

N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid boussof Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Synchronisation des systèmes chaotiques

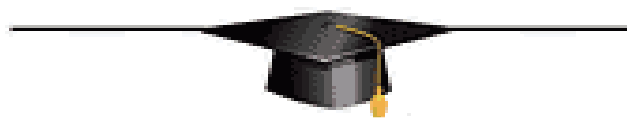
Préparé par :

- Dib Karima
- Kechkar Sara

Soutenue devant le jury

Sakhane Chafika	MAA	C. U. Abdelhafid Boussof, Mila	Président
Laouira Widad	MCB	C. U. Abdelhafid Boussof, Mila	Rapporteur
Labeled Boujemaa	MAA	C. U. Abdelhafid Boussof, Mila	Examineur

Année universitaire :2021/2022



Remerciements

*Avant tout, je remercie infiniment Dieu, le miséricordieux
qui m'a donné la force, le courage et la réussite et qui a mis
à ma disposition des gens merveilleux qui m'ont supporté et soutenu.*

*Nous tenons à saisir cette occasion et adresser nos profonds
remerciements et nos profondes reconnaissances à nos parents.*

*Nous remercions toute personne qui nous a aidés de près ou
de loin pour faire ce travail et pour surmonter les obstacles
en l'occurrence notre encadreur madame **Laouira Widad** qui nous
a gratifiés de ses orientations ainsi que de ses précieux
conseils qui nous ont été d'une grande aide pour
l'accomplissement de ce travail.*

*Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury
monsieur **Boudjemaa Labed**, madame **Sakhane Chafika** pour
l'honneur*

*qu'ils nous ont accordé en acceptant d'examiner notre travail
et de l'enrichir par leurs propositions.*

*Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à tout
le personnel de l'institut de sciences et de la technologie
du centre universitaire de Mila.*



Dédicaces

Je dédie ce mémoire

**À mon chère *père* et ma chère
*mam.***

**Et mes *grand-pères* et *grand-*
*mères.***

**À mes *frères* surtout mon frère
*Nassro.***

Et mon encadreura : *Lawira Widad.*

**Et toute ma *famille* et mes *amis* qui
*m'ont soutenu.***

À tout ceux m'aiment j'aime.



Karima Dib





Dédicaces

Je dédie ce mémoire

*À mon chère père **Rachid** et ma chère
mam **Layla**.*

*À mes sœurs et mes frères: **Nabila,**
Fatima, Meriem, Soumia, Houda, Abd-
Elhak, Hassan, Ibrahim et Mohamed.*

*À mes amis: **Manal, Amina, Ahlem,**
Rania, Monira, Nedja, Sonia, Amira,
Khawla, Imane,...*

*Et toute ma famille et mes amis qui m'ont
soutenu.*



Sara Kechkar



ملخص

يتمحور هدفنا الرئيسي في هذه المذكرة على دراسة تزامن الأنظمة الديناميكية الفوضوية, حيث طبقنا ثلاث طرق من أجل ذلك: طريقة بيكورا وكارول لإثبات المزامنة المتطابقة على النظام الفوضوي الجديد, طريقة التحكم الخطي للمزامنة المتطابقة على نظام روسلر, والتحكم التكيفي لتحقيق المزامنة الكاملة بين النظامين السابقين. بواسطة طريقة "رونج كوتا" الدرجة الرابعة في برنامج "الماتلاب" تأكدنا من النتائج.

الكلمات المفتاحية: أنظمة ديناميكية فوضوية, التزامن, التزامن المتطابق, التزامن الكامل, روسلر.

Abstact

Our main objective in this grduation note revolves around the study of synchronization of chaotic dynamical systems. For this we applied three methods : Pekora and Carol's method to prove the identical synchronization on the new chaotic system, Linear control method for the identical synchronization on Rossler system, and adaptive control method to achieve complete synchronization between the two previous systems. The results were confirmed using the fourth degree **Rung-Kutta** method in the "MATLAB" program.

Key words : Chaotic dynamic systems, synchronization, identical synchronization, complete synchronization, Rössler.

Résumé

Notre objectif principale a ce mémoire est l'étude de la synchronisation des systèmes chaotiques, nous avons appliqués trois méthodes : la méthode de Pecorra et Carroll pour prouvé que le nouveaux système chaotique identique est synchronisé, le contrôle linéaire pour la synchronisation identique entre deux systèmes de Rössler, et nous avons appliqué le contrôle adaptatif sur le nouveaux système chaotique qui on a choisi comme un système esclave pour le système maitre de Rössler pour exprimé la synchronisation complète. On utilise la méthode de **"Runge Kutta"** du quatrième ordre avec un programmation en **"MATLAB"** pour confirmé les résultat.

Mots clés : Systèmes dynamiques chaotique, la synchronisation, la synchronisation identique, la synchronisation complète, Rössler.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Généralités sur le système dynamique chaotique	4
1.1 Système dynamique	4
1.1.1 Système dynamique continue et discret	4
1.1.2 Système dynamique linéaire et non linéaire	5
1.1.3 Système autonome et non autonome	6
1.1.4 Trajectoires, Orbites	6
1.1.5 Espace de phase, variables d'état et portrait de phases	7
1.1.6 Point d'équilibre	8
1.1.7 La stabilité de point d'équilibre	9
1.1.8 Stabilité au sens de Lyapunov	9
1.1.9 Le critère de Routh-Hurwitz	12
1.1.10 Critère de Routh-Hurwitz dans $\mathbb{R}^3$	13
1.1.11 Bifurcation	16
1.2 Système chaotique	17
1.2.1 Définition de chaos	17
1.2.2 La non-linéarité	18
1.2.3 Le déterminisme	18
1.2.4 L'aspect aléatoire	19

1.2.5	Sensibilité aux conditions initiales	20
1.2.6	L'attracteur étrange	20
1.2.7	Exemple des systèmes chaotiques continue	21
2	La synchronisation des systèmes chaotiques	23
2.1	Le contrôle	23
2.1.1	Le contrôle adaptatif	24
2.2	Définitions de la synchronisation	25
2.3	Les systèmes couplés	26
2.4	Synchronisation maître-esclave de systèmes chaotiques . . .	27
2.5	Différent type des synchronisations	28
2.5.1	Synchronisation identique par la méthode de Pecora et Carroll	28
2.5.2	Synchronisation identique par la méthode de contrôle linéaire	29
2.5.3	Synchronisation généralisé	32
2.5.4	Synchronisation de phase	32
2.5.5	Synchronisation adaptative des systèmes chaotiques incertains	33
2.5.6	Synchronisation adaptative projective modifiée des systèmes chaotiques	35
3	Application de la synchronisation sur les deux systèmes chao- tiques Rössler et nouveaux système	39
3.1	Synchronisation identique de nouveaux système chaotique par la méthode de Pecora et Carroll	39
3.2	Synchronisation identique de système de Rössler par la mé- thode de contrôle linéaire	42
3.3	Synchronisation adaptative entre le système de Rössler et nouveaux système	47

Conclusion générale	54
Annexe	55
Références	61

Table des figures

1.1	<i>L'aspect aléatoire du système de Rössler.</i>	19
1.2	<i>L'attracteur étrange de Rössler.</i>	22
1.3	<i>Série temporelle de l'attracteur étrange de Rössler.</i>	22
3.1	<i>Attracteur chaotique du nouveaux système (3.1).</i>	40
3.2	<i>Série temporelles de x, y, z.</i>	40
3.3	<i>La Synchronisation identique pour les valeurs $y_1(t)$ et $y_2(t)$ du système (3.2).</i>	41
3.4	<i>La Synchronisation identique pour les valeurs $z_1(t)$ et $z_2(t)$ du système (3.2).</i>	42
3.5	<i>les trajectoires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des deux systèmes (1.5) et (1.6) respectivement.</i>	45
3.6	<i>les trajectoires $y_1(t)$ et $y_2(t)$ des deux systèmes (1.5) et (1.6) respectivement.</i>	45
3.7	<i>les trajectoires $z_1(t)$ et $z_2(t)$ des deux systèmes (1.5) et (1.6) respectivement.</i>	46
3.8	<i>Évolution d'erreur de synchronisation $e_1(t)$, $e_2(t)$ et $e_3(t)$ entre les systèmes (1.5) et (1.6) respectivement.</i>	46
3.9	<i>Évolution des trajectoires $x_1(t)$ et $y_1(t)$ pour les systèmes (3.5) et (3.6).</i>	50
3.10	<i>Évolution des trajectoires $x_2(t)$ et $y_2(t)$ pour les systèmes (3.5) et (3.6).</i>	51
3.11	<i>Évolution des trajectoires $x_3(t)$ et $y_3(t)$ pour les systèmes (3.5) et (3.6).</i>	51
3.12	<i>Évolution d'erreur de synchronisation $e_1(t)$, $e_2(t)$ et $e_3(t)$ entre le systèmes (3.5) et (3.6).</i>	52

3.13	<i>L'estimation des paramètres inconnus $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3$, pour le système maître</i>	
	(3.5).	52
3.14	<i>L'estimation des paramètres inconnus $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3, \tilde{\beta}_4, \tilde{\beta}_5, \tilde{\beta}_6, \tilde{\beta}_7$, pour le</i>	
	<i>système esclave (3.6).</i>	53

Introduction générale

La synchronisation signifie généralement la compatibilité et peut être trouvée dans différents domaines par exemple les télécommunications, l'électronique qui impliquent des timings différents (Synchronisation d'horloges, Synchronisation GPS), en informatique la synchronisation de fichiers a comme objectif de s'assurer que deux endroits ou plus contiennent exactement la même information, En électricité la synchronisation d'un transformateur monophasé ou triphasé lors de son couplage sur le réseau électrique, en biologiques, on rencontre la synchronisation à différents niveaux. Les exemples vont de la modélisation du cœur à la sécrétion d'insuline dans le corps humain en passant par le système neuronal.

La synchronisation remonte au XVII^e siècle, lorsque le scientifique néerlandais Christian Huygen aurait découvert que deux de ses horloges à pendule placées côte à côte convergeaient rapidement vers le même mouvement en phase et en fréquence. Autrement dit, les deux horloges sont parfaitement synchronisées. S'il les dérange, ils se resynchronisent dans une demi-heure, et s'il les éloigne, la synchronisation s'arrête. En termes modernes, cela signifie que les deux horloges sont synchronisées hors phase en raison du couplage du support mural. En mathématiques, la théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques très sensibles aux conditions initiales, un phénomène généralement illustré par l'effet papillon. Pour de tels systèmes, des différences infimes dans les conditions initiales entraînent des résultats totalement différents, rendant en général toute prédiction

impossible à long terme et ce comportement peut être étudié grâce à l'analyse par des modèles mathématiques chaotiques, ou par des techniques analytiques de récurrence et des applications de Poincaré. Le comportement des systèmes chaotiques est caractérisé par une instabilité et une prévisibilité limitée dans le temps. Il est difficile d'imaginer que deux systèmes chaotiques puissent produire le même signal chaotique à moins qu'ils ne soient initialisés exactement au même point, ce qui n'est généralement pas possible. Aujourd'hui, cependant, la synchronisation des oscillateurs couplés chaotiques est un phénomène expérimentalement bien établi et bien compris théoriquement, et au cours des trois dernières décennies, de nombreuses études sur la synchronisation se sont tournées vers les systèmes chaotiques. La synchronisation de deux systèmes dynamiques chaotiques signifie donc généralement que l'un des systèmes copie le mouvement de l'autre. Lorsque le comportement de plusieurs systèmes se synchronisent, ces systèmes sont dits synchrones.

Dans littératures le travail de Yamada et Fujisaka est le premier travail de synchronisation à utiliser la méthode de synchronisation du chaos local. Par la suite, Afraimovich et Al ont développé des concepts importants liés à la synchronisation chaotique, et plus tard Pecora et Carroll ont défini la synchronisation chaotique comme une synchronisation identique, qui a été développée sur la base de circuits chaotiques couplés. Une autre solution plus récente est la méthode de synchronisation généralisée, qui Rulkov et Al ont posé ces bases.

Il existe deux types de synchronisation : la synchronisation unidirectionnelle et la synchronisation bidirectionnelle. Dans la synchronisation bidirectionnelle la boucle de retour est appliquée sur les deux systèmes à la fois par contre, dans le cas de la synchronisation unidirectionnelle la boucle de retour est appliquée sur l'un des deux systèmes.

Ce travail compose de trois chapitre :

- **Le premier chapitre** : On présente des généralités sur les systèmes dynamiques chaotique et quelque propriété de ce système.

•**Le deuxième chapitre :** On donne la définition et les types de synchronisation avec quelques méthodes pour exprimer.

•**Le troisième chapitre :** On applique trois méthodes (Pecora et Carroll, le contrôle linéaire, le contrôle adaptatif) pour la première fois sur le système de Rössler et le nouveau système.

Généralités sur le système dynamique chaotique

1.1 Système dynamique

1.1.1 Système dynamique continue et discret

Définition 1.1.1. *[10](Système dynamique)*

Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet (X, T, F) tel que :

X est l'espace d'état, T est le domaine temporel, et $F : X \times T \rightarrow X$ est l'application de transition d'état qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant.

Représentation mathématique :

Le système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : dynamiques et statiques, les variables dynamiques sont les quantités de base qui changent avec le temps, les variables statiques, encore appelés paramètres, du système sont fixes.

Définition 1.1.2. *(Système dynamique continue)*

Un système dynamique dans un temps continu est représenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{x}_t = f(x, t, p),$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^r$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique de système.

Définition 1.1.3. *(Système dynamique discret)*

Un système dynamique dans le cas discret est représenté par une application (fonction itérative) sous la forme :

$$\dot{x}_{k+1} = f(x_k, p),$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^r$, $k = 1, 2, 3, \dots$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ indique la dynamique du système en temps discret.

1.1.2 Système dynamique linéaire et non linéaire

Définition 1.1.4. *[01](Système linéaire)*

Dans le cas continue, un système linéaire est un système décrit par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t > t_0 \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $A(t)$ est une matrice $n \times n$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$, $B(t)$ est une matrice $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Le système (1.1) est linéaire.

