

N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid boussof Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Sur les nombres de Stirling et leurs interprétations

**Préparé par : Abla Chamaa
Fairouz Laib**

Soutenue devant le jury

Yacine Halim	MCA	C. U. Abdelhafid Boussof, Mila	Président
Abdelghafour Bazeniari	MCB	C. U. Abdelhafid Boussof, Mila	Rapporteur
Moussa Ahmia	MCA	U. Mohamed S. B. Yahia, Jijel	Examineur

Année universitaire : 2021/2022

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier **ALLAH** de nous avoir guidé et donné la force et la volonté pour atteindre notre objectif, durant ces longues années d'études et le courage pour terminer ce mémoire

Nous remercions chaleureusement notre encadreur **Mr. Abdelghafour BAZENIAR** sa disponibilité, ses précieux conseils et motivations qui nous ont gardé sur le droit chemin afin de réaliser ce modeste travail.

Nous remercions le **Mr. Yacine HALIM**, d'avoir fait l'honneur de présider notre jury de mémoire. Nous veu aussi remercions **Mr. Moussa AHMIA** , pour l'honneur qu'il nos a fait en acceptant de participer à ce jury.

Sans oublier tous les enseignants d'avoir contribué à notre formation, ainsi qu'à toute l'équipe du département de mathématiques.

Nous remercions également tous ce qui nous ont aide d'une manière ou d'une autre, de par leurs conseils judicieux ou par la documentation ou les données qu'il ont mis à notre disposition.

MERCI

Dédicace

L'occasion tant attendue d'offrir et de dédier ce modeste travail, qui clôture toute une période de persévérance continue et assidue, aux personnes qui me sont les plus chères en ce monde. Personnes qui par leur présence permanente ou leur soutien en des moments difficiles ont été le catalyseur de toute mon énergie et tous mes efforts.

Je dédie ce travail à :

Nous tenons à remercier avant tout [ALLAH](#) le toute puissant de nous avoir donné la volonté, la santé et le courage pour réaliser ce travail.

Mon cher [papa](#), qui a été mon ombre durant toutes les années des études et à mis ma disposition tous les moyens nécessaire pour que je réussisse et était le meilleur soutien pour moi.

Ma mère [maman](#), qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie.

À mes frères : [mohamed](#) , [Amir](#) et À mes soeurs : [Roumaissa](#) , [Khawla](#) , [Amina](#).

A mes chers amis, pour leur appui et leur encouragement.

À mon encadreur :

[Abdelghafour Bazénair](#)

FAIROUZ



Dédicace



Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance, c'est tout simplement que.

Je dédie cette mémoire à :

Mes parents pour les efforts qu'ils ont consentis tout au long de ma vie par leur chaleureuse affection ainsi que mon frère et mes soeurs.

Je tiens quand même à donner une mention spéciale à mes amies.

Je souhaite que dieu leur préserve une longue vie.

ABLA

Table des matières

<i>Abréviations et notations</i>	11
<i>Introduction Générale</i>	13
<i>1 Notions préliminaires</i>	15
1.1 <i>Partition d'un entiers</i>	16
1.1.1 <i>Partitions remarquables</i>	16
1.2 <i>Permutation</i>	17
1.2.1 <i>Orbite d'un élément, cycles</i>	18
1.2.2 <i>Transpositions</i>	19
1.2.3 <i>Signature et inversion</i>	19
1.2.4 <i>Permutations paires, permutations impaires</i>	20
1.3 <i>Les Séries génératrices</i>	20
1.4 <i>Diagramme de Ferrers</i>	22
1.5 <i>Tableau de Young</i>	23
1.6 <i>Coefficients binomiaux</i>	24
1.6.1 <i>Formule du binôme de Newton</i>	25
1.7 <i>Coefficients multinomiaux</i>	26
1.7.1 <i>Formule du multinôme de Newton</i>	26
1.8 <i>Les coefficients binomiaux</i>	26
1.8.1 <i>Interprétation combinatoire</i>	28

1.8.2	Coefficients q -binomiaux	28
1.9	Chemins de réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	30
1.10	Fonction Symétrique	31
1.10.1	Symétrisation	31
1.10.2	Échanges de deux variables	32
1.10.3	Échanges de variables consécutives	32
1.10.4	Échanges avec une variable fixée	32
1.10.5	Critère minimal	32
1.10.6	Fonctions symétriques monômiales	32
1.10.7	Fonction symétriques élémentaires	33
1.10.8	Fonctions symétriques complètes	36
1.10.9	Fonctions symétriques sommes de puissances	39
1.10.10	Relations entre les fonctions symétriques	40
1.10.11	Quelques propriétés sur les fonctions symétriques	40
2	Nombres de Stirling	42
2.1	Nombre de Stirling de première espèce	43
2.1.1	Relations de récurrence	45
2.1.2	Fonction génératrice	47
2.1.3	Formules explicites	48
2.1.4	Interprétation combinatoire	49
2.2	Nombre de Stirling de deuxième espèce	50
2.2.1	Relation de récurrence	52
2.2.2	Formules explicites	53
2.2.3	Séries génératrice	56
2.2.4	Interprétation combinatoire	58
2.2.5	Propriétés combinatoires	59
2.3	Relations avec des nombres connus	60
2.3.1	Relation avec les nombres Eulériens	60
2.3.2	Relation avec les nombres de Cauchy	60

2.3.3	<i>Relation avec les nombres de Bernoulli</i>	61
2.3.4	<i>Relation avec les nombres Harmoniques</i>	62
2.4	<i>Nombre q-Stirling</i>	62
2.4.1	<i>Nombre q-Stirling de première espèce</i>	62
2.4.2	<i>Nombre q-Stirling de deuxième espèce</i>	63
2.5	<i>Nombres de Lah</i>	65
2.6	<i>Nombres de Bell</i>	67
3	Des généralisations des nombres de Stirling	71
	<i>Introduction</i>	71
	<i>Introduction</i>	71
3.1	<i>Nombre de Stirling associés</i>	72
3.1.1	<i>Nombre de stirling associés de première espèce</i>	72
3.1.2	<i>Nombre de Stirling associés de deuxième espèce</i>	73
3.1.3	<i>Relations avec Les autres nombres</i>	75
3.2	<i>Les nombres de Stirling s-associés</i>	76
3.2.1	<i>Relation de récurrence</i>	76
3.2.2	<i>Fonctions génératrice</i>	76
3.2.3	<i>Forme explicite</i>	76
3.3	<i>Nombres r-Stirling</i>	77
3.3.1	<i>r-Stirling de première espèce</i>	77
3.3.2	<i>r-Stirling de deuxième espèce</i>	79
3.3.3	<i>Propriétés sur les nombres r-Stirling</i>	81
3.4	<i>Nombre (r, s)-Stirling de deuxième espèce</i>	81
3.4.1	<i>Relations récurrentes</i>	81
3.4.2	<i>Fonctions génératrices</i>	85
3.5	<i>Nombre de Legendre-Stirling</i>	87
3.5.1	<i>Legendre-Stirling de première espèce</i>	87
3.5.2	<i>Legendre-Stirling de deuxième espèce</i>	88

3.5.3	<i>Quelque identité des nombres de Legendre-Stirling</i>	90
3.6	<i>s-Stirling généralisés de première espèce</i>	92
3.6.1	<i>Interprétation combinatoire</i>	94

Liste des tableaux

1.1	Tableau de Young standard.	23
1.2	Tableau de Young semi-standard.	24
1.3	Triangle numérique.	26
1.4	Triangle des coefficients du binomiaux $\binom{n}{k}_2$	27
1.5	Triangle du coefficient trinomaux $\binom{n}{k}_3$	28
2.1	Les nombres de Stirling de première espèce non-signés.	47
2.2	Les nombres de Stirling de première espèce signés.	47
2.3	Les nombres Stirling de deuxième espèce.	53
2.4	Les premières valeurs de $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_q$	63
2.5	Les premières valeurs de $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_q$	64
2.6	Les premières valeurs des nombres de Lah.	66
2.7	Les premières valeurs de B_n	67
2.8	Les premières valeurs des nombre de Bell.	68
3.1	Les nombres de Stirling associés de première espèce.	72
3.2	Les nombres de Stirling associés de deuxième espèce.	74
3.3	Les nombres 2-Stirling de première espèce.	78
3.4	Les nombres 3-Stirling de première espèce.	78
3.5	Les nombres 2-Stirling de deuxième espèce.	80
3.6	Les nombres 3-Stirling de deuxième espèce.	80
3.7	les premiers nombres de Le-Stirling de première espèce.	87
3.8	Tableau des nombres de Le-Stirling de deuxième espèce.	90
3.9	2-Stirling de première espèce $S_s(n, k)$	93

Table des figures

1.1	Orbites d'une permutation.	19
1.2	Diagramme de Ferrers pour $\lambda = (5, 4, 2, 1)$	22
1.3	Diagramme de Ferrers conjugué pour	22
1.4	Tous les tableaux standards de forme $(2, 2, 1)$	25
1.5	Le réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	30
1.6	Un chemin allant de $(0, 0)$ à $(7, 3)$	31

Abréviations et notations

Les notations suivantes seront utilisées dans toute la mémoire :

$\mathbb{N}$	: Ensemble des nombres naturel.
$\mathbb{R}$	: Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{Z}$	: Ensemble des entiers .
$[n]$	: L'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
T	: Tableau de Young.
f^λ	: Le nombre de tableaux de Young standard.
$Y(\lambda)$	: L'ensemble des tableau de Young.
$x^{\overline{n}}$	: factorielle $:x(x+1)\cdots(x+n-1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x^0 = 1$.
$x^{\underline{n}}$	: Factorielle $:x(x-1)\cdots(x-n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x^0 = 1$.
$\binom{n}{k}$	: Coefficient binomial $:\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
e_k	: La fonction symétrique élémentaire
h_k	: La fonction symétrique complète.
p_k	: La fonction symétrique somme de puissance.
m_λ	: Fonctions symétriques monômiales.
$s(n, k)$	: Les nombres de stirling de première espèce signée.
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	: Les nombres de stirling de première espèce non-signée.
$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$	: Les nombres de stirling de deuxième espèce.
$\binom{n}{k}_s$	: Le coefficient bi ^s nomial.
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)}$	: Le coefficient q-bi ^s nomial.
B_n	: Le n-ième nombre de Bell.
$L(n, k)$	: Les nombres de Lah.
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$	: Nombre q-Stirling de première espèce.
$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_q$	: Nombre q-Stirling de deuxième espèce.

$\delta_{n,k}$	: Le symbole de Kronecker.
$[n]_q$	: q-analogue d'un entier n.
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	: Le réseau (ou plan combinatoire).
$E(z)$	: La fonction symétrique élémentaire pour e_k .
$H(z)$	: La fonction symétrique complète pour h_k .
$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_t}$	: Coefficient multibinomial : $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
$P(n, k) = P_k$	: Le nombre de partitions de n avec exactement k parts.
$P(n)$	: L'ensemble de partitions de n .
$\varepsilon(\sigma)$	: La signature de σ est.
$O(x)$	: Orbite d'un élément x .
$T(x)$	: Série génératrice de toutes les partitions.
$T_d(x)$	: Série génératrice de parts distinctes.
$T_{k,d}(x)$	: Série génératrice de parts distinctes dans K .
$T_k(x)$	: Série génératrice des parts dans K .
E_k^s	: Fonction symétrique élémentaire généralisation.
$S^{(2)}$	: Les nombres de Stirling associés de première espèce.
$S^{(s)}$	: Les nombres de Stirling s-associés de première espèce.
$S_r(n, k)$	: Les nombres r-Stirling de première espèce.
$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{(2)}$	: Les nombres de Stirling associés de deuxième espèce.
$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{(s)}$	: Les nombres de Stirling s-associés de deuxième espèce.
$\left[\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \right]$	: Le Nombre de Legendre-Stirling de la première espèce.
$\left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \right\}$	: Le nombre de Legendre-Stirling de la deuxième espèce.
$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r$	: Les nombres de r-Stirling de deuxième espèce.
$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s}$	: Les nombres de (r,s)-Stirling de deuxième espèce.
$S_s(n, k)$	: s-Stirling généralisés de première espèce.

Introduction Générale

La combinatoire énumérative est une discipline des mathématiques qui étudie et compte des ensembles finis. Le présent mémoire s'inscrit principalement dans ce domaine et plus précisément on s'intéresse aux nombres de Stirling. Cess nombres apparaissent dans plusieurs problèmes combinatoires. Ils portent le nom de *James Stirling*, qui les a introduits au 18^{ème} siècle. On distingue deux types de nombres de Stirling, les nombres de Stirling de première et deuxième espèces. De plus, Les nombres de Stirling de première espèce sont eux-mêmes divisés en deux espèces signés et non signés.

La première apparition des nombres de Stirling revient au livre *Methodus Differentialis* [63]. Ensuite, plusieurs chercheurs ont été intéressé par l'étude des nombres de Stirling au 18^{ème} et 19^{ème} siècles. On attire l'attention au travail de *Jordan* sur les différences finies dont il a fourni un compte rendu détaillé de ces nombres. Aussi, *Lagrange* s'intéresse aux relations de fréquence et aux propriétés théoriques des nombres de Stirling de première espèce. Puis, *Laplace* et *Cauchy* ont établie plusieurs estimations approximatives pour ces nombres. *Cauchy*, *Nielsen* et plein d'autres chercheurs ont étudièrent plus profondément les nombres de Stirling des différents types [20, 37, 54].

Ce mémoire est structuré en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on introduit quelques notions et définitions de bases qui permet de mieux comprendre le contenu des chapitres qui suivent. On commence par donner un aperçu global sur les partitions et les permutations, ainsi que les séries et les fonctions génératrices. Les objets combinatoires liés au présent mémoire comme le diagramme de Ferrers et le tableau de Young sont également fournis avec des exemples explicatifs. On conclut le chapitre par l'introduction des coefficients binomiaux, bi^snomiaux et multinomiaux ainsi que les différents types des fonctions symétriques.

Le deuxième chapitre est composé de deux sections. Dans la première, on introduit les nombres de Stirling de première espèce $S(n, k)$ avec leurs interprétations. La deuxième section est consacrée aux nombres de Stirling de deuxième espèce $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$. Des propriétés élémentaires sont présentées, ainsi que relations de récurrences, des fonctions génératrices et des formules

explicites. Le chapitre vient à son terme sur des liens avec d'autres nombres connus.

Le dernier chapitre présente un aperçu sur certaines généralisations des nombres de Stirling des deux espèces. Relations de recurrences, interprétations combinatoires et identités pour les s -Stirling, les r -Stirling et d'autres nombres ont été abordés.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions primordiales et essentielles pour la suite de ce travail. On aborde quelques familles d'objets combinatoires tels, partitions, permutations et tableaux, etc. Et citant quelques exemples explicatifs pour chaque notion. On présente aussi le principe des tableaux de Young et quelques nombres connus à savoir les coefficients binomiaux. On termine par la théorie des fonctions symétriques en tant que des séries formelles invariantes sous toutes les permutations possibles. Les fonctions symétriques monomiales, élémentaires, complètes et de puissances seront abordés.

1.1 Partition d'un entiers

Définition 1.1.1 [34] Une partition ou un partage de l'entiers n est une suite décroissante d'entiers $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ tels que,

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1, \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Où les éléments $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont les parts de la partition .

En plus, on peut donner quelques notations,

- $\lambda \vdash n$: dire que λ est un partage de n .
- $l(\lambda)$: la longueur de la partition λ .
- $P(n)$: l'ensemble de partitions de n .

Exemple 1.1.1 Soit $n = 7$ alors $\{1, 2, 4\}$ est une partition de 7, car $1 + 2 + 4 = 7$ et 1, 2, 4 sont des parts.

$$P(7) = \{7, 61, 52, 43, 511, 421, 331, 322, 4111, 3211, 2221, 31111, 211111, 1111111\}$$

– L'ensemble de partitions de l'entier 4 et 5 sont,

$$P(4) = \{4, 31, 22, 211, 1111\}, \quad P(5) = \{5, 41, 32, 311, 221, 2111, 11111\}.$$

1.1.1 Partitions remarquables

On peut imposer des conditions supplémentaires aux partitions, de tels sorte que les parts λ_i d'une partition soient,

1. Distinctes deux à deux : On notera leur nombre $P(D, n)$. Les résultats obtenus sont,

$$P(D, 7) = 5, P(D, 5) = 2, P(D, 4) = 3.$$

2. $P(n, k)$: Le nombre de partitions de n avec exactement k parts (autre P_k .)

$$P(4, 2) = 2, P(4, 3) = 1, P(5, 1) = p(5, 5) = 1, P(5, 2) = 2.$$

3. Ou impaires : On notera leur nombre $P(I, n)$, par exemple,

$$P(I, 7) = 5, P(I, 5) = 2, P(I, 4) = 3.$$

Remarque 1.1.1 Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ de n , correspond de façon bijective, une suite $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ d'entiers positifs tels que,

$$1.m_1 + 2.m_2 + \dots + n.m_n = n.$$

Et on note,

$$\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n},$$

avec, $m_1, m_2, \dots, m_n$ sont des multiplicités de chaque partition [34, 47].

Exemple 1.1.2 La partition $\lambda = (8, 6, 5, 5, 1, 1, 1)$ de $n = 27$ a pour notation multiplicative,

$$\lambda = 1^3 2^0 3^0 4^0 5^2 6^1 7^0 8^1 9^0 \dots 27^0.$$

1.2 Permutation

Pour plus de détails voir [11, 15, 31, 34, 35, 45, 58].

Définition 1.2.1 Soit E un ensemble. Une permutation de E est une bijection de E dans E . On note M_E l'ensemble des permutation de E .

Si $E = \{1, \dots, n\} = [n]$ on le note simplement M_n . L'ensemble M_E muni de la loi de composition des applications est un groupe, de l'élément neutre $e = id$, appelé groupe symétrique sur l'ensemble E . Le cardinal de l'ensemble M_n est $n!$.

Notation : La notation standard (matricielle) d'une permutation place sur la première ligne les éléments dans leur ordre naturel et sur la deuxième ligne les images correspondantes,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.2.1 Considérons l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et l'application σ telle que $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 1$ et $\sigma(4) = 3$. L'application σ est une permutation de E ,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.2.1 – La permutation identité est la permutation σ_I qui ne change pas l'ordre initial des éléments,

$$\sigma_I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

– Le produit de deux permutations σ_1 et σ_2 correspond à la composition de fonctions $\sigma_1 \circ \sigma_2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2.2 Soit $\sigma \in M_n$ et Les deux ensembles suivants,

$$Supp(\sigma) = \{i, \sigma(i) \neq i\},$$

$$Fix(\sigma) = \{i, \sigma(i) = i\},$$

$Supp$: est appelé le support de σ .

Fix : est appelé le point fixe de σ .

Exemple 1.2.2 Soit la permutation,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

alors,

$$Supp(\sigma) = \{1, 2, 4, 6\}, \quad Fix(\sigma) = \{3, 5\}.$$

Définition 1.2.3 (Ordre) Soit G un groupe noté multiplicativement d'élément neutre σ_I . Un élément σ de G est dit d'ordre fini s'il existe un entier $k > 0$, tel que $\sigma^k = \sigma_I$, et on appelle ordre k .

Exemple 1.2.3 Soit la permutation,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

alors,

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Donc σ est d'ordre 3.

1.2.1 Orbite d'un élément, cycles

Définition 1.2.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in M_n$. Pour $x \in [n]$, l'orbite de x sous σ est,

$$O(x) = \{\sigma^k(x), k \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.2)$$

Exemple 1.2.4 Reprenons la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 7 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Dans l'orbite de l'élément 1, on trouve,

$$\sigma(1) = 5, \sigma(\sigma(1)) = \sigma(5) = 6, \sigma^3(1) = \sigma(6) = 3, \sigma^4(1) = \sigma(3) = 1.$$

On déduit que

$$O(1) = \{\sigma^k(1), k \in \mathbb{Z}\} = \{1, \sigma(1), \sigma^2(1), \sigma^3(1)\} = \{1, 3, 5, 6\} = O(3) = O(5) = O(6)$$

Ensuite

$$\sigma(2) = 2 \text{ et donc pour tout } k \in \mathbb{Z}, \sigma^k(2) = 2.$$

L'orbite de 2 est un singleton, $O(2) = \{2\}$.

Enfin

$$\sigma(4) = 7, \sigma^2(4) = 4. \text{ L'orbite de 4 (ou de 7) est } \{4, 7\}.$$

La permutation σ admet donc trois orbites : $O(1) = \{1, 3, 5, 6\}$, $O(2) = \{2\}$ et $O(4) = \{4, 7\}$.

Définition 1.2.5 Un cycle de $[1, n]$ est une permutation de $[n]$ qui admet exactement une seule orbite qui ne soit pas réduite à un seul élément. Cette orbite est appelée le support du cycle, ie : $\text{Supp}(\sigma) = \{\sigma(i) \neq i\}$, est la longueur de cycle est le cardinal de son support.

Exemple 1.2.5 La permutation,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

est un cycle de support $\{1, 3, 4\}$ et donc de longueur 3.

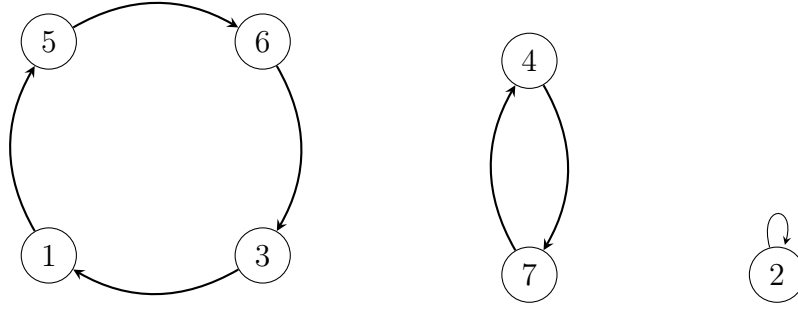


FIGURE 1.1 – Orbites d'une permutation.

