



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Systemes dynamiques non linéaires

Préparé par: Dounya Boukheche

Amal Boulemdaoud

Soutenu devant les membres de jury suivants:

Boueden Rabeh	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf Mila	Président
Mehazzem Allal	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf Mila	Rapporteur
Labed Boujemaa	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf Mila	Examineur

Année universitaire: 2021/2022

REMERCIEMENT

*Au terme de ce travail, nous tenons à remercier Dieu le miséricordieux,
qui nous a donné la force pour achever ce travail.*

Nous tenons à remercier vivement notre promoteur

*Mr « **ALLAL MEHAZZEM** »*

*qui nous a proposé le thème de ce projet, pour sa disponibilité, son aide, ses
précieux conseils. Nous sommes très heureuses de pouvoir lui exprimer
nos vifs remerciements et notre sincère reconnaissance, ses orientations et
ses encouragements, tout au long de notre formation.*

*Nos vifs remerciements vont aux membres du jury qui nous ont honorés en
acceptant d'évaluer et juger notre travail. Nous remercions nos amis et les
enseignants et les professeurs de Mathématiques et Informatiques,
particulièrement ceux rattachés à la spécialité Mathématique. A notre
promotion depuis notre premier cycle d'étude jusqu'à la fin. Nous leurs
exprimons notre profonde sympathie et nous leurs souhaitons une bonne
continuation.*

DEDICACE

J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste travail :

À mes chers parents,

ma mère «Massacuda» et mon père «Ammar»

Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leur encouragement

À mes chers frères et mes sœurs

À leurs maris et leurs enfants

À mes oncles, mes tantes et mes cousines

À tous mes amis et mes proches

À ma belle binôme «Dounya»

À tous les amis de promotion de master mathématique 2020/2022

Sans oublier tous les professeurs et les enseignants.

AMAL

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail particulièrement à mes chers parents, qui ont consacré leur vie pour bâtir la mienne, pour leur soutien, patience et soucis de tendresse et d'affect pour tout ce qui ils ont fait pour que je puisse arriver à ce stade.

À ma mère "**FARIDA**", qui m'a encouragé durant toutes mes études, et qui sans elle, ma réussite n'aurait pas eu lieu. Qu'elle trouve ici mon amour et mon affection.

À mon père "**SADDEK**", qui est toujours disponible pour nous, et prêt à nous aider, je lui confirme mon attachement et mon profond respect.

À mes chers frères: Mon grand frère "**OUSSAMA**"

Mon petit frère "**ALA EDDINE**"

Qui m'ont toujours soutenu dans toutes mes décisions surtout dans ce domaine.

À mes chères sœurs: "**SARA**", "**AHLEM**", "**AYA**", "**LINA**", et à ma petite sœur

"**DJOUMANA**" qui est très chère pour moi, que Dieu les protège pour moi.

À mes belles sœurs: "**HOUDA**" et "**ROUMAISSA**".

À mes chers neveux: "**LOUAI**" ainsi que les autres "**MARIYA**", "**BASSEM**", "**LAYTH**", "**TAYM ALAH**", "**TESNIM**" et la douce petite "**SOUNDOUS**".

À la chère spéciale à mon cœur: "**NAWEL**".

À toute ma famille.

À ma chère binôme "**AMEL**".

À toutes mes chères amies que j'ai connues dans ma vie.

À tous mes amis et enseignements de **ma promotion**, et à tous ceux que je connaîtrai durant mon cycle d'étude ***2005 ~ 2022***

*À*ux personnes qui je connaîtrai dans un futur proche ou lointain.

Je dédie mes meilleures salutations

DOUNYA

RÉSUMÉ

L'étude des systèmes dynamiques non linéaires ont dernièrement fait l'objet d'intenses recherches et explorations. Cela nous a fait penser à étudier l'un de ces systèmes, qui s'appelle le système chaotique. Dans ce mémoire, nous présentons les résultats de l'étude de quelques systèmes dynamiques chaotiques.

Le premier chapitre: nous présentons les notions principales et les théorèmes essentiels des systèmes dynamiques, les types des bifurcations et finalement les attracteurs.

Le deuxième chapitre: est réservé à la théorie des systèmes chaotiques, tout en introduisant leur définition, puis leurs propriétés, ainsi que des définitions d'exemples célèbres dont nous étudions deux types différents dans le dernier chapitre.

Le dernier chapitre: Dans un premier temps nous présentons une étude du système de Lorenz, L'objectif a été de rechercher des points fixes, et d'étudier leurs stabilités. Le second est le système de Hénon, L'objectif est de répéter la même étude qui est faite dans le cas du système de Lorenz, en plus de trouver les bifurcations et tracer leurs graphes et ce pour chaque paramètre.

Les mots clés: Système dynamique, système chaotique, chaos, attracteur, bifurcation, stabilité.

ABSTRACT

The study of non linear dynamical systems has recently been the subject of intense research and exploration. This made us think of studying one of these systems, which is called the chaotic system. In this thesis, we present the results of the study of some chaotic dynamical systems.

The first chapter: we present the main notions and the essential theorems of dynamical systems, the types of bifurcations and finally the attractors.

The second chapter: is reserved for the theory of chaotic systems, while introducing their definition, then their properties, as well as definitions of famous examples of which we study two different types in the last chapter.

The last chapter: at first we present a study of the Lorenz system, The objective was to find fixed points and to study their stability. The second is the Hénon system, the objective is to repeat the same study that is done in the case of the Lorenz system, in addition to finding the bifurcations and drawing their graphs for each parameter.

Keywords: dynamical system, chaotic system, chaos, attractor, bifurcation, stability.

المخلص

كانت دراسة الأنظمة الديناميكية غير الخطية مؤخرا موضوع بحث و استكشاف مكثف.

هذا جعلنا نفكر في دراسة احد هذه الأنظمة، و الذي يسمى النظام الفوضوي.

نقدم في هذه الرسالة نتائج دراسة بعض الأنظمة الديناميكية.

الفصل الأول: نقدم المفاهيم الأساسية للأنظمة الديناميكية و أنواع التشعبات وأخيرا الجاذب .

الفصل الثاني: مخصص لنظرية الأنظمة الفوضوية، مع تقديم تعريفها، ثم خصائصها، وكذلك تعريفات لأمثلة شهيرة درسنا منها نوعين مختلفين في الفصل الأخير.

الفصل الأخير: في البداية نقدم دراسة لنظام لورنز، وكان الهدف البحث عن نقاط ثابتة و دراسة استقرارها. والثاني هو نظام هينون. الهدف هو تكرار نفس الدراسة التي تم إجراؤها في حالة نظام لورنز، بالإضافة إلى إيجاد التشعبات و رسم الرسوم البيانية لكل متغير.

الكلمات المفتاحية: نظام ديناميكي، نظام فوضوي، فوضى، جاذب، تشعب، استقرار.

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE	13
1 Systèmes dynamiques	15
1.1 Introduction	15
1.2 Définition d'un système dynamique	15
1.3 Espace des phases	17
1.4 Espace d'états	17
1.5 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs	17
1.6 Systèmes autonomes et non autonomes	17
1.7 Systèmes dynamiques continus	18
1.7.1 Flot	18
1.7.2 Points d'équilibres	19
1.7.3 Points limites	19
1.7.4 Orbites périodiques	20
1.7.5 Stabilité	20
1.7.6 Bifurcation	25
1.8 Systèmes dynamiques discrets	29
1.8.1 Orbites	29
1.8.2 Points fixes	30

1.8.3	Points périodiques et p-cycles	30
1.8.4	Stabilité	31
1.8.5	Bifurcation	35
1.9	Attracteurs	36
1.10	Conclusion	38
2	Systèmes chaotiques	40
2.1	Introduction	40
2.2	Définition du chaos	41
2.3	Propriétés des systèmes chaotiques	41
2.3.1	Non-linéarité	42
2.3.2	Déterminisme	42
2.3.3	Aspect aléatoire	42
2.3.4	Sensibilité aux conditions initiales	44
2.3.5	Exposants de Lyapunov	44
2.4	Transitions vers le chaos	48
2.4.1	Doublement de période	48
2.4.2	Intermittence vers le chaos	48
2.4.3	Quasi-périodicité	49
2.5	Exemples des systèmes dynamiques chaotiques à temps continu	49
2.5.1	Système de Lorenz	49
2.5.2	Système de Rössler	50
2.5.3	Système de Chen	51
2.6	Exemples des systèmes dynamiques chaotiques à temps discret	52
2.6.1	Système de Hénon	52
2.6.2	Système Hénon-Heiles ou Hénon modifié	53
2.6.3	Suite logistique	54
2.7	Conclusion	54

3 Exemples sur les systèmes chaotiques (continu et discret)	55
3.1 Introduction	55
3.2 Système de Lorenz	55
3.2.1 Points d'équilibres	57
3.2.2 Stabilité	57
3.2.3 Attracteur de Lorenz	61
3.2.4 Aspect aléatoire	62
3.3 Système de Hénon	63
3.3.1 Points fixes	63
3.3.2 Stabilité	64
3.3.3 Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$	65
3.3.4 Diagramme de bifurcation	66
3.3.5 Exposants de Lyapunov	67
3.3.6 Sensibilité aux conditions initiales	68
3.4 Conclusion	69
CONCLUSION GÉNÉRALE	70
Bibliographie	71

Table des figures

1.1	<i>Représentation du flot</i>	19
1.2	<i>Diagramme de bifurcation nœud-col</i>	26
1.3	<i>Diagramme de bifurcation transcritique</i>	27
1.4	<i>Diagramme de bifurcation fourche</i>	28
1.5	<i>Diagramme de bifurcation de Hopf</i>	29
1.6	<i>Attracteurs réguliers</i>	37
1.7	<i>Attracteur étrange de Lozi</i>	38
2.1	<i>Aspect aléatoire du système de Rössler</i>	43
2.2	<i>Aspect aléatoire du système de Lü</i>	43
2.3	<i>Attracteur de Lorenz</i>	50
2.4	<i>Attracteur de Rössler</i>	51
2.5	<i>Attracteur de Chen</i>	52
2.6	<i>Attracteur de Hénon-Heiles</i>	53
2.7	<i>Diagramme de bifurcation</i>	54
3.1	<i>Attracteur de Lorenz $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ et $r = 28$</i>	61
3.2	<i>Attracteur de Lorenz avec les espaces (a), (b), (c), (d)</i>	62
3.3	<i>Aspect aléatoire de l'état x du système de Lorenz</i>	62
3.4	<i>Les régions de la stabilité des points fixes p_1 et p_2</i>	65

3.5	<i>Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$</i>	66
3.6	<i>Diagramme de bifurcation du système de Hénon</i>	67
3.7	<i>Exposants de Lyapunov du système de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$</i>	68
3.8	<i>Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$</i>	68
3.9	<i>Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$</i>	69

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'étude des systèmes dynamiques a débuté au milieu du 17^{ème} siècle quand Newton à inventé les équations différentielles. A la fin du 19^{ème} siècle, Poincaré donna une nouvelle approche géométrique pour analyser les problèmes dynamiques notamment avec deux grands mémoires (Sur les courbes définies par des équations différentielles, et sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique). Au XX^e siècle le mathématicien russe Alexandre Lyapunov effectua des recherches sur la stabilité du mouvement et introduisa l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires (solutions) d'une même équation différentielle et ayant des conditions initiales voisines. Lorsque cet écart évolue de façon exponentielle on parle alors de sensibilité aux conditions initiales. Les travaux de Lyapunov s'avèrent fondamentaux pour l'étude et la détection du chaos. L'invention des ordinateurs dans l'année 1950 a été un tournant dans l'histoire des systèmes dynamiques. L'ordinateur permet des calculs rapides et des simulations numériques des équations, chose qui était impossible avant.

En 1963, le météorologue et mathématicien au célèbre MIT (Massachusetts Institute of Technology), Edward Lorenz en expérimentant (sur un ordinateur) une méthode lui permettant de faire des prévisions météorologiques observa qu'une modification infime dans les conditions initiales change à ses résultats de façon dramatique. Lorenz venait ainsi de remettre à jour le phénomène de sensibilité aux conditions initiales déjà évoqué par le grand mathématicien universel Poincaré vers

la fin du 19 ème siècle. Plus tard les phénomènes répondant à cette propriété seront alors appel aux systèmes chaotiques.