Définition 1.1.5. *(Système non linéaire)*

Dans le cas continue, un système dynamique peut être représenté par l'équation :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

où $x : I = [t_0, t_0 + h] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $f : D = I \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec :

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - x_0\| \leq b\}.$$

Le système (1.2) est non linéaire (f fonction non linéaire).

1.1.3 Système autonome et non autonome

Définition 1.1.6. [09] Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(x, t). \quad (1.3)$$

Lorsque le champ de vecteurs f ne dépend pas explicitement du temps, on dit que le système dynamique est autonome. Dans le cas contraire il est non autonome.

Par un changement de variable appropriée. On peut toujours transformer un système dynamique non autonome de dimension n en un système dynamique autonome équivalent de dimension $n+1$.

Exemple 1.1.1. [13]

Systèmes autonome :

$$\dot{x} = f(x), x(t_0) = x_0.$$

Systèmes non-autonome :

$$\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0.$$

1.1.4 Trajectoires, Orbites

Soit $\{\varphi_t; t \in \mathbb{R}\}$ un système dynamique à temps continue sur un espace des phases Ω , paramétré par l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note U_t la partie de Ω sur laquelle l'application φ_t est définie. Pour tout point x de Ω , on note I_x l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $x \in U_t$, c'est-à-dire tels que $\varphi_t(x)$ soit définie :

1. On appelle trajectoire d'un point x de Ω , l'application définie sur I_x et à valeurs dans Ω , $t \mapsto \varphi_t(x)$.
2. On appelle orbite d'un point x de Ω la partie $\{\varphi_t; t \in I_x\}$ de l'espace des phases Ω .
3. Un élément x de Ω est dit point fixe, ou point d'équilibre du système dynamique si son orbite est $\{x\}$.
4. L'orbite d'un point x de Ω est dite périodique si x n'est pas un point d'équilibre et s'il existe un élément T de I_x , vérifiant $T > 0$ et $\varphi_T(x) = x$. On dit alors que T est une période de l'orbite périodique considérée.

1.1.5 Espace de phase, variables d'état et portrait de phases

De manière simplifiée, l'espace des phases permet de traduire des séries de nombres dans une représentation spatiale, pour identifier les informations essentielles d'un système mouvement et carte toutes ses possibilités. Espace des phases est un espace mathématique souvent multidimensionnel. Chaque axe de coordonnées de cet espace correspond à une variable d'état du système dynamique étudié et chaque variable d'état caractérise le système à un instant donné. A chaque instant donné, par conséquent, le système est caractérisé par un point dans cet espace. Le prochain moment sera caractérisé par un autre point et ainsi de suite. Si l'espace des phases est représenter graphiquement l'évolution de le système dans le temps. L'ensemble des trajectoires possibles constitue le portrait de ceci peut aider à percevoir l'attracteur du système. Considérons la relation suivante entre deux points X et Y sur M :

$$x \approx y \Leftrightarrow x, y \text{ appartiennent à la même orbite.}$$

Exemple 1.1.2. [05] *Cas continue (L'oscillateur de Duffing)*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t, \end{cases}$$

où δ, γ, ω sont des paramètres physique réels (variables statistiques). L'espace des phases est $\mathbb{R}^2$. L'espace des paramètres est $\mathbb{R}^3$. Ce système est non linéaire. non autonome, il peut être dissipatif (suivants le mouvement ou consarvatife sans frottement).

1.1.6 Point d'équilibre

S'il est possible que la trajectoire d'un système corresponde, à partir d'un certain moment, à un point est appelé point d'équilibre. Nous allons voir que les problèmes de stabilité sont naturellement formulés par rapport aux points d'équilibre.

Considérons le système dynamique continue :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où f fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est telle que le système précédant admet au moins une solution.

Définition 1.1.7. *Le vecteur $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est dit point d'équilibre du système précédant $f(\bar{x}, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$.*

Exemple 1.1.3. *Considérons le système régi pour l'équation :*

$$\dot{x}(t) = a \left[1 - \frac{x(t)}{c} \right] x(t),$$

où $a > 0$; $c > 0$. Les points d'équilibre de ce système sont solutions de l'équation algébrique

$$a \left[1 - \frac{\bar{x}}{c} \right] \bar{x} = 0,$$

ce qui donne deux points d'équilibre $\bar{x} = 0$ et $\bar{x} = c$.

1.1.7 La stabilité de point d'équilibre

Le concept de stabilité est important pour étudier le comportement des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires, et l'analyse de la stabilité du système consiste à étudier son comportement lorsqu'il se déplace à partir d'un point d'équilibre. Cela implique d'analyser les trajectoires d'état lorsque l'état initial du système s'approche d'un certain point ou d'une trajectoire d'équilibre. Les points d'équilibre jouent un rôle important dans l'étude des systèmes dynamiques.

Henri Poincaré (1854-1912) a montré que pour caractériser des systèmes dynamiques à variables multiples, il n'est pas nécessaire de calculer des solutions détaillées; il suffit de connaître le point fixe (point d'équilibre) et sa stabilité. Ce résultat très important simplifie grandement l'étude des systèmes non linéaires à proximité de ces points. Par conséquent, pour déterminer la stabilité d'un point d'équilibre, il est nécessaire d'étudier le comportement de la solution dans son petit voisinage.

Plusieurs définitions de la stabilité ont été proposées. Celles-ci incluent la définition de la stabilité au sens de Lyapunov.

1.1.8 Stabilité au sens de Lyapunov

On considère le système non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.4)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.

Définition 1.1.8. [16] (*stabilité*)

Un point d'équilibre x^* de (1.4) est stable au sens de Lyapunov si :

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, tel que $\|x_0 - x^*\| < \delta \implies \|x_t - x^*\| < \varepsilon$, pour tout $t > 0$.

Dans le cas contraire, x^* est dit instable.

Définition 1.1.9. (*stabilité asymptotique*)

Un point d'équilibre x^* de (1.4) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si il est stable au sens de Lyapunov et si de plus existe $\delta_0 > 0$ avec $0 < \delta_0 < \delta$ tel que :

$$\|x_0 - x^*\| < \delta_0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Définition 1.1.10. (*stabilité exponentielle*)

Un point d'équilibre x^* de (1.4) est exponentiellement stable s'il existe des constantes positives a, b, δ tel que :

$$\|x_0 - x^*\| < \delta \implies \|x(t) - x^*\| \leq a \exp(-bt) \|x_0 - x^*\|, \text{ pour tout } t > 0.$$

Remarque 1.1.1.

- La stabilité est définie localement dans chacune des définition précédentes.
- Si le point d'équilibre est stable, quel que soit le vecteur d'état initial x_0 dans $\mathbb{R}^n$ alors le point d'équilibre est globalement stable.

La Stabilité au sens de Lyapunov

Il y a deux méthodes pour étudier la stabilité d'un point d'équilibre de système (1.4) méthode directe (fonction de Lyapunov), méthode indirecte (linéarisation).

Définition 1.1.11. (*Méthode directe*)

Est une méthode basée sur la recherche d'une fonction particulière notée $V(x)$ appelée fonction de Lyapunov si une telle fonction existe alors le système est stable. soit x^* est un point d'équilibre du système (1.4). Soit $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable définie sur un voisinage W de x^* telle que :

$$\begin{aligned} V(x^*) &= 0 \\ V(x) &> 0 \text{ si } x \neq x^*. \end{aligned}$$

Posons :

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x),$$

alors on a le théorème suivante :

Théorème 1.1.1. [16]

- Si $\dot{V}(x) \leq 0$ dans $W - \{x^*\}$ alors x^* est stable, ($\dot{V}$ est semi-définie négative).
- Si $\dot{V}(x) < 0$ dans $W - \{x^*\}$ alors x^* est asymptotiquement stable, ($\dot{V}$ est définie négative).
- Si $\dot{V}(x) > 0$ dans $W - \{x^*\}$ alors x^* est instable, ($\dot{V}$ est définie positive).

la démonstration est dans [14].

Définition 1.1.12. (Méthode indirect)

Est la linéarisation des systèmes par ramenés les points d'équilibres non linéaires aux mêmes types de points d'équilibres des systèmes linéaires.

considérons le système (1.4) et soit x^* sa point d'équilibre ($f(x^*) = 0$) le système $\dot{x} = Ax$, s'appelle le linéarisé du système (1.4) au point x^* , et A la matrice jacobienne de $f(x)$, telle que :

$$A = Df(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Par un changement de coordonnées, le point fixe de (1.3) se ramène à l'origine ($f(0) = 0$) et le développement de f en série de Taylor autour de $x = 0$ donne

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3f(0)(x, x, x) + \dots$$

pour étudier la stabilité pour étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre x^* , consiste à étudier le système linéaire $\dot{x} = Ax$ si $A = Df(0)$ a n valeur propre λ_i , $i = 1, \dots, n$ distincts la solution de (1.3) est :

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i v^{(i)} \exp(\lambda_i t),$$

où v^i le vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_i et les c_i , $i = 1, \dots, n$ sont des constant (déterminées par les conditions initiales).

Théorème 1.1.2. [06]

- Si la partie réelle de λ_i négative le point fixe est asymptotiquement stable.
- Si une ou plusieurs valeurs propres sont des imaginaires pures, les autres valeurs ayant leur partie réelle négative, le point fixe est un point centre ou un point elliptique (stable mais pas asymptotiquement stable).
- Si une des valeur propres a sa partie réelle positive le point fixe est instable.

1.1.9 Le critère de Routh-Hurwitz

On dit que le point d'équilibre est asymptotiquement stable si λ_i ($i = 1, \dots, n$) l'ensemble des valeurs propres de A vérifier que $\forall i, \text{Re}(\lambda_i) < 0$. Routh-Hurwitz a développée une méthode algébrique, basé sur le calcul des déterminants particuliers appelés déterminants de Routh-Hurwitz.

On considère le système suivant : $\dot{x} = \phi(x)$, sa linéarisé est :

$$\dot{x} = Ax. \quad (1.5)$$

Les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Les déterminants de Routh-Hurwitz sont définis de la manière suivante :

$$H_1 = |a_1|$$
$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$
$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$H_j = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & \dots & a_j \end{vmatrix}$$

Proposition 1.1.1. *Dans le cas d'une matrice de dimension n , les termes h_{jk} des déterminants de Routh-Hurwitz sont définis de la manière suivante :*

- $h_{jk} = a_{2j-k}$ pour $0 \leq 2j - k \leq n$.
- $h_{jk} = 1$ pour $2j = k \iff 2j - k = 0$.
- $h_{jk} = 0$ pour $2j < k \iff 2j - k < 0$ ou $2j > n + k \iff 2j - k < n$.

Proposition 1.1.2. *Le point d'équilibre $\bar{x}$ est asymptotiquement stable $\iff \forall \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \iff \forall \operatorname{Re}(H_i) > 0$.*

Théorème 1.1.3. [*11*](Critère de Routh-Hurwitz)

Soit $p(\lambda)$ un polynôme telle que $a_0 > 0$.

Pour que P soit uniformément asymptotiquement stable, il faut que les déterminants principaux de la matrice de Routh-Hurwitz soient strictement positif.

1.1.10 Critère de Routh-Hurwitz dans $\mathbb{R}^3$

Soit le système (1.5) tel que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Les déterminants de Routh-Hurwitz sont :

$$H_1 = |a_1| = a_1.$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3.$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 H_2.$$

Si : $H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0$, alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Exemple 1.1.4. [11]

$$f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3. \quad (1.6)$$

La matrice d'Hurwitz est :

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

donc le critère de Routh-Hurwitz est :

$$\begin{cases} H_1 = a_1 > 0, \\ H_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0, \\ H_3 = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 > 0. \end{cases}$$

Donc dans le cas $n = 3$:

$$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0.$$

Alors le polynôme (1.6) est de racines sont à parties réelles négative.

Conditions sur la matrice Jacobienne

Supposons que A est une matrice 3×3 de constantes réelles, son polynôme caractéristique est :

$$f(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Soit A la matrice Jacobienne :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

alors, la relation entre les coefficients du polynôme caractéristique et la matrice Jacobienne est :

$$\begin{cases} a = -\text{trace}(A) \\ b = A_{11} + A_{22} + A_{33} \\ c = -\det(A), \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\text{avec : } A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ et } A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

donc :

$$ab - c = -a_{11}(A_{22} + A_{33}) - a_{22}(A_{11} + A_{33}) - a_{33}(A_{22} + A_{11}) - 2a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}.$$

Remarque 1.1.2. On remarque si $a_{ii} < 0$, $A_{ii} > 0$, $i = 1, 2, 3$ et $\det(A) < 0$ tel que : $t = a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \geq 0$, donc les coefficients du polynôme caractéristique sont positifs. Nous pouvons assurer la stabilité de tout système chaotique avec le théorème suivant.

On considère une matrice Jacobienne A a un point fixe, et $t = a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$.

Théorème 1.1.4. [12] Si $t \geq 0$, toutes les racines du polynôme caractéristique de A sont de parties réelles négatives, lorsque les conditions données sont vérifiées : $\det(A) < 0$, $a_{ii} < 0$ et $A_{ii} > 0$, pour $i = 1, 2, 3$.

1.1.11 Bifurcation

Ce concept fait référence à l'étude des changements de comportement du système lorsque les paramètres du système changent. La bifurcation signifie à un changement qualitatif dans la dynamique du système, qui est causé par un changement d'un paramètre du système. Par exemple, instabilité d'équilibre stable, apparition ou disparition de cycles ou d'attracteurs,... La valeur à laquelle se produit une bifurcation est appelée point de bifurcation.

Les bifurcations sont présente dans tout type de système :

- Physico-chimique : changement d'état lorsque le paramètre(température) atteint une certain valeur.
- Économique : effondrement d'un cours de bourse lorsque l'un des paramètre de la vie économique franchit un seuil donné.
- Mécanique : apparition d'un équilibre asymptotiquement stable lorsqu'un amortissement, aussi faible soit-il apparaît.
- Social : basculement brutal d'un groupe dans la violence après dégradation continue de ses conditions de vie.