1.2.2 Transpositions

Définition 1.2.6 On appelle *transposition* une permutation qui déplace seulement deux éléments (un cycle de longueur 2).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (24).$$

Remarque 1.2.2 Toute permutation peut être écrite comme un produit de transpositions.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (135)(24) = (13)(35)(24).$$

1.2.3 Signature et inversion

Définition 1.2.7 Soit $n \geq 2$ et $\sigma \in M_n$. La signature de σ est,

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}. \quad (1.3)$$

convention : Si $n = 1$, $M_1 = \{Id_{\{1\}}\}$ et on pose $\varepsilon(Id_{\{1\}}) = 1$.

Exemple 1.2.6 Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) &= \frac{2-4}{1-2} \times \frac{2-3}{1-3} \times \frac{2-1}{1-4} \times \frac{4-3}{2-3} \times \frac{4-1}{2-4} \times \frac{3-1}{3-4}, \\ &= (-1)^4 \frac{(1-2)(1-3)(1-4)(2-3)(2-4)(3-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)(2-3)(2-4)(3-4)}, \\ &= 1. \end{aligned}$$

Définition 1.2.8 Soit $n \geq 2$, $\sigma \in M_n$. Une *inversion* de σ est une pair (i, j) d'éléments de $[1, n]$ telle que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Exemple 1.2.7 Si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, alors σ à 4 inversions, les pairs $\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$.

Théorème 1.2.1 Soient $n \geq 2, \sigma \in S_n$. La signature de σ est : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$ où N est le nombre d'inversions de σ .

1.2.4 Permutations paires, permutations impaires

Définition 1.2.9 Soit $n \geq 1$. Une permutation paire (resp. impaire) est une permutation de signature 1 (resp. -1).

Remarque 1.2.3 Une permutation paire (resp. impaire) est donc une permutation ayant un nombre pair (resp. impair) d'inversions ou aussi une permutation se décomposant en un produit d'un nombre pair (resp. impair) de transpositions.

1.3 Les Séries génératrices

Pour plus de détails voir [57].

Définition 1.3.1 La série génératrice de la suite $(a_n), (n \in \mathbb{N})$ est la série formelle définie par :

$$T(a_n, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (1.4)$$

On associe une série génératrice qui contient tout l'information concernant l'énumération des partages de la famille,

1. $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n$, (toutes les partitions)
2. $T_d(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_d(n)x^n$, (parts distinctes)
3. $T_{k,d}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{k,d}(n)x^n$, (parts distinctes dans K)
4. $T_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_k(n)x^n$, (parts dans K)

Théorème 1.3.1 Pour $K \subseteq \mathbb{N}^+$, on a les fonctions génératrices,

$$T_k(x) = \prod_{k \in K} \frac{1}{1 - x^k}, \quad T_{k,d}(x) = \prod_{k \in K} (1 + x^k).$$

Preuve. Soit $K = \{k_1, k_2, \dots\}$ alors,

1)

$$\begin{aligned} \prod_{k \in K} \frac{1}{1 - x^k} &= (1 + x^{k_1} + x^{2k_1} + \dots)(1 + x^{k_2} + x^{2k_2} + \dots), \\ &= \sum_{\sum n_i < \infty} x^{n_1 k_1} x^{n_2 k_2}, \\ &= \sum_{n \geq 0} P_k(n) x^n. \end{aligned}$$

Ici les $x^{n_i k_i}$ signifie qu'on a pris n_i fois une part de taille k_i .

2) On montre la deuxième formule de façon similaire. Dans le développement du produit $\prod_{k \in K} (1 + x^k)$, on prend x^k dans le facteur $1 + x^k$ si la part k apparaît dans le partage, sinon on prend le 1. On a donc au plus une part de chacune des tailles qui apparaît dans K . ■

Dans le cas $K = \mathbb{N}^*$, on trouve le résultat suivant.

Corollaire 1.3.1

$$T_k(x) = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - x^k}, \quad T_d(x) = \prod_{k \geq 1} (1 + x^k).$$

.

Fonctions génératrices

Pour les gens qui sont intéressés par cette section, consultez [25].

Définition 1.3.2 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.

- On appelle fonction génératrice **ordinaire** de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la fonction

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

- On appelle fonction génératrice **exponentielle** de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la fonction

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

- On appelle fonction génératrice **binomiale** de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la fonction

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}.$$

Définition 1.3.3 Soit $(a_{nm})_{n,m \in \mathbb{N}}$ une suite bidimensionnelle des nombres réels.

- On appelle fonction génératrice **double ordinaire** de la suite $(a_{nm})_{n,m \in \mathbb{N}}$, la fonction

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} x^m z^n.$$

- On appelle fonction génératrice **double exponentielle** de la suite $(a_{nm})_{n,m \in \mathbb{N}}$, la fonction

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \frac{x^m}{m!} \frac{z^n}{n!}.$$

1.4 Diagramme de Ferrers

Définition 1.4.1 [34] Un diagramme de Ferrer F est un ensemble de n points du plan, ayant les coordonnées entières (i, j) , tels que $(i, j) \in F$,

$$F = \{(i, j) / 1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq \lambda_j\}.$$

Exemple 1.4.1 Soit $n = 12$, le diagramme de Ferrer de la partition $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ est,

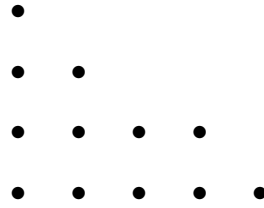


FIGURE 1.2 – Diagramme de Ferrers pour $\lambda = (5, 4, 2, 1)$.

Définition 1.4.2 (La partition conjuguée) En faisant pivoter de 180° le diagramme de Ferrers de λ de n , autour de l'axe $i = j$, on obtient le diagramme de Ferrers $\tilde{\lambda}$, appelée **partition conjuguée** de λ . La partition conjuguée $\tilde{\lambda}$ a pour notation multiplicative,

$$1^{\lambda_1 - \lambda_2} 2^{\lambda_2 - \lambda_3} \dots (k-1)^{\lambda_{k-1} - \lambda_k} k^{\lambda_k}.$$

Exemple 1.4.2 Soit la partition $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ et la partition conjuguée $\tilde{\lambda} = (4, 3, 2, 2, 1)$ est,

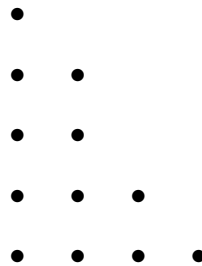


FIGURE 1.3 – Diagramme de Ferrers conjugué pour $\tilde{\lambda} = (4, 3, 2, 2, 1)$.

1.5 Tableau de Young

Définition 1.5.1 [40, 50] Un tableau de Young T (**tableau standard**) à n éléments et de partition λ s'écrit,

$$T = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq \lambda_i\},$$

tel que,

1. Les éléments sont des entiers positifs distincts.
2. Chaque ligne forme une suite croissant.
3. Chaque colonne forme une suite croissant.

On note T_0 le tableau vide.

Exemple 1.5.1 Le tableaux de Young pour $n = 9$ et $\lambda = (4, 2, 2, 1)$ est,

9			
7	8		
5	6		
1	2	3	4

TABLE 1.1 – Tableau de Young standard.

Définition 1.5.2 [40, 50] Un tableau de Young (**semi-standard**) est un diagramme de Young dont chaque case contient un entier compris entre 1 et $n + 1$ à condition que,

1. Les nombres inscrits dans les cases croissent de gauche à droite,
2. Les nombres inscrits dans les cases strictement croissent de bas en haut.

Pour une partition λ on notera $Y(\lambda)$ l'ensemble des tableaux de Young de forme λ .

Exemple 1.5.2 Tableau de Young semi-standard pour $n = 9$ et $\lambda = (4, 2, 2, 1)$ sont :

Formule d'équerres

La formule des équerres est une formule qui permet de calculer le nombre de tableaux de Young standard de λ , due à Frame et al [27]. L'équerre $H_{i,j}$ est défini par les cellules se trouvant à la droite de (i, j) sur la ligne i et au-dessus de (i, j) sur la colonne j et la cellule (i, j) elle-même. l'équerre correspondant est,

$$H_{i,j} = \{(i, j)\} \cup \{(i, j') \mid j' > j\} \cup \{(i', j) \mid i' > i\},$$

où $h_{i,j} = |H_{i,j}|$ la longueur de l'équerre partant de la cellule (i, j) .

8			
7	5		
3	6		
1	2	2	9

TABLE 1.2 – Tableau de Young semi-standard.

Exemple 1.5.3 L'équerre partant de l'étoile est de longueur 4, on a donc $h_{2,1} = 4$.

.				
★	.	.		

Théorème 1.5.1 (Formule des équerres) Soient $n \in \mathbb{N}$ et λ une partition de n . Alors on a la formule suivante qui calcule le nombre de tableaux de Young standard de forme λ ,

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{i,j}}, \quad (1.5)$$

où le produit porte sur toutes les cases du tableau de Young de forme λ .

Exemple 1.5.4 Pour le partage $(2, 2, 1) \vdash 5$, on a

.	
.	.
.	.

$$f^{(2,2,1)} = \frac{5!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1} = 5 \text{ tableaux standards de la forme } (2, 2, 1).$$

Le lecteur est invité à consulter [43, 59].

1.6 Coefficients binomiaux

Pour plus de détails voir [66].

Définition 1.6.1 Soit $n, k \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$. On appelle coefficient binomial le nombre noté $\binom{n}{k}$ qui égale au nombre de sous ensemble à k éléments d'un ensemble de n éléments.

5				5				4			
3	4			2	4			3	5		
1	2			1	3			1	2		

	4				3		
	2	5			2	5	
	1	3			1	4	

FIGURE 1.4 – Tous les tableaux standards de forme $(2, 2, 1)$.

1. Évidemment : $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou si $k > n$,

2. Si au contraire $k \in [0, n]$, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.6)$$

Exemple 1.6.1 Les sous ensembles à deux éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ sont :

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}. \text{ Donc } \binom{3}{2} = 3.$$

Proposition 1.6.1 Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, on a

1. La relation de la symétrie,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

2. La relation de récurrence,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

La relation de récurrence nous permet de placer les valeurs des coefficients binomiaux dans un tableau de forme triangulaire, on obtient le triangle de Pascal standard.

1.6.1 Formule du binôme de Newton

Théorème 1.6.1 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et n un entier positif alors,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Autrement dit,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n.$$

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

TABLE 1.3 – Triangle numérique.

Exemple 1.6.2 1. Pour $n = 3$ on écrit la formule comme suit,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

2. Si $a = 1$ et $b = 1$ on trouve,

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

1.7 Coefficients multinomiaux

Définition 1.7.1 Soient $n \in \mathbb{N}$, et $k_1, k_2, \dots, k_t \in \mathbb{N}$, tel que $k_1 + k_2 + \dots + k_t = n$. Le coefficient multinomial $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_t}$ est le nombre de partitions ordonnées d'un ensemble de taille n en t , dont les sous ensembles $S_1, S_2, \dots, S_t$ de tailles respectives $k_1, k_2, \dots, k_t$, dont la formule explicite est donnée par,

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_t} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_t!}. \quad (1.7)$$

1.7.1 Formule du multinôme de Newton

Les coefficients La relation (1.7) apparaissent dans le développement $(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n$ comme suit,

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_t = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_t} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_t^{k_t}.$$

1.8 Les coefficients bi^snomiaux

Les coefficients bi^snomiaux sont une extension naturelle des coefficients binomiaux classiques. Ils sont définis comme suit :

Soient $s \geq 1$ et $n \geq 0$ deux entiers, pour un entier $k = \{0, 1, \dots, sn\}$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}_s$ est définie comme étant le k -ième coefficient dans le développement,

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^s)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k}_s x^k, \quad (1.8)$$

avec $\binom{n}{k}_1 = \binom{n}{k}$, ($\binom{n}{k}$ étant les coefficients binomiaux classiques)

et $\binom{n}{k}_s = 0$ pour $k > sn$ ou $k < 0$.

Une expression via les coefficients binomiaux classiques donnée par,

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_s = k} \binom{n}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \binom{j_{s-1}}{j_s}. \quad (1.9)$$

Comme propriétés déjà bien établies, on a la relation de symétrie,

$$\binom{n}{k}_s = \binom{n}{sn - k}_s, \quad (1.10)$$

la relation de récurrence longitudinale,

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^s \binom{n-1}{k-m}_s, \quad (1.11)$$

et la relation de récurrence diagonale,

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^s \binom{n}{m} \binom{m}{k-m}_{s-1}. \quad (1.12)$$

Ces coefficients, comme c'est le cas pour les coefficients binomiaux classiques, vérifient via (1.11) un équivalent du triangle de Pascal : le "s-triangle de Pascal" ou "triangle de Pascal généralisé", voir la table (1.4) ci-dessous pour une illustration. Pour les premières valeurs de ces s-triangles, on peut consulter l'encyclopédie des suites numériques de SOLONE [28] sous A027907 pour $s = 2$, sous A008287 pour $s = 3$, sous A035343 pour $s = 4$.

Comme illustration de la relation de récurrence, nous donnons les triangles des coefficients binomiaux et trinomaux,

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1	1			
2	1	2	3	2	1	
3	1	3	6	7	6	3
4	1	4	10	16	19	16
5	1	5	15	30	45	51

TABLE 1.4 – Triangle des coefficients du binomiaux $\binom{n}{k}_2$.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1												
1	1	1	1	1									
2	1	2	3	4	3	2	1						
3	1	3	6	10	12	12	10	6	3	1			
4	1	4	10	20	31	40	44	40	31	20	10	4	1

TABLE 1.5 – Triangle du coefficient trinomaux $\binom{n}{k}_3$.

1.8.1 Interprétation combinatoire

Bondarenko [12] a donné une interprétation combinatoire des coefficients bi^snomiaux $\binom{n}{k}_s$ comme étant le nombre de manières de distribuer "k" boules dans "n" urnes de sorte que chaque urne contienne au plus "s" boules.

Cet argument combinatoire, permet d'établir la relation suivante,

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{n_1+2n_2+\dots+sn_s=k} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_s, n - n_1 - \dots - n_s}. \quad (1.13)$$

Belbachir et al [6] ont donné le théorème de De Moivre suivant qui établit une expression mono-sommatoire des coefficients bi^snomiaux.

Théorème 1.8.1 L'identité suivant satisfait

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j=0}^{\frac{k}{s+1}} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{k - j(s+1) + n - 1}{n-1}. \quad (1.14)$$

Cette relation explicite est importante, au sens où elle permet d'exprimer les coefficients bi^snomiaux avec un unique symbole de sommation, contrairement aux relation (1.9) et (1.13). En 1711, De Moivre (voir [51] ou [52]) avait déjà exprimé l'expression de droite de l'identité (1.14) pour établir l'interprétation combinatoire donnée par Bondarendo [12].

1.8.2 Coefficients q-bi^snomiaux

Définition 1.8.1 – Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit son q-analogue $[n]_q$ comme un polynôme en q,

$$[n]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

– Ensuite, le q-factoriel est défini de manière naturel comme,

$$[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \dots [2]_q [1]_q.$$

Remarque 1.8.1 On note que si $q = 1$ alors,

$$[n]_1 = 1 + 1 + \dots + 1 = n,$$

$$[n]_1! = n!.$$

Définition 1.8.2 Un polynôme $a_k(q)$ est dit être un q -analogue d'un entier a_k si $a_k(1) = a_k$.

Définition 1.8.3 [65, 66] Pour $p = \{0, \dots, s\}$, on définit les coefficients q -bi^s nomiaux par,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = \sum_{j_1 + \dots + j_s = k} q^{\sum_{l=1}^{s-1} (n-j_l)j_{l+1} - \sum_{l=s-p}^{s-1} j_{l+1}} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} j_{s-1} \\ j_s \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

Avec $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = 0$ pour $k > sn$.

On a ainsi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(0)} &= \sum_{j_1 + \dots + j_s = k} q^{\sum_{l=1}^{s-1} (n-j_l)j_{l+1}} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} j_{s-1} \\ j_s \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(1)} &= \sum_{j_1 + \dots + j_s = k} q^{\sum_{l=1}^{s-1} (n-j_l)j_{l+1} - j_s} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} j_{s-1} \\ j_s \end{bmatrix}, \\ &\vdots \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(s)} &= \sum_{j_1 + \dots + j_s = k} q^{\sum_{l=1}^{s-1} (n-j_l)j_{l+1} - \sum_{l=0}^{s-1} j_{l+1}} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} j_{s-1} \\ j_s \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

où $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!}$ est le coefficient q -binomial.

Notons que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} \neq 0$, pour uniquement $k = \{0, \dots, sn\}$, et que

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = \delta_{k,0} \quad (\text{Symbole de Kronecker}).$$

Comme propriétés déjà bien établies, il y a les relation de symétrie et la récurrence fondamentale,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} &= q^{(s-p)n-k} \begin{bmatrix} n \\ sn-k \end{bmatrix}_s^{s-p}, p \neq 0 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(0)} = \begin{bmatrix} n \\ sn-k \end{bmatrix}_s^{(0)}, \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} &= \sum_{m=0}^{s-p} q^{m(n-1)} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-m \end{bmatrix}_s^{(m)} + \sum_{m=s-p+1}^s q^{n(s-p)-m} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-m \end{bmatrix}_s^{(m)}. \end{aligned}$$

Belbachir et Benmezai [5] ont proposé une autre variante du q -analogue des coefficients bi^s nomiaux comme suit,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s = \sum_{j_1 + \dots + j_s = k} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} j_{s-1} \\ j_s \end{bmatrix} q^{\sum_{r=1}^s \binom{j_r}{2}} (-1)^k a^{-\sum_{r=1}^s r j_r},$$

avec $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_1 = q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ (les coefficients q -binomiaux) et $a = e^{\frac{2\pi}{s+1}}$ avec $i^2 = -1$.

1.9 Chemins de réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

plus détails voir [11]

Définition 1.9.1 Le plan combinatoire (ou réseau) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est l'ensemble des points à coordonnées entières positives (ou nulles) du plan cartésien, comme illustré dans la Figure 1.5.

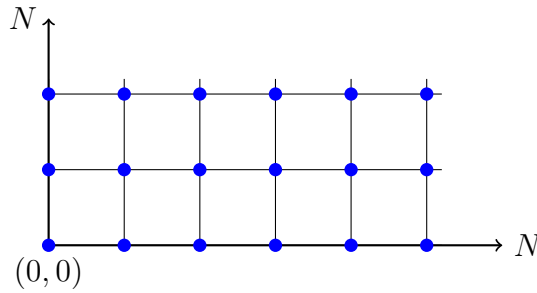


FIGURE 1.5 – Le réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins dans un réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ allant de $(0, 0)$ à $(n - k, k)$, constitués de k pas verticaux et de $(n - k)$ pas horizontaux.

Définition 1.9.2 Un chemin γ dans le réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est une suite,

$$\gamma = (p_0, p_1, \dots, p_n),$$

de points $p_i = (x_i, y_i)$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avec,

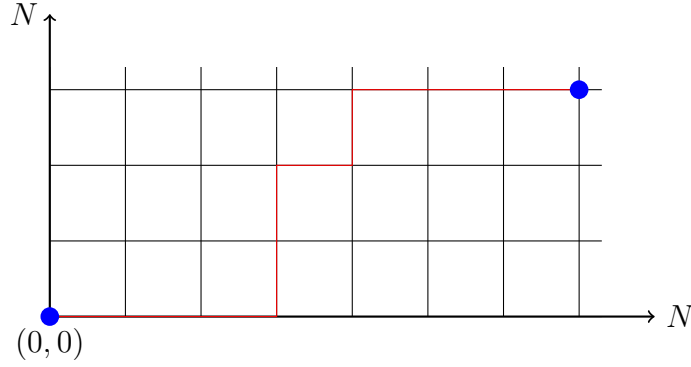
$$p_{i+1} = \begin{cases} p_i + (1, 0), \\ p_i + (0, 1), \end{cases}$$

pour $0 \leq i \leq n - 1$. Le point p_0 est la source du chemin, et le point p_n est son but.

On dénote simplement par $p_{k,n}$ l'ensemble des chemins de but $p = (k, n)$ et de source $(0, 0)$. On dit que le chemin est de longueur n . Autrement dit, il est constitué de n pas, chacun allant du point p_i au point p_{i+1} .

- Si $p_{i+1} = p_i + (1, 0)$ on dit qu'on a un pas horizontal.
- Si $p_{i+1} = p_i + (0, 1)$ on dit qu'on a un pas vertical.

Exemple 1.9.1 La Figure suivante donne l'illustration d'un chemin de longueur 10 allant de $(0, 0)$ à $(7, 3)$.

FIGURE 1.6 – Un chemin allant de $(0, 0)$ à $(7, 3)$.

1.10 Fonction Symétrique

Soient $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ un ensemble dénombrable et $Z[x_1, x_2, \dots]$ l'anneau des polynômes, à coefficients entiers, en les variables $x_1, x_2, \dots$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_X$ des permutations de X agit de façon naturelle sur l'anneau $Z[x_1, x_2, \dots]$. Les polynômes invariants par permutation des variables sont dites *symétriques* et $Z[x_1, x_2, \dots]^{\mathfrak{S}_X}$ le sous-anneau des polynômes symétriques.

Définition 1.10.1 [14] Une fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ à n variables est *symétrique* si pour toute permutation σ de l'ensemble d'indices $\{1, \dots, n\}$, l'égalité suivante est vérifiée,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}). \quad (1.16)$$

Exemple 1.10.1 • La fonction $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$ est *symétrique*, car $f(x_2, x_1) = x_2^2 x_1 + x_1^2 x_2 = f(x_1, x_2)$.

• La fonction $h(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_2 x_1$, n'est pas *symétrique* car, $h(x_2, x_1) = x_2 x_1 + x_1 x_2 \neq h(x_1, x_2)$.