Nous avons présenté dans ce mémoire trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présentons quelque notions importantes sur les systèmes dynamiques.

Dans le deuxième chapitre, nous faisons un panorama sur la théorie du chaos déterministe tels que : la définition des chaos, les caractéristiques du chaos et les divers scénarios de transition vers le chaos.

Dans le troisième chapitre, nous allons étudier deux exemples des systèmes dynamiques chaotiques (**Lorenz**, **Hénon**).

Enfin nous terminerons par une conclusion générale sur ce mémoire.

Systèmes dynamiques

1.1 Introduction

En général, un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme **système** fait référence à un ensemble des variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables. L'ensemble des variables d'état d'un système permet de construire un espace mathématique appelé **espace des phases**. Nous introduisons la notion des systèmes dynamiques de façon formelle via le concept de groupe à un paramètre.

1.2 Définition d'un système dynamique

Définition 1.2.1. [8] *Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet (X, T, f) constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état $f : X \times T \rightarrow T$, qui permet de définir à partir d'un vecteur de condition initiale, l'état du système à tout instant.*

Donc on peut définir un système dynamique comme une description d'un phénomène physique qui évolue au cours du temps (système continue), ou par rapport à

une autre variable (système discret).

Définition 1.2.2. Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est une application :

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que :

- $f(., x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $f(t, .) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $f(0, x) = x$.
- $f(t + s, x) = f(t, f(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.3. Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax \\ t \in \mathbb{R}^+, x_0 \in \mathbb{R}^n. \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Où A est une matrice constante. La solution de (1.1) est :

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique du fait que l'application :

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Qui à tout $t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$ associé :

$$f(t, x) = e^{At}x.$$

Vérifie les quatre propriétés précédentes.

Définition 1.2.4. Soit le système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x). \quad (1.2)$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système (1.2) le point $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(x^*) = 0.$$

Définition 1.2.5. *Le système :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*) \right) = Df(x^*), 1 \leq i, j \leq n.$$

et

$$f(x_0) = 0.$$

est appelé linéarisation de (1.2) en x_0 .

1.3 Espace des phases

L'espace des phases est l'ensemble des états possibles d'un système dynamique, on peut également le définir comme un espace abstrait dont chaque variable représente une dimension nécessaire à la description du système à moment donné, le degré de liberté caractérise l'espace des phases. Il représente l'ordre qui est égal à la dimension de l'espace d'état.

1.4 Espace d'états

L'espace d'états est l'ensemble des coordonnées nécessaires à la description complète d'un système. Cet espace peut être continu ou discret.

1.5 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie. Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse.

1.6 Systèmes autonomes et non autonomes

Définition 1.6.1. *Un système autonome est un système à évolution temporelle continue qui à une indépendance du temps t :*

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, \mu) \quad (1.3)$$

Dans le cas contraire on dira qu'il est non autonome. En utilisant un changement de variable approprié, on peut facilement transformer un système non autonome de dimension n en un système autonome équivalent de dimension $n + 1$.

Exemple 1.6.1. *Soit le système non autonome suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \alpha(t) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + \rho(t) \end{cases}$$

On pose $x_3 = t$, alors $\dot{x}_3 = 1$, donc le système autonome est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \alpha(x_3) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + \rho(x_3) \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases}$$

1.7 Systèmes dynamiques continus

Un système dynamique dans un temps continu est représenté par un système d'équation différentielle de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, \mu) \quad (1.4)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ et $\mu \in \mathbb{R}^r$ où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système.

1.7.1 Flot

On appelle flot de l'équation (1.4), l'application :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x_0) &\mapsto \phi(t, x_0) = x(t, x_0), \end{aligned}$$

telle que pour chaque x_0 fixe : $t \rightarrow \phi(t, x_0)$ est une solution de (1.4) et $\phi(0, x_0) = x_0$. En d'autre part telle $\phi(t, x_0)$ est la valeur notant t à la solution qui vaut x_0 en $t = 0$. [1]



FIGURE 1.1 – Représentation du flot

1.7.2 Points d'équilibres

Définition 1.7.1. *Un point d'équilibre de l'équation $\dot{x} = F(x)$ est un point x^* de l'espace des phases vérifiant $F(x^*) = 0$.*

1.7.3 Points limites

Définition 1.7.2. [1] *Un point $a \in U$ est un point ω -limite d'une trajectoire $\phi(., x_0)$ s'il existe une suite $t_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ tel que :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n} = a.$$

De même un point $b \in U$ est un point α -limite d'une trajectoire $\phi(., x_0)$ s'il existe une suite $t_n \rightarrow -\infty$ quand $n \rightarrow -\infty$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \phi_{t_n} = b.$$

- L'ensemble de tous les points ω -limite d'un trajectoire est appelé ensemble ω -limite et noté $\omega(x_0)$.
- L'ensemble de tous les points α -limite d'un trajectoire est appelé ensemble α -limite et noté $\alpha(x_0)$.

- L'ensemble de $\omega(x_0) \cup \alpha(x_0)$ est appelé ensemble limite.

1.7.4 Orbites périodiques

soit $x_0 \in U$ une condition initiale et $x(t, x_0)$ la solution de (1.4) passant par x_0 . L'ensemble des points $x(t, x_0), \forall t \in \mathbb{R}$ est appelée l'orbite dans l'espace d'état passant par le point x_0 à l'instant initiale $t = 0$, on la note par :

$$\gamma_{x_0} = \{x(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}.$$

1.7.5 Stabilité

1.7.5.1 Stabilité du système linéaire

On considère le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax$$

Où : $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et A une matrice constante inversible. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A :

1. Si les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont réelles et de même signe, la solution $x = 0$ est appelée nœud.
2. Si les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution $x = 0$ est appelée selle.
3. Si les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec $Re(\lambda_i) \neq 0; i = 1, \dots, n$, la solution $x = 0$ est appelée foyer.
4. Si les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec $Re(\lambda_i) = 0; i = 1, \dots, n$, la solution $x = 0$ est appelée centre.

1.7.5.2 Stabilité du système non linéaire

l'étude de stabilité est simplifiée lorsque le système est linéaire et autonome, c'est-à-dire lorsqu'il est décrit par l'équation matricielle suivante où les coefficients a_{ij} de la matrice A sont constants :

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Lorsque le système n'est pas linéaire, on le linéarise. Il suffit pour cela de faire un développement limité au premier ordre autour du point fixe x^* :

$$f(x) = f(x^*) + J(x - x^*) + O((x - x^*)^2) \quad (1.5)$$

Où J est la matrice jacobienne de f au point x^* :

$$J \equiv [J_{ij}] \text{ avec } J_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

L'équation (1.5) peut se transformer en :

$$\frac{d(x - x^*)}{dt} = J(x - x^*) \text{ de la forme } \frac{dy}{dt} = Ay.$$

Si la matrice jacobienne J est nulle au point x^* , on poursuit le développement limité jusqu'au second ordre. Dans ce cas, on ne parle plus de stabilité linéaire mais simplement de stabilité.

Théorème de Hartmann-Grobman [8]

Considérons le système dynamique (1.4). Soit x^* un point d'équilibre du système (1.4) et soit $J(x^*)$ la matrice Jacobienne au point x^* , alors le théorème de Hartmann-Grobman s'énonce :

Théorème 1.7.1. *Si $J(x^*)$ admet des valeurs propres non nulles ou imaginaires pures, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du flot non linéaire vers celles du flot linéaire dans certains voisinages U de x^* .*

Remarque :

Ce théorème va nous permettre de lier la dynamique du système non linéaire à la dynamique du système linéarisé.

1.7.5.3 Méthode directe (fonction de Lyapunov)

On a vu qu'un point singulier pour lequel la matrice du système linéarisé à des valeurs propres à partie réelle strictement négative est asymptotiquement stable. Si certaines des valeurs propres ont des parties réelles positives, le point est instable. Mais que se passe-t-il dans les autres cas ? Beaucoup de situations peuvent se produire et il n'existe pas de méthode générale permettant de conclure dans tous les cas, mais plutôt un certain nombre de méthodes ad hoc. La méthode d'utilisation d'une fonction de Lyapunov est un exemple, elle est très importante parce qu'elle permet de conclure dans plusieurs cas où la méthode de linéarisation ne fonctionne pas.

On considère le système autonome défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ f(x^*) = 0. \end{cases}$$

Théorème 1.7.2. *Une fonction $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur un voisinage U de x^* , et différentiable sur $U - \{x^*\}$ telle que :*

- $V(x^*) = 0$ **et** $V(x) > 0$ si $x \neq x^*$.
- $\dot{V}(x) = fV(x), \forall x \in U$ **Où** $fV(x) = \frac{d}{dt}Vf_t(x)|_{t=0}$ est appelée fonction de Lyapunov large pour le système non linéaire x^* .

Si de plus la fonction vérifie la condition : $\dot{V}(x) > 0, U - \{x^\}$ alors V est appelée fonction de Lyapunov stricte pour le système non linéaire en x^* .*

Exemple 1.7.1. *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x(y^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = -y(x^2 + 1) \end{cases}$$

La stabilité de l'origine :

soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$v(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$$

On a :

$$v(0, 0) = 0$$

et

$$v(x, y) > 0 \text{ si } (x, y) \neq (0, 0)$$

on a alors

$$\begin{aligned}\dot{v}(x, y) &= x\dot{x} + 2y\dot{y} \\ &= -2x^2 - 2y^2\end{aligned}$$

alors $v < 0$, nous pouvons conclure que le système est asymptotiquement stable dans tout l'espace d'état (x, y) .

1.7.5.4 Le critère de Routh-Hurwitz

Pour démontrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable, il faut donc a priori calculer les n valeurs propres λ_i de A et vérifier que $\forall i, \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. Une méthode algébrique a été développée par Routh-Hurwitz, basée sur le calcul des déterminants particuliers dits déterminants de Routh-Hurwitz.

Supposons que le système :

$$\dot{x} = \phi(x)$$

son système linéarisé s'écrit :

$$\dot{x} = Ax$$

Les valeurs propres de A sont solutions de l'équation caractéristique :

$$p(\lambda) = \det(\lambda - AI) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Les déterminants de Routh-Hurwitz sont définis de la manière suivante :

$$H_1 = |a_1|$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$H_j = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & \cdots & a_j \end{vmatrix}$$

Proposition 1.7.1. [10] Dans le cas d'une matrice de dimension n , les termes H_{jk} des déterminants de Routh-Hurwitz sont définis de la manière suivante :

- $H_{jk} = a_{j-k}$ pour $0 \leq 2j - k \leq n$.
- $H_{jk} = 1$ pour $2j = k \iff 2j - k = 0$.
- $H_{jk} = 0$ pour $2j < k \iff 2j - k < 0$ ou $2j > n + k \iff 2j - k > n$.

Proposition 1.7.2. Le point d'équilibre x^* est :

asymptotiquement stable $\iff \forall i, \text{Re}\lambda_i < 0 \iff \forall \text{Re}H_i > 0$.

Théorème 1.7.3. (Critère de Routh-Hurwitz)

Soit $P(\lambda)$ un polynôme tel que $a_0 > 0$.

Pour que P soit uniformément asymptotiquement stable, il faut que les déterminants principaux de la matrice de Hurwitz soient strictement positifs.

Critère de Routh-Hurwitz dans $\mathbb{R}^3$

Considérons le système :

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

Les déterminants de Routh-Hurwitz sont :

$$\begin{aligned} H_1 &= |a_1| = a_1 \\ H_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 \\ H_3 &= a_3H_2 \end{aligned}$$

Ainsi les conditions de stabilité du point d'équilibre sont :

$$H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0$$

Donc le point est asymptotiquement stable.