Les types de bifurcation :

- * Bifurcation nœud-col.
- * Bifurcation d'échange de stabilité (transcritique).
- * Bifurcation fourche.
- * Bifurcation Hopf.

1.2 Système chaotique

1.2.1 Définition de chaos

En générale dans le monde mathématique le chaos définis comme un comportement d'un système dynamique caractérisée par quelque caractéristique surtout la sensibilité aux conditions initiales, la non linéarité, le déterminisme, et alors il n'y a pas un définition standard du chaos mais il y a des critères qui permettent de confirmer qu'un système est chaotique.

Les définitions suivantes dans [10] permet de définit assez claire sur le comportement du chaos.

Soit le système dynamique suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Définition 1.2.1. *On dit que la fonction $f : I \rightarrow I$ possède un sensibilité aux conditions initiales, s'il existe $\delta > 0$ telle que pour un certain $x \in I$, et un certain voisinage $V \subset I$ de x , il existe $y \in I$ telle que :*

$$\|f^n(x) - f^n(y)\| > \delta.$$

Définition 1.2.2. *Soit $Y \subset X$, on dit que Y est dense dans X si pour tout $x \in X$, il existe $y \in Y$ arbitrairement proche de x , autrement on dit que Y est dense dans X si pour tout $x \in X$, on peut trouver une suite $\{y_n\}$ de Y qui convergent vers x .*

Définition 1.2.3. *La fonction $f : I \rightarrow I$ est transitive topologiquement si pour tout paire d'ensemble ouverts $U, V \subset I$, il existe $k > 0$ tel que : $F^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Définition 1.2.4. *Soit un ensemble V , la fonction $F : I \rightarrow I$ est dite chaotique sur V si :*

1. F possède une sensibilité aux condition initial.
2. F est topologiquement transitive.
3. Les pointe périodique sont denses dans V .

Théorème 1.2.1. (Théorème de Devaney)[10]

soit un sous-ensemble V de I , la fonction $F : I \rightarrow I$ est dite chaotique sur V si :

- i) La fonction F possède une sensibilité aux condition initiales.
- ii) La fonction F est topologique transitive, dans le sens que pour toute paire de sous ensembles ouverts $U, V \subset I$, il existe $k > 0$ tel que $F^k(U) \cap V \neq \emptyset$.
- iii) L'ensemble des points périodique de la fonction F sont denses dans I .

Théorème 1.2.2. (Théorème de Li-Yorke)[16]

Soit $g : X \rightarrow X$ une application continue sur un espace métrique (X, d) compact. On dit que g est chaotique dans le sens de Li et Yorke s'il existe un sous-ensemble dénombrable S de X vérifiant les propriétés suivantes :

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(g^n(x), g^n(y)) > 0$ pour tout $x, y \in S, x \neq y$.
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(g^n(x), g^n(y)) = 0$ pour tout $x, y \in S, x \neq y$.
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(g^n(x), g^n(p)) = 0$ pour tout $x \in S, p \in X, p$ périodique.

1.2.2 La non-linéarité

Pour prédire des phénomènes réels issus de systèmes dynamiques, la méthode comprend construire un modèle mathématique qui établit la relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effets. Si cette relation est une opération proportionnelle, alors le phénomène est linéaire. Dans le cas de phénomènes non linéaires, l'effet n'est pas proportionnel à la cause. En général, les systèmes chaotiques sont des systèmes dynamiques non linéaires, tandis que les systèmes linéaires ne peuvent pas être chaotiques.

1.2.3 Le déterminisme

Un système est dit déterministe lorsque son évolution dans le temps peut être prédit (calculée). Certainement. La connaissance précise de l'état du système à

un instant donné, l'instant initial, permet un calcul précis de l'état du système à tout autre moment. Dans le phénomène du hasard, il est absolument impossible de prédire la trajectoire d'une quelconque particule. Par conséquent, les systèmes chaotiques ont des règles de base déterministes et non probabilistes. Il est généralement régi par une équation différentielle non linéaire connue, donc donnée par des lois strictes et totalement certaines.

1.2.4 L'aspect aléatoire

Si le mouvement est aléatoire, les points du système remplissent l'espace des phases : Aucune structure n'apparaît. Lorsque le mouvement est chaotique, les points viennent en premier vue au hasard. Cependant, lorsque nous observons le système assez longtemps, nous voyons pointer pour dessiner une forme spécifique. Ce graphique figure (1.1) montre le caractère aléatoire un système dynamique chaotique, dans ce cas, le système de Rössler.

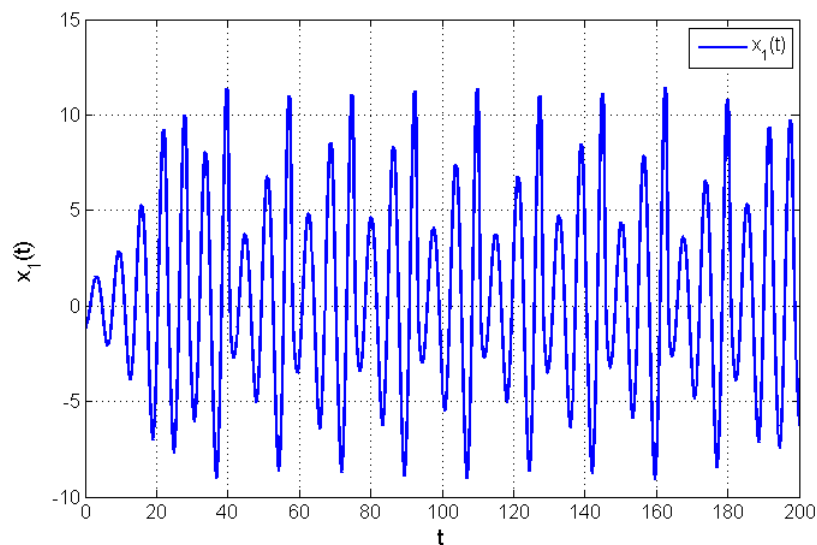


FIGURE 1.1 – *L'aspect aléatoire du système de Rössler.*

1.2.5 Sensibilité aux conditions initiales

La plupart des systèmes chaotiques présentent une sensibilité aux conditions initiales ; deux les conditions initiales arbitraires sont initialement très similaires ; les deux trajectoires correspondantes ces données initiales divergent exponentiellement, les deux trajectoires ne sont donc pas compatibles.

1.2.6 L'attracteur étrange

Les attracteurs sont des objets géométriques vers lesquels tendent toutes les trajectoire. Une histoire de points dans l'espace des phases, c'est-à-dire une situation (ou un ensemble de situations). Dans quelle direction va le systèmes quelles que soient les conditions initiales.

Un systèmes dissipatif chaotique a (au moins) un type spécifique d'attracteur, appelé attracteur étrange. Géométriquement, un tel attracteur peut être décrit comme opérations d'étirement et de pliage de boucle d'espace de phase, se répétant à l'infini plusieurs fois secondaire. La "longueur" d'un attracteur est finie, bien qu'elle soit contenue dans un espace fini.

Définition 1.2.5. [03] *Un sous-ensemble borné B de l'espace des phases est un attracteur étrange pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage U de B , c'est à dire que pour tout point de B il existe une boule contenant ce point et contenue dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *U est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans U est entièrement contenue dans U . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de B que l'on veut.*
2. *Les orbites dont le point initial est dans $\mathbb{R}$ sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.*
3. *B est un objet fractal.*

Les attracteurs chaotiques(étranges)peuvent être classés en trois types principaux :

1. *Attracteur hyperbolique.*
2. *Attracteur de type Lorenz.*
3. *Quasi-attracteurs.*

1.2.7 Exemple des systèmes chaotiques continue

Attracteur de Rössler

L'attracteur de Rössler est l'attracteur associé au système de Rössler, qui désigne par le savant allemand Otto Rössler dans les années soixante dix est introduits en tant que équations prototypes avec des composante minimale chaotique en temps continue.

Étant donné que le théorème de Poincaré-Bendixson exclut les attracteurs instables, périodiques ou quasi-périodiques dans les systèmes autonomes définis comme des variétés unidimensionnelles ou bidimensionnelles (telles que la ligne, le cercle, le plan, la sphère ou le tore (Hartman, 1964)), la plus petite dimension du chaos est trois. Sur cette base, Otto Rössler a proposé une série des systèmes prototypes d'équations différentielles ordinaires dans des espaces de phase tridimensionnels, il a également proposé des systèmes quadridimensionnel hyperchaotiques, c'est-à-dire un chaos avec plusieurs exposants positifs de Lyapunov[17].

Le système est de trois équations différentielles ordinaires contenant un terme non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c), \end{cases} \quad (1.4)$$

telle que : a, b, c représente les paramètres et x, y, z sont des variables d'états le système admet un état chaotique pour les valeurs de paramètres : $a = 0.2$, $b = 0.6$, $c = 5.25$ [02], comme le montre la figure (1.2) et (1.3).

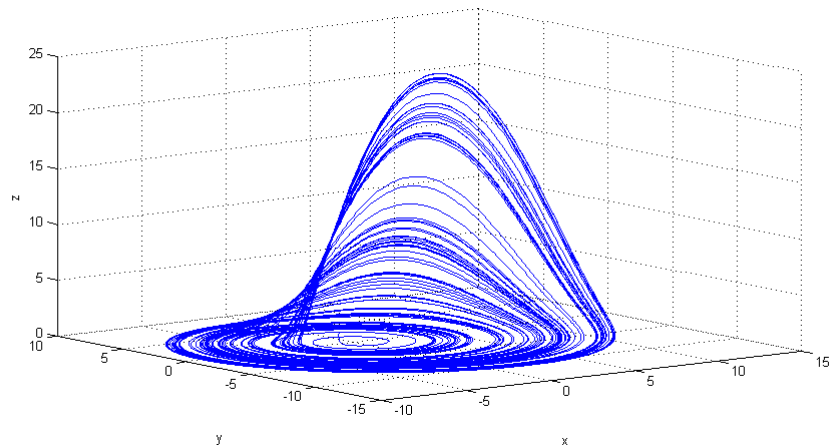


FIGURE 1.2 – L'attracteur étrange de Rössler.

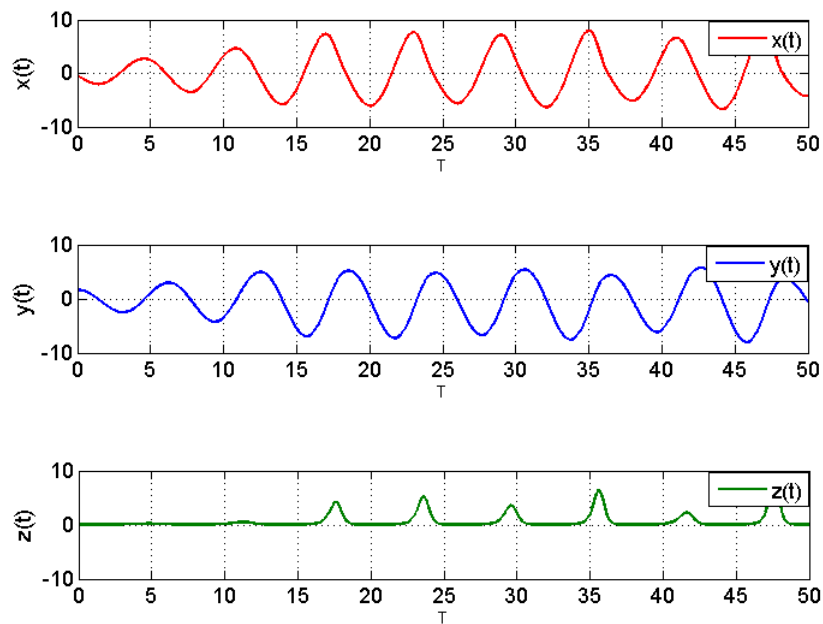


FIGURE 1.3 – Série temporelle de l'attracteur étrange de Rössler.

La synchronisation des systèmes chaotiques

2.1 Le contrôle

Depuis de nombreuses années, les chercheurs s'intéressent au contrôle du système chaotique. La littérature dans ce domaine est très large et contiennent plusieurs méthodes et algorithmes ont été proposés et développés pour réaliser le contrôle du chaos dans divers systèmes dynamiques non linéaires, par exemple :

- La méthode de contrôle en boucle ouverte(nonfeed-back).
- La méthode de contrôle en boucle fermée(feedback).
- La méthode de Ott, Grebogi et York (OGY).
- La méthode Backstepping.
- La méthode de contrôle feedback retardé (TDFC).
- Le contrôle linéaire et nonlinéaire.
- Le contrôle adaptatif.

2.1.1 Le contrôle adaptatif

Le contrôle adaptatif couvre un ensemble de techniques qui fournissent une approche pour l'ajustement automatique des contrôleurs en temps réel, afin d'atteindre ou de maintenir un niveau souhaité de performance du système de contrôle lorsque les paramètres du modèle dynamique sont inconnus ou changent avec le temps. Dans ce cas le modèle du système est représenté sous une forme paramétrique :

$$\dot{x} = F(x, \theta, u), \quad (2.1)$$

$$y = h(x), \quad (2.2)$$

où $\theta \in R^p$ est le vecteur des paramètres inconnus. D'après (2.1) la loi de contrôle est aussi mise sous une forme paramétrique :

$$u = U(x, \zeta),$$

où ζ dépend de θ , c'est-à-dire $\zeta = \varphi(\theta)$ pour application $\varphi(\cdot)$.

Le processus est obtenu en mesurant les états du système $x(t)$, ou les sorties $y = h(x(t))$ sont utilisées, pour évaluer les paramètres d'adaptation qui sont des estimations, soit $\theta(t)$ les valeurs estimées des paramètres inconnus $\theta(t)$, soit des paramètres du contrôleur $\zeta(t)$.