1.10.1 Symétrisation

Sur un corps caractéristique, la symétrisation est la sommation d'une fonction sur toutes les permutations possibles de variables, pondérée par $n!$. C'est l'expression,

$$\Sigma f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}). \quad (1.17)$$

Par construction, la fonction Σf est symétrique. L'opérateur de symétrisation Σ est une projection de l'espace des fonctions sur le sous-espace des fonctions symétriques.

Proposition 1.10.1 Lorsque les fonctions sont à valeurs réelles ou complexes, les fonctions symétriques forment une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions à n variables, c'est-à-dire

1. La somme de deux fonctions symétriques est encore une fonction symétrique.
2. Le produit de deux fonctions symétriques est encore une fonction symétrique.
3. Toute fonction rationnelle symétrique (sur un corps commutatif) est le quotient de deux polynômes symétriques.

Remarque 1.10.1 [22, 47] Pour vérifier qu'une fonction est symétrique, il n'est pas nécessaire de tester qu'elle est invariante pour chacune des $n!$ permutations de ses arguments. Il suffit de choisir un ensemble de permutations qui engendre le groupe symétrique.

1.10.2 Échanges de deux variables

Comme toute permutation est une composée de transpositions de la forme (i, j) , une fonction est symétrique dès qu'elle reste inchangée par l'échange de deux variables arbitraires x_i et x_j , donc lorsque $f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i < j$. Ceci réduit le nombre de permutations à tester à n^2 .

1.10.3 Échanges de variables consécutives

Comme toute transposition s'exprime aussi comme une composée de transpositions de valeurs consécutives de la forme $(i, i+1)$, il suffit de considérer des variables consécutives x_i et x_{i+1} . Pour la symétrie, il suffit que les $n-1$ égalités $f(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots) = f(\dots, x_{i+1}, x_i, \dots)$ valent pour $i = \{1, \dots, n-1\}$.

1.10.4 Échanges avec une variable fixée

On peut aussi bien considérer les transpositions de la forme $(1, i)$. Une fonction est alors symétrique lorsque l'on peut échanger la première et la i^{me} variable sans changer la valeur de la fonction, en d'autres termes, lorsque $f(x_1, \dots, x_i, \dots) = f(x_i, \dots, x_1, \dots)$ pour $i = \{2, \dots, n\}$. À la place de la première variable, on peut choisir toute autre variable.

1.10.5 Critère minimal

Un ensemble générateur du groupe symétrique S_n est formé des deux permutations $(1, 2, \dots, n)$ et $(1, 2)$. Il suffit donc, pour qu'une fonction soit symétrique, qu'elle vérifie seulement les deux égalités $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, \dots, x_n, x_1)$ et $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, \dots, x_n)$. La paire formée de $(1, 2, \dots, n)$ et $(1, 2)$ peut aussi être remplacée par n'importe quelle permutation circulaire et toute transposition d'éléments consécutifs dans ce cycle.

1.10.6 Fonctions symétriques monômiales

Définition 1.10.2 [18] Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ une partition de m . La fonction symétrique monômiale correspondante est :

$$m_\lambda(n) = m_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum a_{i_1}^{\lambda_1} a_{i_2}^{\lambda_2} \dots a_{i_k}^{\lambda_k},$$

où la somme est pour toutes les permutations distinctes des entrées de la partition.

Exemple 1.10.2 Pour $n = 4$, on a

$$\begin{aligned} m_1(4) &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4, & m_{11111}(4) &= 0, \\ m_{11}(4) &= a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4, \\ m_2(4) &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2. \end{aligned}$$

Proposition 1.10.2 Pour tout $k \geq 0$, l'ensemble $\{m_\lambda \mid \lambda \vdash k\}$ des fonctions symétriques monomiales est une base de Z_k . En plus $\dim Z_k = P(k)$, le nombre de partitions de k .

1.10.7 Fonction symétriques élémentaires

Définition 1.10.3 [14] La fonction symétrique élémentaire est la somme de tous les produits de n variables distinctes a_i donnée par la formule,

$$e_k(n) = e_k(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i_1 \leq i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (1.18)$$

Avec : $e_0(n) = 1$, et $e_k(n) = 0$ si $k > n$ ou $k < 0$.

$e_k(n)$ est donc la somme de tous les produits distincts qu'on peut former en prenant au plus une fois chaque objet ; c'est un polynôme formé de $\binom{n}{k}$ monôme de degré n .

Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ d'un entier positif, on définit

$$e_\lambda(n) \text{ par } e_\lambda(n) = e_{\lambda_1}(n) e_{\lambda_2}(n) \dots e_{\lambda_k}(n)$$

Si λ s'écrit sous la forme multiplicative $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2}, \dots$, alors

$$e_\lambda(n) = e_1^{m_1}(n) e_2^{m_2}(n) \dots$$

Exemple 1.10.3 Pour une équation de degré 4 ($n = 4$; racines : a_1, a_2, a_3 et a_4) on écrit,

$$\begin{cases} e_0(4) &= 1, \\ e_1(4) &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \\ e_2(4) &= a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4, \\ e_3(4) &= a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4. \\ e_4(4) &= a_1a_2a_3a_4. \end{cases}$$

Chaque monôme de la fonction $e_3(4) = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4$ peut être représentée dans la première colonne de chaque tableau de Young comme suite,

1	1	1	2
2	2	3	3
3	4	4	4
$a_3a_2a_1$	$a_4a_2a_1$	$a_4a_3a_1$	$a_4a_3a_2$

Cas particulier : On peut montrer d'une autre façon qu'une fonction symétrique est élémentaire, s'il est possible de l'écrire sous la forme d'un polynôme de degré n , c'est à dire

$$(a - a_1)(a - a_2) \dots (a - a_n) = 0$$

à n racines réelles ou complexes $a_1, a_2, \dots, a_n$. Si on développe le membre de gauche, on trouve

$$x^n + e_1 x^{(n-1)} + e_2 x^{(n-2)} + e_3 x^{(n-3)} + \dots + (-1)^n e_n = 0$$

où e_i sont des polynômes en fonction des a_i qui représentent des fonctions symétriques élémentaires.

Proposition 1.10.3 [53] Les fonctions symétriques élémentaires peuvent également se définir comme les coefficients du développement en série formelle,

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k = \prod_{i=1}^n (1 + a_i z),$$

avec $e_k(a_1, a_2, \dots, a_n)$ s'annule pour $k > n$.

Preuve. On a,

$$e_k^{(n)} = e_k(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

avec $e_k^{(n)} = 0$ si $k > n$

Montrons que

$$\sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k = \prod_{i=1}^n (1 + a_i z),$$

Pour $n = 2$, on a

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^2 (1 + a_i z) &= (1 + a_1 z)(1 + a_2 z), \\ &= 1 + (a_1 + a_2)z + a_1 a_2 z^2, \\ &= e_0 + e_1 z + e_2 z^2, \\ &= \sum_{k=0}^2 e_k z^k. \end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vraie pour n ,

$$\sum_{k=0}^n e_k z^k = \prod_{i=1}^n (1 + a_i z),$$

et montrons que la propriété est vraie pour $n + 1$,

$$\sum_{k=0}^{n+1} e_k z^k = \prod_{i=1}^{n+1} (1 + a_i z),$$

On a

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1} (1 + a_i z) &= \prod_{i=1}^n (1 + a_n z) (1 + a_{n+1} z), \\
&= \left(\sum_{k=0}^n e_k z^k \right) (1 + a_{n+1} z), \\
&= \sum_{k=0}^n e_k z^k + a_{n+1} \sum_{k=0}^n e_k z^{k+1}, \\
&= \sum_{k=0}^n e_k z^k + a_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} e_{k-1} z^k, \\
&= \sum_{k=0}^n e_k z^k + a_{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} e_{k-1} z^k, \\
&= \sum_{k=0}^n e_k^{(n)} z^k + a_{n+1} \sum_{k \geq 0} e_{k-1}^{(n+1)} z^k, \\
&= \sum_{k \geq 0} (e_k^{(n)} + a_{n+1} e_{k-1}^{(n+1)}) z^k, \\
&= \sum_{k \geq 0} (e_k^{(n+1)} z^k), \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} e_k z^k.
\end{aligned}$$

$C.Q.F.D$ ■

Proposition 1.10.4 [23] Soit $e_k(n)$ une fonction symétrique élémentaire alors on a,

1. $e_k(n+1) = a_{n+1} e_{k-1}(n) + e_k(n)$.
2. $e_k(n) = a_n e_{k-1}(n-1) + a_{n-1} e_{k-1}(n-2) + \cdots + a_{n-i} e_{k-1}(n-i-1) + \cdots + a_k e_{k-1}(k-1)$.

Preuve.

1. On a ($i_k \leq 1$),

$$\begin{aligned}
a_{n+1} e_{k-1}^{(n)} + e_k^{(n)} &= a_{n+1} \left(\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k-1} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n} \right) + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n}, \\
&= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k-1} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n} a_{n+1}^1 + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n} a_{n+1}^0, \\
&= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+1=k-1+1=k} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n} a_{n+1}^1 + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+0=k} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n} a_{n+1}^0, \\
&= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{n+1}=k} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n} a_{n+1}^{i_{n+1}}, \\
&= e_k(n+1).
\end{aligned}$$

2. On a,

$$\begin{aligned}
 e_k^{(n)} &= a_n e_{k-1}^{(n-1)} + e_k^{(n-1)}, \\
 &= a_n e_{k-1}^{(n-1)} + a_{n-1} e_{k-1}^{(n-2)} + e_k^{(n-2)}, \\
 &= a_n e_{k-1}^{(n-1)} + a_{n-1} e_{k-1}^{(n-2)} + a_{n-2} e_{k-1}^{(n-3)} + e_k^{(n-3)}, \\
 &\vdots \\
 &= a_n e_{k-1}^{(n-1)} + a_{n-1} e_{k-1}^{(n-2)} + a_{n-2} e_{k-1}^{(n-3)} + \cdots + a_{n-i} e_{k-1}^{(n-i-1)} + \cdots + a_k e_{k-1}^{(k-1)}.
 \end{aligned}$$

■

1.10.8 Fonctions symétriques complètes

Définition 1.10.4 [14] On appelle $k^{\text{ème}}$ fonctions symétriques complètes $h_k(a_1, a_2, \dots, a_n)$ la fonction définie par,

$$h_k(n) = h_k(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n},$$

avec $i_1, i_2, \dots, i_n \geq 0$, et $0 \leq k \leq n$.

$h_k(n)$ est donc la somme de tous les produits distincts qu'on peut former en prenant chaque objet autant de fois qu'on veut, c'est un polynôme formé de $\binom{k+n-1}{k}$ monômes de degré n .

Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ d'un entier positif, on définit $h_\lambda(n)$ par,

$$h_\lambda(n) = h_{\lambda_1}(n) h_{\lambda_2}(n) \dots h_{\lambda_k}(n).$$

si λ s'écrit sous la forme multiplicative $\lambda = 1_1^m 2_2^m \dots$, alors

$$h_\lambda(n) = h_1^{m_1}(n) h_2^{m_2}(n) \dots$$

Exemple 1.10.4 Pour une équation de degré 3 ($n = 3$; racines a_1, a_2, a_3) on a,

$$\begin{cases}
 h_0^{(3)} &= 1, \\
 h_1^{(3)} &= a_1 + a_2 + a_3, \\
 h_2^{(3)} &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3, \\
 h_3^{(3)} &= a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_1^2 a_2 + a_1^2 a_3 + a_2^2 a_1 + a_2^2 a_3 + a_3^2 a_1 + a_3^2 a_2 + a_1 a_2 a_3,
 \end{cases}$$

Chaque monôme de la fonction $h_2^{(3)} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3$ peut être représentée dans la première ligne de chaque tableau de Young comme suite,

$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$
$a_1 a_2$	$a_1 a_3$	$a_2 a_3$	a_1^2	a_2^2	a_3^2

Proposition 1.10.5 [23] Soit $h_k(n)$ une fonction symétrique complète, alors on a,

1. $h_k(n+1) = a_{n+1}h_{k-1}(n+1) + h_k(n)$.
2. $h_k(n+1) = a_{n+1}^k + a_{n+1}^{k-1}h_1(n) + a_{n+1}^{k-2}h_2(n) + \cdots + a_{n+1}h_{k-1}(n) + h_k(n)$.
3. $h_k(n) = a_n h_{k-1}(n) + a_{n-1}h_{k-1}(n-1) + a_{n-2}h_{k-1}(n-2) + a_{n-3}h_{k-1}(n-3) + \cdots + a_1 h_{k-1}(1)$.

Preuve.

1. On a,

$$\begin{aligned}
 a_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)} &= a_{n+1} \left(\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{n+1}=k-1} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} a_{n+1}^{i_{n+1}} \right) + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{n+1}=k} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n}, \\
 &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{n+1}=k-1} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} a_{n+1}^{i_{n+1}} a_{n+1} + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{n+1}=k} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} a_{n+1}^0, \\
 &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+i_{n+1}+1=k-1+1=k} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} a_{n+1}^{i_{n+1}+1} + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+0=k} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} a_{n+1}^0, \\
 &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+(i_{n+1}+1)=k} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} a_{n+1}^{i_{n+1}+1} + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+0=k} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} a_{n+1}^0,
 \end{aligned}$$

On a $i_{n+1} \geq 0$, alors $i_{n+1} \geq 1$, supposons $i'_{n+1} = i_{n+1} + 1 \vee 0$ alors $i'_{n+1} \geq 0$.

Donc

$$a_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)} = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+i'_{n+1}=k} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} a_{n+1}^{i'_{n+1}+1} = h_k^{(n+1)}.$$

2. On a,

$$\begin{aligned}
 h_k^{(n+1)} &= a_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)}, \\
 &= a_{n+1}(a_{n+1}h_{k-2}^{(n+1)} + h_{k-1}^{(n)}) + h_k^{(n)}, \\
 &= a_{n+1}^2 h_{k-2}^{(n+1)} + a_{n+1}h_{k-1}^{(n)} + h_k^{(n)}, \\
 &= a_{n+1}^3 h_{k-3}^{(n+1)} + a_{n+1}^2 h_{k-2}^{(n)} + a_{n+1}h_{k-1}^{(n)} + h_k^{(n)}, \\
 &\vdots \\
 &= a_{n+1}^i h_{k-i}^{(n+1)} + a_{n+1}^{i-1} h_{k-(i-1)}^{(n)} + \cdots + a_{n+1}^2 h_{k-2}^{(n)} + a_{n+1}h_{k-1}^{(n)}, i < k, \\
 &\vdots \\
 &= a_{n+1}^k + a_{n+1}^{k-1} h_1^{(n)} + a_{n+1}^{k-2} h_2^{(n)} + a_{n+1}^{k-3} h_3^{(n)} + \cdots + a_{n+1}h_{k-1}^{(n)} + h_k^{(n)}.
 \end{aligned}$$

■

Proposition 1.10.6 [53] On peut également définir les $k^{\text{ème}}$ fonctions symétriques complètes comme les coefficients du développement en série formelle,

$$H(z) = \sum_{k \geq 0} h_k z^k = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1 - a_i z)}.$$

Preuve.

$$h_k(n) = h_k(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n},$$

Pour $n = 2$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} h_k(2) z^k &= h_0(2) + h_1(2)z + h_2(2)z^2 + \dots \\ &= 1 + (a_1 + a_2)z + (a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2)z^2 + \dots \\ &= (1 + a_1z + a_1^2z^2 + \dots)(1 + a_2z + a_2^2z^2 + \dots), \\ &= \left(\sum_{k \geq 0} (a_1z)^k \right) \left(\sum_{k \geq 0} (a_2z)^k \right), \\ &= \frac{1}{(1 - a_1z)(1 - a_2z)}, \\ &= \prod_{i=1}^2 \frac{1}{(1 - a_i z)}. \end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vraie pour n ,

$$\sum_{k \geq 0} h_k(n) z^k = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(1 - a_i z)},$$

et montrons que la propriété est vraie pour $n + 1$,

$$\sum_{k \geq 0} h_k(n+1) z^k = \prod_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(1 - a_i z)},$$

On a,

$$h_k(n+1) = a_{n+1} h_{k-1}(n+1) + h_k(n).$$

Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} h_k(n+1) z^k &= \sum_{k \geq 0} (a_{n+1} h_{k-1}(n+1) + h_k(n)) z^k, \\ &= a_{n+1} \sum_{k \geq 0} h_{k-1}(n+1) z^k + \sum_{k \geq 0} h_k(n) z^k, \\ &= a_{n+1} z \sum_{k \geq 0} h_k(n+1) z^k + \sum_{k \geq 0} h_k(n) z^k, \\ &= a_{n+1} z \prod_{i=1}^{n+1} (1 - a_i z)^{-1} + \prod_{i=1}^n (1 - a_i z)^{-1}, \\ &= \frac{a_{n+1} z + (1 - a_{n+1} z)}{\prod_{i=1}^{n+1} (1 - a_i z)}, \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} (1 - a_i z)}. \end{aligned}$$

■

1.10.9 Fonctions symétriques sommes de puissances

Définition 1.10.5 [18] Soit $k \in \mathbb{N}$ on appelle fonction symétrique somme de puissance $p_k(n)$, la fonction définie par,

$$p_k(n) = p_k(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i^k = m_k(n),$$

où la somme est pour toutes les permutations distinctes des entrées de la partition. Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ d'un entier positif, on définit,

$$p_\lambda(n) = p_{\lambda_1}(n) p_{\lambda_2}(n) \cdots p_{\lambda_k}(n),$$

si λ s'écrit sous la forme multiplicative $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots$, alors

$$p_\lambda(n) = p_{\lambda_1}(n) p_{\lambda_2}(n) \cdots p_{\lambda_k}(n).$$

Proposition 1.10.7 [23] La série génératrice de la fonction symétrique $p_k(n)$ est,

1.

$$P(z) = \sum_{k \geq 1} p_k(n) z^{k-1} = \frac{H'(z)}{H(z)}.$$

2. De plus, on a

$$P(-z) = \frac{E'(z)}{E(z)}.$$

Preuve.

1. On a,

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k \geq 1} p_k(n) z^{k-1} = \sum_{k \geq 1} \sum_{i \geq 1} a_i^k z^{k-1} = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 1} a_i^k z^{k-1} = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 1} (a_i z)^{k-1}, \\ &= \sum_{i \geq 1} \frac{a_i}{1 - a_i z} = \sum_{i \geq 1} \frac{d}{dt} \log \frac{1}{1 - a_i t} = \frac{d}{dt} \sum_{i \geq 1} \log \frac{1}{1 - a_i t} = \frac{d}{dt} \log \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - a_i t}, \\ &= \frac{d}{dt} \log H(z), \\ &= \frac{H'(z)}{H(z)}. \end{aligned}$$

2. Et on a aussi,

$$\begin{aligned} P(-z) &= \sum_{k \geq 1} p_k(n) (-z)^{k-1} = \sum_{i \geq 1} \frac{a_i}{1 - a_i z}, = \sum_{i \geq 1} \frac{d}{dt} \log(1 - a_i t) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i \geq 1} \log(1 - a_i z), \\ &= \frac{d}{dt} \log \prod (1 - a_i z), \\ &= \frac{d}{dt} \log E(z), \\ &= \frac{E'(z)}{E(z)}. \end{aligned}$$

■

1.10.10 Relations entre les fonctions symétriques

Les liens entre les fonctions symétriques élémentaires, complètes, et somme de puissance sont donnés par la proposition suivante.

Proposition 1.10.8 (Formules de Newton). Soit $k \in \mathbb{N}^$, on a*

$$1. \quad nh_n = \sum_{k=1}^n p_k h_{n-k}.$$

$$2. \quad ne_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-1} p_k e_{n-k}.$$

$$3. \quad p_n = \sum_{k=1}^n k e_k h_{n-k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k h_k e_{n-k}.$$

1.10.11 Quelques propriétés sur les fonctions symétriques

Définition 1.10.6 [13] On appelle alphabet tout ensemble de caractère fini.

Remarque 1.10.2 [17] On a,

$$e_0(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1,$$

et

$$h_0(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1.$$

par convention, pour $k < 0$, on a,

$$e_0(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0,$$

et

$$h_0(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0.$$

Proposition 1.10.9 [34] Soit $E(z)$ et $H(z)$ les fonctions symétriques élémentaires et complètes respectivement alors,

$$E(-z)H(z) = 1.$$

Preuve. On a,

$$E(z) = \prod_{i \geq 1} (1 + a_i z),$$

alors

$$E(-z) = \prod_{i \geq 1} (1 - a_i z),$$

et comme

$$H(z) = \frac{1}{\prod_{i \geq 1} (1 - a_i z)},$$

on obtient donc

$$E(-z)H(z) = 1.$$

■

Chapitre 2

Nombres de Stirling

Introduction

On présente dans ce chapitre les définitions des nombres de Stirling de première espèce et de deuxième espèce et leurs analogues, ainsi les nombres de Lah et de Bell. On y présente leurs relations de récurrences et interprétations combinatoires, leurs fonctions génératrices, ainsi que leurs formes explicites. Et citons quelques exemples explicatifs pour chaque notion.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note les polynômes en x de la factorielle décroissante et croissante $x^{\underline{n}}$ et $x^{\overline{n}}$ définis respectivement par,

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2) \dots (x-n+1),$$

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1),$$

avec les conventions naturelles : $x^0 = x^{\overline{0}} = 1$.

Il est évident que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(-x)^{\underline{n}} = (-1)^n x^{\overline{n}}.$$

2.1 Nombre de Stirling de première espèce

Des informations supplémentaires sur le sujet peuvent être énoncées dans [41, 28, 63].

Définition 2.1.1 Les nombres de Stirling de première espèce (signés et non-signés).

