1^{(1)} = 10 \Rightarrow t_1^{(1)} = -5$$

c/

Pour tout $(i,\, j,\, k,\, l) \notin I^{(1)}$, $\Delta_{ijkl}^{(1)} = c_{ijkl} - (u_i^{(1)} + v_j^{(1)} + w_k^{(1)} + t_l^{(1)})$

$\Delta_{1111}^{(1)} = 17 - (0 + 0 + 0 - 5) = 22$

$\Delta_{1112}^{(1)} = 15 - (0 + 0 + 0 - 1) = 16$

$\Delta_{1121}^{(1)} = 32 - (0 + 0 + 6 - 5) = 31$

$\Delta_{1211}^{(1)} = 18 - (0 + 1 + 0 - 5) = 22$

$\Delta_{1212}^{(1)} = 45 - (0 + 1 + 0 - 1) = 45$

$\Delta_{1221}^{(1)} = 12 - (0 + 1 + 6 - 5) = 10$

$\Delta_{2111}^{(1)} = 7 - (8 + 0 + 0 - 5) = 4$

$\Delta_{2112}^{(1)} = 23 - (8 + 0 + 0 - 1) = 16$

$\Delta_{2121}^{(1)} = 11 - (8 + 0 + 6 - 5) = 2$

$\Delta_{2122}^{(1)} = 28 - (8 + 0 + 6 - 1) = 15$

$\Delta^{(1)}_{2211} = 9 - (8 + 1 + 0 - 5) = 5$

La condition d'optimalité est vérifié.

Donc la solution optimal est :

$$x_{1122} = 6,\ x_{1222} = 1,\ x_{2212} = 2,\ x_{2221} = 0,\ x_{2222} = 1$$

Conclusion

Dans cette étude, on a résolus le problème de transport à quatre indices, on a utilisé l'algorithme $AlPT_4$ proposé par monsieur ZITOUNI en 2008, mais on a trouvé un problème de dégénérescence c'est pour ça on a proposé une nouvelle technique noté par algorithme $AlPT_4$ modifié. Cette technique est basé sur l'algorithme $AlPT_4$ avec une petite modification qui traité la dégénérescence et donné des résultats satisfaites.

À la fin de notre étude, on a trouvé que l'algorithme $AlPT_4$ modifié est résolus les problèmes de transport à 4 indices avec succès même si les problèmes de transport sont dégénérés.

Bibliographie

[1] Aaid Djamel, Étude numérique comparative entre des méthodes de résolution d'un problème de transport à quatre indices avec capacité, Mémoire de magister, Université de Constantine, 2010.

[2] A. Corban, Amultidimensional transportation problem, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 9, (1964), 721-735.

[3] D. Cardoso and J. Climaco, The generalized simplex method, Oper. Res. Lette., 12, 5, (1992), 337-348.

[4] Ferkous Kenza et Goutal Kaltoum, Résolution d'un probléme de transport à deux indices, Mémoire de Master, Centre universitaire de Mila, 2016.

[5] François Dubeau et Oumar Mandione Guéye, Une nouvelle méthode d'initialisation pour le problème de transport, RIARO-Oper. Res. 42, (2008), 389-400.

[6] G. Huang and A. Lim, A hybrid genetic algorithm for the Three-Index Assiegnment Problem, European J. Oper. Res., 172, (2006), 249-257.

[7] J. C. Culioli, Introduction à l'optimisation, Ellipses, 1994.

[8] K. B. Haley, The multi-index transportation problem, Oper. Res., 11, (1963), 368-379.

[9] K. Dosios and K. Paparrizos, Resolution of the problem of degeneracy in a primal and dual simplex algorithm, Oper. Res. Lett., 20, (1997), 45-50.

[10] K. Holmberg, Exact solution methods for uncapacitated location problems with convex transportation costs, European J. Oper. Res., 114, (1999), 127-140.

[11] M. K. Kravtsov and A. P. Krachkovskii, Asymptotics of Multi-index Axial Transportation Polyhedra, Diskret. Mat., 10, 4, (1998), 61-81.

[12] M. K. Kravtsov, A Counter example to the Hypothesis of Maximum Number of Integer Verrtices of the Multi-Index Axial Transportation Polyhedron, Diskret. Mat., 12, 1, (2000), 107-112.

[13] M. Minoux, Programmation Mathémathique : Théorie et algorithmes, T1 et T2, Dunod, 1983.

[14] Monniche Linda, Cours : Optimisation sans contrainte, Département de mathématiques, Université de Jijel.

[15] M. Queyranne and F. C. R. Spieksma, Approximation algorithms for multi-index transportation problems with decomposable costs, Discrete Appl. Math., 76, (1997), 239-253.

[16] M. S. Bazaraa, J. J. Javis and H. D. Sherali, Linear programming and network flows, John Wiley Sons, 1990.

[17] R. Zitouni and A. Keraghel, Resolution of a capacitated transportation problem with four subscripts, Kybernetes, 32, 9/10, (2003), 1450-1463.

[18] R. Zitouni and A. Keraghel, Probléme de transport à quatre indices, 2008.

[19] R. Zitouni and A. Keraghel, Anote on the algorithm of resolution of a capacitated transportation problem with four subscripts, à apparaître dans le journal (FJMS).

[20] S. Achmanov, programmation linéaire, trad. Irina Petrova, Mir, Moscou,(1984).