Une large variété des méthodes d'adaptation existe telle que les méthodes du gradient et le gradient incliné, les moindres carrés, probabilité maximale, et ainsi de suite peuvent être utilisées pour développer des algorithmes de contrôle adaptatif et l'identification paramétrique. Leur validation est basé habituellement sur la fonctions de Lyapunov.

Remarque 2.1.1. *On peut considérons la synchronisation du chaos comme un méthode de contrôler les systèmes chaotiques.*

2.2 Définitions de la synchronisation

On a deux définition : une définition générale et une définition mathématique.

Définition générale

Définition 2.2.1. [13](de Larousse)

Synchronisation est un mot grec composé de deux parties : Syn signifie ensemble et Chrono signifie temps. Il s'agit d'une opération par étapes qui crée une simultanéité entre plusieurs opérations, en fonction du temps.

Définition 2.2.2. (générale)

La synchronisation est une manière de faire l'entretien d'un mouvement chaotique (ou périodique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.

Définition mathématique

Après plusieurs tentatives pour définir un mouvement synchronisé, Brown et Kocarev ont fourni une définition mathématique de la synchronisation. Pour construire la définition, ils supposent qu'un système dynamique, global, de dimension finie et déterministe est divisible en deux sous-systèmes :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x(t)), \\ \dot{y} &= g(y(t)),\end{aligned}\tag{2.3}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont des vecteurs qui peuvent avoir des dimensions différentes.

Soit $\varphi(\omega_0)$ une trajectoire du système globale (2.3), avec la condition initiale $\omega = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Pour chaque sous-système, on forme une trajectoire $\varphi_x(\omega_0)$ et $\varphi_y(\omega_0)$ (ω_0 étant une condition initiale donnée).

On note par χ l'espace de toutes les trajectoires du premier sous-système, et par ζ l'espace de toutes les trajectoires du deuxième sous-système, et on considère :

$$g_x : \chi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

$$g_y : \zeta \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

qui ne sont pas identiquement nulle, le premier $\mathbb{R}$ représente le temps, nous dirons que les fonctions g_x et g_y sont des propriétés des sous-système définis par (2.3) respectivement.

Soit : $h(g_x, g_y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, telle que : $\|h\| = 0$ ou $\|h\| \rightarrow 0$ ($\|\cdot\|$ est une norme). Nous dirons que la fonction h , qui est indépendante du temps, compare les propriétés mesurées entre les deux sous-systèmes, et les deux mesures de les deux sous-système convergent dans le temps si et seulement si :

$$h(g_x, g_y) = 0.$$

Définition 2.2.3. [13] : Les sous-système dans les équation (2.3) sont synchronisés sur la trajectoire de $\varphi(\omega_0)$, par rapport aux propriétés g_x et g_y , s'il existe un instant indépendant de l'application h telle que $\|h(g_x, g_y)\| = 0$.

Théorème 2.2.1. [10] Le système maître et le système esclave sont synchronisés si et seulement si tous les exposants de Lyapunov du système esclave, appelés les exposants de Lyapunov conditionnels sont négatifs.

Remarque 2.2.1. On peut déterminer le type de synchronisation d'après le choix de g_x, g_y et h .

2.3 Les systèmes couplés

Définition 2.3.1. Un système dynamique de dimension $(n + m)$ si on peut être décomposé en deux système dynamique de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x), \\ \dot{y} &= g(y),\end{aligned}$$

telle que le premier système est de dimension n et le deuxième est de dimension m .

Proposition 2.3.1. Couplé unidirectionnellement :

S'il peut être décomposé en deux systèmes dynamiques de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x), \\ \dot{y} &= g(y) + k(x, y),\end{aligned}$$

où x est de dimension n , y est de dimension m , $k(x, y)$ est une fonction de x et y non nulle. - Le premier système s'appelle système émetteur (maître) et le deuxième récepteur (esclave).

-La dernière représentation signifie que le système émetteur a une action sur le récepteur, et le contraire est faux.

Couplé bidirectionnellement :

S'il peut être décomposé en deux systèmes dynamiques de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + k_1(x, y), \\ \dot{y} &= g(y) + k_2(x, y),\end{aligned}$$

où x est de dimension n , y est de dimension m , et $k_1(x, y)$ et $k_2(x, y)$ sont des fonctions non nulles de x et y .

2.4 Synchronisation maître-esclave de systèmes chaotiques

De nombreux travaux de recherche ont été effectués et différentes méthodes proposées pour la synchronisation des systèmes chaotiques. Pecora et Carroll ont montré la possibilité de synchroniser des systèmes chaotiques à l'aide d'un signal pilote commun. La synchronisation des systèmes chaotiques a été largement appliquée à la cryptographie et la transmission sécurisée de l'information. Pour cela, et afin de pouvoir décrypter le message, il faut d'abord synchroniser les systèmes chaotiques (le maître ou l'émetteur et l'esclave ou le récepteur).

2.5 Différent type des synchronisations

2.5.1 Synchronisation identique par la méthode de Pecora et Carroll

La technique de base de Pecora et Carroll, peut être décrite comme suit : On considère un système dynamique autonome d'ordre n :

$$\frac{du}{dt} = F(u). \quad (2.4)$$

On divise le système en deux sous-systèmes ($u = (v, w_1)$) :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = G(v, w_1) \\ \frac{dw_1}{dt} = H(v, w_1) \\ \frac{dw_2}{dt} = G(v, w_2), \end{cases}$$

où : $v = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_m)$, $w_1 = (u_{m+1}, u_{m+2}, u_{m+3}, \dots, u_n)$, $G = (F_1, F_2, F_3, \dots, F_m)$ et $H = (F_{m+1}, F_{m+2}, F_{m+3}, \dots, F_n)$. On crée ensuite un nouveau sous-système en w_2 identique au sous système en w_1 . On obtient alors le système de dimension $2n - m$ suivant :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = G(v, w_1) \\ \frac{dw_1}{dt} = H(v, w_1) \\ \frac{dw_2}{dt} = G(v, w_2). \end{cases} \quad (2.5)$$

Le couplage est unidirectionnelle et le sous-système en (v, w_1) est appelé système maître ou système de commande, et le sous-système en w_2 est le système de réponse.

Si la trajectoire $w_2(t)$ converge asymptotiquement vers la trajectoire $w_1(t)$ c'est -à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|w_2(t) - w_1(t)\| = 0. \quad (2.6)$$

Les deux sous-systèmes sont dits synchronisés.

Les exposant de Lyapunov du sous-système de réponse w_2 pour une trajectoire particulière $v(t)$ de commande sont appelés exposants de Lyapunov conditionnels.

Pecora et Carroll ont montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux sous-systèmes w_1 et w_2 soient synchronisés est que tous les exposants conditionnels de Lyapunov soient négatifs.

Il existe un nombre fini de décomposition $v - w$, qui est borné par le nombre des sous systèmes différents possibles. En divisant le système principal (2.4) de façon différente, la synchronisation n'aurait peut être pas eu lieu.

En général, seuls quelques sous-systèmes réponses ont des exposants conditionnelles de Lyapunov négatifs et peuvent donc être utilisées pour implémenter les systèmes qui synchronisent afin d'utiliser la méthode de Pecora-Carroll.

Il apparaît que dans certains cas, il n'est pas aussi facile d'utiliser les exposants conditionnels de Lyapunov que certains autres critères.

2.5.2 Synchronisation identique par la méthode de contrôle linéaire

Suppose maintenant qu'on deux systèmes dynamiques identiques liés par un accouplement unidirectionnel, et représentés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{y} = f(y) + P_n(y - x), \end{cases} \quad (2.7)$$

avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, x_n)$, f une fonction non linéaire et P_n une matrice diagonale carré d'ordre n , et elle est constituée des éléments constants de la force d'accouplement.

$$P_n = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & p_n \end{pmatrix}.$$

Comme la fonction f est non linéaire, donc on peut récrire le systèmes (2.7) sous la forme :

$$\dot{x} = Ax + \varphi(x), \quad (2.8)$$

$$\dot{y} = Ay + \varphi(y) + P_n(y - x), \quad (2.9)$$

telles que x, y sont les variables des systèmes maître (2.8) et esclave (2.9) respectivement. A une matrice constante carré d'ordre n , φ une fonction qui représente la partie non linéaire de chaque système.

Dans cette partie, la dynamique du système erreur est donné par :

$$\dot{e} = (A + P_n)e + \varphi(y) - \varphi(x). \quad (2.10)$$

Donc selon l'équation (2.10) on peut étudier la stabilité du système erreur au voisinage de l'origine.

Supposons que φ est une fonction non linéaire satisfait la condition de Lipschitz suivante :

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \rho \|x - y\|, \quad (2.11)$$

ρ est appelée la constante de Lipschitz, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

Alors on a le théorème suivant :

Théorème 2.5.1. *[16] Soit E la matrice unitaire d'ordre n et $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ les valeurs propres de la matrice symétriques :*

$$\frac{(A + P_n) + (A + P_n)^T}{2} + \rho E.$$

Si $\max \{\lambda_i\}_{i=1}^n < 0$, alors le système maître (2.8) et le système réponse (2.9) sont synchronisés dans le sens que la système erreur tend vers zéro exponentiellement.

Preuve 2.5.1. Supposons qu'on a le système erreur présenté par l'équation suivante :

$$e = y - x,$$

alors la dynamique de ce dernier est représentée par :

$$\dot{e} = (A + P_n)e + \varphi(y) - \varphi(x).$$

Comme $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ sont les valeurs propres de la matrice symétrique :

$$\frac{(A + P_n) + (A + P_n)^T}{2} + \rho E,$$

alors cette dernière est similaire ou semblable à la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Par la matrice orthogonale U tel que

$$U^T \left[\frac{(A + P_n) + (A + P_n)^T}{2} + \rho E \right] U = D.$$

Soit $V(e)$ la fonction de Lyapunov du système erreur définit par :

$$V = \frac{1}{2} \|e\|^2.$$

Il est claire que $V(e) > 0$. On va calcules $\dot{V}(e)$

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \frac{1}{2} (\dot{e}e + e\dot{e}) \\ &= \frac{1}{2} [((A + P_n)e + \varphi(x) - \varphi(y))e + e(A + P_n)e + \varphi(x) - \varphi(y)] \\ &= \frac{1}{2} [(A + P_n)ee + e(A + P_n)e + (\varphi(x) - \varphi(y))e + e(\varphi(x) - \varphi(y))]. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &\leq e^T \left[\frac{(A + P_n) + (A + P_n)^T}{2} + \rho E \right] e \\ &\leq e^T U D U^T e = (U^T e)^T D (U^T e) \\ &\leq \max \{\lambda_i\}_{i=1}^n (U^T e)^T (U^T e) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne que $e \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

2.5.3 Synchronisation généralisé

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, de l'anti-synchronisation et de la synchronisation de projection dans le cas de systèmes chaotiques de dimensions et de modèles différents. Il apparaît comme une relation fonctionnelle entre deux systèmes chaotiques couplés. Nous considérons un couple de systèmes maître-esclave, représenté par :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ \dot{y} = G(y, u(t)), \end{cases} \quad (2.12)$$

d'où $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$ sont les états des systèmes maître et esclave respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $u(t) = u_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ est un contrôleur.

S'il existe un contrôleur u et une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, telles que toutes les trajectoires des deux systèmes maître-esclave (2.12) avec les condition initiales $x(0)$, $y(0)$, vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t) - \phi(x(t))\| = 0, \forall x(0), y(0).$$

Alors, les deux système maître-esclave (2.12) sont synchronisées au sens généralisé par rapport a fonction ϕ .

2.5.4 Synchronisation de phase

Ce type de synchronisation vient de la notion classique de synchronisation pour deux systèmes périodiques dont les phases sont θ_1 et θ_2 , qui est exprimée par la relation suivante :

$$|n\theta_1 - m\theta_2| < c,$$

où m, n sont des entiers naturels et c est une constante positive.

cette notion de synchronisation a été étendue aux systèmes chaotiques, l'approche

analytique est l'une des solutions permettant de définir la phase d'un système chaotique. Pour exprimer la phase d'un système en représentant son signal analytique $\psi(t)$ sous la forme d'une fonction complexe définir par :

$$\psi(t) = s(t) + j\tilde{s}(t) = A(t)e^{j\theta(t)},$$

telle que $\tilde{s}(t)$ est la transformée de Hilbert de la série temporelle $s(t)$, $A(t)$ est l'amplitude du signal $\psi(t)$ et $\theta(t)$ sa phase.

La synchronisation de phase entre deux systèmes chaotiques couplés se produit si :

$$|n\theta_1(t) - m\theta_2(t)| < c.$$

Il est à noter que dans ce cas, les amplitudes restent non corrélées.

2.5.5 Synchronisation adaptative des systèmes chaotiques incertains

La synchronisation complète se caractérise par des variables d'état d'égalité en constante évolution dans le temps alors que l'anti-synchronisation est un phénomène dans lequel les variables d'état des systèmes synchronisés avec des valeurs initiales différentes ont les mêmes valeurs absolues, mais de signes opposés.

Dans la synchronisation hybride des systèmes chaotiques, les états impaires des systèmes maître et esclave sont complètement synchronisés alors que les états paires sont anti-synchronisés.

Considérons les systèmes maître et esclave suivants :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x(t)), \\ \dot{y} &= g(y(t)) + u(t, x, y),\end{aligned}\tag{2.13}$$

où $x(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$, sont les vecteurs d'état des systèmes maître et esclave, respectivement ; $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs non linéaires des fonctions continues ; $u(t, x, y)$ est le vecteur de contrôle adaptatif.

Synchronisation complète

On dit systèmes maître et esclave sont entièrement synchronisés, s'il existe un contrôleur adaptative $u(t, x, y)$ tel que l'équation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0, \quad (2.14)$$

satisfaire toutes les conditions initiales $x(0), y(0)$ pour les deux systèmes.