- Les nombres de Stirling de première espèce **signés** $s(n, k)$ sont les coefficients du développement de la factorielle décroissante $(x)_n$ ou $(x)^{\underline{n}}$, écrit sous la forme

$$(x)_n = (x)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k. \quad (2.1)$$

- Les nombres de Stirling de première espèce **non-signés** $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ sont les coefficients du développement de la factorielle croissante $(x)^n$ ou $(x)^{\overline{n}}$, écrit sous la forme

$$(x)^n = (x)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k. \quad (2.2)$$

Remarque 2.1.1 Il est évident que,

$$|s(n, k)| = \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right].$$

Exemple 2.1.1 $(x)^3 = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$, d'où

$$s(3, 0) = 0, \quad s(3, 1) = 2, \quad s(3, 2) = -3, \quad s(3, 3) = 1.$$

Proposition 2.1.1 Les nombres de Stirling de première espèce signés et non-signés sont liés par la relation suivante,

$$s(n, k) = (-1)^{n+k} S(n, k).$$

Proposition 2.1.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

1. $s(n, 0) = 0$ et $s(n, n) = 1$,
2. $s(n, 1) = (-1)^{n-1} (n-1)!$,
3. $\sum_{k=1}^n (-1)^k s(n, k) = (-1)^n n!$,
4. $\sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = n!$,
5. $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \leq n!$ pour tout $k \in \mathbb{N}, k \leq n$,
6. $s(n, n-1) = (-1)^n \binom{n}{2}$,
7. $s(n, n-2) = \frac{3n-1}{4} \binom{n}{3}$,
8. $s(n, n-3) = -\binom{n}{2} \binom{n}{4}$.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

1. Les nombres $s(n, 0)$ et $s(n, n)$ sont respectivement les coefficients de x^0 et de x^n dans le développement du polynôme

$$x^n = x(x-1) \cdots (x-n+1).$$

Il est bien clair que ces coefficients sont respectivement 0 et 1, comme il fallait le prouver.

2. Le nombre $s(n, 1)$ est par définition le coefficient de x dans le développement du polynôme

$$x^n = x(x-1) \cdots (x-n+1).$$

Ce qui est aussi le coefficient constant du polynôme $(x-1)(x-2) \cdots (x-n+1)$. Ce coefficient est simplement la valeur de ce dernier polynôme en 0, c'est donc égale à $(-1)(-2) \cdots (-n+1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. D'où $s(n, 1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, comme il fallait le prouver.

3. L'identité (3) résulte simplement de la substitution de x par (-1) dans l'identité polynomiale de la Proposition 2.1.1 tout en remarquant que,

$$(-1)^n = (-1)(-2) \cdots (-n) = (-1)^n n!.$$

4. En multipliant les deux membres de l'identité (3) par $(-1)^n$, on obtient

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} s(n, k) = n!.$$

Mais puisque le signe de chaque nombre $s(n, k)$ ($1 \leq k \leq n$) est $(-1)^{n+k}$ (en vertu de la Proposition 2.1.1, on a pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$(-1)^{n+k} s(n, k) = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right],$$

et l'on conclut enfin que,

$$\sum_{k=1}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = n!.$$

comme il fallait le prouver.

5. L'estimation (5) est une conséquence immédiate de (4). La proposition est démontrée. ■

Il existe d'autres identités, comme

$$s(n, 2) = (-1)^n (n-1)! H_{n-1},$$

$$s(n, 3) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{2} [(H_{n-1})^2 - H_{n-1}^{(2)}],$$

où H_n est le nombre harmonique tel que : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Proposition 2.1.3 Les nombres de Stirling de première espèce sont des spécialisations de la fonction symétrique élémentaire,

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = e_{n-k}(1, 2, \dots, n-1). \quad (2.3)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] &= (x)^{\overline{n}}, \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} (x+i), \\ &= \sum_{i=0}^n e_{n-i}(0, 1, \dots, n-1) x^i, \end{aligned}$$

Par identification on trouve,

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = e_{n-k}(1, 2, \dots, n-1).$$

■

2.1.1 Relations de récurrence

Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$. Les nombres de Stirling de première espèce signés et non-signés vérifient la relation de récurrence triangulaire d'ordre deux,

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k), \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (2.4)$$

$$\left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] + n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right], \quad k \geq 1. \quad (2.5)$$

avec $\left[\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right] = \delta_{n,0}$, où δ est le symbole de Kronecker. et pour $n \neq 0$ $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = 0$ lorsque $k \notin [n]$.

Chacune des deux relations de récurrence peut se déduire de l'autre. De plus, la première découle de la relation de récurrence des factorielles décroissantes et des factorielles croissantes,

$$(x)_{n+1} = x(x)_n - (n)(x)_n, \quad (2.6)$$

$$(x)^{n+1} = x(x)^n + (n)(x)^n. \quad (2.7)$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a d'une part,

$$x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k) x^k = x^{n+1} + \sum_{k=1}^n s(n+1, k) x^k,$$

Car $s(n+1, 0) = 0$ et $s(n+1, n+1) = 1$. Et d'autre part,

$$\begin{aligned}
 x^{n+1} &= x(x-1) \cdots (x-n+1)(x-n) = (x-n)x^n, \\
 &= (x-n) \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k, \\
 &= x \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k - n \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k, \\
 &= \sum_{k=0}^n s(n, k)x^{k+1} - \sum_{k=0}^n ns(n, k)x^k, \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} s(n, k-1)x^k - \sum_{k=0}^n ns(n, k)x^k, \\
 &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n (s(n, k-1) - ns(n, k))x^k,
 \end{aligned}$$

Car $s(n, 0) = 0$ et $s(n, n) = 1$.

En identifiant les coefficients de x^k ($k \in \mathbb{N}^*, k \leq n$) des deux expressions que l'on a trouvé pour x^{n+1} , on aboutit à

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k).$$

qui n'est rien d'autre que (2.4).

Étant donnés $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, l'identité (2.5) s'obtient en multipliant les deux nombres de (2.4) par $(-1)^{n+k+1}$ et en se rappelant que le signe de $s(a, b)$ est $(-1)^{a+b}$ ($\forall a, b \in \mathbb{N}, a \geq b$) en vertu de la Proposition 2.1.1. Ceci achève notre démonstration. ■

Ils satisfont aussi une relation de récurrence verticale,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \sum_{i=k}^n \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

En se servant de la relation de récurrence (2.5), on peut dresser les nombres de Stirling de première espèce dans un triangle (infini) du même type que le triangle arithmétique de Pascal des coefficients binomiaux. Dans ce triangle, chaque ligne de rang $n \geq 1$ commence par un 0 et se termine par un 1 et ses coefficients du milieu s'obtiennent par la relation de récurrence (2.5) en fonction des coefficients de la ligne qui la précède. Par exemple, le nombre 50 de la 5ème ligne est obtenu par la formule $6 + 4 \times 11$ (où les nombres 6 et 11 proviennent de la 4ème ligne).

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

TABLE 2.1 – Les nombres de Stirling de première espèce non-signés.

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	-1	1							
3	0	2	-3	1						
4	0	-6	11	-6	1					
5	0	24	-50	35	-10	1				
6	0	-120	274	-225	85	-15	1			
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1		
8	0	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1	
9	0	40320	-109584	118124	-67284	22449	-4536	546	-36	1

TABLE 2.2 – Les nombres de Stirling de première espèce signés.

2.1.2 Fonction génératrice

Théorème 2.1.1 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=k}^{\infty} s(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{\log^k(1+x)}{k!}. \quad (2.9)$$

Preuve. On détermine de deux façons différentes le développement (formel) de la fonction $f(x, y) = (1+x)^y$ en série de Taylor en y . D'une part, d'après la formule du binôme généralisée,

On a

$$\begin{aligned}
 (1+x)^y &= 1 + yx + \frac{y(y-1)}{2!}x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{3!}x^3 + \dots, \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{x^n}{n!}, \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n s(n, k) y^k \right) \frac{x^n}{n!}, \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s(n, k) \frac{x^n y^k}{n!}.
 \end{aligned}$$

Soit

$$(1+x)^y = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} s(n, k) \frac{x^n}{n!} \right) y^k. \quad (2.10)$$

D'autre part, d'après le développement de Taylor de la fonction exponentielle, On a

$$(1+x)^y = \exp\{y \log(1+x)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y \log(1+x))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log^k(1+x)}{k!} y^k. \quad (2.11)$$

L'identification des deux formules (2.10) et (2.11) entraîne (d'après l'unicité du développement de Taylor) que l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=k}^{\infty} s(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{\log^k(1+x)}{k!}. \quad (2.12)$$

Comme il fallait le prouver. Le théorème est démontrée. ■

2.1.3 Formules explicites

Soit la forme explicites des nombres de Stirling de première espèce suivante,

$$s(n, m) = \sum_{k=0}^{n-m} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{2k-j}}{k!} \binom{n-1+k}{n-m+k} \binom{2n-m}{n-m-k} \binom{k}{j} j^{n-m+k},$$

Ou encore, après simplifications,

$$s(n, m) = \frac{(2n-m)!}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{1}{(n+k)(n-m-k)!(n-m+k)!} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j j^{n-m+k}}{j!(k-j)!}.$$

La formule du Théorème 2.1.1 précédent permet d'en déduire une formule explicite très importante pour les nombres $s(n, m)$.

Théorème 2.1.2 Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, avec $n \geq m$, on a :

$$s(n, m) = (-1)^{n+m} \frac{n!}{m!} \sum_{i_1 + \dots + i_m = n} \frac{1}{i_1 \dots i_m}.$$

Preuve. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \log^m(1+x) &= \left(\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{x^l}{l} \right)^m, \\ &= \sum_{l_1, \dots, l_m \in \mathbb{N}^*} (-1)^{(l_1+1)+\dots+(l_m+1)} \frac{x^{l_1+\dots+l_m}}{l_1 \dots l_m}, \\ &= \sum_{n \geq m} \left(\sum_{l_1+l_2+\dots+l_m=n} \frac{(-1)^{n+m}}{l_1 \dots l_m} \right) x^n. \end{aligned}$$

En comparant Le théorème 2.1.1, nous déduisons que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$:

$$s(n, m) = (-1)^{n+m} \frac{n!}{m!} \sum_{l_1+l_2+\dots+l_m=n} l_1, l_2, \dots, l_m \in \mathbb{N}^* \frac{1}{l_1 l_2 \dots l_m}.$$

comme il fallait le prouver. Le théorème est démontré. ■

2.1.4 Interprétation combinatoire

Le sens combinatoire des nombres de Stirling de première espèce est relatif à l'ensemble des permutations d'un ensemble fini.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble à n éléments et σ une permutation des éléments de A (i.e, $\sigma \in S(A)$). On considère $\mathfrak{R}_\sigma$ la relation binaire sur A définie par,

$$\forall a, b \in A : a \mathfrak{R}_\sigma b \stackrel{df}{\iff} \exists k \in \mathbb{N} \quad tq : b = \sigma^k(a).$$

On montre alors que $\mathfrak{R}_\sigma$ est une relation d'équivalence sur A . Une classe d'équivalence modulo $\mathfrak{R}_\sigma$ s'appelle « cycle relatif à σ », ou simplement « σ -cycle ». On obtient ainsi une partition de A en un nombre fini de σ -cycles. Pour $\sigma = Id_A$ par exemple, les σ -cycles que l'on obtient sont : $\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}$ (on a exactement $n\sigma$ -cycles). Pour que tout cela soit plus clair, étudions un exemple.

Exemple 2.1.2 Prenons $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et σ la permutation des éléments de A , donnée par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

La classe de l'élément 1 modulo $\mathfrak{R}_\sigma$ est $cl(1) = \{1, 3, 4\}$, la classe de l'élément 2 est $cl(2) = \{2, 5\}$ et la classe de l'élément 6 est $cl(6) = \{6\}$ et on a ainsi trouvé toutes les classes. Les σ -cycles de A sont donc : $\{1, 3, 4\}, \{2, 5\}$ et $\{6\}$, ainsi A contient exactement 3-cycles.

Nous sommes maintenant prêt à donner l'interprétation combinatoire des nombres de Stirling de première espèce.

Théorème 2.1.3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$, avec $k \leq n$. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments qui fournissent exactement k cycles est $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$.*

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$, avec $k \leq n$, on note provisoirement par $P(n, k)$ le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments qui fournissent exactement k cycles.

On montrera que ces nombres $P(n, k)$ vérifient la relation de récurrence,

$$P(n+1, k) = P(n, k-1) + nP(n, k), (n \in \mathbb{N}^*, k \leq n).$$

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, avec $k \leq n$, soit $A_{n+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ un ensemble à $(n+1)$ éléments et σ une permutation arbitraire de A_{n+1} fournissant exactement k cycles. Nous essayons de voir comment on obtient σ à partir d'une permutation σ' de l'ensemble $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$. Pour ce faire, nous raisonnons sur le dernier élément a_{n+1} de A_{n+1} .

On distingue les deux cas suivants :

1. À changer $\sigma(a_{n+1}) = a_{n+1}$. Ceci revient à dire que a_{n+1} est un point fixe par σ ou encore que le σ -cycle contenant a_{n+1} est $\{a_{n+1}\}$. Dans ce cas σ s'obtient comme un prolongement d'une permutation σ' de A_n qui fournit exactement $(k-1)$ cycles. Le nombre de tels σ est donc égale à $P(n, k-1)$.
2. Ou bien $\sigma(a_{n+1}) \in \{a_1, \dots, a_n\}$. Dans ce cas, a_{n+1} intégrera un cycle associé à une certaine permutation σ' de A_n , laquelle fournit exactement k cycles. Pour chaque choix de $\sigma(a_{n+1})$ (n choix possibles), on a $P(n, k)$ choix possibles pour σ' .

Ainsi, le nombre de tels σ est $nP(n, k)$. En conclusion, le nombre de permutations de A_{n+1} fournissant exactement k cycles est,

$$P(n+1, k) = P(n, k-1) + nP(n, k).$$

Nous venons de montrer que les nombres $P(n, k)$ satisfont la même relation de récurrence que les nombres $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ (cf. la relation (2.5) de la relations de récurrente), avec

$$P(n, 0) = 0 = \left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right], \text{ et } P(1, 1) = 1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right],$$

On conclut par une récurrence évidente que $P(n, k) = \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ ($k \leq n$). ■

2.2 Nombre de Stirling de deuxième espèce

voir [65]

Définition 2.2.1 Les nombres de Stirling de deuxième espèce noté $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, comptent le nombre de K – partitions de l'ensemble $[n]$. Ils apparaissent lors de l'expression du monome x^n dans la base des moments factoriels décroissants $x^{\underline{k}}$.

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}}. \quad (2.13)$$

Exemple 2.2.1 L'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ possède 7 partitions en deux sous-ensembles non vides,

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3\}\{4\}, \{1, 2, 4\}\{3\}, \{1, 3, 4\}\{2\}, \\ &\{2, 3, 4\}\{1\}, \{1, 2\}\{3, 4\}, \{1, 3\}\{2, 4\}, \\ &\{1, 4\}\{2, 3\}. \end{aligned}$$

Corollaire 2.2.1 Les nombres réel $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ ($n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$) sont tous des entiers naturels.

Proposition 2.2.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$ et $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1$,
2. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$,
3. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

Proposition 2.2.2 Les nombres de Stirling de deuxième espèce sont des spécialisations de la fonction symétrique complète :

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = h_{n-k}(1, 2, \dots, k). \quad (2.14)$$

Où

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n+k \\ k \end{smallmatrix} \right\} = h_k(1, 2, \dots, k). \quad (2.15)$$

Preuve. Soit $k \in \mathbb{N}$, On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^n &= \prod_{i=1}^k \frac{x^i}{(1+ix)}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n(1, 2, \dots, k) x^n x^k, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n(1, 2, \dots, k) x^{n+k}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_{n-k}(1, 2, \dots, k) x^n, \end{aligned}$$

Par identification, on trouve

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = h_{n-k}(1, 2, \dots, k),$$

Si on pose $n' = n - k$, on a

$$\left\{ \begin{matrix} n+k \\ k \end{matrix} \right\} = h_n(1, 2, \dots, k).$$

■

2.2.1 Relation de récurrence

Proposition 2.2.3 Pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$, avec $k \leq n - 1$, on a

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}. \quad (2.16)$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On part de l'identité triviale,

$$x^n = x \cdot x^{n-1},$$

dans laquelle on substitue x^n et x^{n-1} par leurs expressions dans la base $(x^{\underline{k}})_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[x]$. On obtient,

$$\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}} = x \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} (x \cdot x^{\underline{k}}).$$

Comme

$$x \cdot x^{\underline{k}} = (x - k)x^{\underline{k}} + kx^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}},$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} (x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}), \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}}, \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{n-1} k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}}, \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \right\} x^{\underline{k}} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\} x^{\underline{n}}.$$

En identifiant les coefficients des $x^{\underline{k}}$ ($1 \leq k \leq n - 1$) dans les deux membres de cette dernière identité, on obtient la formule récurrente recherchée,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}, \quad (k \in \{1, \dots, n-1\}).$$

La proposition est achevée.

■

En se servant de la relation récurrente (2.16), on donne le tableau des premières valeurs des nombres de stirling de deuxième espèce .

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1											
1	0	1										
2	0	1	1									
3	0	1	3	1								
4	0	1	7	6	1							
5	0	1	15	25	10	1						
6	0	1	31	90	65	15	1					
7	0	1	63	301	350	140	21	1				
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1			
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36			
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1	
11	0	1	1023	28501	145750	246730	179487	63987	11880	1155	55	1

TABLE 2.3 – Les nombres Stirling de deuxième espèce.

2.2.2 Formules explicites

Théorème 2.2.1 Pour tout $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Preuve. (Preuve combinatoire) On sait qu'il y a k^n façons de ranger n boules différentes en k urnes différentes. Mais dans notre cas les urnes ne doivent pas être vides. Pour corriger ce mécanisme, on doit retirer les cas où les urnes sont vides. On a $\binom{k}{i}$ façons de choisir i urnes vides et $(k-i)^n$ façons de ranger n boules sur $k-i$ urnes. Maintenant, le problème est qu'on a retiré $i+1$ fois les cas où aux moins $i+1$ urnes sont vides. Il faut donc les ajouter au fur et à mesure à nouveau de cette façon,

$$\begin{aligned} & k^n - \binom{k}{1} (k-1)^n, \\ & k^n + \binom{k}{2} (k-2)^n, \\ & \dots \end{aligned}$$

$$\sum_i^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Finalement, on doit retirer les cas où les urnes sont ordonnées, car pour les nombre de Stirling de 2^{ème} espèce les groupes sont identiques (blocs). Alors, on obtient la formule,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

■

De la formule du Théorème 2.2.1 résulte deux formules explicites pour les nombres de Stirling de deuxième espèce. Même si, au niveau des calculs, ces nouvelles formules sont moins efficaces que la précédente, elles sont très utiles pour d'autres applications.

Corollaire 2.2.2 Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, avec $n \geq k$, on a

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{n!}{k!} \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}^* \\ n_1 + n_2 + \dots + n_k = n}} \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (2.17)$$

Preuve. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, tel que $n \geq k$. Le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{(e^x - 1)^k}{k!}$ en 0 s'écrit,

$$\begin{aligned} \frac{(e^x - 1)^k}{k!} &= \frac{1}{k!} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n!} \right)^k, \\ &= \frac{1}{k!} \left(\sum_{n_1 \in \mathbb{N}^*} \frac{x^{n_1}}{n_1!} \right) \left(\sum_{n_2 \in \mathbb{N}^*} \frac{x^{n_2}}{n_2!} \right) \dots \left(\sum_{n_k \in \mathbb{N}^*} \frac{x^{n_k}}{n_k!} \right), \\ &= \frac{1}{k!} \left(\sum_{n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*} \frac{x^{n_1 + n_2 + \dots + n_k}}{n_1! n_2! \dots n_k!} \right), \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{n \geq k} \left(\sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}^* \\ n_1 + n_2 + \dots + n_k = n}} \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_k!} \right) x^n, \end{aligned}$$

Soit

$$\frac{(e^x - 1)^k}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{n \geq k} \left(\sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}^* \\ n_1 + n_2 + \dots + n_k = n}} \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_k!} \right) x^n.$$

En identifiant ce développement avec celui de la formule du Théorème 2.2.1, il en résulte (en vertu de l'unicité du développement en série entière d'une fonction analytique) que,

$$\frac{\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}^* \\ n_1 + n_2 + \dots + n_k = n}} \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_k!},$$

D'où la formule recherchée,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{n!}{k!} \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}^* \\ n_1 + n_2 + \dots + n_k = n}} \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (2.18)$$

Le corollaire est démontré. ■

Corollaire 2.2.3 Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, avec $n \geq k$, on a

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{\substack{r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{N} \\ r_1 + r_2 + \dots + r_k = n - k}} 1^{r_1} 2^{r_2} \dots k^{r_k}. \quad (2.19)$$

Preuve. Étant donné $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)} &= x^k \left(\frac{1}{1-x} \right) \left(\frac{1}{1-2x} \right) \dots \left(\frac{1}{1-kx} \right), \\ &= x^k \sum_{r_1 \in \mathbb{N}} x^{r_1} \cdot \sum_{r_2 \in \mathbb{N}} (2x)^{r_2} \dots \sum_{r_k \in \mathbb{N}} (kx)^{r_k}, \\ &= \sum_{r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{N}} 1^{r_1} 2^{r_2} \dots k^{r_k} x^{r_1 + \dots + r_k + k}, \\ &= \sum_{n \geq k} \left(\sum_{\substack{r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{N} \\ r_1 + r_2 + \dots + r_k + k = n}} 1^{r_1} 2^{r_2} \dots k^{r_k} \right) x^n, \\ &= \sum_{n \geq k} \left(\sum_{\substack{r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{N} \\ r_1 + r_2 + \dots + r_k = n - k}} 1^{r_1} 2^{r_2} \dots k^{r_k} \right) x^n. \end{aligned}$$

Cette dernière expression n'est qu'un développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}$ au voisinage de 0. Or un développement en série entière de la même fonction au voisinage de 0 a déjà été donné par la formule du théorème ???. L'identification des deux développements conclut (en vertu de l'unicité du développement en série entière d'une fonction donnée) que l'on a pour tout entier $n \geq k$,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{\substack{r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{N} \\ r_1 + r_2 + \dots + r_k = n - k}} 1^{r_1} 2^{r_2} \dots k^{r_k}.$$

Qui est bien la formule recherchée. ■

Exemple 2.2.2 Calculons $\left\{ \begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\}$ en se servant de la formule (2.19). On a

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} &= \sum_{\substack{r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{N} \\ r_1 + r_2 + r_3 = 2}} 1^{r_1} 2^{r_2} 3^{r_3}, \\ &= 1^0 2^0 3^2 + 1^0 2^1 3^1 + 1^0 2^2 3^0 + 1^1 2^0 3^1 + 1^1 2^1 3^0 + 1^2 2^0 3^0, \\ &= 9 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1, \\ &= 25. \end{aligned}$$

C'est bien le résultat qui figure dans le triangle des nombres $\left\{ \begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\}$.