1.7.6 Bifurcation

Définition 1.7.3. *Le terme bifurcation est généralement associé à la notion de changement du type topologique de la trajectoire d'un système dynamique lorsqu'un ou plusieurs paramètres dont elle dépend varient. C'est une notion très importante en mécanique où l'étude des systèmes d'équations non-linéaires en fonction des paramètres caractéristiques est classique. Le simple pendule entretenu présente des comportements différents suivant les valeurs des paramètres d'entretien et d'amortissement mathématiquement, il y a une bifurcation lorsque les portraits des phases ne sont plus homéomorphes. Illustrons quelque peu cette notion. Considérons un système dynamique dépendant d'un paramètre réel μ , à une dimension :*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu)$$

avec $x \in I \subset \mathbb{R}^n$, $\mu \in D \subset \mathbb{R}$, $f \in C^m$ tel que $m \neq \mu$.

Types de bifurcations

On considère quatre types des bifurcations locales :

- Bifurcation nœud-col.
- Bifurcation transcritique.
- Bifurcation de fourche.
- Bifurcation de hopf.

Bifurcation noeud-col

C'est la bifurcation associé à l'équation :

$$\dot{x} = \mu - x^2.$$

avec μ le paramètre de contrôle.

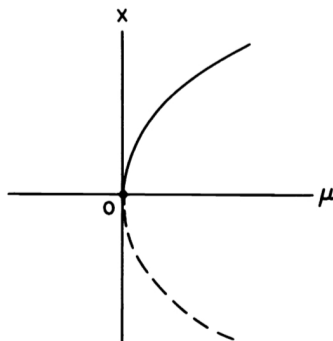


FIGURE 1.2 – *Diagramme de bifurcation nœud-col*

- pour $\mu < 0$, il n'y a aucun point d'équilibre .
- pour $\mu = 0$, $x = 0$ est un point d'équilibre instable, plus précisément il est **stable à gauche** et **instable à droite**, donc semi-stable.
- pour $\mu > 0$, il y a deux points d'équilibres : point d'équilibre asymptotiquement stable $-\sqrt{\mu}$ et point d'équilibre instable $\sqrt{\mu}$. [10]

Bifurcation transcritique

système présentant un ou deux équilibres :

$$\dot{x} = \mu x - x^2.$$

- pour $\mu < 0$, il y a l'équilibre asymptotiquement stable 0 et l'équilibre instable μ .
- pour $\mu = 0$, $x = 0$ est un équilibre instable : c'est comme pour la bifurcation noeud-col l'équilibre semi-stable du système $x = -x^2$.
- pour $\mu > 0$, il y a deux équilibres : l'équilibre asymptotiquement stable μ et l'équilibre instable 0.

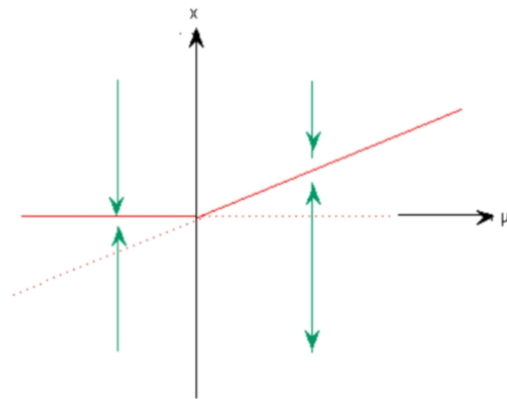
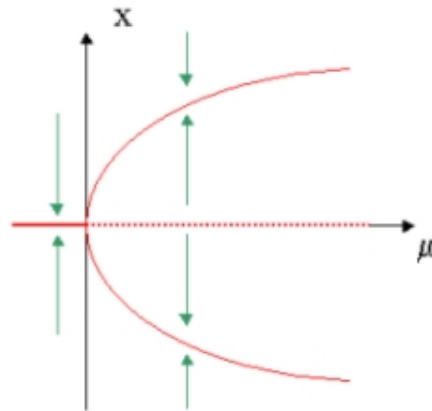


FIGURE 1.3 – *Diagramme de bifurcation transcritique*

Bifurcation de fourche

$$\dot{x} = x^3 - \mu x.$$

- pour $\mu < 0$, il y a un seul équilibre 0, qui est instable .
- pour $\mu = 0$, on a $x = x^3$: 0 est toujours l'équilibre unique, instable.
- pour $\mu > 0$, il y a trois équilibres : l'équilibre asymptotiquement stable 0, et les deux équilibres instables $\pm\sqrt{\mu}$.

FIGURE 1.4 – *Diagramme de bifurcation fourche*

Bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf aura lieu lorsque le paramètre de contrôle prend une valeur critique 0 pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe imaginaire et le type de la stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparaition d'un cycle limite.

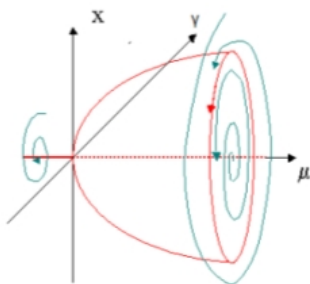


FIGURE 1.5 – *Diagramme de bifurcation de Hopf*

1.8 Systèmes dynamiques discrets

Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow D, D \subseteq \mathbb{R}^n$ une application continue (ou une transformation), f^k désigne la k -ème itérée de f , c'est-à-dire :

$$f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots, f^k(x) = f(f^{k-1}(x)).$$

Dans la pratique $(x_0), (x_1) = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots$ représentent les valeurs d'une certaine quantité au temps $0, 1, 2, \dots$

Ainsi la valeur de la quantité au temps $k + 1$ est fonction de sa valeur au temps k . L'application f est appelée un **système dynamique discret**.

1.8.1 Orbites

L'orbite positive de x par le système dynamique f est définie par :

$$O_+^f = \{f^k(x), k \in \mathbb{N}\}.$$

Si f est bijective, on définit l'**orbite** de x par :

$$O^f = \{f^k(x), k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ainsi que l'orbite négative :

$$O_-^f = \{f^{-k}(x), k \in \mathbb{N}\}.$$

Exemple 1.8.1. Soit un (SDD) en dimension 1 défini par la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0, +\infty]$. Prenons pour condition initiale $x_0 = \frac{1}{2}$.

L'orbite correspondante est :

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = f(x_0) = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = f(x_1) = \frac{1}{16}, \dots$$

Remarquons $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \longrightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

1.8.2 Points fixes

Un point fixe d'un système en temps discret noté x^* , vérifié l'équation suivant :

$$f(x^*) = x^*$$

1.8.3 Points périodiques et p-cycles

Définition 1.8.1. S'il existe $k \geq 1$, tel que $F^k(x) = x$, on dit que x est un point *périodique*. La période d'un point périodique x est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que :

$$F^k(x) = x$$

Un ensemble $\{x_0, x_1, \dots, x_{(p-1)}\}$ forme un cycle d'ordre p (ou une orbite périodique d'ordre p , ou encore un p -cycle), si :

$$\begin{cases} F(x(i)) = x(i+1), i = 0, 1, \dots, p-1, \\ F(x(p-1)) = x(0). \end{cases}$$

Autrement dit, chaque point d'un cycle d'ordre p est un point fixe pour F^p ou $F^p(x(i)) = x(i)$,

pour $i = 0, 1, \dots, p-1$ est n'est pas un point fixe pour F^k si $k < p$.

Remarque

1. Un point fixe est un point périodique de période 1.
2. Un point fixe x est dit point p -périodique d'une transformation f , s'il est point fixe de f^p , sans être un point fixe de f^l , $1 \leq l \leq p$, (l et p entiers).

1.8.4 Stabilité

Théorème 1.8.1. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction différentiable sur $[a, b]$.

Supposons que :

$$|f'(x)| < 1, \forall x \in [a, b]$$

Alors la fonction f a un unique point fixe x_s tel que $f(x_s) = x_s$ dans l'intervalle $[a, b]$.

Théorème 1.8.2. (Théorème de Brouwer)

Toute application continue $f : \bar{B}^n \rightarrow \bar{B}^n$ avec $\bar{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. Admet un point fixe c'est-à-dire l'équation $f(x) = x$ admet une solution dans $\bar{B}^n$.

Théorème 1.8.3. (Théorème de contraction de Banach)

Soit $f : \bar{B}^2 \rightarrow \bar{B}^2$ ou $\bar{B}^2$ est le disque unitaire fermé ($\bar{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$).

Supposons que :

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \lambda \|x_1 - x_2\|.$$

Pour tous vecteurs $x_{i,j} \in \bar{B}^2$ et un certain $0 < \lambda < 1$. Alors il existe un point fixe unique $x_s \in \bar{B}^2$ De plus on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_s \text{ pour tout } x \in \bar{B}^2.$$

1.7.5.1 Stabilité des points fixes

Soit un SDD d'ordre 1 de dimension 1 défini par une fonction $f : D \rightarrow D$ ici $D = [a, b] \in \mathbb{R}$ est un intervalle. Supposons que ce système possède un point fixe x_s .

Définition 1.8.2. *Un point fixe x_s s'appelle stable (attractif) si $\forall \varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que :*

$$\text{si } |x_0 - x_s| < \delta \text{ alors pour tout } n > 0 \text{ } |x_n - x_s| < \varepsilon$$

Définition 1.8.3. *Un point fixe s'appelle répulsif (instable) s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall x_0 \in U_\varepsilon(x_s)$. Il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$n > n_0, |x_n - x_s| > \varepsilon$$

Définition 1.8.4. *Le point fixe est globalement asymptotiquement stable (ou globalement attractif) si pour chaque $x_0 \in D$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_s.$$

Définition 1.8.5. *Le point fixe est localement asymptotiquement stable (ou localement attractif) s'il existe $\beta > 0$, tel que pour chaque $x(0) \in D \cap B(x_0, \beta)$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_s.$$

Définition 1.8.6. *Soit x_s un point fixe d'un système dynamique défini par une fonction $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Supposons que f est dérivable au point x_s . On dit que x_s est un point selle si dans le spectre du Jacobienne $Df(x_s)$ de la fonction f une partie des valeurs propres sont de valeur absolue inférieure à 1 et les autres sont de valeur absolue supérieure à 1.*

1.7.5.2 Stabilité des points périodiques

Définition 1.8.7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ application définissant un SDD d'ordre 1. Soit $O(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$ une orbite périodique de période p (ou cycle d'ordre p ou encore un p -cycle) de ce système d'ordre 1. On dit que cette orbite est attractive (ou répulsive) si chacun de ses points est un point fixe attractif (respectivement un point répulsif) de l'application $f^p(x)$.

1.7.5.3 Critère de stabilité

• Stabilité d'un SDD de dimension 1 :

Théorème 1.8.4. (Critères de stabilité des points fixes)

Soit $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue sur I ayant un point fixe $x_s \in I$. Supposons qu'il existe un $\varepsilon > 0$ telle que la fonction f est dérivable sur tout le voisinage $U_\varepsilon(x_s)$ du point x_s et que la dérivée de la fonction f est continue au point x_s . Alors le point x_s est :

- **Attractif** si et seulement si :

$$\left| \frac{d}{dx} f(x_s) \right| < 1$$

- **Répulsif** si et seulement si :

$$\left| \frac{d}{dx} f(x_s) \right| > 1$$

Exemple 1.8.2. Considérons la fonction :

$$f(x) = ax^3 - bx.$$

Quel que soit le choix des paramètres a et b le point $x_s = 0$ est un point fixe du système.

La dérivée de la fonction $f(x)$ est :

$$\frac{d}{dx} f(x) = 3ax^2 - b.$$

La fonction est dérivable dans tout un voisinage du point fixe $x_s = 0$. La dérivée calculée au point x_s est égale à :

$$\frac{d}{dx}f(x_s) = -b$$

Alors, d'après les théorèmes(1.8.4) :

- Si $|b| > 1$, x_s est un point répulsif (instable).
- Si $|b| < 1$, x_s est un point attractif (stable).