Anti-synchronisation

Le maître et esclave et sont dits prêts à effectuer la anti-synchronisation entre ces deux systèmes, s'il existe un contrôleur adaptatif $u(t, x, y)$ telle que l'équation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) + x(t)\| = 0, \quad (2.15)$$

satisfaire toutes les condition initiales $x(0), y(0)$ pour les deux systèmes.

Synchronisation hybride

Les systèmes maître et esclave sont dits prêts pour la synchronisation hybride s'il existe un contrôleur adaptatif $u(t, x, y)$ tel que l'équation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \theta x(t)\| = 0, \quad (2.16)$$

satisfaire des conditions initiales arbitraires $x(0), y(0)$,

où $\theta = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n)$, $(\theta_i \neq 0, i = 2 \dots, n)$. Pour la synchronisation hybride, l'état pair sera anti-synchronisation et l'état impaire synchronisées.

Synchronisation projective modifiée

On dit qu'il y a une synchronisation projective modifiée entre les deux systèmes maître et esclave , s'il existe un contrôleur adaptatif efficace $u(t, x, y)$ de telle sorte que l'équation suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \theta x(t)\| = 0, \quad (2.17)$$

est satisfaite pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ des deux systèmes, où θ est une matrice diagonale constante, appelée matrice d'échelle i.e :

$$\theta = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n), (\theta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n).$$

Remarque 2.5.1.

- Si θ est un facteur d'échelle constant, la synchronisation est appelée synchronisation projective.
- La synchronisation complète (CS) et l'anti-synchronisation (AS) sont des cas particuliers de synchronisation projective où le facteur d'échelle sont $\theta = 1$ et $\theta = -1$, respectivement.
- La synchronisation hybride est un cas particulier de synchronisation projective modifiée, où les facteurs de la matrice θ des éléments impaires $\theta_i = 1$, alors que les facteurs paires $\theta_i = -1$.

2.5.6 Synchronisation adaptative projective modifiée des systèmes chaotiques

Considérons le système maître et le système esclave rappelons ici sous la forme suivante :

$$\dot{x} = \phi(x(t)), \tag{2.18}$$

$$\dot{y} = \psi(y(t)) + u(x, y, t), \tag{2.19}$$

où $x(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs d'état de systèmes (2.18) et (2.19) respectivement, $\phi, \psi \in \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions vectorielles.

L'objectif est de concevoir un contrôle adaptatif u pour réaliser la synchronisation adaptative projective modifiée entre les systèmes (2.18) et (2.19).

nous récrivons le système maître et le système esclave avec des paramètres inconnus, respectivement, comme suit :

$$\dot{x} = f(x) + F(x)\alpha, \tag{2.20}$$

$$\dot{y} = g(y) + G(y)\beta + u, \tag{2.21}$$

où $f(x), g(y) \in \mathbb{R}^n$ sont des fonctions vectorielles, $F(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $G(y) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ sont des matrices des fonctions, $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $\beta \in \mathbb{R}^p$ sont les paramètres inconnus.

Soit $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{\beta} \in \mathbb{R}^p$ désignent les vecteurs d'estimation des paramètres α et β respectivement.

On définit le vecteur d'erreur entre les systèmes (2.20) et (2.21) comme suit :

$$e = y - \theta x. \quad (2.22)$$

L'évolution de cette dernière par rapport au temps est donnés par :

$$\dot{e} = g(y) - \theta f(x) + G(y)\beta - \theta F(x)\alpha + u. \quad (2.23)$$

Notre objectif est de réaliser une synchronisation projective modifiée adaptative entre le système maître (2.20) et le système de réponse (2.21) par la construction d'un contrôleur adaptatif efficace $u(t)$ telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0.$$

Dans ce cas, le problème de la synchronisation se transforme en un problème de contrôle de l'erreur pour la stabiliser à la valeur zéro.

Théorème 2.5.2. [16] *Si on choisit le contrôle adaptatif par :*

$$u = -g(y) + \theta f(x) + \theta F(x)\tilde{\alpha} - G(y)\tilde{\beta} - ke. \quad (2.24)$$

Selon les lois d'ajustement de l'estimation des paramètres suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\alpha}} = -[F(x)]^T \theta e + \varepsilon (\alpha - \tilde{\alpha}) \\ \dot{\tilde{\beta}} = [G(y)]^T e + \eta (\beta - \tilde{\beta}), \end{cases} \quad (2.25)$$

où $k = \text{diag}(k_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $k_i > 0$, $\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_i)$, $\varepsilon_i > 0$, pour $i = 1 \dots m$,
 $\eta = \text{diag}(\eta_i)$, $\eta_i > 0$, pour $i = 1 \dots p$.

Alors le système dynamique d'erreur (2.23) est globalement exponentiellement stable à l'origine, ce qui implique que le système maître (2.20) et le système de réponse (2.21) sont synchronisés.

Preuve 2.5.2. On substitue (2.24) dans (2.23), La dynamique d'erreur devient :

$$\dot{e} = G(y)(\beta - \tilde{\beta}) - \theta F(x)(\alpha - \tilde{\alpha}) - ke. \quad (2.26)$$

On choisit la fonction de Lyapunov sous la forme :

$$V = \frac{1}{2} \left[e^T e + (\alpha - \tilde{\alpha})^T (\alpha - \tilde{\alpha}) + (\beta - \tilde{\beta})^T (\beta - \tilde{\beta}) \right]. \quad (2.27)$$

La dérivée est :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^T e + (\alpha - \tilde{\alpha})^T (-\dot{\tilde{\alpha}}) + (\beta - \tilde{\beta})^T (-\dot{\tilde{\beta}}) \\ &= [G(y)(\beta - \tilde{\beta}) - \theta F(x)(\alpha - \tilde{\alpha}) - ke]^T e + (\alpha - \tilde{\alpha})^T [F(x)^T \theta e - \varepsilon(\alpha - \tilde{\alpha})] \\ &\quad + (\beta - \tilde{\beta})^T [-G(y)^T e - \eta(\beta - \tilde{\beta})] \\ &= (\beta - \tilde{\beta})^T G(y)^T e - (\alpha - \tilde{\alpha})^T F(x)^T \theta^T e - e^T k^T e + (\alpha - \tilde{\alpha})^T F(x)^T \theta e \\ &\quad - (\alpha - \tilde{\alpha})^T \varepsilon(\alpha - \tilde{\alpha}) - (\beta - \tilde{\beta})^T G(y)^T e - (\beta - \tilde{\beta})^T \eta(\beta - \tilde{\beta}) \\ &= -e^T k e - (\alpha - \tilde{\alpha})^T \varepsilon(\alpha - \tilde{\alpha}) - (\beta - \tilde{\beta})^T \eta(\beta - \tilde{\beta}). \end{aligned}$$

Soit $\lambda = \min(k_i, \varepsilon_j, \eta_q), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq q \leq p$.

Alors :

$$\dot{V} \leq -\lambda \left[\sum_{i=1}^n e_i^2 + \sum_{j=1}^m (\alpha_j - \tilde{\alpha}_j)^2 + \sum_{q=1}^p (\beta_q - \tilde{\beta}_q)^2 \right],$$

i.e :

$$\dot{V} \leq -\lambda \left[e^T e + (\alpha - \tilde{\alpha})^T (\alpha - \tilde{\alpha}) + (\beta - \tilde{\beta})^T (\beta - \tilde{\beta}) \right].$$

Donc :

$$\dot{V} \leq -2\lambda V.$$

Le vecteur d'erreur $e(t)$ converge vers zéro globalement exponentiellement et donc le système maître et le système esclave sont synchronisés.

Remarque

- La méthode on peut appliquer aux systèmes identiques et aussi aux systèmes avec

des paramètres connus.

- Si les paramètres α dans le système maître (2.20) sont connus, alors :

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= 0, \\ F(x) &= 0,\end{aligned}$$

et le contrôleur est de forme :

$$u = \theta f(x) - g(y) - G(y)\tilde{\beta} - ke,$$

et les lois d'adaptation des paramètres estimés sont :

$$\dot{\tilde{\beta}} = [G(y)]^T e + \eta(\beta - \tilde{\beta}), \eta = \text{diag}(\eta_i), \eta_i > 0 \text{ pour } i = 1, \dots, p.$$

- Si les paramètres β dans le système esclave (2.21) sont connus, alors :

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= 0, \\ G(y) &= 0,\end{aligned}$$

et le contrôleur est de forme :

$$u = \theta f(x) - g(y) + \theta F(x)\tilde{\alpha} - ke,$$

et les lois d'adaptation des paramètres estimés sont :

$$\dot{\tilde{\alpha}} = -[F(x)]^T \theta e + \varepsilon(\alpha - \tilde{\alpha}), \varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_i), \varepsilon_i > 0 \text{ pour } i = 1, \dots, m.$$

- Si le système maître et le système esclave sont identiques, alors les contrôleurs peuvent être conçus comme suit :

$$u = \theta f(x) - f(y) + (\theta F(x) - F(y))\tilde{\alpha} - ke,$$

et les lois d'adaptation des paramètres estimés sont :

$$\dot{\tilde{\alpha}} = [F(y) - \theta F(x)]^T e + \varepsilon(\alpha - \tilde{\alpha}), \varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_i), \varepsilon_i > 0.$$

Application de la synchronisation sur les deux systèmes chaotiques Rössler et nouveau système

3.1 Synchronisation identique de nouveau système chaotique par la méthode de Pecora et Carroll

On va appliquer la méthode de Pecora et Carroll pour la synchronisation de deux système identique de nouveau système [15].

Le modèle nouveau système modélise, ce modèle à trois équations est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -p_1x^3 + p_2y^3 + p_3xz^2 \\ \dot{y} = p_4\sin(xy - z) - p_5x^3 \\ \dot{z} = p_6\sin(xyz) + p_7\sin(x), \end{cases} \quad (3.1)$$

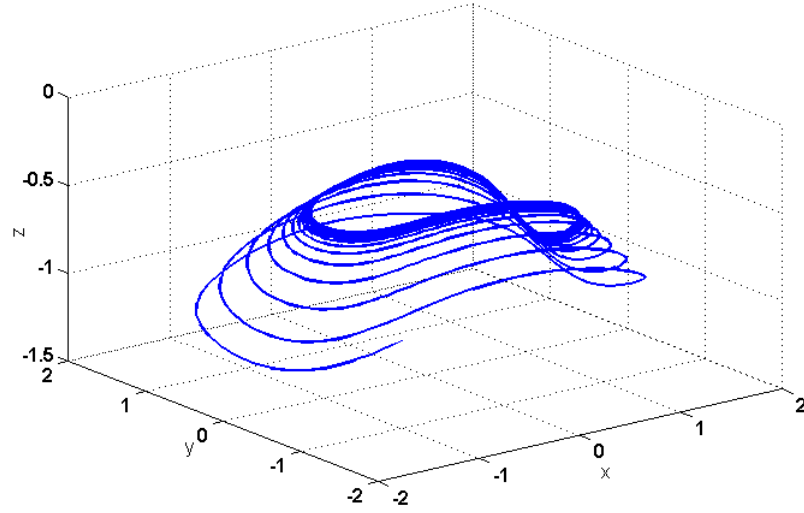


FIGURE 3.1 – *Attracteur chaotique du nouveau système (3.1).*

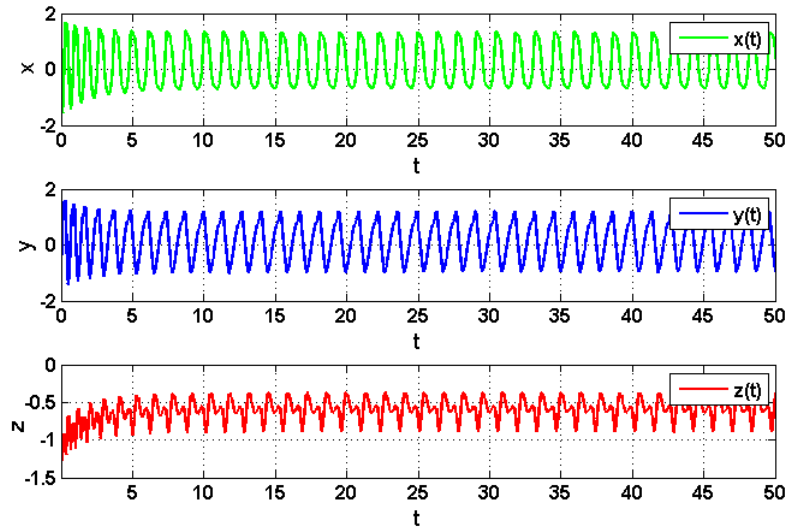


FIGURE 3.2 – *Série temporelles de x , y , z .*

Ce système peut osciller de façon chaotique pour les valeurs des paramètres $p_1 = 3.964$, $p_2 = 7$, $p_3 = 7$, $p_4 = 4$, $p_5 = 4.5$, $p_6 = 4$, $p_7 = 1$, comme le montre la figure (3.1) et (3.2).

*Application de la synchronisation sur les deux systèmes chaotiques
Rössler et nouveau système*

On va synchroniser deux systèmes identiques de nouveau système par la méthode de Pecora et Carroll, dans le cas où le signal transmetteur est x :

Divisons le système (3.1) en deux sous-systèmes $v = x_1$ et $w_1 = (y_1, z_1)$.