2.2.3 Séries génératrice

Proposition 2.2.4 1. La série génératrice ordinaire associée aux nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}.$$

2. La série génératrice exponentielle des nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}.$$

3. La série génératrice exponentielle double est

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \frac{x^n}{n!} y^k = \exp(y(e^x - 1)).$$

Preuve.

1. Posons

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^n.$$

D'après la relation de récurrence (2.24), on a

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} \right) x^n, \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} x^{n-1} + kx \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{n-1}, \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} x^n + kx \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^n, \\ &= f_{k-1}(x) + kx f_k(x). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$f_k(x) = \frac{x}{1-xk} f_{k-1}(x),$$

On a

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} x^n = 1,$$

$$f_1(x) = \frac{x}{1-2x} f_0(x) = \frac{x^2}{(1-x)(1-2x)},$$

et en général

$$f_k(x) = \frac{x^k}{(1-k)(1-2x)\dots(1-kx)}.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule explicite 2.2.1, on aura

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!}, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \right\} \frac{x^n}{n!}, \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^k \left((-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \frac{x^n}{n!} \right), \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \frac{x^n}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((k-i)x)^n}{n!}, \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} e^{(k-i)x}, \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (e^x)^{k-i}, \\ &= \frac{(e^x - 1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} y^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x - 1)^k}{k!} y^k, \\ &= \exp(y(e^x - 1)). \end{aligned}$$

■

Remarque 2.2.1 Ils ont aussi, une relation de récurrence verticale

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\}.$$

2.2.4 Interprétation combinatoire

Théorème 2.2.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^$, $k \in \mathbb{N}^*$, l'entier positif $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ représente le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k groupes (non vides et deux à deux disjoints).*

En d'autres termes, $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ représente le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments qui fournissent exactement k classes d'équivalence.

Preuve. L'énoncé de la proposition est trivial pour $k = 0$. Nous pouvons donc supposer pour la suite que $k \geq 1$. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^{*2}$, notons provisoirement par $P(n, k)$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k groupes (non vides et deux à deux disjoints). Il s'agit alors de montrer que l'on a $P(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ ($n, k \in \mathbb{N}^*$).

Pour ce faire, nous allons raisonner par récurrence sur n .

- Pour $n = 1$. On a par définition : $P(1; 1) = 1$ et $P(1; k) = 0$ pour tout entier $k \geq 2$; ce qui montre que $P(1; k) = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ k \end{matrix} \right\}$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

- Soit $n \geq 2$ un entier. Supposons que l'on a $P(n-1, k) = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons que l'on a aussi $P(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

En effet, nous allons exprimer (par le biais d'une analyse combinatoire) tout nombre $P(n, k)$ ($k \in \mathbb{N}^*$) en fonction des nombres $P(n-1, l)$ ($l \in \mathbb{N}$).

Soient k un entier strictement positif, N un ensemble à n éléments et x un élément fixé de N . Soit aussi $N' := N \setminus \{x\}$, qui est un ensemble à $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ éléments. Pour partitionner l'ensemble N en k groupes en se servant des partitions de l'ensemble N' , il y a deux et seulement deux façons possibles (et complémentaires),

- Ou bien, on partitionne l'ensemble N' en $(k-1)$ groupes et on considère le singleton $\{x\}$ comme le $k^{\text{ème}}$ groupe de la partition voulue de N . On obtient ainsi $P(n-1, k-1)$ de telles partitions de N en k groupes.
- Ou bien, on partitionne l'ensemble N' en k groupes (donc $P(n-1, k)$ possibilités) et on intègre l'élément x de N dans l'un de ces k groupes (donc k choix possibles pour x). Et l'on obtient ainsi $kP(n-1, k)$ de telles partitions de N en k groupes.

Au total, on obtient donc $P(n-1, k-1) + kP(n-1, k)$ partitions de N en k groupes. D'où

$$P(n, k) = P(n-1, k-1) + kP(n-1, k).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $P(n-1, k-1) = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$ et $P(n-1, k) = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, il en résulte que,

$$P(n, k) = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\},$$

(en vertu de la proposition 2.16).

Ceci achève cette démonstration. ■

Exemple 2.2.3 Calculons $\left\{ \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\}$ en se servant uniquement du sens combinatoire des nombres de Stirling de deuxième espèce. Soit N l'ensemble à 5 éléments $N := \{a, b, c, d, e\}$. Les partitions de N en 4 groupes $\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ (tous non vides et deux à deux disjoints) sont les suivantes,

$$\begin{aligned} \wp_1 : N_1 &= \{a\}, N_2 = \{b\}, N_3 = \{c\}, N_4 = \{d, e\}; \\ \wp_2 : N_1 &= \{a\}, N_2 = \{b\}, N_3 = \{d\}, N_4 = \{c, e\}; \\ \wp_3 : N_1 &= \{a\}, N_2 = \{b\}, N_3 = \{e\}, N_4 = \{c, d\}; \\ \wp_4 : N_1 &= \{a\}, N_2 = \{c\}, N_3 = \{d\}, N_4 = \{b, e\}; \\ \wp_5 : N_1 &= \{a\}, N_2 = \{c\}, N_3 = \{e\}, N_4 = \{b, d\}; \\ \wp_6 : N_1 &= \{a\}, N_2 = \{d\}, N_3 = \{e\}, N_4 = \{b, c\}; \\ \wp_7 : N_1 &= \{b\}, N_2 = \{c\}, N_3 = \{d\}, N_4 = \{a, e\}; \\ \wp_8 : N_1 &= \{b\}, N_2 = \{c\}, N_3 = \{e\}, N_4 = \{a, d\}; \\ \wp_9 : N_1 &= \{b\}, N_2 = \{d\}, N_3 = \{e\}, N_4 = \{a, c\}; \\ \wp_{10} : N_1 &= \{c\}, N_2 = \{d\}, N_3 = \{e\}, N_4 = \{a, b\}; \end{aligned}$$

Noter que l'ordre des groupes N_i ($1 \leq i \leq 4$) n'est pas important.

Le nombre de partitions de N en 4 groupes est donc égale à 10, d'où

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} = 10.$$

C'est bien le même résultat qui figure dans le triangle des nombres $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$.

2.2.5 Propriétés combinatoires

Les nombres de Stirling de première espèce s'expriment en termes des nombre de Stirling de deuxième espèce par la relation suivante dite de Schlomilch,

$$\left[\begin{smallmatrix} n+k \\ n \end{smallmatrix} \right] = \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} \binom{n+2k}{k+i} \binom{n+k+i-1}{k+i} \left\{ \begin{smallmatrix} k+i \\ i \end{smallmatrix} \right\}.$$

Ils vérifient aussi la relation d'orthogonalités suivantes :

$$\sum_{i=k}^n (-1)^{n-i} \left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right] \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{i=k}^n (-1)^{n-i} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right\} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right].$$

Synonymes des relations d'inversion suivantes :

$$a_n = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} b_k \Leftrightarrow b_n = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} a_k.$$

avec $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites données .

2.3 Relations avec des nombres connus

cette section est en majeure partie extraite de [56]

2.3.1 Relation avec les nombres Eulériens

Définition 2.3.1 Le nombre Eulérien noté $\left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle$, compte le nombre de permutations à n éléments possédant exactement m montées. En développant x^n en somme de coefficients binomiaux, on obtient la relation suivante,

$$x^n = \left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle \binom{x+m}{n}. \quad (2.20)$$

Le coefficient $\left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle$ est appelé nombre eulérien.

Les nombres de stirling de deuxième espèce sont liés aux nombres eulériens par les relations suivantes,

$$m! \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} = \sum_{k=n-m}^n \left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle \binom{k}{n-m}, \quad (2.21)$$

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \binom{n-k}{m} (-1)^{n-k-m} k!. \quad (2.22)$$

2.3.2 Relation avec les nombres de Cauchy

Définition 2.3.2 Le nombre de Cauchy de première espèce noté a_n , est défini par la relation suivante,

$$a_n = \int_0^1 x^n dx. \quad (2.23)$$

Ces nombres vérifient la relation,

$$a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{n^k}{k+1} a_{n-k}. \quad n \in \mathbb{N}^*, a_0 = 1.$$

Les nombres de Stirling des deux espèces sont liés aux nombres de Cauchy de première espèce par les identités suivantes,

$$\sum_{j=0}^n a_j \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{n+1}, \quad (2.24)$$

$$\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{(n-j)}}{j+1} \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right] = a_n. \quad (2.25)$$

Définition 2.3.3 Le nombre de Cauchy de deuxième espèce noté b_n , est défini par la relation suivante,

$$b_n = \int_0^n x^n dx. \quad (2.26)$$

Ces nombres vérifient la relation,

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^k}{k+1} b_{n-k}.$$

Les nombres de Stirling de première espèce sont liés aux nombres de Cauchy de deuxième espèce par,

$$b_n = \sum_{j=0}^n \frac{\left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]}{j+1}, \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{n+1} = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} b_j. \quad (2.28)$$

2.3.3 Relation avec les nombres de Bernoulli

Définition 2.3.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de Bernoulli noté β_n , est défini par,

$$\begin{cases} \beta_0 = 1, \\ \beta_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} \beta_k, \end{cases} \quad n \geq 1. \quad (2.29)$$

Les nombres de Bernoulli β_n et les nombres de Stirling des deux espèces vérifient :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} \frac{j!}{j+1} = \beta_n, \quad \sum_{j=0}^n (-1)^j \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right] = \frac{n!}{n+1}. \quad (2.30)$$

L'identité suivante, qui relie les nombres de Stirling de deuxième espèce et les nombres de Bernoulli, a été obtenue par T.Agoh et K.Dilcher (2007) en étudiant la somme de produits

de ces derniers,

$$\begin{aligned} \frac{(k-1)!(m-1)!}{(k+m-1)!} \left\{ \begin{matrix} k+m \\ d+1 \end{matrix} \right\} &= \sum_{i=0}^{d-1} \frac{\left\{ \begin{matrix} k \\ i+1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ d-i \end{matrix} \right\}}{d \binom{d-1}{i}} + \sum_{j=d+1}^{k+m-1} ((-1)^m \binom{k-1}{j-1}) \\ &\quad + (-1)^k \binom{m-1}{j-1} \frac{\beta_{k+m-j}}{k+m-j} \left\{ \begin{matrix} j \\ d+1 \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Pour tous $k, m \geq 1$ et $d \geq 0$.

2.3.4 Relation avec les nombres Harmoniques

Définition 2.3.5 Le nombre Harmonique noté H_n , est défini par,

$$H_0 = 1, \quad H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}. \quad (2.31)$$

Les nombres de Stirling de première espèce sont liés aux nombres Harmoniques par la relation suivante,

$$H_n = \frac{\left[\begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right]}{n!}, \quad (2.32)$$

Sachant que,

$$\sum_{k=1}^n k \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right]. \quad (2.33)$$

2.4 Nombre q -Stirling

Le q -analogue d'un théorème, d'une identité ou d'une expression est une généralisation impliquant un nouveau paramètre q qui se spécialise en le théorème original lorsque l'on prend le cas limite où q tend vers 1. Les premiers q -analogues furent les séries hypergéométriques basiques, introduites au XIX^e siècle. Pour plus d'informations voir Exton [33].

2.4.1 Nombre q -Stirling de première espèce

Définition 2.4.1 Le nombre q -Stirling de première espèce noté $S_q(n, k)$, est défini par,

$$[x]_q^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n q^{-\binom{k}{2}} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q [x]_q^{\underline{k}}. \quad (2.34)$$

Proposition 2.4.1 Le nombre q -Stirling de première espèce, satisfait la relation de récurrence suivante,

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q = \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_q + [n-1]_q \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_q, \quad (2.35)$$

avec $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1$, $\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}_q = 0$, pour tout $k > 0$.

Il représente aussi le k -ième coefficient du développement,

$$\prod_{i=0}^{n-1} (x + [i]_q) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k. \quad (2.36)$$

Nous présentons, via la relation de récurrence, quelques valeurs du nombre q -Stirling de première espèce ci-dessous.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	$1 + q$	$2 + q$	1	
4	0	$1 + 2q + 2q^2 + q^3$	$3 + 4q + 3q^2 + q^3$	$3 + 2q + q^2$	1

TABLE 2.4 – Les premières valeurs de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.

Proposition 2.4.2 Les nombres q -Stirling de première espèce sont des spécialisation de la fonction symétrique élémentaire,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = e_{n-k}([1]_q, [2]_q, \dots, [n-1]_q). \quad (2.37)$$

Preuve. D'après la relation (2.36), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k &= \prod_{i=0}^{n-1} (x + [i]_q), \\ &= \prod_{i=0}^n (x + [i-1]_q), \\ &= \sum_{k=0}^n e_{n-k}([1]_q, [2]_q, \dots, [n-1]_q), \end{aligned}$$

D'où par identification,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = e_{n-k}([1]_q, [2]_q, \dots, [n-1]_q).$$

■

2.4.2 Nombre q -Stirling de deuxième espèce

Définition 2.4.2 Les nombres q -Stirling de deuxième espèce noté $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_q$, est défini par,

$$[x]_q^n = \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_q [x]_q^k. \quad (2.38)$$

Proposition 2.4.3 Le nombre q -Stirling de deuxième espèce, satisfait la relation de récurrence suivante ($n \geq 1$),

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_q = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_q + [k]_q \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_q, \quad (2.39)$$

avec $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_q = 1$, $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix} \right\}_q = 0$, pour tout $k > 0$.

Il représente aussi le k -ième coefficient du développement,

$$\prod_{i=0}^k \frac{x^k}{x - [i]_q x} = \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_q x^n. \quad (2.40)$$

Nous présentons, via la relation de recurrence, quelques valeurs du nombre q -Stirling de deuxième espèce ci-dessous

$n \setminus k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	1	$2+q$	1	
4	0	1	$3+3q+q^2$	$3+2q+q^2$	1

TABLE 2.5 – Les premières valeurs de $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_q$.

Proposition 2.4.4 Les nombres q -Stirling de deuxième espèce sont des spécialisation de la fonction symétrique complète,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_q = h_{n-k}([1]_q, [2]_q, \dots, [k]_q). \quad (2.41)$$

Preuve. D'après la relation (2.40), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_q x^k &= \prod_{i=0}^k \frac{x^k}{x - [i]_q x}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n([1]_q, [2]_q, \dots, [k]_q) x^{n+k}, \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} h_{n-k}([1]_q, [2]_q, \dots, [k]_q) x^n, \end{aligned}$$

D'où par identification,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_q = h_{n-k}([1]_q, [2]_q, \dots, [k]_q).$$

■

2.5 Nombres de Lah

Considérons comme les nombres de Stirling de troisième espèce, les nombres de Lah sont introduits par le mathématicien Ivo Lah en 1995, nous utiliserons la notation $L(n, k)$, voir [8].

Définition 2.5.1 Les nombres de Lah $L(n, k)$ compte le nombre de partition d'un ensemble de cardinal n en k liste. On peut définir aussi les nombres de Lah comme les coefficients de changement de base entre la base $\{x^{\bar{k}}, k = 1, \dots, n\}$ et la base $\{x^{\underline{n}}, k = 1, \dots, n\}$, c'est à dire

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=1}^n L(n, k) x^{\underline{k}}. \quad (2.42)$$

Proposition 2.5.1 Soit $n \in \mathbb{N}$, On a

1. $L(0, 0) = 1$, et $L(n, 0) = 0$, et $L(n, k) = 0$, pour $k > n$,
2. $L(n, n) = 1$, et $L(n, 1) = n!$,
3. $L(n, k) = \frac{(n-1)n!}{2}$, et $L(n, k) = \frac{(n-2)(n-1)n!}{12}$,
4. $L(n, n-1) = n(n-1)$.

Proposition 2.5.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Une relation qui relie la n -ième dérivée de $e^{\frac{1}{x}}$ et $L(n, k)$ est donner par,

$$\frac{d^n}{dx^n} (e^{\frac{1}{x}}) = (-1)^n e^{\frac{1}{x}} \sum_{k=0}^n L(n, k) x^{-n-k}.$$

Relations de récurrence

Soit $n, k \in \mathbb{N}$. Les nombres de Lah ont une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux,

$$L(n, k) = L(n-1, k-1) + (n+k-1)L(n-1, k), \quad n \geq k \geq 1. \quad (2.43)$$

De cette relation de récurrence, on obtient le tableau des nombres de Lah suivant.

Il est bien connu que le nombre $L(n, k)$ peut être interprété comme le nombre de façons de partitionner n en k listes non vides. Par exemple, le nombre de partitions $n = 4$ en $k = 3$ listes correspond à $L(4, 3) = 12$.

$$\begin{aligned} &1 \setminus 2 \setminus 34, 1 \setminus 2 \setminus 43, 1 \setminus 24 \setminus 3, 1 \setminus 23 \setminus 4, \\ &1 \setminus 42 \setminus 3, 1 \setminus 32 \setminus 4, 12 \setminus 3 \setminus 4, 21 \setminus 3 \setminus 4, \\ &14 \setminus 2 \setminus 3, 41 \setminus 2 \setminus 3, 13 \setminus 2 \setminus 4, 31 \setminus 2 \setminus 4. \end{aligned}$$

n k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	2	1						
3	0	6	6	1					
4	0	24	36	12	1				
5	0	120	240	120	20	1			
6	0	720	1800	1200	300	30	1		
7	0	5040	15120	12600	4200	630	42	1	
8	0	40320	141120	141120	58800	11760	1176	56	1

TABLE 2.6 – Les premières valeurs des nombres de Lah.

Séries génératrice

La séries génératrice exponentielle associées aux nombres de Lah est donnée par,

$$\sum_{n \geq k} L(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{1-x} \right)^k. \quad (2.44)$$

Ainsi, que la fonction génératrice exponentielle double,

$$\sum_{n, k \geq 0} L(n, k) \frac{x^n}{n!} y^k = \exp\left(\frac{xy}{1-x}\right). \quad (2.45)$$

Formules explicites

La forme explicite des nombres de Lah est donnée par,

$$L(n, k) = \binom{n-1}{k-1} \frac{n!}{k!} \quad (\text{Nombres de Lah non-signés}). \quad (2.46)$$

Les nombres de Lah peuvent s'écrire comme une somme du produit des nombres de Stirling de première et deuxième espèce,

$$L(n, k) = \sum_{j=0}^n S(n, j) \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}. \quad (2.47)$$

Remarque 2.5.1 Les nombres de Lah sont des spécialisation des fonctions symétriques élémentaires et complètes

$$L(n, k) = \frac{n!}{k!} e_{k-1}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{(n-1) \text{ fois}}) = \frac{n!}{k!} h_{k-1}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{(n-1) \text{ fois}}). \quad (2.48)$$

2.6 Nombres de Bell

Le contenu de cette section est tiré du contenu des références suivantes [10, 41].

Définition 2.6.1 Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle n -ième nombre de Bell et on note B_n ou $B(n)$ le nombre de toutes les partitions de l'ensemble $[n]$. On convient de poser $B_0 = 1$.

Le nombre B_n est aussi le nombre des relations d'équivalence que l'on peut définir sur un ensemble à n éléments. Les premières valeurs de B_n sont données par le tableau suivant,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B(n)	1	1	2	5	15	52	203	877	4140

TABLE 2.7 – Les premières valeurs de B_n .

Exemple 2.6.1 L'ensemble des partitions de l'ensemble $X = \{a, b, c\}$ constitué de trois éléments est $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ avec :

$$\begin{aligned} P_1 &= \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \\ P_2 &= \{\{a, b\}, \{c\}\}, \\ P_3 &= \{\{a, c\}, \{b\}\}, \\ P_4 &= \{\{b, c\}, \{a\}\}, \\ P_5 &= \{a, b, c\}. \end{aligned}$$

Nous constatons que l'ensemble X considéré possède 5 partitions. On peut montrer que le nombre de partitions de l'ensemble $X = \{a, b, c, d\}$ constitué de quatre éléments est égale à 15. Pour prouver cela, on peut énumérer toutes les partitions de cette ensemble.

Proposition 2.6.1 Chaque nombre de Bell est une somme des nombres de Stirling de deuxième espèce

$$B_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}, \quad n \geq 1. \quad (2.49)$$

Exemple 2.6.2 L'exemple suivant illustre l'interprétation des nombres de Bell par définition, on a :

$$B_4 = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right\}.$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix} \right\} &= 0, \\ \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= 1, \text{ compte le nombre de partitions de 4 éléments en un sous-ensemble : } \{\{1, 2, 3, 4\}\}, \\ \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= 7, \text{ compte le nombre de partitions de 4 éléments en deux sous-ensemble : } \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \\ &\quad \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}, \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\}, \{\{4\}, \{1, 2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}, \end{aligned}$$

$\left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = 6$, compte le nombre de partitions de 4 éléments en trois sous-ensemble : $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$,
 $\{\{1\}, \{3\}, \{2, 4\}\}$, $\{\{1\}, \{4\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{3\}, \{2\}, \{1, 4\}\}$, $\{\{3\}, \{4\}, \{1, 2\}\}$, $\{\{4\}, \{2\}, \{1, 3\}\}$,
 $\left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} = 1$, compte le nombre de partitions de 4 éléments en quatre sous-ensemble : $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$,

Donc, $B_4 = 0 + 1 + 7 + 6 + 1 = 15$.