Théorème 1.8.5. (Critères de stabilité des points périodiques)

Soit $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue sur I . Supposons que le SDD défini par la fonction $f(x)$ possède une orbite périodique $O(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\} \subset I$ de période P (ou cycle d'ordre P ou encore P -cycle). Supposons en plus qu'autour de chaque point de l'orbite $(x_i) \in O(x_0), i = 0, 1, p-1$ il existe un voisinage $U_{\delta_i} \subset I$ tel que la fonction $f(x)$ est dérivable dans ce voisinage et que sa dérivée est continue en (x_i) . Alors l'orbite $O(x_0)$ est :

- **Attractive** si et seulement si :

$$\left| \frac{d}{dx}f^p(x_0) \right| = \left| \prod_{j=0}^{p-1} f'(x(j)) \right| < 1.$$

- **Répulsive** si et seulement si :

$$\left| \frac{d}{dx}f^p(x_0) \right| = \left| \prod_{j=0}^{p-1} f'(x(j)) \right| > 1.$$

● **Stabilité d'un SDD de dimension m :**

Théorème 1.8.6. (Critère de stabilité du point fixe)

Soient $U \in \mathbb{R}^m$ un ensemble ouvert et $f : U \rightarrow U$ une application continue sur cet ensemble. Supposons que le système dynamique défini par la fonction f possède un point fixe $x_s \in U$ du point fixe tel que la fonction f est dérivable et que sa dérivée $Df(x)$ est continue sur ce voisinage, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ telle que

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|Df(x) - Df(y)\| < \varepsilon$$

Alors :

- Si toutes les valeurs propres de la matrice $Df(x_s)$ ont les valeurs absolues inférieures à 1 le point x_s est un point fixe attractif.
- Si la valeur absolue d'une valeur propre est supérieure à 1, le point x_s est un point fixe répulsif.

Théorème 1.8.7. (Critères de stabilité des points périodiques)

Soit x le point périodique d'un cycle d'ordre p . Si le spectre de la matrice $Df^p(x)$ est contenu à l'intérieur du cercle unité, le cycle est stable, si une des valeurs propres a un module plus grand que 1, le cycle est instable.

1.8.5 Bifurcation

Soit le système dynamique non linéaire suivant :

$$x(k+1) = f(x(k), \alpha)$$

d'où

$$x(k) \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^m, k \in N \quad \text{et} \quad F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times N \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Ce type de système dynamique possède quatre types de bifurcations à un paramètre :

Bifurcation noeud-col (ou tangente, ou pli) :

cette bifurcation se produit lorsque l'une des deux valeurs propres de $DF(x(k), \alpha)$ est égale à -1 . Sur le diagramme des bifurcations on observe, dans ce cas, une courbe de points fixes continue tangente à la ligne droite verticale. Deux points d'équilibres existent (stable et instable) avant la bifurcation. Après la bifurcation, n'existe aucun équilibre.

Bifurcation transcritique :

Sur le diagramme de bifurcations cela se traduit par deux branches différentes de points fixes qui se croisent en un point et par le changement de stabilité des deux branches au passage par le point intersection.

Bifurcation de doublement de période (ou flip) :

Cette bifurcation a lieu lorsque l'une des deux valeurs propres de $DF(x(k), \alpha)$ est égale à -1 . Un point fixe stable d'ordre 1, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable.

Bifurcation de Neimark-Sacker :

Cette bifurcation se produit lorsque $DF(x(k), \alpha)$ possède deux valeurs propres complexes égale à $e^{\pm i\theta}$. [14]

1.9 Attracteurs

Définition 1.9.1. *Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble de situations) vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.*

Définition 1.9.2. [16] *Mathématiquement, L'ensemble A est un attracteur si :*

- *Pour tout voisinage U de A il existe un voisinage V de A telle que toute solution $x(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$.*
- *$\cap \varphi_t(V) = A, t \geq 0$.*
- *Il existe une orbite dense dans A .*

1.9.1 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges (ou chaotiques).

1. Les attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

1. **Point fixe** : est le plus simple et le plus courant d'attracteurs, dans lequel le système évolue vers un état de repos (point).
2. **Un cycle limite** : c'est une trajectoire fermée qui attire toutes les trajectoires proches.
3. **Un tore** : représente les mouvements résultants de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois **mouvements quasi périodiques**.

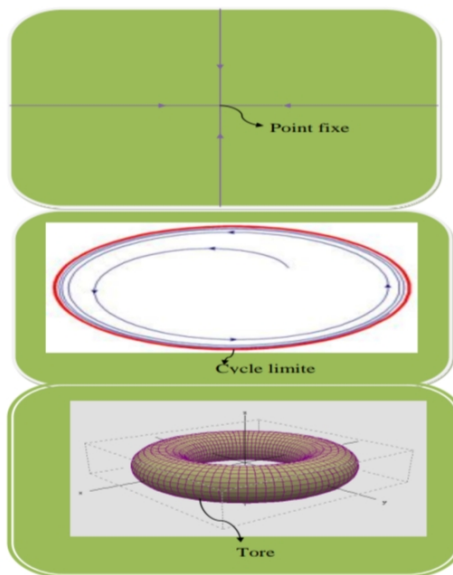


FIGURE 1.6 – *Attracteurs réguliers*

2. Attracteurs chaotiques (ou étranges)

Définition 1.9.3. Soit A un ensemble de $\mathbb{R}^n$, alors A est appelé *attracteur étrange* s'il est chaotique (l'attracteur vérifie la notion de sensibilité aux conditions initiales).

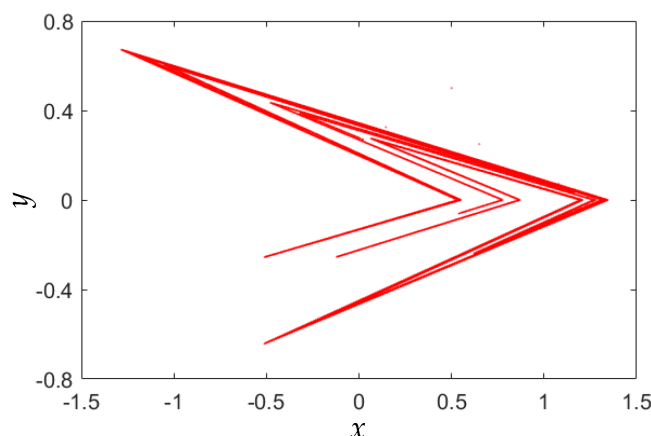


FIGURE 1.7 – *Attracteur étrange de Lozi*

Les caractéristiques d'un attracteur étrange :

- La dimension d de l'attracteur est fractale (non entier) avec $2 < d < n$, ou n (ce qui justifie l'adjectif étrange).
- Sensibilité aux conditions initiales : deux trajectoires initialement voisines finissent toujours par s'écarter l'une de l'autre.
- Dans l'espace des phases l'attracteur est de volume nul.

1.10 Conclusion

L'intérêt de ce chapitre est de présenter les notions de base des systèmes dynamiques, tels que : Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs, systèmes autonomes et non autonomes, les systèmes continus et discrets...etc.

Ensuite, nous avons donné les différentes définitions relatives à la notion de stabilité. On a aussi présenté les différents types, théorèmes et critères de stabilité ainsi

que les méthodes pour l'étude de la stabilité.

Ensuite nous avons abordé les bifurcations (définitions et types). L'analyse de bifurcation est finalement une sorte d'analyse des changements brutaux de comportement des systèmes dynamiques.

Systèmes chaotiques

2.1 Introduction

Un système chaotique est un système déterministe et imprévisible, mais c'est aussi et surtout un système non linéaire. Le lien qui relie ces deux notions paradoxales, déterministe et imprévisible, est la propriété de sensibilité aux conditions initiales. La sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques a fait du chaos une situation indésirable pendant plusieurs années. En effet, ce chapitre est réservé à la théorie du chaos. Le phénomène du chaos est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales, son attracteur étrange, sa dimension fractale et au moins l'un de ses exposants de Lyapunov est positif. Cependant, il existe un certain nombre de scénarios de transition vers le chaos qui permettent de décrire l'évolution d'un système dynamique. Pour clôturer le chapitre, nous avons présenté quelques exemples, les plus célèbres, qui illustrent le comportement des systèmes dynamiques chaotiques.

2.2 Définition du chaos

En général il n'y a pas de définition rigoureuse du chaos, car ce phénomène est plus une notion philosophique qu'une notion scientifique. On peut observer le phénomène du chaos dans plusieurs domaines, mais comment le formaliser ? La réponse est négative car jusqu'à l'heure actuelle, il n'existe pas une théorie générale qui donne une explication ou une caractérisation finale de ce phénomène. Tout ce qu'il est possible de dire est qu'il existe plusieurs critères physiques qui permettent de confirmer qu'un système est chaotique.

Définition 2.2.1. *Un système chaotique est un système dynamique déterministe non linéaire qui se distingue par son imprévisibilité due à son extrême sensibilité aux conditions initiales.*

2.3 Propriétés des systèmes chaotiques

Bien qu'il n'y a pas de définition mathématique du chaos universellement acceptée, une définition couramment utilisée stipule que pour qu'un système dynamique soit classifié en tant que chaotique, il doit comporter les propriétés suivantes :

- **Non-linéarité**
- **Déterminisme**
- **Aspect aléatoire**
- **Sensibilité aux conditions initiales**
- **Exposants de Lyapunov**

2.3.1 Non-linéarité

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique. Le comportement chaotique d'un système dynamique non linéaire est dû aux non linéarités. En général, pour prévoir des phénomènes générés par les systèmes dynamiques, la démarche consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effets. Si cette relation est une opération de proportionnalité, le phénomène est linéaire. Dans le cas d'un phénomène non Linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause.

2.3.2 Déterminisme

La notion de déterminisme signifie la capacité de **prédire** le future d'un phénomène à partir d'un évènement passé ou présent. L'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est dû à la non linéarité. Dans les phénomènes aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule. À l'opposé, un système chaotique à des règles fondamentales déterministes et non probabilistes.

2.3.3 Aspect aléatoire

Les systèmes chaotiques se comportent, en effet d'une manière qui peut sembler aléatoire. Cet aspect aléatoire du chaos vient du fait que l'on est incapable de donner une description mathématique du mouvement, mais ce comportement est en fait décrit par des équations non linéaires parfaitement déterministes, comme par exemple les équations de Newton régissant l'évolution d'au moins trois corps en interaction. Les figures ci-dessus illustrent les aspects aléatoires du système

chaotique.

Aspect aléatoire du système de Rössler

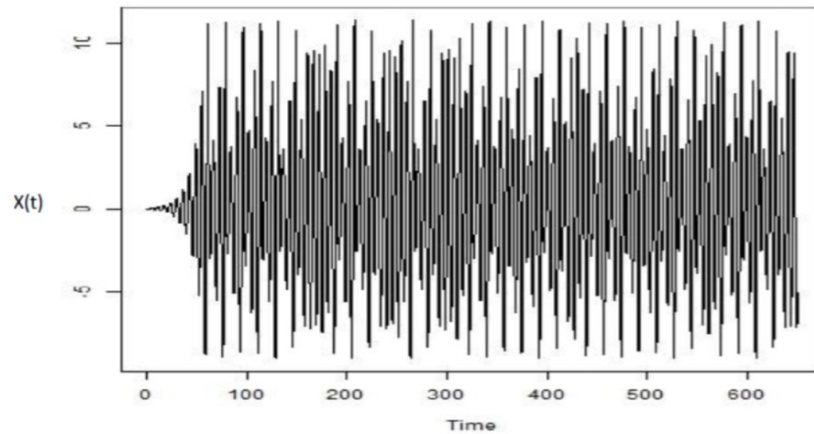


FIGURE 2.1 – *Aspect aléatoire du système de Rössler*

Aspect aléatoire du système de Lü

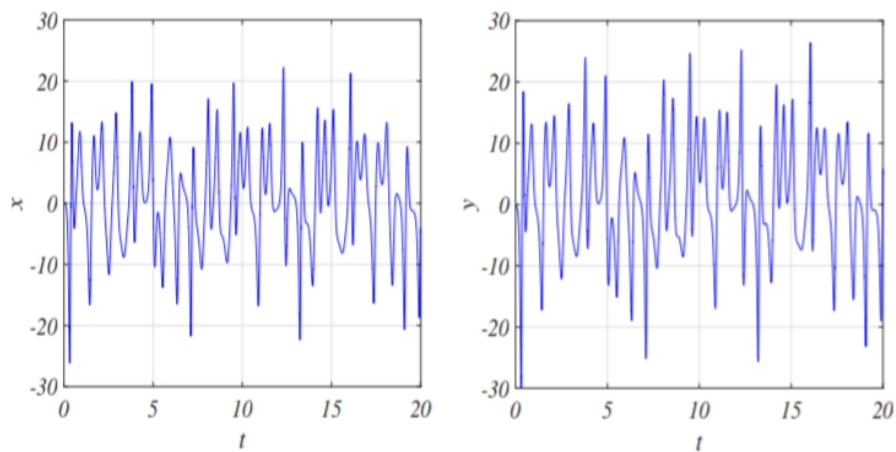


FIGURE 2.2 – *Aspect aléatoire du système de Lü*

2.3.4 Sensibilité aux conditions initiales

Certains phénomènes dynamiques non linéaires sont si sensibles aux conditions initiales que, même s'ils sont régis par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes, les prédictions exactes sont impossibles. Une autre propriété des phénomènes chaotiques est qu'ils sont très sensibles aux perturbations. L'un des premiers chercheurs à s'en être aperçu fut Edward Lorenz qui s'intéressait à la météorologie et par conséquent aux mouvements turbulents d'un fluide comme l'atmosphère. Lorenz venait de découvrir que dans des systèmes non linéaires, d'infimes différences dans les conditions initiales engendraient à la longue des trajectoires totalement différentes. Il illustre ce fait par l'effet papillon. Il est clair que la moindre erreur ou imprécision sur la condition initiale ne permet pas de décider à tout temps quelle sera la trajectoire effectivement suivie et en conséquence de faire une prédiction sur l'évolution à long terme du système, une des propriétés essentielles du chaos est donc bien cette sensibilité aux conditions initiales que l'on peut caractériser en mesurant des taux de divergence des trajectoires. En effet deux orbites chaotiques initiées avec des conditions initiales très voisines vont diverger et s'écarter l'une de l'autre très rapidement. La vitesse de divergence de deux orbites initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapunov afin de caractériser la nature du chaos observé.^[1]