En créant une copie $w_2 = (y_2, z_2)$ du sous-système w_1 , on obtient le système dynamique (3.2) d'ordre 5 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -p_1 x_1^3 + p_2 y_1^3 + p_3 x_1 z_1^2 \\ \dot{y}_1 = p_4 \sin(x_1 y_1 - z_1) - p_5 x_1^3 \\ \dot{z}_1 = p_6 \sin(x_1 y_1 z_1) + p_7 \sin(x_1) \\ \dot{y}_2 = p_4 \sin(x_1 y_2 - z_2) - p_5 x_1^3 \\ \dot{z}_2 = p_6 \sin(x_1 y_2 z_2) + p_7 \sin(x_1), \end{cases} \quad (3.2)$$

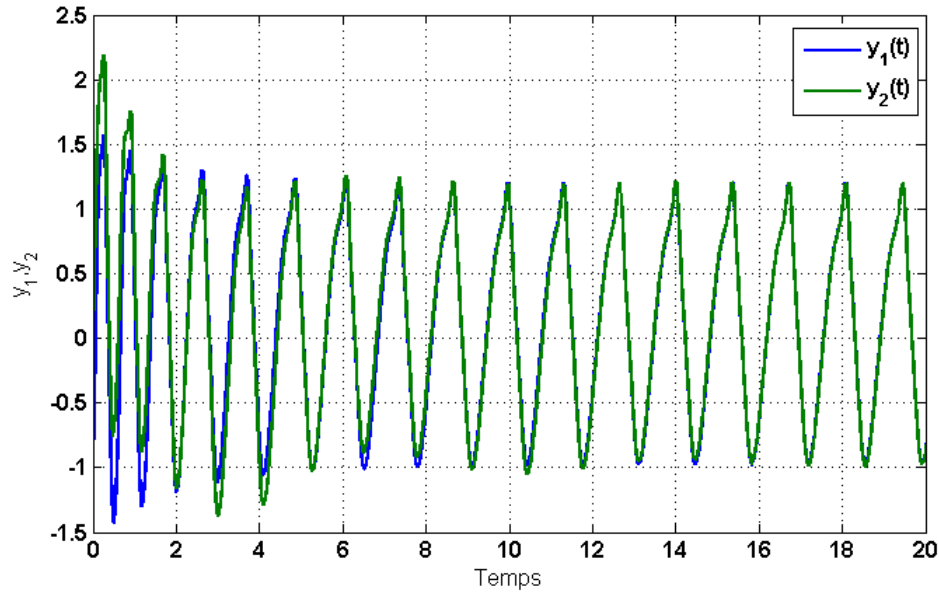


FIGURE 3.3 – La Synchronisation identique pour les valeurs $y_1(t)$ et $y_2(t)$ du système (3.2).

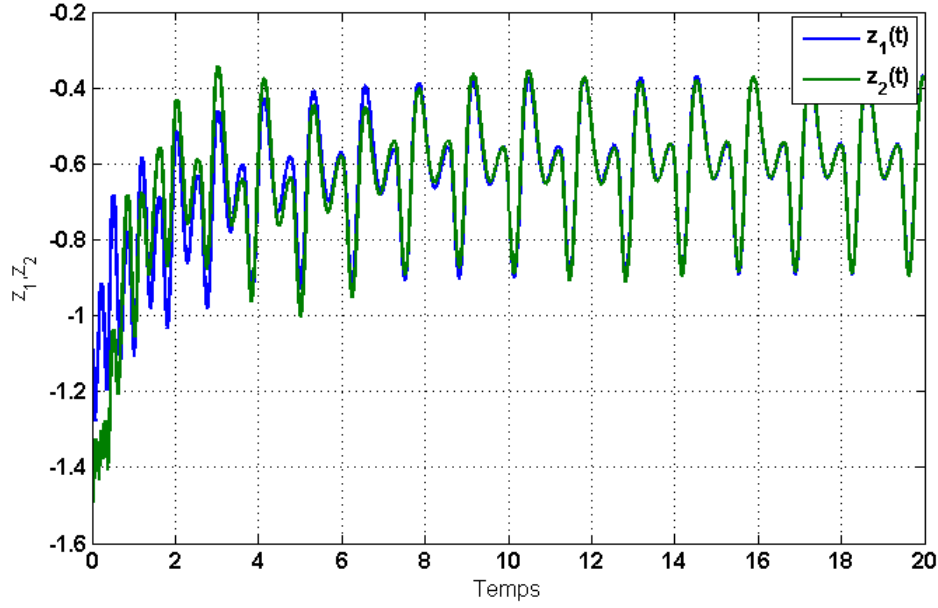


FIGURE 3.4 – La Synchronisation identique pour les valeurs $z_1(t)$ et $z_2(t)$ du système (3.2).

Nos explorations numériques, figures (3.3) et (3.4), montrent que,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y_2 - y_1| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |z_2 - z_1| = 0, \quad (3.3)$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|w_2 - w_1\| = 0, \quad (3.4)$$

c'est-à-dire la synchronisation des deux sous-systèmes w_1 et w_2 est réalisée.

3.2 Synchronisation identique de système de Rössler par la méthode de contrôle linéaire

On va appliquer la méthode de contrôle linéaire pour la synchronisation de deux systèmes identiques de Rössler [02].

Considérons le système maître :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -y_1 - z_1 \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c), \end{cases} \quad (1.5)$$

et le système esclave :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -y_2 - z_2 + p_1(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2 + p_2(y_2 - y_1) \\ \dot{z}_2 = b + z_2x_2 - z_2c + p_3(z_2 - z_1), \end{cases} \quad (1.6)$$

ce système (1.6) est chaotique pour les paramètres $a = 0.2, b = 0.6, c = 5.25$, et telle que les paramètres p_1, p_2, p_3 représentent les constantes qui caractérisent la force d'accouplement unidirectionnel.

Nous comparons ces deux systèmes (1.5) et (1.6) avec les équations (2.8) et (2.9) on trouve :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

et la fonction φ qui satisfait la condition de lipschitzienne (2.11) avec $\rho = 1$.

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 z_1 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 z_2 \end{pmatrix}$$

D'après (2.10) le dynamique d'erreur est :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = p_1 e_1 - e_2 - e_3 \\ \dot{e}_2 = e_1 + e_2 p_2 + a e_2 \\ \dot{e}_3 = e_3 p_3 - c e_3 + x_2 z_2 - x_1 z_1, \end{cases}$$

et d'après le théorème (2.5.1) :

$$\frac{(A + P_3) + (A + P_3)^T}{2} + \rho E = \begin{pmatrix} 1 + p_1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 + a + p_2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 - c + p_3 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Le polynôme caractéristique associer de la matrice (1.7) est donné par :

$$P(\lambda) = (p_2 + 1.2 - \lambda)[(p_1 + 1 - \lambda)(p_3 - 4.25 - \lambda) - \frac{1}{4}], \quad (1.8)$$

alors il suffit de limitée p_1, p_2, p_3 pour les valeurs propres de (1.8) sont négatives.

Donc d'après le théorème (1.1.4) :

$$\begin{cases} p_1 < -1 \\ p_2 < -1.2 \\ p_3 < 4.25. \end{cases}$$

Donc le système maître (1.5) et le système esclave (1.6) sont synchronisés dans le sens que le système erreur tend vers zéros exponentiellement.

Simulation numérique

On choisit les conditions initiales des variables d'états :

$(x_1, y_1, z_1) = (-1, 0, 1), (x_2, y_2, z_2) = (2, -4, -2), (p_1, p_2, p_3) = (-2, -1.8, 3)$. Nous pouvons observer sur les figures (3.5), (3.6), (3.7), telle que après un temps très court, les trajectoires les deux systèmes (1.5), (1.6) deviennent identiques.

Dans la figure (3.8) les erreurs e_1, e_2, e_3 converge vers zéro.

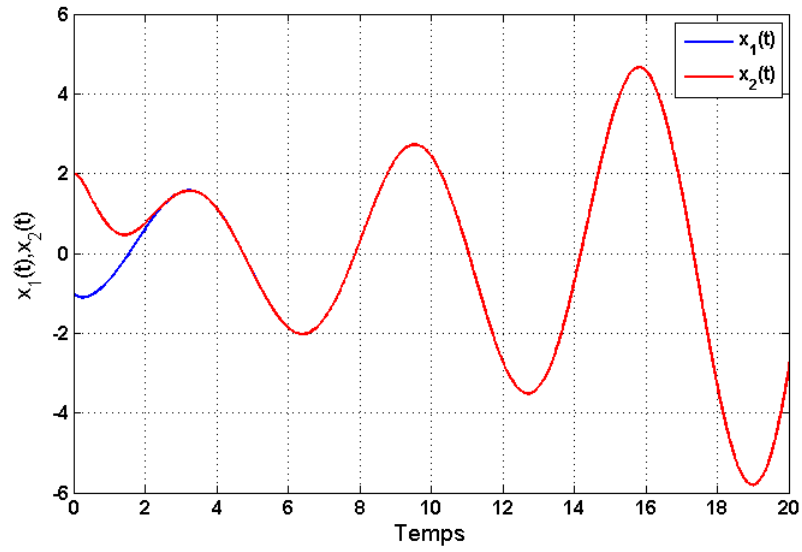


FIGURE 3.5 – les trajectoires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des deux systèmes (1.5) et (1.6) respectivement.

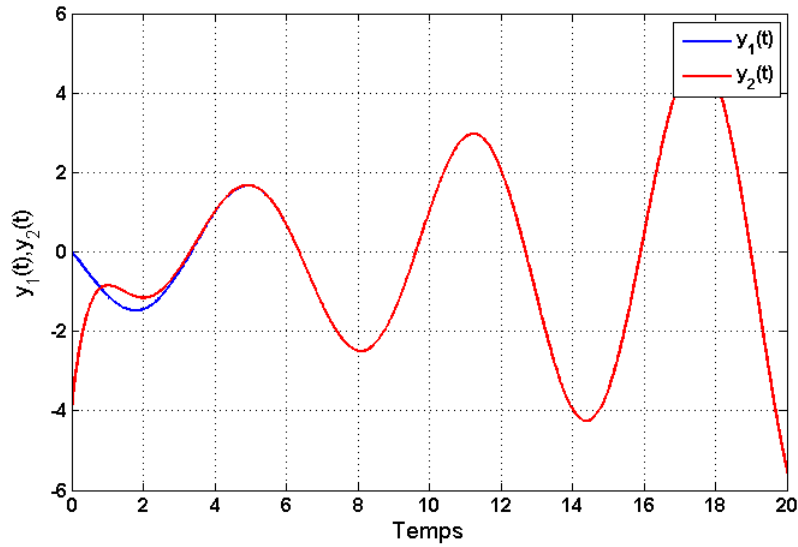


FIGURE 3.6 – les trajectoires $y_1(t)$ et $y_2(t)$ des deux systèmes (1.5) et (1.6) respectivement.

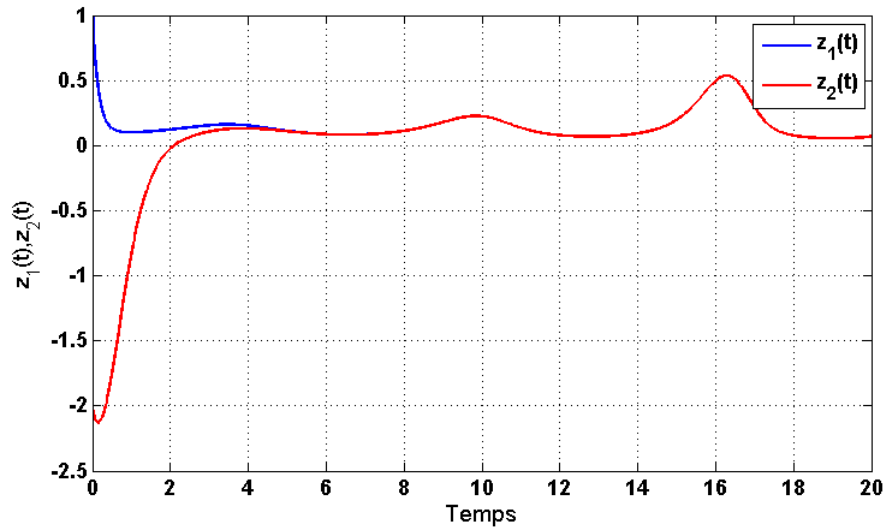


FIGURE 3.7 – les trajectoires $z_1(t)$ et $z_2(t)$ des deux systèmes (1.5) et (1.6) respectivement.

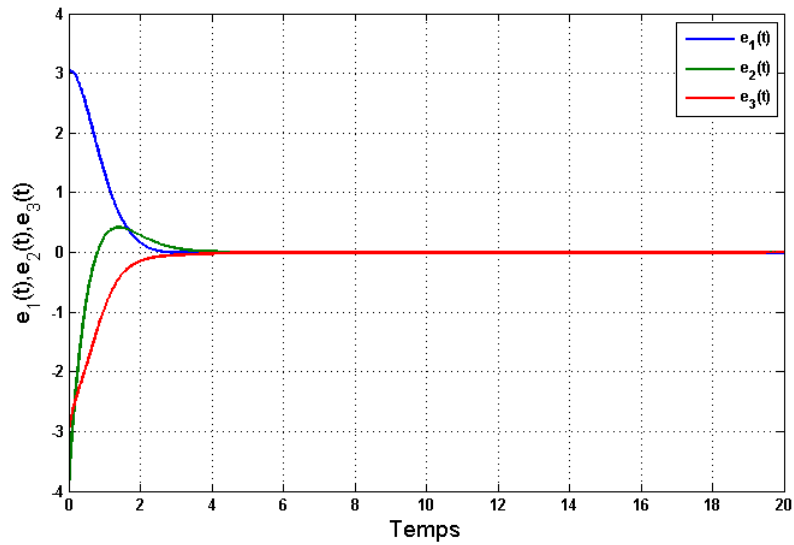


FIGURE 3.8 – Évolution d'erreur de synchronisation $e_1(t)$, $e_2(t)$ et $e_3(t)$ entre les systèmes (1.5) et (1.6) respectivement.

3.3 Synchronisation adaptative entre le système de Rössler et nouveaux système

Dans cet exemple, le contrôle adaptatif est appliqué à la synchronisation complète de deux systèmes différents. Le système de “Rössler” est choisi comme système maître et le nouveaux système comme esclave.

Soit le système de Rössler donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha_1 x_2 \\ \dot{x}_3 = \alpha_2 + x_3(x_1 - \alpha_3), \end{cases} \quad (3.5)$$

où (x_1, x_2, x_3) sont les variables d'états, α_i , ($i = 1, 2, 3$) représente les paramètres inconnus du système maître(3.5),

Ce système peut osciller de façon chaotique pour les valeurs des paramètres : $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.6$ et $\alpha_3 = 5.25$.