Relations de récurrence

Théorème 2.6.1 Pour tout entier $n \geq 0$, On a

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k. \quad (2.50)$$

Preuve. Soit B_n le nombre de partition de l'ensemble $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Considérons une partition de l'ensemble $X' = \{1, 2, 3, \dots, n+1\}$, et soit E_k une partition de X' . Notons π la partie contenant l'élément $n+1$ de cardinal k , pour construire une telle partition il ya $\binom{n}{k-1}$ façons de choisir les $k-1$ éléments autre que $n+1$ dans π . Le complémentaire de π contient $n+1-k$ éléments, il ya B_{n+1-k} façons de le partitionner.

Alors $\text{card}(E_k) = \binom{n}{n-k} B_{n+1-k}$. et il est claire que $\{E_1, E_2, \dots, E_{n+1}\}$ est une partition de l'ensemble de partition de X' , Donc

$$B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} B_{n+1-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

Puisque $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. ■

Triangle de Bell

On commence par écrire 1 sur la première ligne, puis chaque ligne est obtenue en commençant par le dernier nombre de la ligne précédente et pour obtenir un terme, on additionne le nombre précédent avec celui qui se trouve immédiatement au dessus de celui-ci. Chaque ligne aura ainsi un terme de plus que la ligne précédente.

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	2				
2	2	3	5			
3	5	7	10	15		
4	15	20	27	37	52	
5	52	67	87	114	151	203

TABLE 2.8 – Les premières valeurs des nombre de Bell.

Fonction génératrice

Théorème 2.6.2 Pour $n \in \mathbb{N}$, et $t \in \mathbb{C}$, On a

$$\sum_{n \geq 0} B_n \frac{t^n}{n!} = \exp(e^t - 1). \quad (2.51)$$

Preuve. Démontrons par récurrence sur $n \geq 0$, que $B_n \leq n!$.

Pour $n = 0$ elle est trivial, supposons $B_n \leq n!$, on a :

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k, \\ &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k!, \\ &= n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!}, \\ &\leq n!(n+1)!, \\ &= (n+1)!, \end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{(n-k)!} \leq 1$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{C}$, on a

$$0 \leq \frac{B_n}{n!} |t|^n \leq |t|^n,$$

Donc R est supérieur ou égale au rayon de la série géométrique qui égale à 1, en particulier R est strictement positif.

Soit $t \in [-R; R]$, alors par un changement d'indice on trouve,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1}.$$

Posons

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1},$$

Par le théorème de dérivation terme à terme pour les séries entières, on obtient

$$f'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k \right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (t^n \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!(n-k)!}),$$

On reconnaît dans cette dernière expression le produit de Cauchy des séries $\sum \frac{t^n}{n!}$, $\sum \frac{B_n}{n!} t^n$, toutes deux de rayon de convergence supérieur ou égal à R , donc

$$\forall t \in [-R; R] : f'(t) = f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = f(t)e^t. \quad (2.52)$$

En résolvant (2.52) on trouve que $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [-R; R]$, $f(t) = ce^{e^t}$, or $f(0) = 1$ donc $c = e^{-1}$, d'où

$$f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z} = e^{e^z - 1}.$$

■

Théorème 2.6.3 (Formule de Dobinski). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}. \quad (2.53)$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$ est bien convergente.

D'après le test de D'Alembert, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^n}{(k+1)!} \times \frac{k!}{k^n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n = 0.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$, avec $S_0 = B_0 = 1$,

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_k &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p^k}{p!}, \\ &= \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(1+p)^n}{p!}, \\ &= \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+1)^{n+1}}{(p+1)!} \\ &= S_{n+1}. \end{aligned}$$

La suite (B_n) et (S_n) sont initialisées pour la même constante et vérifiant la même relation de récurrence elle sont donc égale, on déduit que

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

■

Chapitre 3

Des généralisations des nombres de Stirling

Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier certaines généralisations des nombres de Stirling de première et deuxième espèces. Cette étude se fera dans la versions classique. Ces généralisations s'appuie essentiellement sur les relations de recurrences et des identités intéressantes entres ces nombres. Les triangles formés par ces nombres ainsi les interprétations combinatoires qui suivent seront abordés afin de mieux les distingués.

Dans [4], Bazeniar et al. ont proposé une nouvelle fonction symétrique pour interpréter les coefficients bi^snomial et leurs analogues. Cette fonction est une généralisation de la fonction symétrique élémentaire donnée comme suit,

$$E_k^{(s)}(n) := E_k^{(s)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k \\ 0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \leq s}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad (3.1)$$

Où $E_0^{(s)}(n) = 1, E_k^{(s)}(n) = 0$ pour $0 \leq k \leq sn$.

3.1 Nombre de Stirling associés

3.1.1 Nombre de stirling associés de première espèce

Définition 3.1.1 Les nombres de Stirling associés de première espèce $S^{(2)}(n, k)$ donnent le nombre de permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ en k cycles de longueur ≥ 2 .

avec,

$$\begin{aligned} S^{(2)}(0, 0) &= 1, S^{(2)}(n, 0) = 1 \quad n \geq 1, \\ S^{(2)}(n, 1) &= (n-1)!, \quad n > 1, \\ S^{(2)}(n, k) &= 0, \quad \text{si } n > 1 \text{ et } n < 2k. \end{aligned}$$

Relations de récurrence

Les nombres de Stirling associés de première espèce vérifient la relations de récurrence suivante,

$$S^{(2)}(n, k) = (n-1)(S^{(2)}(n-1, k) + S^{(2)}(n-2, k-1)). \quad (3.2)$$

Preuve. On prend l'élément n . Soit n est dans un cycle contenant uniquement deux éléments, et par conséquent, on a $S^{(2)}(n-1, k-2)$ façons d'avoir des permutations de $(n-2)$ élément en $(k-2)$ cycles et $(n-1)$ possibilité de choisir le deuxième élément du cycle contenant n . Soit il est contenu dans un cycle de taille plus grande que 2, on a ainsi $S^{(2)}(n-1, k)$ façons d'obtenir une permutation de $(n-1)$ élément en k cycles et $(n-1)$ possibilités d'ajouter l'élément n dans chacune de ces permutations. Le nombre totale de ces possibilité est égale au nombre de permutations en k cycles de taille supérieur ou égale à 2 d'un ensemble à n éléments. ■

La relation de récurrence (3.2), nous permet d'illustrer le tableau des nombres de Stirling associés de première espèce.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5
2	1				
3	2				
4	6	3			
5	24	20			
6	120	130	15		
7	720	924	210		
8	5040	7308	2380	105	
9	40320	64224	2380	2520	
10	362880	623376	303660	44100	945

TABLE 3.1 – Les nombres de Stirling associés de première espèce.

Fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Stirling associés de première espèce est donnée par :

$$\sum_{n \geq 2k} S^{(2)}(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{(-\ln(1-x) - 1)}{k!}, \quad 1 \leq k \leq \frac{n}{2}. \quad (3.3)$$

Identités

Les nombres de Stirling associés vérifient l'identité suivante,

$$S(n, n-k) = \sum_{j=0}^k S^{(2)}(2k-j, k-j) \binom{n}{2k-j},$$

ou de façon équivalente,

$$S(n+k, k) = \sum_{j=0}^k S^{(2)}(k+j, j) \binom{n+k}{k+j},$$

ces nombres vérifient la convolution de type Vandermonde suivante,

$$S^{(2)}(n, k) = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} (-1)^j S(n-j, k-j).$$

3.1.2 Nombre de Stirling associés de deuxième espèce

Définition 3.1.2 Les nombres de Stirling associés de deuxième espèce $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}^{(2)}$ donnent le nombre de peartition de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ en k blocs de longueur ≥ 2 .

Ces nombres comptent aussi le nombre de façons de distribuer n boules dans k urnes de telle sorte que l'on ait 2 boules au moins par urne. Avec

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}^{(2)} &= 1, \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}^{(2)} = 1 \quad n \geq 1, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}^{(2)} &= (n-1)!, \quad n > 1, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}^{(2)} &= 0 \quad \text{si } n > 1 \text{ et } n < 2k. \end{aligned}$$

Relation de récurrence

Les nombres de Stirling associés de deuxième espèce vérifient la relation de récurrence suivante,

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}^{(2)} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}^{(2)} + (n-1) \left\{ \begin{smallmatrix} n-2 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}^{(2)}. \quad (3.4)$$

Preuve. On obtient une preuve combinatoire de (3.4) en tenant compte de l'élément n : Si cet élément est dans un sous-ensembles à deux éléments uniquement, on a $(n - 1)$ possibilités d'obtenir un tel sous-ensembles et $\left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k-1 \end{matrix} \right\}^{(2)}$ façons d'obtenir un partition avec les $n - 2$ élément restants en $(k - 1)$ sous-ensemble. Si n appartient à un sous-ensembles de taille supérieur à 2, alors on a $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}^{(2)}$ façons d'obtenir des partition avec les $(n - 1)$ élément en k sous-ensembles, l'ajout de n à chacune de ces partitions se fait en k façons. La somme de toutes ces partitions donne le membre gauche de (3.4). ■

La relation de récurrence (3.4), nous permet d'illustrer le tableau des nombres de Stirling associés de deuxième espèce.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6
2	1					
3	1					
4	1	3				
5	1	10				
6	1	25	15			
7	1	56	105			
8	1	119	490	105		
9	1	246	1918	1260		
10	1	501	6825	9450	945	
11	1	1012	22935	56980	17325	
12	1	2035	74316	302995	190575	10395

TABLE 3.2 – Les nombres de Stirling associés de deuxième espèce.

Fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling associés de deuxième espèce est donnée par :

$$\sum_{n \geq 2k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{(2)} \frac{x^n}{n!} = \frac{(\exp(x) - x - 1)^k}{k!}. \quad (3.5)$$

Identities

Les nombres de Stirling associés vérifient l'identité suivante,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-k \end{matrix} \right\} = \sum_{j=0}^k \left\{ \begin{matrix} 2k-j \\ k-j \end{matrix} \right\}^{(2)} \binom{n}{2k-j},$$

ou de façon équivalente,

$$\left\{ \begin{matrix} n+k \\ n \end{matrix} \right\} = \sum_{j=0}^k \left\{ \begin{matrix} k+j \\ j \end{matrix} \right\}^{(2)} \binom{n+k}{k+j},$$

ces nombres vérifient la convolution de type Vandermonde suivante,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\}^{(2)} = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} (-1)^j \left\{ \begin{matrix} n-j \\ k-j \end{matrix} \right\}.$$

3.1.3 Relations avec Les autres nombres

Relation avec les nombres de Cauchy

Théorème 3.1.1 Pour $n \geq 1, k \geq 1$, on a

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j S^{(2)}(n-j+k, k) \binom{n+k}{j} \alpha_j = (n+k) \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{n+1}}{j} \binom{n+k-1}{k-j} \left[\begin{matrix} n+j-1 \\ j-1 \end{matrix} \right] \quad (3.6)$$

$$+ (-1)^m \binom{n+k}{k} \alpha_n. \quad (3.7)$$

Relation avec les nombres de Bernoulli

Théorème 3.1.2 Pour $n \geq 1, k \geq 1$, on a

$$\sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} n-j+k \\ k \end{matrix} \right\}^{(2)} \binom{n+k}{j} \beta_j = (n+k) \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{k-j}}{j} \binom{n+k-1}{k-j} \left\{ \begin{matrix} n+j-1 \\ j-1 \end{matrix} \right\} \quad (3.8)$$

$$+ (-1)^k \binom{n+k}{k} \beta_n. \quad (3.9)$$

$$\sum_{j=0}^n \binom{n+k-1}{j} \left\{ \begin{matrix} n-j+k \\ k \end{matrix} \right\}^{(2)} \beta_j = (n+k-1) \left\{ \begin{matrix} n+k-2 \\ k-1 \end{matrix} \right\}^{(2)}, \quad k \geq 2. \quad (3.10)$$

Théorème 3.1.3 Pour $n \geq 1, r \geq 1$. Les nombres de Stirling associés de deuxième espèce $\left\{ \begin{matrix} n-j+k \\ k \end{matrix} \right\}^2$ et le nombre de Bernoulli généralisés $\beta_n^{(r)}$ vérifient l'identité suivante :

$$\sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} n-j+r \\ r \end{matrix} \right\}^{(2)} \binom{n+r}{j} \beta_j^{(r)} = \binom{n+r}{j} \sum_{j=0}^n (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \beta_n^{(r-j)}. \quad (3.11)$$

Relation avec les nombres Harmoniques

Théorème 3.1.4 Pour $n \geq 1, k \geq 1$ on a

$$\sum_{j=0}^n \frac{S^{(2)}(n-j+k, k)}{(j+2)(n-j+k)!} H_{j+1} = \frac{(-1)^k}{2} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j (j+1)(j+2)}{(k-j)!(n+j+2)!} \left[\begin{matrix} n+j+2 \\ j+2 \end{matrix} \right]. \quad (3.12)$$

3.2 Les nombres de Stirling s -associés

Les nombres de Stirling s -associés de première espèce comptent le nombre de k -permutations de $[n]$ tel que chaque cycle contienne au moins s éléments ($s > 1$). Les nombres de Stirling s -associés de deuxième espèce comptent le nombre de k -partitions de $[n]$ tel que chaque part contienne au moins s éléments.

On note $S^{(s)}(n, k)$ et $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}^{(s)}$ pour désigner les nombres de Stirling s -associés de première et deuxième espèces respectivement.

Remarque 3.2.1 Il est clair que pour $s = 2$, ces nombres se réduisent aux nombres de Stirling associés.

3.2.1 Relation de récurrence

Les nombres de Stirling s -associés des deux espèces vérifient une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux,

$$S^{(s)}(n, k) = \binom{n-1}{s-1} (s-1)! S^{(s)}(n-1, k-1) + (n-1) S^{(s)}(n-1, k), \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}^{(s)} = \binom{n-1}{s-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}^{(s)} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}^{(s)}, \quad (3.14)$$

avec $S^{(s)}(n, 0) = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}^{(s)} = \delta_{n,0}$, et pour $n \neq 0$, $S(n, k)^{(s)} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}^{(s)} = 0$ lorsque $n < 0$ ou $n > sk$.

3.2.2 Fonctions génératrice

Les séries génératrices exponentielles associées aux nombres de Stirling s -associés des deux espèces sont données par,

$$\sum_{n \geq sk} S^{(s)}(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (-\ln(1-x) - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{x^i}{i})^k, \quad (3.15)$$

$$\sum_{n \geq sk} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (\exp(x) - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{x^i}{i})^k. \quad (3.16)$$

3.2.3 Forme explicite

Les nombres de Stirling s -associés de première et deuxième espèces ont les formes explicites données par,

$$S^{(s)}(n, k) = \frac{n!}{k!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_k=n \\ i_j \geq s}} \frac{1}{i_1 i_2 \dots i_k}, \quad (3.17)$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{(s)} = \frac{n!}{k!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_k=n \\ i_j \geq s}} \frac{1}{i_1!i_2!\dots i_k!}. \quad (3.18)$$

Pour $n = sk$, les relations 3.17 et 3.18 donnent,

$$S^{(s)}(sk, k) = \frac{(sk)!}{k!s^k} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{matrix} sk \\ k \end{matrix} \right\}^{(s)} = \frac{(sk)!}{k!(s!)^k}. \quad (3.19)$$

3.3 Nombres r -Stirling

Les nombres r -Stirling représentent une certaine généralisation des nombres de Stirling classique. Carlitz(??) a étudié ces nombres sous le nom de *Weighted Stirling numbers*, Koutrns(??) sous le nom de *central Stirling numbers* et Broder (??) les a aussi étudiés et leurs a donnés le nom *r -stirling numbers*.

3.3.1 r -Stirling de première espèce

Définition 3.3.1 Les nombres r -Stirling de première espèce, notés $S_r(n, k)$, comptent le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments en k cycles tel que les r premiers éléments soient dans des cycles disjoints.

Ou d'une manière plus simple, le nombre de façons de placer n personnes autour de k tables telle que r personnes spécifiées ($r \leq n$) sont dans des tables distinctes.

Les nombres r -Stirling correspondent aux coefficients dans le développement,

$$(x+r)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n S_r(n+r, k+r)x^k. \quad (3.20)$$

Remarque 3.3.1 Pour les cas $r = 0$ et $r = 1$, les nombres r -Stirling se réduisent aux nombres de Stirling classiques pour chaque espèce.

Théorème 3.3.1 (Relation de récurrence) Ces nombres vérifient la relation de récurrence suivante,

$$S_r(n, k) = S_r(n-1, k-1) + (n-1)S_r(n-1, k), \quad k > 0, \quad (3.21)$$

avec $S_r(n, k) = 0$ pour $n < r$ et $S_r(n, k) = \delta_{k,r}$, pour $n = r$.

Preuve. On utilise la technique de l'élément distingué.

- Soit n forme un cycle réduit à lui-même et par conséquent, on a $S_r(n-1, k-1)$ façons d'avoir des permutations à $(k-1)$ cycles d'un ensemble à $(n-1)$ éléments telles que les r premiers éléments soient dans des cycles disjoints.
- Soit il est contenu dans un cycle non réduit à un seul élément et par conséquent, on a $S_r(n-1, k)$ manières d'obtenir des permutations à k cycles d'un ensemble à $(n-1)$ éléments tels que les r premiers éléments soient dans des cycles disjoints et $(n-1)$ possibilité d'ajouter n dans chacune de ces permutations. Le nombre total est la somme de ces deux cas.

On trouve aussi dans la littérature, une autre forme de récurrence à savoir cette relation, ■

$$S_r(n, k) = \frac{1}{r-1} (S_{r-1}(n, k-1) - S_r(n, k-1)), \quad n \geq k \geq r \geq 0. \quad (3.22)$$

La récurrence nous permet d'illustrer Les premiers valeurs de ces nombres pour $r = 2$ et $r = 3$ donnés par les tableaux aux dessous.

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	2	1						
2	6	5	1					
3	24	26	9	1				
4	120	154	71	14	1			
5	720	1044	580	155	20	1		
6	5040	8028	5104	1665	295	27	1	
7	40320	69264	48860	18424	4025	511	35	1

TABLE 3.3 – Les nombres 2-Stirling de première espèce.

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	3	1						
2	12	7	1					
3	60	47	12	1				
4	360	342	119	18	1			
5	2520	2754	1175	145	25	1		
6	20160	24552	12154	3135	445	33	1	
7	181440	241128	133938	40369	7140	742	42	1

TABLE 3.4 – Les nombres 3-Stirling de première espèce.

Fonction génératrice

Ces nombres admettent comme fonctions génératrices les fonctions.

La fonction génératrice exponentiel (vertical),

$$\sum_{n \geq k} S_r(n+r, k+r) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{1-x} \right)^r \left(\ln \left(\frac{1}{1-x} \right) \right)^k, \quad k \geq 0. \quad (3.23)$$

La fonction génératrice ordinaire (horizontal),

$$\sum_{k=0} S_r(n, k) x^n = x^n (x+r)(x+r+1) \dots (x+n-1), \quad n \geq k \geq 0. \quad (3.24)$$

3.3.2 r -Stirling de deuxième espèce

Définition 3.3.2 Les nombres r -Stirling de deuxième espèce, noté $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r$, comptent le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k blocs tel que les r premiers éléments soient dans des blocs disjoints.

Ou encore, le nombre de façons de constituer k équipes depuis n joueurs tels que r joueurs spécifiés ($r \leq n$).

Les nombres r -Stirling correspondent aux coefficients dans le développement,

$$(x - r)^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n+r \\ k+r \end{smallmatrix} \right\} x^k. \quad (3.25)$$

Exemple 3.3.1 L'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ possède 5 partitions en trois blocs non vide, tels que les deux premiers 1 et 2, sont dans des blocs différents. Les partitions sont,

$$\{1\}\{2, 3\}\{4\}, \{1\}\{3, 4\}\{2\}, \{1\}\{2, 4\}\{3\}, \{2\}\{1, 3\}\{4\}, \{2\}\{1, 4\}\{3\}.$$

Par conséquent, $\left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}_2 = 5$.

Relation de récurrence

Théorème 3.3.2 (Relation de récurrence) Ces nombres vérifient la relation de récurrence suivante

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}_r + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r, \quad k > 0, \quad (3.26)$$

avec $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r = 0$ pour $n \leq r$ et $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r = \delta_{k,r}$ pour $n = r$.

Preuve. On utilise la technique de l'élément distingué.

- Soit n forme un singleton et par conséquent, on a $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}_r$ façons d'avoir de partitionner les $(n-1)$ élément restants en $k-1$ sous-ensemble telle que les r premières éléments soient dans des sous-ensemble disjoints.
- Soit il est contenu dans un sous-ensemble non réduit à un seul singleton et par conséquent, on a $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r$ manières de partitionner les $(n-1)$ élément en k sous ensemble telle que les r premières éléments soient dans des sous-ensemble disjoints et k possibilité d'ajouter n dans chacune de ces partitions. Le nombre total est la somme de ces deux cas.

■ On trouve aussi dans la littérature, une autre forme de récurrence à savoir cette relation,

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_{r-1} - (r-1) \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}_{r-1}, \quad n \geq k \geq r \geq 0. \quad (3.27)$$

La récurrence nous permet d'illustrer Les premiers valeurs de ces nombres pour $r = 2$ et $r = 3$ donnés par les tableaux aux dessous.

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	2	1						
2	4	5	1					
3	8	19	9	1				
4	16	65	55	14	1			
5	32	211	285	215	20	1		
6	64	665	1351	910	245	27	1	
7	128	2059	6069	5901	2380	434	35	1

TABLE 3.5 – Les nombres 2-Stirling de deuxième espèce.

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	3	1						
2	9	7	1					
3	27	37	12	1				
4	81	175	97	18	1			
5	243	781	660	205	25	1		
6	729	3367	4081	1890	380	33	1	
7	2181	14197	23772	15421	4550	644	42	1

TABLE 3.6 – Les nombres 3-Stirling de deuxième espèce.