2.3.5 Exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov sont des coefficients qui permettent de mesurer la sensibilité aux conditions initiales d'une série temporelle. Par définition, un exposant de Lyapunov est le taux exponentiel moyen de divergence des trajectoires voisines de l'espace des phases. Il mesure le taux local d'expansion de l'espace dans lequel l'expansion est maximale, c'est-à-dire en général vers l'attracteur.

Le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases.

Calcul des exposants de Lyapunov

• Cas d'une application discrète unidimensionnelle

Soit une application discrète f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui applique x_n sur x_{n+1} : Choisissons deux conditions initiales très proches, soit x_0 et $x_0 + \varepsilon$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentielle. On pourra trouver un réel λ tel qu'après n itérations on a :

$$|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| \cong \varepsilon \exp(n\lambda)$$

d'où

$$n\lambda \cong \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon}$$

et pour $\varepsilon \rightarrow 0$ on a :

$$\begin{aligned} n\lambda &\cong \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ \lambda &= \frac{1}{n} \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{df^{n-1}(x_0)} \times \frac{df^{n-1}(x_0)}{df^{n-2}(x_0)} \times \dots \times \frac{df^1(x_0)}{d(x_0)} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_{n-1})}{df(x_{n-1})} \times \frac{df(x_{n-2})}{df(x_{n-2})} \times \dots \times \frac{df(x_0)}{d(x_0)} \right| \cong \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right| \end{aligned}$$

finalement pour $n \rightarrow \infty$ on a :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (2.1)$$

avec $f'(x_i) = \frac{df(x_i)}{d(x_i)}$

λ est appelé exposant de Lyapunov il indique le taux moyen de divergence de deux trajectoires distinctes, à partir de deux condition initiales très proches.

- Si $\lambda > 0$, alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.
- Si $\lambda < 0$, les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions

initial.

Appliquant la formule précédente pour $x_i = x_s$ tel que x_s est le point d'équilibre, il faut que :

$$\lambda = \ln|f'(x_s)|.$$

Exemple 2.3.1. *Considérons l'application logistique :*

$$f(x_i) = 4x_i(1 - x_i) ; x_i \in [0, 1]$$

En appliquant la formule (2.1) pour calculer l'exposant de Lyapunov de f .

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln|4(1 - 2x_i)| = \ln 2 > 0$$

soit : $\lambda = \ln 2 > 0$ d'où le comportement est chaotique.

• **Cas d'une application discrète multidimensionnelle**

Soit f une application discrète de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Un système m dimensionnelle possède m exposants de Lyapunov $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m$, chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système. Comme précédemment, nous intéressons à :

$$f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0) \cong \varepsilon(n\lambda).$$

Posons $x'_0 = x_0 + \varepsilon$ on a le développement en série limité d'ordre 1 de $f^n(x_0)$ au voisinage de x'_0 suivant :

$$\begin{aligned} x_n - x'_n &\approx f^n(x_0) - f^n(x'_0) \\ x_n - x'_n &\approx \frac{df^n(x_0)}{dx_0}(x_0 - x'_0) \\ &\approx J(x_0)J(x_1)\dots J(x_n)(x_0 - x'_0) \\ &\approx \prod_{i=1}^n J(x_i)(x_0 - x'_0) \end{aligned}$$

On note $\prod_{i=1}^n J(x_i)$ par $J^n(x_0)$, ainsi

$$x_n - x'_n \approx J^n(x_0 - x'_0)$$

$J^n(x_0)$ est la matrice jacobienne de f^n au point x_0 . Il s'agit d'une matrice carrée $m \times m$, si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_n telle que $D_t^m = P_n^{-1} J^n P^n$, D_t^m est une matrice diagonale des valeurs propres $u_i(f^n(x_0))$, $i = 1, 2, \dots, m$ de J^n . On définit alors les m exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln |u_i(f^n(x_0))|, i = 1, 2, \dots, m$$

Pour le point d'équilibre x_s la formule précédente devient

$$\lambda_i = \ln |u_i(x_s)|, i = 1, 2, \dots, m$$

Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Pour une application multidimensionnelle on peut résumer la correspondance entre le type de l'attracteur et le signe des exposants de lyapunov dans le tableau suivant : [15]

Type d'attracteur	Exposants de Lyapunov
Point fixe	$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
Cercle	$\lambda_1 = 0, 0 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$
Tore	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, 0 > \lambda_3 \geq \lambda_4 \dots \geq \lambda_n$
k-tore	$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0, 0 > \lambda_{k+1} \geq \lambda_{k+2} \geq \dots \lambda_n$
Attracteur chaotique	$\lambda_1 \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

TABLE 2.1 – *Exposants de Lyapunov pour différents attracteurs.*

Dimension de Lyapunov

Définition 2.3.1. Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots \geq \lambda_n$, les exposants de Lyapunov d'un attracteur d'un système dynamique et soit j le grand entier naturel tel que :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \dots + \lambda_j \geq 0.$$

Alors la dimension de Lyapunov défini par Karlan et Yorke est donné par :

$$D_l = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}$$

2.4 Transitions vers le chaos

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage vers le chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on a déjà appelé bifurcations. On peut citer trois scénarios de transition d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre : [7]

2.4.1 Doublement de période

Ce scénario a été observé dans les années 60 par R.May en dynamique des populations sur l'application logistique. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, puis par huit, ..., etc ; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique.

2.4.2 Intermittence vers le chaos

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées chaotiques. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement le chaos apparaît.

2.4.3 Quasi-périodicité

Le scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de Ruelle et Takens 1971. Dans un système à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle, le comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Alors, on change de nouveau paramètre et il apparaît une troisième fréquence, et ainsi de suite jusqu'au chaos.

2.5 Exemples des systèmes dynamiques chaotiques à temps continu

2.5.1 Système de Lorenz

Cet exemple a été publié en 1963 dans un journal météorologique. L'attracteur de Lorenz est généré par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(b - z) - y \\ \dot{z} = xy - rz \end{cases}$$

Les paramètres σ, b et r sont des réels strictement positifs.

La figure(2.3) illustre l'attracteur de Lorenz en 3 dimensions $x(t), y(t)$ et $z(t)$ tel que $\sigma = 10$, $b = 8/3$ et $r = 28$.

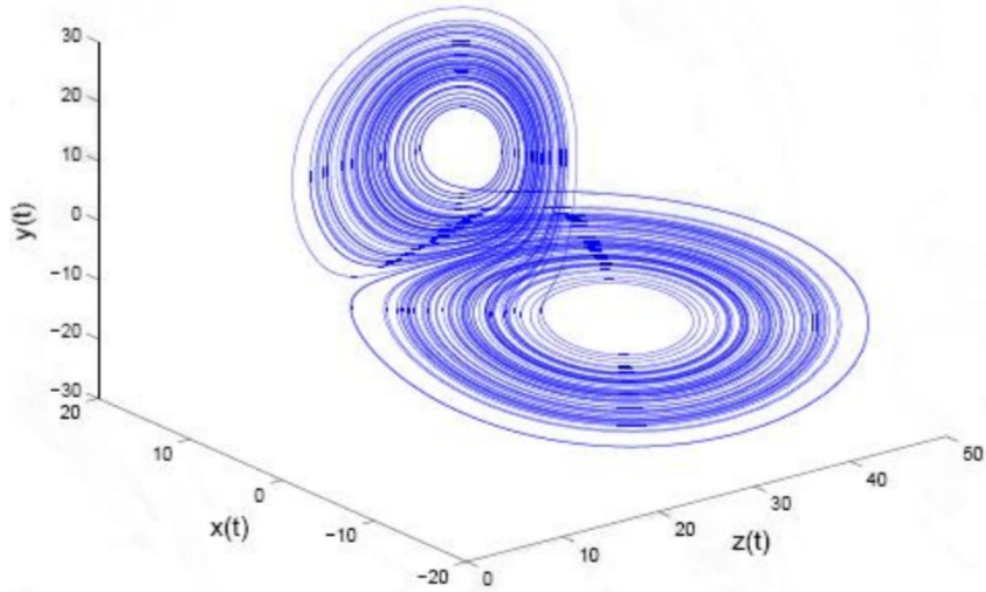


FIGURE 2.3 – *Attracteur de Lorenz*

2.5.2 Système de Rössler

Le système de Rössler est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases}$$

x, y , et z sont les variables d'états du système.

a, b, c sont les paramètres réels. Les paramètres et les conditions initiales de cette équation ont été choisis de la manière suivante : $a = b = 0.1, c = 12, (x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.01, 0.01)$.

L'ensemble des trajectoires de ce système définissent un attracteur étrange aux propriétés fractales sur le long terme.

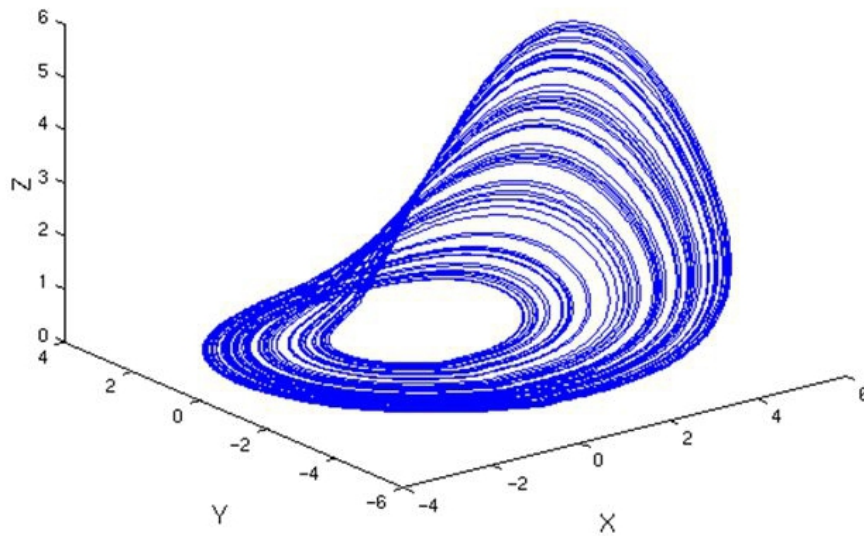


FIGURE 2.4 – *Attracteur de Rössler*

2.5.3 Système de Chen

Il est donné par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (c - a)x + xz + cy \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

La figure (2.5) montre l'attracteur de Chen en 3 dimensions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ avec $a = 35$, $b = 3$ et $c = 28$. [17]