Et le système esclave de nouveaux système est défini par les équations dynamiques suivante :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\beta_1 y_1^3 + \beta_2 y_2^3 + \beta_3 y_1 y_3^2 + u_1 \\ \dot{y}_2 = \beta_4 \sin(y_1 y_2 - y_3) - \beta_5 y_1^3 + u_2 \\ \dot{y}_3 = \beta_6 \sin(y_1 y_2 y_3) + \beta_7 \sin(y_1) + u_3, \end{cases} \quad (3.6)$$

où (y_1, y_2, y_3) sont les variables d'états, β_j ($j = 1, \dots, 7$) représente les paramètres inconnus du système esclave(3.6), lorsque les paramètres $\beta_1 = 3.964$, $\beta_2 = 7$, $\beta_3 = 7$, $\beta_4 = 5$, $\beta_5 = 4.5$, $\beta_6 = 2.9$ et $\beta_7 = 1$ le système (3.6) est chaotique.

$u = (u_1, u_2, u_3)^T$ représente la fonction du contrôle adaptatif à déterminer ultérieurement.

La synchronisation complète est un cas particulier de la synchronisation projective modifiée où les facteurs de la matrice d'échelle sont $\theta_i = 1$.

Nous comparons les systèmes (3.5) et (3.6) avec les équations (2.20) et (2.21) on

trouve :

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_1 \\ x_3 x_1 \end{pmatrix}, F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x_3 \end{pmatrix}$$

$$g(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, G(y) = \begin{pmatrix} -y_1^3 & y_2^3 & y_1 y_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(y_1 y_2 - y_3) & -y_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(y_1 y_2 y_3) & \sin(y_1) \end{pmatrix}$$

Pour $\theta_i = 1$, on désigne par $e = y - x$ l'erreur de la synchronisation de deux systèmes (3.5) et (3.6), on obtient la dynamique d'erreur :

$$\dot{e} = g(y) - f(x) + G(y)\beta - F(x)\alpha + u. \quad (3.7)$$

On considère la loi de contrôle adaptatif :

$$u = f(x) - g(y) + F(x)\tilde{\alpha} - G(y)\tilde{\beta} - ke, \quad (3.8)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u_1 = (-x_2 - x_3) + y_1^3 \tilde{\beta}_1 - y_2^3 \tilde{\beta}_2 - y_1 y_3^2 \tilde{\beta}_3 - k_1 e_1 \\ u_2 = x_1 + x_2 \tilde{\alpha}_1 - \sin(y_1 y_2 - y_3) \tilde{\beta}_4 + y_1^3 \tilde{\beta}_5 - k_2 e_2 \\ u_3 = x_1 x_3 + \tilde{\alpha}_2 - x_3 \tilde{\alpha}_3 - \sin(y_1 y_2 y_3) \tilde{\beta}_6 - \sin(y_1) \tilde{\beta}_7 - k_3 e_3. \end{cases} \quad (3.9)$$

En remplaçant (3.8) dans (3.7), on obtient :

$$\dot{e} = G(y)(\beta - \tilde{\beta}) - F(x)(\alpha - \tilde{\alpha}) - ke, \quad (3.10)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -y_1^3(\beta_1 - \tilde{\beta}_1) + y_2^3(\beta_2 - \tilde{\beta}_2) + y_1 y_3^2(\beta_3 - \tilde{\beta}_3) - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = \sin(y_1 y_2 - y_3)(\beta_4 - \tilde{\beta}_4) - y_1^3(\beta_5 - \tilde{\beta}_5) - x_2(\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1) - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = \sin(y_1 y_2 y_3)(\beta_6 - \tilde{\beta}_6) + \sin(y_1)(\beta_7 - \tilde{\beta}_7) - (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2) + x_3(\alpha_3 - \tilde{\alpha}_3) - k_3 e_3. \end{cases} \quad (3.11)$$

En remplaçant (3.9) dans (3.6), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1^3(\beta_1 - \tilde{\beta}_1) + y_2^3(\beta_2 - \tilde{\beta}_2) + y_1 y_3^2(\beta_3 - \tilde{\beta}_3) - x_2 - x_3 - k_1 e_1 \\ \dot{y}_2 = \sin(y_1 y_2 - y_3)(\beta_4 - \tilde{\beta}_4) - y_1^3(\beta_5 - \tilde{\beta}_5) + x_1 + x_2 \tilde{\alpha}_1 - k_2 e_2 \\ \dot{y}_3 = \sin(y_1 y_2 y_3)(\beta_6 - \tilde{\beta}_6) + \sin(y_1)(\beta_7 - \tilde{\beta}_7) + x_1 x_3 + \tilde{\alpha}_2 - x_3 \tilde{\alpha}_3 - k_3 e_3. \end{cases} \quad (3.12)$$

D'après le théorème (2.5.2) on choisit la loi de mise à jour du paramètre comme suit :

$$\dot{\tilde{\alpha}} = -[F(x)]^T e + \varepsilon(\alpha - \tilde{\alpha}), \quad (3.13)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\alpha}}_1 = -x_2 e_2 + \varepsilon_1(\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1) \\ \dot{\tilde{\alpha}}_2 = -e_3 + \varepsilon_2(\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2) \\ \dot{\tilde{\alpha}}_3 = x_3 e_3 + \varepsilon_3(\alpha_3 - \tilde{\alpha}_3), \end{cases} \quad (3.14)$$

et on a :

$$\dot{\tilde{\beta}} = [G(y)]^T e + \eta(\beta - \tilde{\beta}), \quad (3.15)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\beta}}_1 = -y_1^3 e_1 + \eta_1(\beta_1 - \tilde{\beta}_1) \\ \dot{\tilde{\beta}}_2 = y_2^3 e_1 + \eta_2(\beta_2 - \tilde{\beta}_2) \\ \dot{\tilde{\beta}}_3 = y_1 y_3^2 e_1 + \eta_3(\beta_3 - \tilde{\beta}_3) \\ \dot{\tilde{\beta}}_4 = \sin(y_1 y_2 - y_3) e_2 + \eta_4(\beta_4 - \tilde{\beta}_4) \\ \dot{\tilde{\beta}}_5 = -y_1^3 e_2 + \eta_5(\beta_5 - \tilde{\beta}_5) \\ \dot{\tilde{\beta}}_6 = \sin(y_1 y_2 y_3) e_3 + \eta_6(\beta_6 - \tilde{\beta}_6) \\ \dot{\tilde{\beta}}_7 = \sin(y_1) e_3 + \eta_7(\beta_7 - \tilde{\beta}_7). \end{cases} \quad (3.16)$$

Simulation numérique

Dans la simulation numérique, la méthode d'intégration Runge-Kutta de quatrième ordre est utilisée pour résoudre les systèmes de l'équation différentielle (3.5) et (3.6) avec un pas du temps 0.01, on choisit les conditions initiales des variables

*Application de la synchronisation sur les deux systèmes chaotiques
Rössler et nouveau système*

d'états suivantes : $x(0) = (-1, 0, 1)^T$, $y(0) = (-1, -1, -1)^T$ valeurs initiales des paramètres du système maitre et esclave sont $\tilde{\alpha}_1(0) = 5$, $\tilde{\alpha}_2(0) = 5$ et $\tilde{\alpha}_3(0) = 5$. $\tilde{\beta}_1(0) = 5$, $\tilde{\beta}_2(0) = 5$, $\tilde{\beta}_3(0) = 5$, $\tilde{\beta}_4(0) = 5$, $\tilde{\beta}_5(0) = 5$, $\tilde{\beta}_6(0) = 5$ et $\tilde{\beta}_7(0) = 5$, avec $k_i = 1$, $\forall i = (1, 2, 3)$.

Les trajectoires du système réponse (3.6) convergent vers les trajectoire du système maitre (3.5) comme montrent dans les figures (3.9), (3.10), (3.11).

La figure (3.12) représente la convergence d'erreur vers zéro, et les convergences des paramètres $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_j$, $\forall i = (1, 2, 3)$, $j = (1, \dots, 7)$ respectivement vers leurs valeurs réelles $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.6$ et $\alpha_3 = 5.25$, $\beta_1 = 3.964$, $\beta_2 = 7$, $\beta_3 = 7$, $\beta_4 = 5$, $\beta_5 = 4.5$, $\beta_6 = 2.9$ et $\beta_7 = 1$ comme représenté dans les figures (3.13), (3.14).

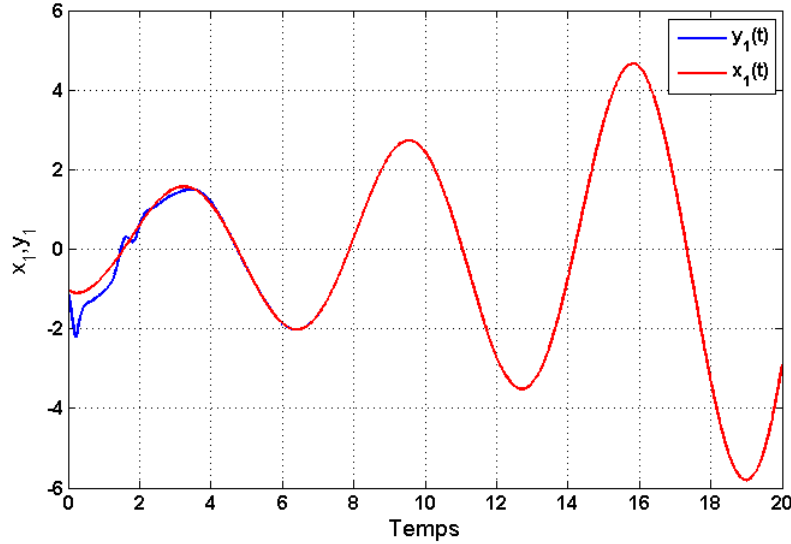


FIGURE 3.9 – Évolution des trajectoires $x_1(t)$ et $y_1(t)$ pour les systèmes (3.5) et (3.6).

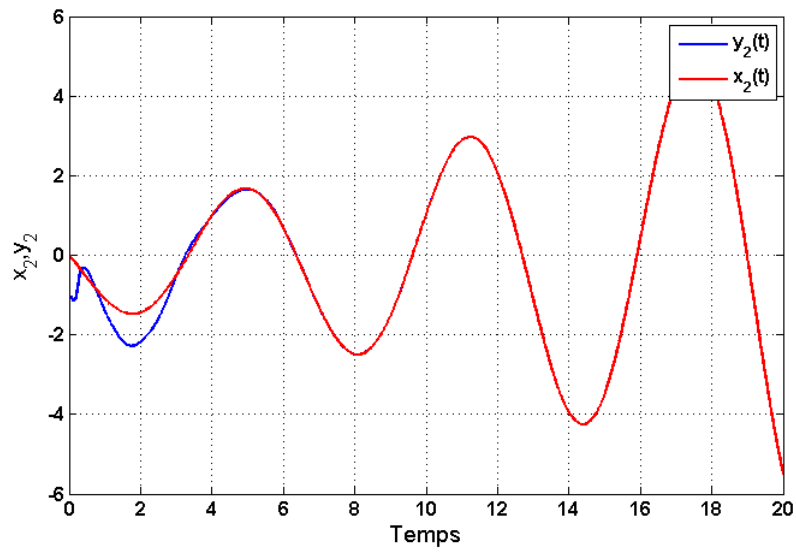


FIGURE 3.10 – Évolution des trajectoires $x_2(t)$ et $y_2(t)$ pour les systèmes (3.5) et (3.6).

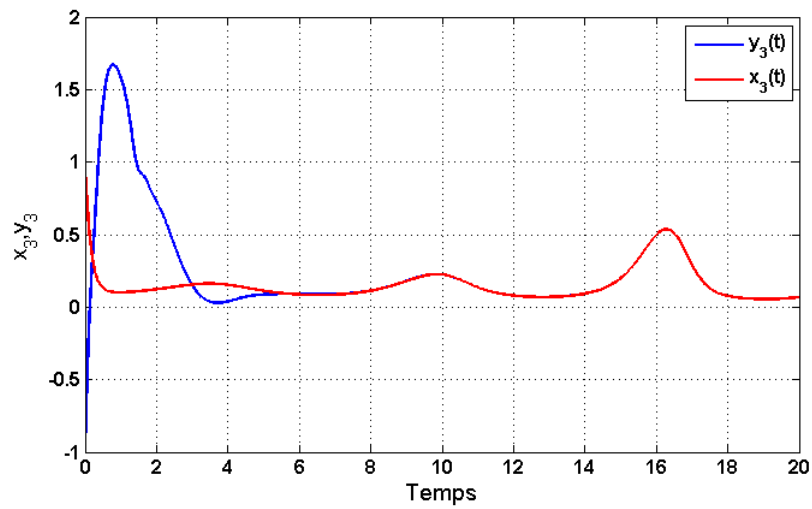


FIGURE 3.11 – Évolution des trajectoires $x_3(t)$ et $y_3(t)$ pour les systèmes (3.5) et (3.6).

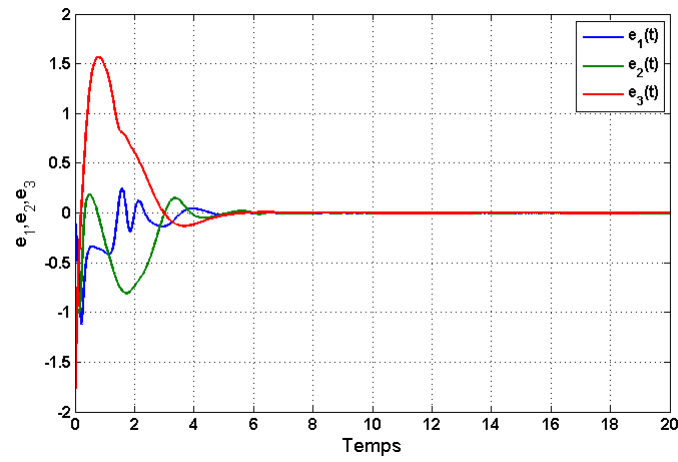


FIGURE 3.12 – Évolution d’erreur de synchronisation $e_1(t)$, $e_2(t)$ et $e_3(t)$ entre le système systèmes (3.5) et (3.6).