Fonction génératrice

Les fonctions génératrices exponentielle et ordinaire de la suite des nombres r -Stirling de deuxième espèce sont données respectivement par,

$$\sum_n \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} e^{rx} (e^x - 1)^k, \quad k > 0, \quad (3.28)$$

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r x^n = \frac{x^k}{(1-rx)(1-(r+1)x) \dots (1-(k+r)x)}. \quad (3.29)$$

La fonction génératrice double donnée par,

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r \frac{x^n}{n!} y^k = \exp(y(e^x - 1) + rx). \quad (3.30)$$

Formule explicite

La formule explicite pour les nombres r -Stirling est donnée par,

$$\left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k k(-1)^{k-j} \binom{k}{j} (r+j)^n.$$

3.3.3 Propriétés sur les nombres r -Stirling

Orthogonalité

La relation d'orthogonalité entre les nombres de Stirling reste vérifiée pour les nombres r -Stirling.

$$\sum_{k=m}^n S_r(n+r, k+r) \left\{ \begin{matrix} k+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r (-1)^k = \sum_{k=m}^n S_r(k+r, m+r) \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r (-1)^k = (-1)^n \delta_{m,n}.$$

Et aussi équivalente aux relations d'inverse,

$$a_n = \sum_k S_r(n+r, k+r) (-1)^{n-k} b_k \iff b_n = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r a_k. \quad (3.31)$$

Identities

Quelques identités relatives aux nombres r -Stirling de première et deuxième espèce.

$$S_r(n, k) = r^{\overline{n-r}}, \left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}_r = r^{n-r}.$$

Les fonctions symétrique

Les nombres r -Stirling de première et deuxième espèce sont des spécialisations des fonctions symétriques élémentaire et complète. On a

$$S_r(n, n-k) = \sum_{r \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} i_1 i_2 \dots i_k. \quad (3.32)$$

$$\left\{ \begin{matrix} n+k \\ n \end{matrix} \right\}_r = \sum_{r \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} i_1 i_2 \dots i_k. \quad (3.33)$$

3.4 Nombre (r, s) -Stirling de deuxième espèce

Soient R et S deux ensembles de $\{1, 2, \dots, n\}$ avec $|R| = r$ et $|S| = s$. Nous intéressons en premier lieu au nombre de k -partitions (partition d'un ensemble en exactement k blocs) de $\{1, 2, \dots, n\}$ tel que les éléments de R (resp. S) soient dans des blocs différents. Ce nombre, noté $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s}$ et dit (r, s) -Stirling de deuxième espèce. Évidemment, on a

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{s,r}$$

3.4.1 Relations récurrentes

Dans cette section, nous commençons d'abord par donner un théorème dans lequel nous exprimons les nombres r -Stirling de deuxième espèce en fonction des nombres de Stirling de deuxième espèce classique.

Théorème 3.4.1 On a

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = \frac{1}{(k-r)!} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \left\{ \begin{matrix} n-r \\ k-i \end{matrix} \right\} (k-i)! \quad (3.34)$$

Preuve. Soit λ une partition de l'ensemble $[n]$ en k blocs. Supposons que cette partition soit composée de i blocs sous forme de singletons parmi les r premiers éléments et $(k-i)$ blocs non vides extraits de l'ensemble $\{r+1, \dots, n\}$.

Dans ce cas, pour $i = 0, 1, \dots, r$, il existe $\binom{r}{i}$ façons pour extraire i singletons parmi les éléments de l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ et $\left\{ \begin{matrix} n-r \\ k-i \end{matrix} \right\}$ façons pour partitionner l'ensemble $\{r+1, \dots, n\}$ en $(k-i)$ blocs.

Les éléments de l'ensemble $\{i+1, \dots, r\}$, seront par la suite insérés dans les $(k-i)$ blocs (construits ci-dessus) en

$$(k-i) \dots ((k-i) - (r-i) + 1) = \frac{(k-i)!}{(k-r)!}$$

façons. Alors, le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ en k blocs tels que les éléments de l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ soient dans des blocs différents est,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = \frac{1}{(k-r)!} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \left\{ \begin{matrix} n-r \\ k-i \end{matrix} \right\} (k-i)!.$$

■

Exemple 3.4.1 En posant $r = 1$, nous aurons la relation récurrente classique des nombres de Stirling de deuxième espèce

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{(k-1)!} \left[\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} k! + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} (k-1)! \right] \\ &= k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Le théorème suivant est la version du théorème précédent appliquée aux nombres (r, s) -Stirling de deuxième espèce.

Théorème 3.4.2 On a

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} &= \frac{1}{(k-s)!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-j \end{matrix} \right\}_r (k-j)! \\ &= \frac{1}{(k-r)!} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \left\{ \begin{matrix} n-r \\ k-i \end{matrix} \right\}_s (k-i)!, \quad n \geq r+s. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Preuve. Soit λ une partition de l'ensemble $[n]$ en k blocs. Supposons que cette partition soit composée de i blocs sous forme de singletons parmi les r premiers éléments et $(k - i)$ blocs non vides extraits de l'ensemble $\{r + 1, \dots, n\}$.

Dan ce cas, pour $i = 0, 1, \dots, r$, il y a $\binom{r}{i}$ façons pour extraire i singletons parmi les éléments de l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ et $\left\{ \begin{smallmatrix} n-r \\ k-i \end{smallmatrix} \right\}_s$ partitions de l'ensemble $\{r + 1, \dots, n\}$ en $(k - i)$ sous ensembles tels que les éléments $\{r + 1, \dots, r + s\}$ soient dans des blocs différents. Les $(r - i)$ éléments de l'ensemble $\{i + 1, \dots, r\}$ peuvent être insérés dans les $(k - i)$ blocs en

$$(k - i) \dots ((k - i) - (r - i) + 1) = \frac{(k - i)!}{(k - r)!}$$

façons. Alors, le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ en k blocs tels que les éléments de l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ (resp. $\{r + 1, \dots, r + s\}$) sont dans des blocs différents est,

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_{r,s} = \frac{1}{(k - r)!} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \left\{ \begin{smallmatrix} n-r \\ k-i \end{smallmatrix} \right\}_s (k - i)!.$$

■

A partir de la propriété de symétrie de ces nombres par rapport au couple (r, s) , on obtient la deuxième égalité dans (3.35).

Les deux théorèmes suivants nous donnent quelques relations récurrentes qui généralisent celles qui ont été données en (3.34).

Théorème 3.4.3 *Les nombres (r,s) -Stirling de deuxième espèce satisfont aux propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_{r,s} &= 0 && n < r + s \text{ ou } k < s \text{ ou } k > n, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_{r,s} &= \frac{r!s!}{(k - r)!(k - s)!(r + s - k)!} && \text{si } n = r + s \text{ et } s \leq k \leq r + s, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_{r,s} &= k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}_{r,s} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}_{r,s} && \text{si } n > r + s. \end{aligned}$$

Preuve. Pour partitionner un ensemble à n éléments, il est évident que les hypothèses suivantes doivent être satisfaites : $n \geq r + s$ et $\text{Max}(r, s) \leq k \leq n$.

Pour $n = r + s$ et $\text{max}(r, s) \leq k \leq n$, on utilise l'une des identités du 3.35
En effet

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_{r,s} &= \frac{1}{(k - s)!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k - j)! \left\{ \begin{smallmatrix} n-s \\ k-j \end{smallmatrix} \right\}_r, \\ &= \frac{1}{(k - s)!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k - j)! \left\{ \begin{smallmatrix} r \\ k-j \end{smallmatrix} \right\}_r. \end{aligned}$$

et du fait que, pour $j = 0, \dots, s$, on a

$$\left\{ \begin{smallmatrix} r \\ k-j \end{smallmatrix} \right\}_r = \delta_{k-j,r},$$

Il s'ensuit que

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} = \frac{1}{(k-s)!} \binom{s}{k-r} r! = \frac{r!s!}{(k-s)!(k-r)!(s+r-k)!}.$$

Pour le cas $n > r + s$, on présente deux preuves l'une combinatoire et l'autre algébrique.

Preuve combinatoire : Soit λ une partition de l'ensemble $[n]$ en k blocs telle que les éléments de $\{1, \dots, r\}$ (resp. $\{r+1, \dots, r+s\}$) soient dans des blocs différents.

Cette partition est formée :

- Soit à partir d'une partition de l'ensemble $[n-1]$ en k blocs et en ajoutant par la suite l'élément n à chacun des k blocs. Alors il existe dans ce cas $k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s}$ partitions.
- Soit à partir d'une partition de l'ensemble $[n-1]$ en $k-1$ blocs et en ajoutant par la suite l'ensemble $[n]$ en tant que $k^{\text{ième}}$ bloc. Alors il existe dans ce cas $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r,s}$ partitions.

Évidemment, pour $n > r + s$ la distribution des éléments $1, \dots, r$ et des éléments $r+1, \dots, r+s$ dans les différents blocs n'a aucune influence sur ce processus. Par conséquent, on a

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r,s}.$$

Preuve algébrique : Posons

$$\alpha = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} - k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} - \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r,s}.$$

Alors, en utilisant l'une des identités du théorème précédent, on obtient

$$\alpha = \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \frac{(k-1-j)!}{(k-s)!} \times \left((k-j)! \left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-j \end{matrix} \right\}_r - k(k-j) \left\{ \begin{matrix} n-1-s \\ k-j \end{matrix} \right\}_r - (k-s) \left\{ \begin{matrix} n-1-s \\ k-1-j \end{matrix} \right\}_r \right).$$

Vu que $n-s > r$ on utilise l'identité

$$\left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-j \end{matrix} \right\}_r = (k-j) \left\{ \begin{matrix} n-s-1 \\ k-j \end{matrix} \right\}_r + \left\{ \begin{matrix} n-s-1 \\ k-j-1 \end{matrix} \right\}_r,$$

pour évaluer la valeur de α . Autrement dit

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \frac{(k-1-j)!}{(k-s)!} \left(-j(k-j) \left\{ \begin{matrix} n-1-s \\ k-j \end{matrix} \right\}_r + (s-j) \left\{ \begin{matrix} n-1-s \\ k-1-j \end{matrix} \right\}_r \right), \\ &= -\frac{1}{(k-s)!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k-j)! j \left\{ \begin{matrix} n-1-s \\ k-j \end{matrix} \right\}_r + \frac{1}{(k-s)!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k-1-j)! (s-j) \left\{ \begin{matrix} n-1-s \\ k-1-j \end{matrix} \right\}_r, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r,s}.$$

■

Théorème 3.4.4 Les nombres (r, s) -Stirling de deuxième espèce satisfont aux relations suivantes,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1,s} - (r-1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1,s} \\ &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s-1} - (s-1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s-1}, \end{aligned} \quad n \geq r+s, rs \geq 1. \quad (3.36)$$

3.4.2 Fonctions génératrices

Lemme 3.4.1 Pour $r \leq s+k$, on a

$$\begin{aligned} D_x^r \left(x^k (x+1)^s \right) &= \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \frac{(k+j)!}{(k+j-r)!} x^{k+j-r}, \\ D_x^r \left(x^k (x+1)^s \right) &= x D_x^r \left(x^{k-1} (x+1)^s \right) + r D_x^{r-1} \left(x^{k-1} (x+1)^s \right). \end{aligned}$$

Théorème 3.4.5 On a

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \exp(rt) D_{x=\exp(t)-1}^r \left(x^k (x+1)^s \right). \quad (3.37)$$

En particulier, pour $r=0$ nous obtenons la fonction génératrice verticale des nombres r -Stirling,

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_s \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} (\exp(t) - 1)^k \exp(st).$$

Preuve. Supposons que $r \leq s$ (le cas $r \geq s$ pourra être étudié d'une manière similaire). Pour $k \leq r$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k+s-j)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+s-j \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!}, \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{j=r-k}^s \binom{s}{j} (k+j)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+j \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!}, \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j=r-k}^s \binom{s}{j} (k+j)! \sum_{n \geq k+j-r} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+j-r+r \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!}, \\ &= \frac{1}{k!} \exp(rt) \sum_{j=r-k}^s \frac{(k+j)!}{(k+j-r)!} \binom{s}{j} (\exp(t) - 1)^{k+j-r}. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.4.1 on déduit que

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \exp(rt) D_{x=\exp(t)-1}^r \left(x^k (x+1)^s \right).$$

Et pour $k > r$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n \geq k-r} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!}, \\ &= \sum_{n \geq k-r} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k+s-j)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+s-j \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!}, \\ &= \sum_{n \geq k-r} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k+j)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+j \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!}, \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^s (k+j)! \binom{s}{j} \sum_{n \geq k-r+j} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+j \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!}, \\ &= \frac{1}{k!} \exp(rt) \sum_{j=0}^s \frac{(k+j)!}{(k+j-r)!} \binom{s}{j} (\exp(t) - 1)^{k+j-r}, \\ &= \frac{1}{k!} \exp(rt) D_{x=\exp(t)-1}^r \left(x^k (x+1)^s \right). \end{aligned}$$

On note que pour $k = 0$ ou $k = 1$ dans (3.37), on obtient

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ s \end{matrix} \right\}_{r,s} &= \frac{s!}{(s-r)!} s^n, \\ \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ s+1 \end{matrix} \right\}_{r,s} &= \frac{s!}{(s-r+1)!} \left((s+1)^{n+1} - s^n (s+1-r) \right). \end{aligned}$$

■

Corollaire 3.4.1 On a

$$\sum_{n,k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} z^k = D_{x=\exp(t)-1}^r \left((x+1)^s \exp(xz + rt) \right). \quad (3.38)$$

En particulier, pour $r = 0$, on a

$$\sum_{n,k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} z^k = \exp \left(z(\exp(t) - 1) + st \right).$$

3.5 Nombre de Legendre-Stirling

3.5.1 Legendre-Stirling de première espèce

Andrews et Littlejohn [54] ont défini les nombres de Legendre-Stirling de première espèce $\left[\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]\right]$ via,

$$\langle x \rangle_n = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j} \left[\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]\right] x^j. \quad (3.39)$$

Où $\langle x \rangle_j = x(x-2)(x-6)\dots(x-(j-1)j)$.

Exemple 3.5.1 Pour $n = 4$, on a

$$\langle x \rangle_4 = x(x-2)(x-6)(x-12) = -144x + 108x^2 - 20x^3 + x^4.$$

Définition 3.5.1 Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, notons $\left[\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]\right]$ les nombres de Legendre-Stirling de première espèce, qui sont donnés par la relation de recurrence,

$$\left[\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]\right] = \left[\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix}\right]\right] - n(n-1) \left[\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix}\right]\right], \quad (n, k \in \mathbb{Z}). \quad (3.40)$$

Et les conditions initiales,

$$\left[\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\right] = \delta_{n,0}, \quad \left[\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ k \end{smallmatrix}\right]\right] = \delta_{k,0}. \quad (3.41)$$

Cette recurrence nous permet de dresser facilement le tableau des premières valeurs de Legendre-Stirling de première espèce.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	-2	1						
3	0	12	-8	1					
4	0	-144	108	-20	1				
5	0	288	-2304	508	-40	1			
6	0	-86400	72000	-17544	1708	-70	1		
7	0	3628800	-3110400	808848	-89280	4648	-112	1	
8	0	-203212800	177811200	-48405888	5808528	-349568	10920	-168	1

TABLE 3.7 – les premiers nombres de Le-Stirling de première espèce.

Interprétation combinatoire

Les nombres de Stirling de première espèce compte les permutations de $[n]$ avec k cycles. On conclut cette section avec une interprétation combinatoire des nombres de Legendre-Stirling de première espèce. Ici, les maxima de cycle d'une permutation donnée sont les nombres qui sont les plus grands dans leurs cycles. Par exemple, si $\pi = (5)(4, 6, 1)(9, 2, 3)(7, 8)(10)$ est une permutation dans S_{10} , écrite en notation de cycle, alors ses maxima sont 5, 6, 8, 9 et 10.

Définition 3.5.2 Un couple de permutations de Legendre-Stirling de taille n est un couple ordonné (π_1, π_2) avec $\pi_1 \in S_{n+1}$ et $\pi_2 \in S_n$ pour lequel les conditions suivantes sont vérifiées.

1. Le π_1 a un cycle de plus que le π_2 .
2. Les maxima de cycle de π_1 qui sont inférieurs à $n + 1$ sont exactement les maxima de cycle de π_2 .

Théorème 3.5.1 Pour tout $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq n$. Le nombre de paires de permutation de Legendre-Stirling de (π_1, π_2) de n dans lesquels π_2 a exactement k cycles est $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$.

Preuve. Soit $a_{n,k}$ le nombre de couples de permutations de Legendre-Stirling (π_1, π_2) de taille n dans lequel π_2 a exactement k cycle.

Il est clair que $a_{n,0} = \delta_{n,0}$ et $a_{0,k} = \delta_{0,k}$. Donc de (3.40), il suffit de montrer que si $n > 0$ et $k > 0$, alors

$$a_{n,k} = n(n-1)a_{n-1,k} + a_{n-1,k-1}.$$

Pour ce faire, notons d'abord que par la condition 2 de la définition (3.5.2), si (π_1, π_2) est un paire de permutations de Legendre-Stirling de taille n , alors 1 est un point fixe en π_1 si et seulement si c'est un point fixe en π_2 .

Les couples (π_1, π_2) dans lesquelles 1 est un point fixe sont en bijection avec les couples (σ_1, σ_2) de taille $n-1$ dans laquelle σ_2 a $k-1$ cycles en éliminant le 1 de la permutation et en décroissant toutes les autres entrées de 1. Chaque paire (π_1, π_2) dans laquelle 1 n'est pas un point fixe peut être construite de manière unique en choisissant une couple (π_1, π_2) de taille $n-1$ dans laquelle σ_2 a k cycles, en accroissant chaque entrée de chaque permutation de 1, et en insérant 1 après une entrée de chaque permutation. Il y a $a_{n-1,k}$ couples (σ_1, σ_2) et il y a n façons pour insérer une nouvelle entrée dans σ_1 . En effet, il y a $n-1$ façons pour insérer une nouvelle entrée dans σ_2 . Le resultat suit maintenant. ■

3.5.2 Legendre-Stirling de deuxième espèce

Récemment, Everitt et al ont introduit [32] les nombres de Legendre-Stirling de deuxième espèce $\left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \right\}$, qui peuvent être définis par

$$x^n = \sum_{j=0}^n \left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} \right\} \langle x \rangle_j. \quad (3.42)$$

Où $\langle x \rangle_j$ est les coefficients factoriel généralisé défini par,

$$\langle x \rangle_j = \prod_{r=0}^{j-1} (x - r(r+1)), \quad \langle x \rangle_0 = 0.$$

Définition 3.5.3 Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$. Les nombres de Legendre-Stirling de deuxième espèce sont donnés la relation de récurrence,

$$\left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \right\} = \left\{ \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \right\} + k(k+1) \left\{ \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \right\}, \quad (n, k \in \mathbb{Z}). \quad (3.43)$$

avec les conditions initiales,

$$\left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} \right\} = \delta_{n,0}, \quad \left\{ \left\{ \begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix} \right\} \right\} = \delta_{k,0}, \quad (3.44)$$

On peut aussi définir ces nombres de la façon suivante,

$$\left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \right\} = \sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \frac{(2r+1)(r^2+r)^n}{(r+k+1)!(k-r)!}, \quad (n \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.45)$$

$$\left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} \right\} = 0, \text{ et } \left\{ \left\{ \begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix} \right\} \right\} = 0, \left\{ \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \right\} = 1 \quad (n, k \in \mathbb{N}). \quad (3.46)$$

Preuve. De la récurrence (3.43), on a

$$\begin{aligned} \left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} \right\} &= \left\{ \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ j-1 \end{matrix} \right\} \right\} + j(j-1) \left\{ \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ j \end{matrix} \right\} \right\}, \\ &= \sum_{r=1}^{j-1} (-1)^{r+j-1} \frac{(2r+1)(r^2+r)^{n-1}}{(r+j)!(j-1-r)!} + \sum_{r=0}^j (-1)^{r+j} \frac{(2r+1)(r^2+r)^{n-1} j(j+1)}{(r+j+1)!(j-r)!}, \\ &= \sum_{r=1}^{j-1} (-1)^{r+j-1} \frac{(2r+1)(r^2+r)^{n-1}}{(r+j)!(j-1-r)!} \left(\frac{j(j+1)}{(r+j+1)(j-r)} - 1 \right) + \frac{(2j+1)(j^2+j)^n}{(2j+1)!}, \\ &= \sum_{r=1}^{j-1} (-1)^{r+j-1} \frac{(2r+1)(r^2+r)^{n-1}}{(r+j)!(j-1-r)!} \left(\frac{r(r+1)}{(r+j+1)(j-r)} \right) + \frac{(2j+1)(j^2+j)^n}{(2j+1)!}, \\ &= \sum_{r=1}^{j-1} (-1)^{r+j} \frac{(2r+1)(r^2+r)^{n-1}}{(r+j+1)!(j-r)!} + \frac{(2j+1)(j^2+j)^n}{(2j+1)!}, \\ &= \sum_{r=1}^{j-1} (-1)^{r+j} \frac{(2r+1)(r^2+r)^{n-1}}{(r+j+1)!(j-r)!}. \end{aligned}$$

■

La récurrence nous permet de dresser facilement le tableau des premières valeurs de Legendre-Stirling de première espèce.

n\k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	2	1							
3	4	8	1						
4	8	-52	20	1					
5	16	320	292	40	1				
6	32	1936	3824	1092	70	1			
7	64	11648	47824	25664	3192	112	1		
8	128	69952	585536	561104	121424	7896	168	1	
9	256	419840	7096384	11807616	4203824	453056	17304	240	1

TABLE 3.8 – Tableau des nombres de Le-Stirling de deuxième espèce.