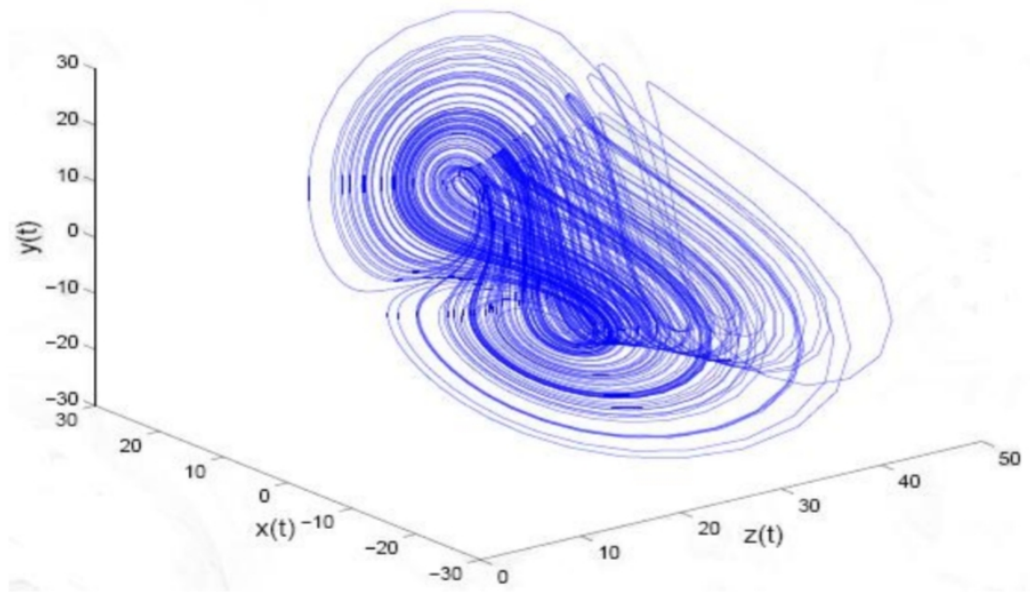


FIGURE 2.5 – *Attracteur de Chen*

2.6 Exemples des systèmes dynamiques chaotiques à temps discret

2.6.1 Système de Hénon

Le modèle de Hénon consiste en une itération à deux dimensions qui peut prendre différentes formes. On utilisera la forme suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

2.6.2 Système Hénon-Heiles ou Hénon modifié

Il est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a - y_n^2 - bz_n \\ y_{n+1} = x_n \\ z_{k+1} = y_n \end{cases}$$

Pour avoir un comportement chaotique, les paramètres du système sont donnés comme suit : $a = 1.76$ et $b = 0.1$ et les conditions initiales du système : $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0.1$, $z_0 = 0.1$.

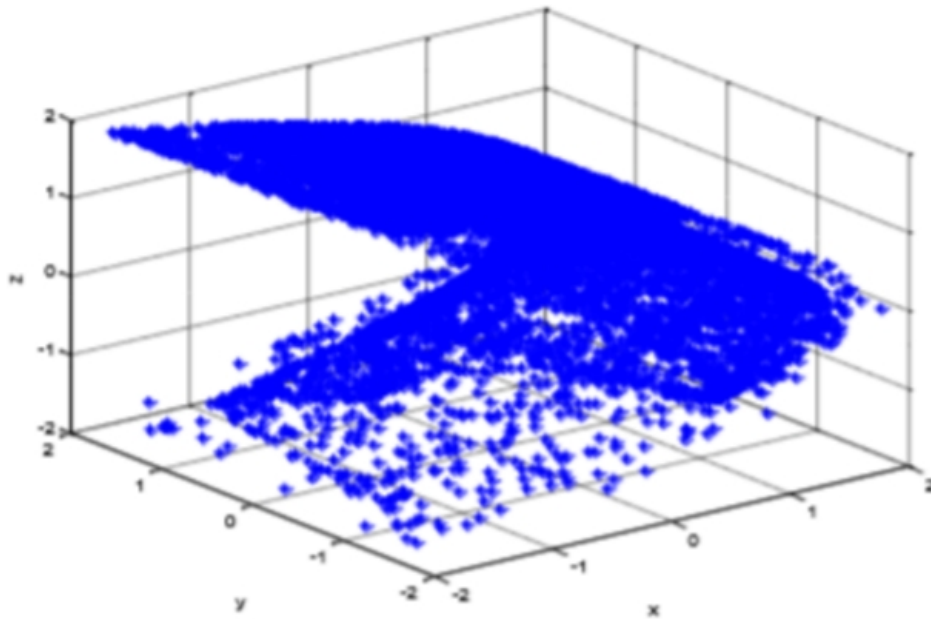


FIGURE 2.6 – *Attracteur de Hénon-Heiles*

2.6.3 Suite logistique

Cette fonction est donnée par l'équation suivante :

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

x_n est compris entre 0 et 1 et r est un nombre positif compris entre 1 et 4. Le comportement est chaotique à partir de r égal à 3.6 .

La figure (2.8) illustre le diagramme de bifurcation (x_n en fonction de r). [17]

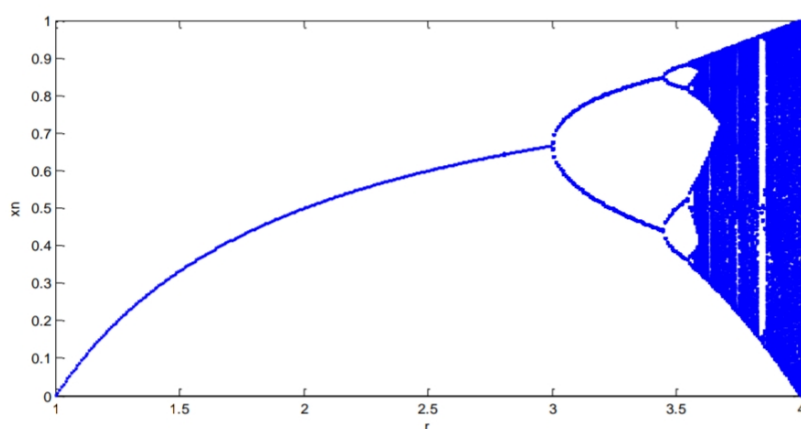


FIGURE 2.7 – *Diagramme de bifurcation*

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté quelques notions de base de chaos, ainsi que quelques propriétés des systèmes chaotiques. Nous avons aussi parlé sur les transitions vers le chaos. De plus, on a abordé des exemples des systèmes chaotiques avec les deux types continu et discret, sur lesquels nous avons travaillé avons fait dans le dernier chapitre.

Chapitre 3

Exemples sur les systèmes chaotiques (continu et discret)

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier le système chaotique en détail. Le premier c'est le système de Lorenz, et le deuxième c'est le système de hénou.

3.2 Système de Lorenz

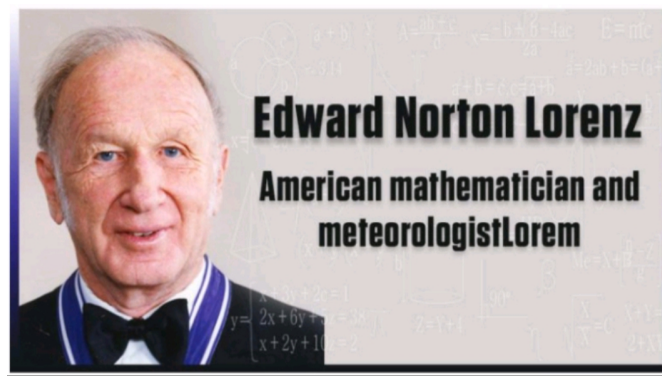
Galilée proposa un modèle pour la chute des corps et le mouvement de la terre autour du soleil. La présence de la variable temps permet de parler des systèmes dynamiques. Au XVIII^e siècle, **Isaac Newton** établit le déterminisme sur les phénomènes physiques où tout devient parfaitement prédictible et causal. Muni des équations différentielles du modèle, par exemple, il est possible de représenter et estimer la trajectoire d'un corps dans le temps.

Une fois appliquée avec succès sur d'autres phénomènes physiques, cette approche finie par imposer pendant longtemps l'idée dogmatique d'un monde parfait, régit par les mêmes lois et donc prédictif. Lié à cette idéologie, tout phénomène proche

du hasard apparaît comme un système que l'on n'était pas encore capable de modéliser.

Au début du XXème siècle, le mathématicien français **Henry Poincaré**, en analysant la modélisation des mouvements des corps célestes, a mis en évidence que la physique de Newton, n'est pas tout à fait une règle générale applicable à tout phénomène. Il constate l'existence de solutions particulières et apériodiques pour des trajectoires. Beaucoup plus tard ces travaux donneront naissance à la théorie du chaos.

Dans les années soixante, **Edward Lorenz**, professeur de mathématiques au MIT



(Massachusetts Institute of Technology) s'intéresse aux phénomènes météorologiques. De tels phénomènes répondent à un nombre très conséquent de variables. Cependant, avec une approche newtonienne, il est possible de simplifier le calcul en considérant un nombre "compact" de variables, tout en gardant des équations complexes. Ainsi, Edward Lorenz réalisa une série de calculs en modifiant la résolution, de six à trois chiffres décimaux, dans le but de gagner du temps de calcul tout en gardant une précision tolérable. Lorsqu'il compara les deux séries de résultats, il obtint des résultats totalement différents, il imagina en tout premier lieu qu'il existait un dysfonctionnement dans l'ordinateur (le Royal McBee LGP-300). C'est le premier exemple de système dynamique dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange. Il étudiait les mouvements de convection dans l'atmosphère, et était arrivé à un système de trois équations différentielles du premier ordre couplées

qui s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (3.1)$$

Où

x : représente l'intensité de mouvement de convection.

y : représente la variation horizontale de la température.

z : représente la variation verticale de la température.

b, r, σ sont des constantes réelles.

Les valeurs σ (nombre de prandtl), b (la proportion physique) et r (nombre de Rayleigh réduit) sont respectivement à 10, $\frac{8}{3}$ et r varie.

3.2.1 Points d'équilibres

On cherche les points d'équilibres (x, y, z) vérifiant $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$. Un premier point d'équilibre trivial est $P_0 : x = y = z = 0$ pour $r < 1$, et pour $r > 1$, il y a deux autres points.

On a :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) = 0 \\ \dot{y} = x(r - z) - y = 0 \\ \dot{z} = xy - bz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y, \\ z = r - 1, \\ y = \pm \sqrt{b(r - 1)}. \end{cases} \quad (3.2)$$

donc, les deux points sont :

$$p_1 = (\sqrt{b(r - 1)}, \sqrt{b(r - 1)}, (r - 1)).$$

$$p_2 = (-\sqrt{b(r - 1)}, -\sqrt{b(r - 1)}, (r - 1)).$$

3.2.2 Stabilité

L'étude de la stabilité des points d'équilibres repose sur le critère de **Routh-Hurwitz** sur le polynôme caractéristique de λ de la matrice jacobienne J , de la matrice jacobienne obtenue en linéarisant le système (3.1) autour d'un point d'équilibre.

L'expression de la matrice jacobienne J du système est :

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

• **Pour le point p_0**

Au point $(0, 0, 0)$, les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont :

$$J(p_0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Donc $\det(J - \lambda I)$ est définie par :

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{vmatrix}$$

Alors, l'équation caractéristique est définie par :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda + b)(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)) \\ &= \lambda^3 + (1 + \sigma + b)\lambda^2 + (b(\sigma + 1) + \sigma(1 - r))\lambda + b\sigma(1 - r) = 0. \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \sigma + b, \\ a_2 &= b(\sigma + 1) + \sigma(1 - r), \\ a_3 &= b\sigma(1 - r). \end{aligned}$$

telle que $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$.