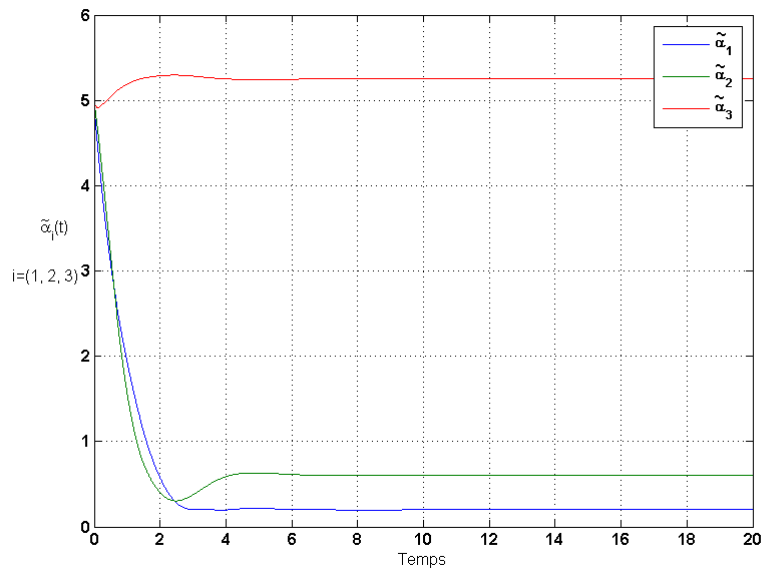


FIGURE 3.13 – L’estimation des paramètres inconnus $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_3$, pour le système maître (3.5).

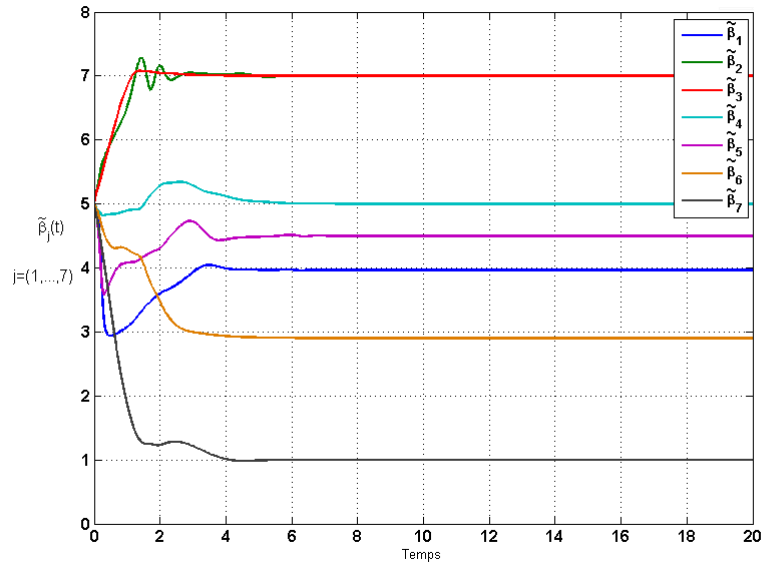


FIGURE 3.14 – L'estimation des paramètres inconnus $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3, \tilde{\beta}_4, \tilde{\beta}_5, \tilde{\beta}_6, \tilde{\beta}_7$, pour le système esclave (3.6).

Conclusion généralisé

Le travail dans le cadre de ce mémoire, a pour objectif la synchronisation des systèmes chaotiques. Nous avons commencé présenté des notions sur les systèmes dynamiques chaotiques et ses caractéristiques(l'aspect aléatoire, la sensibilité aux conditions initiales, l'attracteur étrange) ensuite nous avons abordé la définition et quelque différente types de la synchronisation qui est utilisé, après cela nous avons appliqué trois méthodes pour exprimer la synchronisation du deux systèmes chaotiques le système de Rössler et le nouveaux système chaotique : la méthode de Pecorra et Carroll pour la synchronisation identique sur le nouveaux système chaotique, le contrôle linéaire pour la synchronisation identique sur le système de Rössler, et le contrôle adaptatif pour la synchronisation complète entre les deux systèmes précédent. Ces méthodes sont appliquées pour synchronisé des systèmes identiques, systèmes différents.

La simulations numériques et les schémas de la synchronisation que nous avons faite par la méthode de **Rung-Kutta** quatrième ordre avec une programmation en " **MATLAB**" nous démontre l'efficacité et l'exactitude de les méthodes de la synchronisation.

Annexe

Programme en matlab pour la synchronisation identique de deux systèmes de Rösseler par la méthode de contrôle linéaire

```
clear all
close all
a = 0.2; b = 0.6; c = 5.25;
h = 0.01;
max = 10;
x(1) = -1; y(1) = 0; z(1) = 1;
p1 = -2; p2 = -1.8; p3 = 3;
w(1) = 2; v(1) = -4; u(1) = -2;
e1(1) = w(1) - x(1); e2(1) = v(1) - y(1); e3(1) = u(1) - z(1);
tps(1) = 0;
k = 1;
for i = 0 : h : max;
k = k + 1;
dx1 = -y(k - 1) - z(k - 1);
dy1 = x(k - 1) + a * y(k - 1);
dz1 = b + z(k - 1) * (x(k - 1) - c);
dw1 = -v(k - 1) - u(k - 1) + p1 * (w(k - 1) - x(k - 1));
dv1 = w(k - 1) + a * v(k - 1) + p2 * (v(k - 1) - y(k - 1));
```

$$\begin{aligned}
du1 &= b + u(k-1) * (w(k-1) - c) + p3 * (u(k-1) - z(k-1)); \\
de11 &= p1 * e1(k-1) - e2(k-1) - e3(k-1); \\
de21 &= e1(k-1) + p2 * e2(k-1) + a * e2(k-1); \\
de31 &= p3 * e3(k-1) - c * e3(k-1) + w(k-1) * u(k-1) - x(k-1) * z(k-1); \\
x2 &= x(k-1) + h * dx1/2; \\
y2 &= y(k-1) + h * dy1/2; \\
z2 &= z(k-1) + h * dz1/2; \\
w2 &= w(k-1) + h * dw1/2; \\
v2 &= v(k-1) + h * dv1/2; \\
u2 &= u(k-1) + h * du1/2; \\
e12 &= e1(k-1) + h * de11/2; \\
e22 &= e2(k-1) + h * de21/2; \\
e32 &= e3(k-1) + h * de31/2; \\
dx2 &= -y2 - z2; \\
dy2 &= x2 + a * y2; \\
dz2 &= b + z2 * (x2 - c); \\
dw2 &= -v2 - u2 + p1 * (w2 - x2); \\
dv2 &= w2 + a * v2 + p2 * (v2 - y2); \\
du2 &= b + u2 * (w2 - c) + p3 * (u2 - z2); \\
de12 &= p1 * e12 - e22 - e32; \\
de22 &= e12 + p2 * e22 + a * e22; \\
de32 &= p3 * e32 - c * e32 + w2 * u2 - x2 * z2; \\
x3 &= x(k-1) + h * dx2/2; \\
y3 &= y(k-1) + h * dy2/2; \\
z3 &= z(k-1) + h * dz2/2; \\
w3 &= w(k-1) + h * dw2/2; \\
v3 &= v(k-1) + h * dv2/2; \\
u3 &= u(k-1) + h * du2/2; \\
e13 &= e1(k-1) + h * de12/2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e23 &= e2(k-1) + h * de22/2; \\e33 &= e3(k-1) + h * de32/2; \\dx3 &= -y3 - z3; \\dy3 &= x3 + a * y3; \\dz3 &= b + z3 * (x3 - c); \\dw3 &= -v3 - u3 + p1 * (w3 - x3); \\dv3 &= w3 + a * v3 + p2 * (v3 - y3); \\du3 &= b + u3 * (w3 - c) + p3 * (u3 - z3); \\de13 &= p1 * e13 - e23 - e33; \\de23 &= e13 + p2 * e23 + a * e23; \\de33 &= p3 * e33 - c * e33 + w3 * u3 - x3 * z3; \\x4 &= x(k-1) + h * dx3; \\y4 &= y(k-1) + h * dy3; \\z4 &= z(k-1) + h * dz3; \\w4 &= w(k-1) + h * dw3; \\v4 &= v(k-1) + h * dv3; \\u4 &= u(k-1) + h * du3; \\e14 &= e1(k-1) + h * de13/2; \\e24 &= e2(k-1) + h * de23/2; \\e34 &= e3(k-1) + h * de33/2; \\dx4 &= -y4 - z4; \\dy4 &= x4 + a * y4; \\dz4 &= b + z4 * (x4 - c); \\dw4 &= -v4 - u4 + p1 * (w4 - x4); \\dv4 &= w4 + a * v4 + p2 * (v4 - y4); \\du4 &= b + u4 * (w4 - c) + p3 * (u4 - z4); \\de14 &= p1 * e14 - e24 - e34; \\de24 &= e14 + p2 * e24 + a * e24; \\de34 &= p3 * e34 - c * e34 + w4 * u4 - x4 * z4;\end{aligned}$$

```

x(k) = x(k - 1) + h * (dx1/6 + dx2/3 + dx3/3 + dx4/6);
y(k) = y(k - 1) + h * (dy1/6 + dy2/3 + dy3/3 + dy4/6);
z(k) = z(k - 1) + h * (dz1/6 + dz2/3 + dz3/3 + dz4/6);
w(k) = w(k - 1) + h * (dw1/6 + dw2/3 + dw3/3 + dw4/6);
v(k) = v(k - 1) + h * (dv1/6 + dv2/3 + dv3/3 + dv4/6);
u(k) = u(k - 1) + h * (du1/6 + du2/3 + du3/3 + du4/6);
e1(k) = e1(k - 1) + h * (de11/6 + de12/3 + de13/3 + de14/6);
e2(k) = e2(k - 1) + h * (de21/6 + de22/3 + de23/3 + de24/6);
e3(k) = e3(k - 1) + h * (de31/6 + de32/3 + de33/3 + de34/6);
tps(k) = i;
end
plot(tps, x, tps, w, 'r')
xlabel('Temps')
ylabel('x1(t), x2(t)')
legend('x1(t)', 'x2(t)')
disp('presez la touche espace pour continue')
pause
plot(tps, y, tps, v, 'r')
ylabel('y1(t), y2(t)')
legend('y1(t)', 'y2(t)')
disp('presez la touche espace pour continue')
pause
plot(tps, z, tps, u, 'r')
xlabel('Temps')
ylabel('z1(t), z2(t)')
legend('z1(t)', 'z2(t)')
disp('presez la touche espace pour continue')
pause
plot(tps, e1, tps, e2, tps, e3)

```

```
xlabel('Temps')  
ylabel('e1(t), e2(t), e3(t)')  
legend('e1(t)', 'e2(t)', 'e3(t)')  
disp('presez')  
pause
```

Références

- [01] A. El Jaï, E. Zerrik, K. Ztot, Systèmes dynamiques. Analyse et contrôle des systèmes localisés, Universitaire de perpignan, (2008).
- [02] A. Karimov, A. Tutueva, T. Karimov, O. Druzhina, D. Butusov, Adaptive Generalized Synchronization between Circuit and Computer Implementations of the Rössler System. Applied Sciences,V(11), p 81, (2021).
- [03] A. Ouannas, Sur la synchronisation des systèmes chaotiques discrets, Thèse de doctorat , Université Frères Mentouri à , Constantine.
- [04] B. Abdelkrim, Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation : Contribution à l'élaboration de nouvelles approches, Thèse de doctorat de l'Université de Constantine, Constantine, (2006).
- [05] C. M. Marle, P. Pilibossian, Systèmes dynamiques une introduction, Ellipse, (2003).
- [06] H. Dang-Vu, and C. Delcarte, Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica, Marketing, Paris : Ellipses Ed, (2000).
- [07] H. Sonia, Sur la stabilisation de systèmes dynamiques continu non linéaires exploitant les matrices de formes en flèche ; L'école Centrale de Lille et L'école Nationale d'ingénieurs de Tunis, Tunis, (2009).

- [08] H. Tayeb, Systèmes Dynamiques Chaos, Thèse doctorat de l'Université de Constantine-1-, Constantine, (2013).
- [09] I. Ameer, Synchronisation, et Chaotification et Hyperchaotification des Systèmes Non-linéaires : Méthodes et Applications, Thèse de doctorat Université Mentouri, Constantine, (2011).
- [10] L. Messauda, Contrôle et synchronisation de quelques types de systèmes dynamiques chaotiques, Thèse de doctorat Centre Universitaire Abdelhafid Bousouf, Mila, (2021).
- [11] L. Widad, Contrôle des Systèmes dynamiques chaotiques, Thèse doctorat de l'Université de Constantine 1, Constantine, (2018).
- [12] L. Widad and H. Nasr-eddine, 'Feedback Control of Chaotic Systems by Using Jacobian Matrix Conditions' Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 18 (3) (2018) 285-296.
- [13] M. S. Assia, Systèmes dynamiques chaotiques et synchronisation, Thèse de doctorat université Mohamed khider, Biskra, (2020).
- [14] M. W. Hirsch, S. Smale, Differential Equations, Dynamical systems and Linear Algebra, Pure and Applied Mathematics, vol. XI, Academic Press, New York 1974.
- [15] Maryam, Zolfaghari-Nejad, Mostafa Charmi, and Hossein Hassanpoor. "A New Chaotic System with Only Nonhyperbolic Equilibrium Points : Dynamics and Its Engineering Application." Complexity 2022 (2022).
- [16] O. Rabiaa, Système dynamiques et chaos : Différentes méthodes de contrôle et de synchronisation, Thèse de doctorat Université Mentouri-Constantine 1, Constantine, (2018).
- [17] P. Gaspard, Rössler systems, Encyclopedia of Nonlinear Science, V(231), p (808-811), (2005).