Donc les déterminants de Routh-Hurwitz sont donnés par :

$$\begin{aligned} H_1 &= |a_1| = a_1 = \frac{41}{3}, \\ H_2 &= a_1 a_2 - a_3 = \frac{41}{3} \left(\frac{8}{3}(10+1) + 10(1-r) \right) - \left(\frac{8}{3} \right) (10)(1-r), \\ &= \frac{4598}{9} - 110r, \\ H_3 &= a_3 H_2 = \left(\frac{8}{3} \right) (10)(1-r) H_2 = \frac{80}{3} (1-r) H_2. \end{aligned}$$

Le système de Lorenz est asymptotiquement stable au point $(0, 0, 0)$ si

$$H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0.$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{41}{3} > 0, \\ H_2 &= a_1 a_2 - a_3 > 0 \implies \frac{4598}{9} - 110r > 0 \implies -110r > -\frac{4598}{9} = 4.64 \end{aligned}$$

donc pour $r < 4.64$ on a $H_2 > 0$.

$$H_3 = a_3 H_2 > 0 \implies \frac{80}{3} (1-r) H_2 > 0 \iff H_2 > 0 \text{ et } (1-r) > 0$$

$r < 4.64$ et $r < 1$. Alors pour $r < 1, H_3 > 0$.

Donc pour $r < 1, H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0$. Alors le système de Lorenz est asymptotiquement stable.

Si $r = 1$ On a $H_1 > 0$,

$$H_2 = \frac{3608}{9},$$

et on a $H_3 = a_3 H_2 = 0$ (car $b\sigma(1-r) = 0$) alors le système de **Lorenz** est un point critique.

● **Pour le point p_1**

Au point $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, (r-1))$, les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont :

$$J(P_1) = \begin{vmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{vmatrix}$$

Donc $\det(J - \lambda I)$ est définie par :

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b - \lambda \end{vmatrix}.$$

Alors, l'équation caractéristique est définie par :

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (1 + \sigma + b)\lambda^2 + (b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r-1)) = 0.$$

avec :

$$a_1 = 1 + \sigma + b,$$

$$a_2 = b(\sigma + r),$$

$$a_3 = 2b\sigma(r-1).$$

Donc les déterminants de Routh-Hurwitz sont donnés par :

$$H_1 = a_1 = 1 + \sigma + b = \frac{41}{3} > 0,$$

$$H_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0$$

$$\implies (1 + \sigma + b)(b(\sigma + r)) - 2b\sigma(r-1) > 0$$

$$\implies r < \frac{\sigma(b + \sigma + 3)}{\sigma - 1 - b} = 24.74.$$

Tel que $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$. Donc pour $r < 24.74$ on a $H_2 > 0$.

$$H_3 = a_3 H_2 > 0$$

$$\implies 2b\sigma(r-1) > 0 \quad \text{et} \quad H_2 > 0$$

$$\iff r > 1 \quad \text{et} \quad r < 24.74.$$

Donc pour $r \in]1, 24.74[$ le système de **Lorenz** est asymptotiquement stable

C'est le même pour le point fixe p_2 car nous avons obtenu le même polynôme caractéristique donc les mêmes points fixes.

On explique les résultats précédents par le tableau suivant :

La valeur pour r	le point p_0	les points p_1 et p_2
$r < 1$	asymptotiquement stable	n'est pas existe
$r = 1$	point critique	n'est existe pas
$r > 1$ où $r \in]1, 24.74[$	instable	asymptotiquement stable
$r > 24.74$	instable	asymptotiquement stable

3.2.3 Attracteur de Lorenz

Le système chaotique (3.1) présente un superbe attracteur étrange en forme d'ailes de papillon fig (3.1) pour les valeurs $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ et $r = 28$, on observe que la dynamique du système de Lorenz donné par le système (3.1) est indépendante du temps t , par conséquent, ce type de système est qualifié d'être autonome.

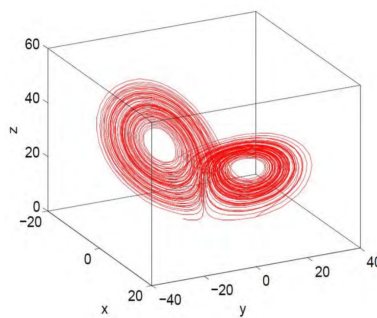


FIGURE 3.1 – *Attracteur de Lorenz* $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ et $r = 28$

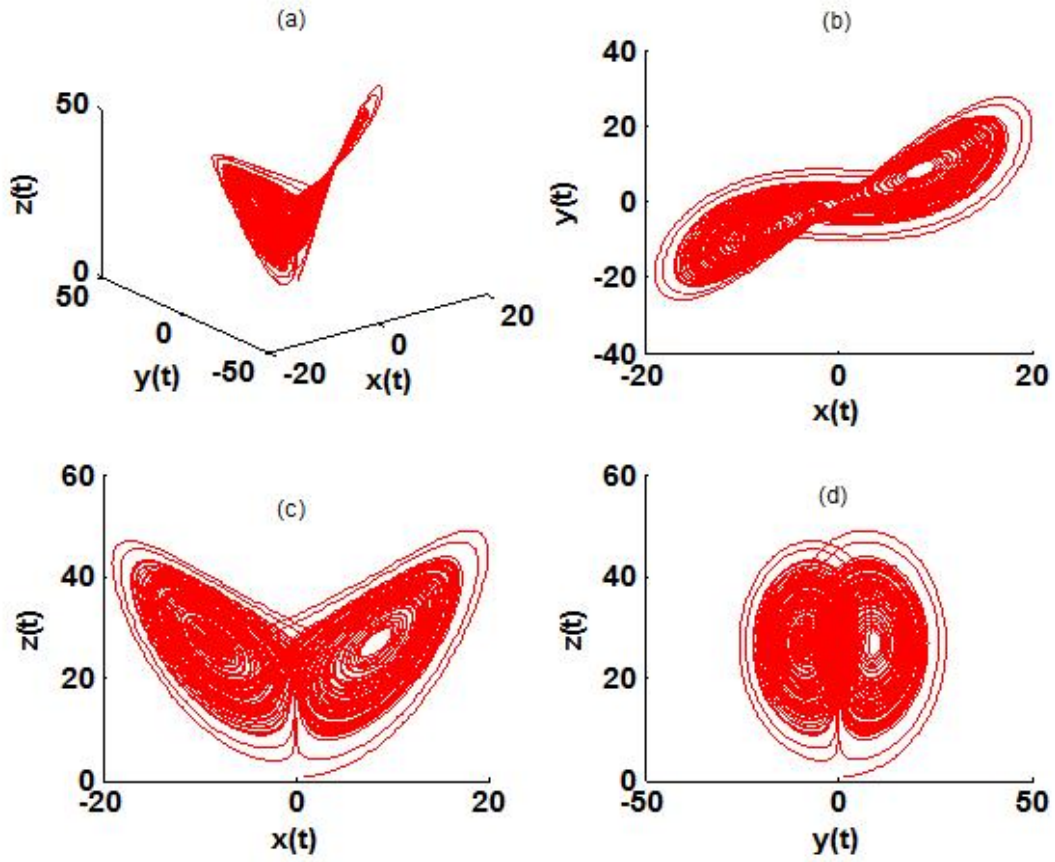


FIGURE 3.2 – *Attracteur de Lorenz avec les espaces (a), (b), (c), (d)*

3.2.4 Aspect aléatoire

La figure (3.3) illustre l'aspect aléatoire de l'état x du système (3.1).

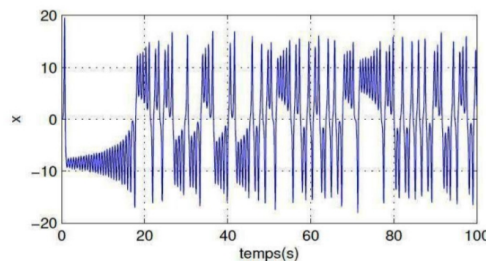


FIGURE 3.3 – *Aspect aléatoire de l'état x du système de Lorenz*

3.3 Système de Hénon

En 1976, l'astronome Michel Hénon a obtenu ses équations en cherchant une version simplifiée du système dynamique de Lorenz à temps continu introduit en 1963, le modèle de Hénon consiste en une itération à deux dimensions qui peut prendre différentes formes. Proposa la forme suivante du plan sur lui même :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

a et b étant deux paramètres réels, où la valeur de la constante a contrôle la non-linéarité de l'itération, et celle de b traduit le rôle de la dissipation. Les valeurs habituellement utilisées pour a, b sont $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

Partant d'un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) on peut calculer les coordonnées (x_1, y_1) du point suivant, et ainsi de suite.

3.3.1 Points fixes

On peut obtenir les points fixes du système de Hénon en résolvant le système :

$$\begin{cases} y + 1 - ax^2 = x \\ bx = y \end{cases}$$

avec $0 < b < 1$. Ce système a deux points fixes :

$$p_1 = (x_1, y_1) \quad \text{et} \quad p_2 = (x_2, y_2)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{b-1+\sqrt{\beta}}{2a} \\ y_1 = bx_1 \\ x_2 = \frac{b-1-\sqrt{\beta}}{2a} \\ y_2 = bx_2 \end{array} \right. \quad \text{Où : } \beta = \sqrt{4a + (b-1)^2}$$

Le déterminant $(b-1)^2 + 4a$ est négative si $a < a_0 = \frac{(b-1)^2}{4} = -0.1225$, dans ce cas il n'y a pas des points fixes.

3.3.2 Stabilité

La matrice jacobienne ici a pour expression :

$$J = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

et $\det(J - \lambda I)$ est donnée par :

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2ax - \lambda & 1 \\ b & -\lambda \end{vmatrix}$$

et comme $\det(J - \lambda I) = 0$ nous avons l'équation caractéristique suivante :

$$\lambda^2 + 2ax\lambda - b = 0. \quad (3.3)$$

Donc les valeurs propres données par :

$$\lambda_{1,2} = -ax \pm \sqrt{a^2x^2 + b}$$

Si l'on calcule les valeurs absolues des valeurs propres, on constate que la plus petite des valeurs propres est toujours inférieure à 1, tandis que la plus grand est inférieur, égale ou supérieur à 1 suivant que $|x|$ inférieur, égale ou supérieur à $\frac{1-b}{2a}$, on déduit que le point fixe (x_2, y_2) est un point selle.

L'autre point fixe est stable si : $a < (3(1 - b)^2 \setminus 4) = 0.3675$ on a :

$$\lambda_1(x_1, y_1) = b \text{ et } \lambda_2(x_2, y_2) = -1$$

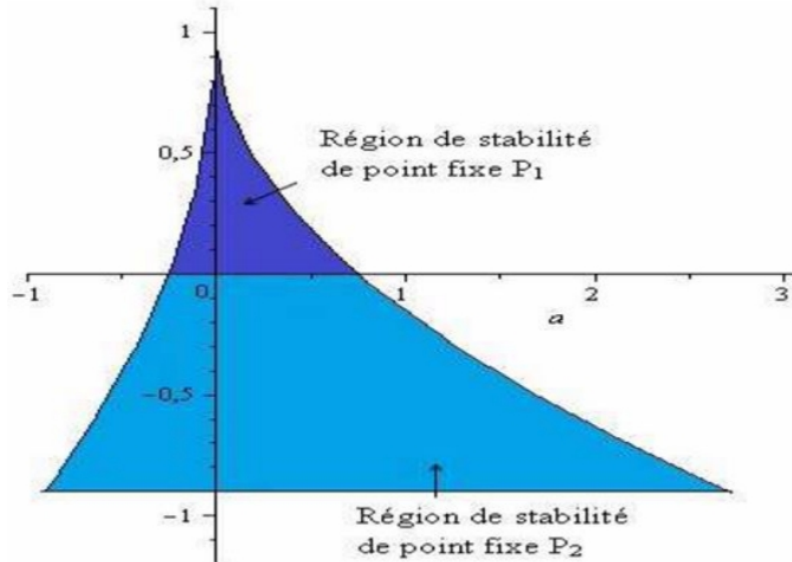


FIGURE 3.4 – Les régions de la stabilité des points fixes p_1 et p_2

3.3.3 Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$

Le modèle de Hénon est le système dynamique de comportement chaotique les plus étudiés. Il dépend de deux paramètres a et b , qui ont pour valeurs canoniques : $a = 1.4$ et $b = 0.3$. Pour ces valeurs, l'attracteur de Hénon est chaotique. Pour d'autres valeurs de a et b il peut être chaotique, intermittent ou converger vers une orbite périodique.

On peut voir la forme connue du croissant de cet attracteur, voir fig (3, 5).

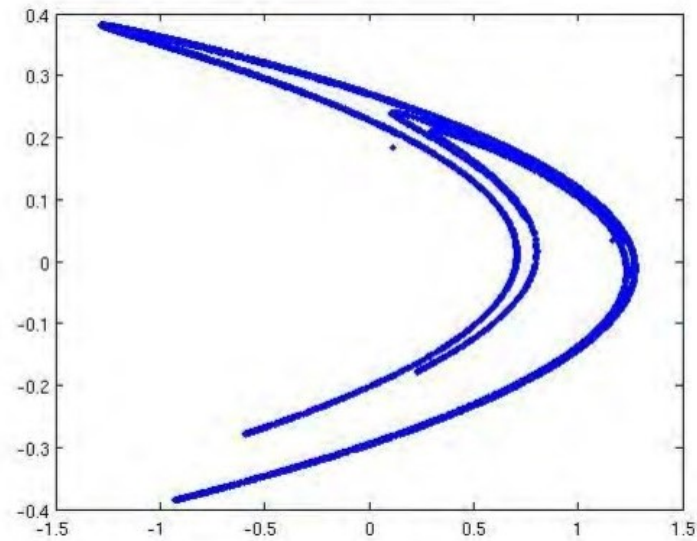


FIGURE 3.5 – *Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$*

3.3.4 Diagramme de bifurcation

La construction de diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre a de 0 à 2 avec un pas de 0.0005, b est égale à 0.3.

Le diagramme obtenu est représenté par la figure (3,6).

Ce diagramme est de type de bifurcation de doublement de période, l'application de Hénon contient deux points fixes. La partie stable se situe dans l'intervalle $[0, 0.3675]$. Un 2-cycle stable commence à $a = 0.3675$ suivi d'un 4-cycle stable à $a = 0.9$ et ainsi de suite. La période continue de doubler jusqu'à une valeur déterminée où la trajectoire commence à prendre une forme particulière.

Pour $a = 1.4$, on ne distingue plus les cycles, le système est chaotique.

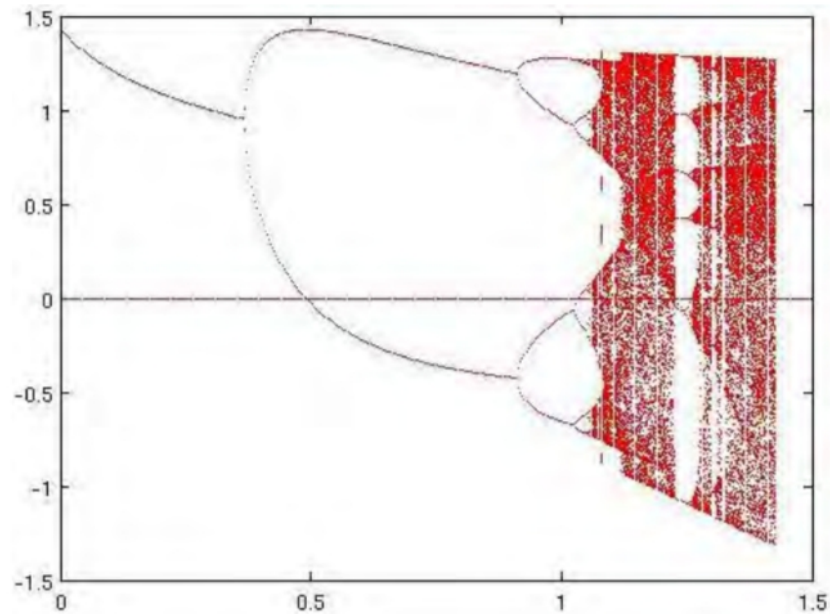


FIGURE 3.6 – *Diagramme de bifurcation du système de Hénon*

3.3.5 Exposants de Lyapunov

On a pour $a = 1.4, b = 0.3$, l'application de Hénon a deux exposants de Lyapunov :

$$\lambda_1 = 0.42311, \lambda_2 = -1.6271.$$

la dimension de Lyapunov

Par la définition :

$$D_l = 1 + \frac{0.42311}{|-1.6271|}$$

$$D_l = 1.26$$

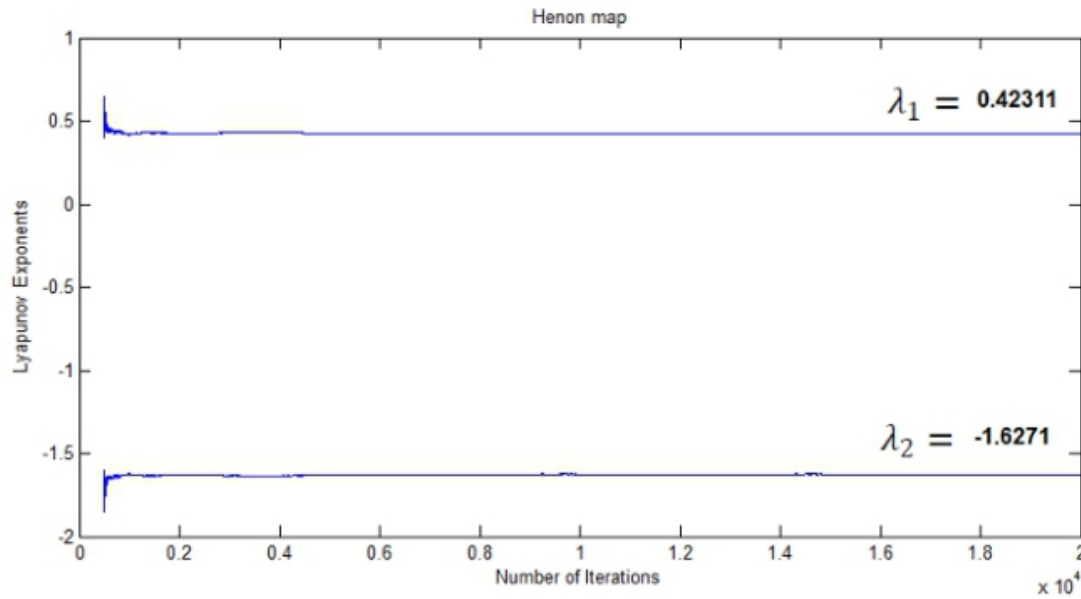


FIGURE 3.7 – *Exposants de Lyapunov du système de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$*

3.3.6 Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité aux conditions initiales de système de Hénon est illustré sur les figures (3.8), (3.9) pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$.

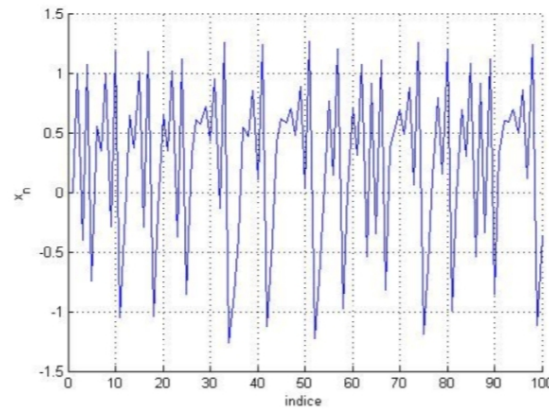


FIGURE 3.8 – *Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$*

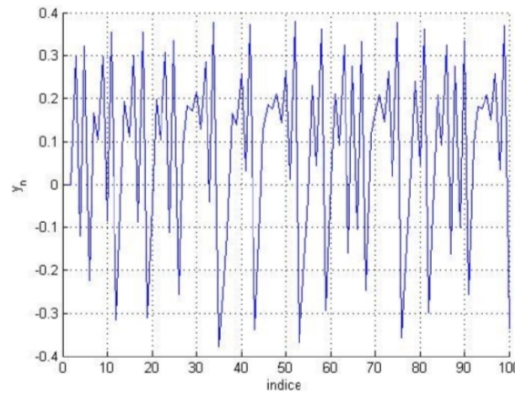


FIGURE 3.9 – Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'étude de systèmes, Lorenz (avec 3 dimensions) Hénnon (avec 2 dimensions).

L'étude du **modèle de Lorenz**, nous a permis de montrer qu'un système d'équations apparemment simple peut en fait être complexe et dans certains cas chaotique. Ce comportement chaotique apparaît alors que l'on est dans un modèle déjà très simplifié d'étude des phénomènes météorologiques, et il remet en cause notre capacité à prédire ces phénomènes physiques. Nous avons mis en évidence ce comportement chaotique en particulier en traçant le célèbre attracteur étrange de Lorenz (Chercher les points fixes et étudier le comportement du système.

Pour l'étude du **modèle de Hénnon**, l'objectif a été de rechercher les points fixes et étudier la stabilité de ces points, ensuite la construction de diagramme de bifurcation dans le plan paramétrique (a, b) .

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le travail présenté dans ce mémoire s'est porté sur l'étude des systèmes dynamiques non linéaires. Ce travail se compose de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous abordons quelques concepts de base et des généralités sur les systèmes dynamiques continus et discrets et nous avons aussi rassemblé les outils nécessaires pour cette étude (stabilité et bifurcation).

Dans le deuxième chapitre, nous avons donné les caractéristiques les plus importantes d'un système chaotique et quelques exemples.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié le chaos dans un système dynamique non linéaire autonome (Continu et Discret) de la deuxième et troisième ordre, à variables réelles, et puis nous avons étudié la stabilité de leurs points fixes, leurs régions de stabilité, les bifurcations, et finalement on a discuté le chaos de ce système, avec quelques attracteurs chaotiques.

Bibliographie

- [1] Barka. S, Khenfri. A, Bifurcations et chaos pour un modèle d'oscillation, Mémoire de Master, Centre Universitaire Abd Elhafid Boussouf Mila, 2017/2018.
- [2] Bessam. A, Étude d'un système dynamique chaotique, Mémoire de Master, Université Mohamed Khider, Biskra, juin 2020.
- [3] Bouchnine. H, Guermache. O, Etude de la dynamique et chaotique du système de Lorenz, Mémoire de Master, Centre Universitaire Abd Elhafid Boussouf Mila, (2020/2021).
- [4] Chabour. W, Stabilisation des systèmes non linéaires, Thèse de doctorat, Université de Metz, (31/03/2000).
- [5] Désilles. A, Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret, 2003.
- [6] Djafri. N, Aspects Chaotiques dans les Systèmes Dynamiques Discrets, Thèse Doctorat en Sciences, (5/4/2021).
- [7] Djenhi. R, Makouf. A, Introduction à la théorie des systèmes dynamiques discrets, Mémoire de Master, Centre Universitaire Abd Elhafid Boussouf Mila, (2016/2017).

- [8] Gasri. A, Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques ,Doctorat en sciences en Mathématiques, Université Frères Mentouri-Constantine-1, (7/5/2018).
- [9] Goncalvès. E, Introduction au système dynamiques et Chaos, Cours de l'institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.
- [10] Laouira. W, Contrôle des systèmes dynamiques chaotiques,Thèse de doctorat, Université Constantine 1, 2017/2018.
- [11] Mehazzem. A, Abdelouahab. M.S, Haouam. K, Homoclinic orbits and localized solutions in discrete nonlinear Schrodinger equation with long-range interaction, International Journal of Nonlinear Analysis and Applications, 2020, 13(1), 353-363.
- [12] Mehazzem. A, Étude des bifurcations et chaos dans quelques systèmes spatio-temporels discrets (Doctoral dissertation, Université de Tébessa-Larbi Tébessi).
- [13] Merabti. N, Etude de quelques systèmes dynamiques chaotiques, Mémoire de master, Université de Larbi Ben M'hidi, Oum El Bouaghi, 2019/2020.
- [14] Ouannas. A, Sur La Synchronisation Des Systèmes Chaotiques Discrets, Thèse de Doctorat, Université Frères Mentouri à Constantine, (07/12/2015).
- [15] Talbi. I, Systèmes dynamiques non linéaires et phénomènes de chaos (Application à la cryptographie), Mémoire de Magistère en Mathématique Université Mentouri de Constantine, (29/06/2010).
- [16] Tidjani. M, Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires, Magistère en mathématiques, Université Mentouri Constantine, 2014.

- [17] Zaibi. G, Sécurisation par dynamiques des réseaux locaux sans fil au niveau de la couche MAC, Thèse de Doctorat de l'université de Toulouse, 2012.