Interprétation combinatoire

Il est bien connu que le nombre de Stirling de deuxième espèce $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ compte le nombre de manières de placer n objets en k sous-ensembles non vides. Il est naturel de se demander : que comptent-ils les Legendre-Stirling ? Andrews et Littlejohn ont répondu à cette question en donnant une interprétation combinatoire de ces nombres en [2]. On a

$$x^n = \sum_{j=0}^n \left\{ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right\} \right\} \langle x \rangle_j.$$

Où $\langle x \rangle_j = x(x-2)(x-6)\dots(x-(j-1)j)$. Pour chaque $n \geq 1$, $[n]_2$ désigne l'ensemble $\{1_1, 1_2, 2_1, 2_2, \dots, n_1, n_2\}$, qui consiste en deux exemplaires distincts de chaque nombre entier positif de 1 à n . Par une partition d'ensemble de Legendre-Stirling de $[n]_2$ en k blocs, nous désignons une partition d'ensemble ordinaires de $[n]_2$ en $k+1$ blocs pour laquelle les conditions suivantes sont vérifiées.

1. Un seul bloc, appelé bloc zéro, est distingué, mais pas les autres blocs.
2. Le bloc zéro peut être vide, mais tous les autres blocs ne le sont pas.
3. Le bloc zéro ne peut pas contenir les deux copies d'un nombre quelconque.
4. Chaque bloc non nul contient les deux copies du plus petit nombre qu'il contient, mais ne contient les deux copies d'aucun autre nombre.

Ensuite, Andrews et Littlejohn ont démontré [2] que le nombre de partitions de Legendre-Stirling de $[n]_2$ en k blocs est exactement $\left\{ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \right\}$.

3.5.3 Quelques identités des nombres de Legendre-Stirling

Proposition 3.5.1 Pour tout $n, k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\left\{ \left\{ \begin{smallmatrix} -k \\ -n \end{smallmatrix} \right\} \right\} = (-1)^{k+n} \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]. \quad (3.47)$$

Preuve. Les nombres de Legendre-Stirling de deuxième espèce sont déterminés de manière unique par (3.44) et (3.43), alors il suffit de montrer que les nombres

$$L(n, k) = (-1)^{k+n} \left[\begin{smallmatrix} -k-1 \\ -n-1 \end{smallmatrix} \right]$$

satisfait aussi (3.44) et (3.43).

Pour prouver que $L(n, k)$ satisfait l'équation de gauche dans (3.44), il faut d'abord noter que $L(1, 0) = 0$ par (3.41). Maintenant, si $n \neq 1$, on définit $n = 0$ et $k = n$ dans (3.40) et utilisez (3.41) pour trouver que $L(n, k) = \delta_{n,0}$. La preuve que $L(n, k)$ satisfait l'équation de droite dans (3.44) est similaire. Pour prouver que $L(n, k)$ satisfait (3.43), on note que si $n \neq 0$ et $k \neq 0$, alors on a

$$\begin{aligned} L(n-1, k-1) &= (-1)^{n+k}(-k(-k-1)) \left[\begin{matrix} -k-1 \\ -n \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} -k-1 \\ -n-1 \end{matrix} \right], \\ &= -(-1)^{n+k}k(k+1) \left[\begin{matrix} -k-1 \\ -n \end{matrix} \right] + (-1)^{n+k} \left[\begin{matrix} -k-1 \\ -n-1 \end{matrix} \right], \\ &= -k(k+1)L(n-1, k) + L(n, k). \end{aligned}$$

et le problème est résolu. ■

Proposition 3.5.2 Si $n \geq 1$, alors pour tout i, j avec $1 \leq i, j \leq n$, on a

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} \left[\begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right] \left\{ \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} \right\} = \delta_{i,j}. \quad (3.48)$$

et

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} \left\{ \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} \right\} \left[\begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right] = \delta_{i,j}. \quad (3.49)$$

Preuve. Pour démontrer (3.48), notons tout d'abord que si $i < n$, alors par induction $\left[\begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right] = 0$.

D'autre part, si $i = n$ alors par (3.40), (3.43) et par induction, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} \left[\begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right] \left\{ \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} \right\} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} (n(n-1) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]) \left\{ \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} \right\}, \\ &= n(n-1) \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} \left[\begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right] \left\{ \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} \right\} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} \left[\begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right] \left\{ \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} \right\}, \\ &= \delta_{j,n-1} n(n-1) + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right] \left\{ \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ j-1 \end{matrix} \right\} \right\} \\ &\quad + j(j+1) \left\{ \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ j \end{matrix} \right\} \right\}, \\ &= \delta_{j,n-1} n(n-1) + \delta_{n,j} - \delta_{j,n-1} j(j+1), \\ &= \delta_{n,j}. \end{aligned}$$

La preuve de (3.49) est la même que celle de (3.48). ■

3.6 s -Stirling généralisés de première espèce

Dans cette section, on propose une généralisation des nombres de Stirling de première espèce en utilisant la fonction symétrique $E_k^{(s)}$, à laquelle on donne une définition récursive et une fonction génératrice ordinaire. Certes, il faut noter que la classe combinatoire, dans ce cas, représente le nombre de cycles possibles à construire.

Définition 3.6.1 Pour tout entier positif n , notons $S_s(n, k)$ les nombres de Stirling généralisés de première espèce, qui sont donnés par les conditions initiales,

$$S_s(n, 0) = \delta_{n,0}, \quad S_s(0, k) = \delta_{0,k},$$

et la relation de récurrence,

$$S_s(n, k) = \sum_{j=0}^s (n-1)^j S_s(n-1, k-s+j), \quad (3.50)$$

avec $S_s(n, k) = 0$ sauf si $s \leq k \leq sn$.

Si on fait remplacer l'élément x_i par i dans $E_k^{(s)}(n)$, alors les suites formées par ce changement représentent les nombres de Stirling généralisés de première espèce $S_s(n, k)$. En effet, de la Définition 3.6.1 et la Définition 3.1.1 on donne la proposition suivante.

Proposition 3.6.1 Pour $n \geq 1$ et $s \leq k \leq sn$,

$$S_s(n, k) = E_{sn-k}^{(s)}(1, 2, \dots, n-1). \quad (3.51)$$

Preuve. Remplaçant $n = 2$, on a

$$\begin{aligned} S_s(2, k) &= \sum_{j=0}^s S_s(1, k-s+j), \\ &= \sum_{j=0}^s E_{2s-k-j}^{(s)}(0), \end{aligned}$$

Supposons que cette hypothèse soit vraie pour n . Nous montrons que cela reste vraie pour $n+1$,

$$\begin{aligned} S_s(n+1, k) &= \sum_{j=0}^s (n)^j S_s(n, k-s+j), \\ &= \sum_{j=0}^s (n)^j E_{sn-k+s-j}^{(s)}(n-1), \\ &= \sum_{j=0}^s (n)^j \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}=sn-k+s-j} 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots (n-1)^{\alpha_{n-1}}, \\ &= \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=sn-k+s} 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}, \quad (\alpha_n \text{ varie avec } j) \\ &= E_{s(n+1)-k}^{(s)}(n). \end{aligned}$$

D'après le principe de l'induction la preuve est complète. ■

Il est facile de constater qu'à partir de la relation de récurrence et les conditions initiales dans la Définition 3.6.1, on peut construire la table des nombres de Stirling généralisés et on le nome "*s-Stirling de première espèce*". Comme exemple, on construit le triangle du 2-Stirling de première espèce $S_2(n, k)$.

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	0	1								
2	0	0	1	1	1						
3	0	0	4	6	7	3	1				
4	0	0	36	66	85	54	25	6	1		
5	0	0	576	1200	1660	1270	701	250	65	10	1

TABLE 3.9 – 2-Stirling de première espèce $S_s(n, k)$.

Selon la relation de récurrence (3.50), nous montrerons ci-dessous que $S_s(n, k)$ est le coefficient du $k^{i\text{ème}}$ terme du produit.

Théorème 3.6.1 On a,

$$\prod_{j=0}^{n-1} (x^s + jx^{s-1} + \cdots + j^{s-1}x + j^s) = \sum_{k=0}^{sn} S_s(n, k)x^k. \quad (3.52)$$

Preuve. Remplaçant $n = 1$, on a

$$x^s = 0 + 0 \times x + \cdots + 0 \times x^{s-1} + 1 \times x^s = \sum_{k=0}^s S_s(1, k)x^k.$$

Supposons que cette hypothèse soit vraie pour n . Nous montrons que cela reste vraie pour $n + 1$,

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^n (x^s + jx^{s-1} + \cdots + j^{s-1}x + j^s) &= (x^s + nx^{s-1} + \cdots + n^{s-1}x + n^s), \\ &\quad \times \prod_{j=0}^{n-1} (x^s + jx^{s-1} + \cdots + j^{s-1}x + j^s), \\ &= \sum_{j=0}^s n^j x^{s-j} \sum_{k=0}^{sn} S_s(n, k)x^k, \\ &= \sum_{k=0}^{s(n+1)} \left[\sum_{j=0}^s n^j S_s(n, k-s+j) \right] x^k, \\ &= \sum_{k=0}^{s(n+1)} S_s(n+1, k)x^k. \end{aligned}$$

Par hypothèse d'induction et la Relation (3.50), la preuve est complète. ■

3.6.1 Interprétation combinatoire

Rappelant que les nombres de Stirling de première espèce comptent les permutations de $[n]$ en k cycles. Dans cette section, on donne une interprétation combinatoire cyclique pour les nombres s -Stirling de première espèce. Pour arriver à cette fin, on a besoin de donner la définition suivante, *les maximas* de cycle d'une permutation donnée sont les nombres qui sont les plus grands dans leurs cycles. Par exemple, si $\pi = (1, 3, 5)(2, 6, 8)(7)(4, 9)(10)$ est une permutation de S_{10} , écrite en notation cyclique, *les maximas* de cycle sont alors 5, 7, 8, 9 et 10.

Définition 3.6.2 *Les s -uplets de permutations de Stirling généralisés de longueur n sont les s -uplets $(\pi_1, \dots, \pi_s)$ avec $\pi_1, \dots, \pi_s \in S_n$ pour lesquels les critères suivants sont vérifiés,*

1. *Pour tout $1 \leq j \leq s-1$, le nombre de cycles de π_j est supérieur ou égal au nombre de cycles de π_{j+1} .*
2. *Pour tout $1 \leq j \leq s-1$, les maximas de cycles de π_{j+1} sont inclus dans les maximas de cycles de π_j .*

Exemple 3.6.1 *Pour $n = 3$ et $s = 2$, les paires de permutations possibles de Stirling généralisés (π_1, π_2) de longueur 3 sont,*

2	(123, 123)	(123, 132)	(132, 123)	(132, 132)
3	((1)(23), 123) ((12)(3), 123)	((1)(23), 132) ((12)(3), 132)	((13)(2), 123)	((13)(2), 132)
4	((1)(2)(3), 123) ((12)(3), (12)(3))	((13)(2), (12)(3)) ((13)(2), (13)(2))	((12)(3), (13)(2)) ((1)(23), (1)(23))	((1)(2)(3), 132)
5	((1)(2)(3), (13)(2))	((1)(2)(3), (1)(23))		
6	((1)(2)(3), (1)(2)(3))			

Théorème 3.6.2 *Pour $n \geq 1$ et $s \leq k \leq sn$, le nombre des s -uplets de permutations de Stirling généralisés $(\pi_1, \dots, \pi_s)$ de longueur n ayant simultanément k cycles est $S_s(n, k)$.*

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire est un apport modeste dans la combinatoire et spécialement pour une classe de nombres appelée nombres de Stirling et leurs interprétations. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés utiles, ils consistent principalement à traiter les problèmes dont la division de n éléments en k cycles ou k blocs (groupes). Ils existent en deux espèces (voir trois espèces).

En premier lieu, on a évoqué les deux espèces avec leurs interprétations combinatoires renforcer par des preuves algébriques et par fois avec des configurations combinatoires. Effectivement, distinguer les nombres de première espèce à ceux de deuxième espèce, c'est de permuter ou partitionner $[n]$, sous certaines conditions. Deuxièmement, on a essayé de faire un aperçu sur certaines généralisations de ces nombres à savoir le Stirling s -associé et r -Stirling etc., Ainsi des liens avec d'autres nombres connus ont été abordés. Enfin, nous constatons que les nombres de Stirling apparaissent dans plusieurs applications, notamment : Distribution de Poisson en probabilité, virgule fixe pour les substitutions aléatoires, etc.

Il faut attirer l'attention au fait que parler de la généralisation des nombres de Stirling, c'est comme ouvrir un champ très vaste de notions et propriétés et même plusieurs suites et triangles qui existent déjà ou conjecturés dans la littérature, comme : r -Stirling généralisé, r -Lah généralisé et Legendre-Stirling généralisé, etc.

Bibliographie

- [1] A. Abderrezzak, Généralisation d'identités de Carlitz, Howard et Lehmer, *Aequationes Math.*, 36-46,49, 1995.
- [2] G.E. Andrews, L.L. Littlejohn, A combinatorial interpretation of the Legendre-Stirling numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.* 137(2009) 2581-2590.
- [3] B. Baumslag, B.Chandler, Schaum's Outline of theory and Problems of Group Theory. *Mcgraw-Hill*, 1968.
- [4] A.Bazeniar, M.Ahmia, H.Belbachir, Connection between binomial coefficients with their analogs and symmetric functions, *Turkish Journal of Mathematics.* 42 (2018) 807-818.
- [5] H. Belbachir, A. Benmezai, A q-analogue for binomial coefficients and generalized Fibonacci sequences, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.*
- [6] H. Belbachir, S.Bouroubi, A Khelladi, Connection between ordinary multinomials, Fibonacci numbers, Bell polynomials and discrete uniform distribution, *Annales Mathematicae et Informaticae*, 35 (2008) 21-30.
- [7] H.Belbachir, Unimodalité et propriétés combinatoires de suites numérique, Thèse de Doctorat d'Etat en Mathématiques, *Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene*, 12/2007.
- [8] A. Belkhir, Combinatoire bijective des pavages et des partitions. Thèse de doctorat, *Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene*, le 23/10/2016.
- [9] A. Benyattou, Etude de certaines propriétés des nombres de Bell. diplôme de magister, *Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene*, le 15/07/2014.

- [10] A. Benyattou, Congruences pour quelques suites de nombres combinatoire. Thèse de doctorat, *Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene*, le 24/11/2018.
- [11] F. Bergeron, Introduction à la combinatoire algébrique, *UQAM université du Québec à Montréal*, 2015.
- [12] B. Bondarnenko, Generalized Pascal triangles and Pyramids, their fractals, graphs and applications, The Fibonacci Association, *Santa Clara* (1993), translated from russian by R.C.Bollinger.
- [13] Kh. Boubellouta , Fonctions symétriques et leurs applications à certains nombres et polynômes, (Doctoral dissertation). *Université de Jijel*, 2020.
- [14] M. Boulyere M. Ghedjan, les fonctions symétrique pour la généralisation des polynômes orthogonaux, *Université de Jijel*, 2015.
- [15] I.E. Bousbaa. Combinatoire de suite de Sterling généralise. Thèse de doctorat, *Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene*, Laboratoire RECITS, 2016.
- [16] I.E. Bousba. Combinatoire de suite de Stirling généralise. Thèse de doctorat, *Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene*, Laboratoire RECITS, 2016.
- [17] A. Boussayoud , M. Kerada, S. Araci, M. Acikgoz, Symmetric Functions of The K-Fibonacci and k-Lucas Numbers, Doi : 10, 1142/S179557121500315.
- [18] M. Bouzeraib, Combinatoire et fonctions symétriques généralisées, *Université de Jijel*, 2020.
- [19] A. Broder, The r-Stirling numbers, *Discrete Math.*, 49 (1984), 241-259.
- [20] L. Carlitz, On Abelian fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 35 :122-136, 1933.
- [21] P. Cartier, La théorie classique et moderne des fonctions symétriques, *Séminaire Bourbaki*, (1982-1983).
- [22] P. Cartier, La théorie classique et moderne des fonctions symétriques , *Séminaire Bourbaki*, (1982-1983).
- [23] JP. Chabert, Équations Algébriques et Fonctions Symétriques, P.1-36.
- [24] M. Claude Werquin, Probabilités, *Institut Galilée, Science et technologie*, 2010-2011.

-
- [25] L. Comet Advanced Combinatoire. The Art of Finite and Infinite Expansions, *Revised and Enlarged Edition*, D. Riedel Publishing Co, Dordrecht, 1974.
 - [26] L. Comtet. Advanced Combinatorics, the art of finite and infinite expansions. *Springer science and business media*, 1974.
 - [27] H. Degroot. Unbiased sequential estimation for binomial populations. *Ann. Math. Statist.*, 30 :80-101, 1959.
 - [28] D. Detemple, W. Webb. Combinatorial reasoning, an introduction to the art of counting. *by John Wiley and Sons, Inc., New Jersey*, 2014.
 - [29] S. Doty, G. Walker, Modular symmetric functions and irreducible modular representations of general linear groups, *J. Pure Appl. Algebra*. 82(1), (1992) 1-26.
 - [30] E.S. Egge, Legendre-Stirling Permutations, *Northfield*, MN 55057 USA.
 - [31] L. Enseignement, Algèbre pour l'arithmétique et la géométrie, 2012-2013.
 - [32] W.N. Everitt, L. Littlejohn, R. Wellman, Legendre polynomials, Legendre-Stirling numbers, and the left-definite spectral analysis of the Legendre differential expression, *J. Comput. Appl. Math.* 148 (2002) 213-238.
 - [33] H. Exton. q-Hypergeometric Functions and Applications. *New York Halstead Press, Chichester Ellis Horwood*, 1983.
 - [34] D. Foata, G. Han, Principes de combinatoire classique, Cours et exercices corrigés, *Université Louis Pasteur, Strasbourg*, 2008.
 - [35] A. Fontaine, Groupe des permutation d'un ensemble fini. *Application*, 24/04/2013.
 - [36] H. Fu, Z. Mei, Truncated homogeneous symmetric functions, *Linear Multi-linear Algebra*. (2020) DOI :10.1080/03081087.2020.1733460.
 - [37] W. Gould. The q -Stirling numbers of the first and second kinds. *Duke Math. J.*, 28 :281-289, 1961.
 - [38] D. Grinberg, Petrie symmetric functions, *arXiv*, 2004.11194v1.
 - [39] B.N. Guo, F. Qi, A new explicit formula for the Bernoulli and Genocchi numbers in terms of the Stirling numbers. *Global J. Math. Anal*, 03/01/2015, 33-36.
-

- [40] G. Hains, Groupe symétrique et tableaux Young, *Bulletin AMQ*, 10/1983.
- [41] O. Haddouche, Une Généralisation sur les nombres de stirling, diplôme de magister, *Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene*, le 17/06/2008.
- [42] T. Kim, A note on degenerate Stirling polynomials of second kind, *Proc. Jangjeon Math. Soc.* 20/2017, No.3. pp. 319-331.
- [43] D. Knuth. Permutations, matrices, and generalized young tableaux. *Pacific J. Math.*, 34, 3 :709–727, 1970.
- [44] D.E. Knuth, Two notes on notation, *Amer. Math. Monthly*, 09/09/1992, 403422.
- [45] P. Lissy, Groupe symétrique. Application ,06/05/2010.
- [46] M.S.Maamara,Combinatoire de certaines classes de polynomes de partition.Thèse de doctorat,*Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene*, 2016.
- [47] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, *Oxford University Press, coll. « Oxford Mathematical Monographs »*, 1979.
- [48] P.A. Macmahon, Two applications of general theorems in combinatory analysis, *Proceedings of the London Mathematical Society.* 15 (1916) 314-321.
- [49] N.I. Mahmudov, On a class of q-Bernoulli and q-Euler polynomials. *Adv. Difference equ.*2013 :108, <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-108>.
- [50] M. Mansuy, Tableau de Young et bases cristallines de $u_q(sL_{n+1})$, 29 /11/ 2012.
- [51] A. De Moivre, The doctrine of chances,(first ed.1718 and second ed.1738),reprinted by Chelsea,N.Y(1967), Third edition (1756).
- [52] A. De Moivre, Miscellanca Analytica de Scrichus et Quadraturis,J.tomson and J.Watts, London,(1731).
- [53] L. Moura, Recurrence Relations, *Winter*, 2010.
- [54] N. Nielsen. IIndbuch der Theorie der Gummufunktion. *B.G. Teubner, Leipzig*, 1906.
- [55] F. Qi, B.N. Guo, A closed form for the Stirling polynomials in terms of the Stirling numbers, preprints (2017), 2017030055, doi : 10.20944/preprints201703.0055.v1.

- [56] A. Rahim, Etude sur les nombres de Jacobi-Stirling. Thèse de doctorat, *Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene*, le 02/07/2018.
- [57] B. Remmel, Bijective proofs of some classical partition identities, *J. Combin.Theory Ser. A*, 33 (1982), 273-286.
- [58] J. Rouget, Le groupe symetrique, 2018.
- [59] B. Sagan. The ubiquitous Young tableau, Invariant Theory and Tableaux. *Dennis Stanton, IMA, Math. Appl.*, 19 :262-298, 1990.
- [60] B. Sagan, The symmetric group representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions, Wadsworth and Brooks/Cole, *Pacific Grove*, 1991.
- [61] J. Sixdeniers, K. Penson and A. Solomon. Extended Bell and Stirling Numbers From Hypergeometric Exponentiation. *J. Integer Seq.*, 04/2001.
- [62] N.J.A. Sloane, The On Line Encyclopedia of Integer Sequences. Published electronically at [http : //www.research.att.com/njas/sequences](http://www.research.att.com/njas/sequences), 2014.
- [63] J. Stirling. *Methodus Difleeentialis. Sive Tractatus De Summatione et Interpolazione Serierum Infinitorum*, London, 1730.
- [64] M. Tigane, Combinatoire des nombres de Stirling et de Bell généralisés. diplôme de magister, *Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene*, le 04/01/2011.
- [65] S.O. Warnaar, The Andrews-Gordon Identities and q-Multinomial coefficients *Commun. Math. phys.* 184(1997)203-232.
- [66] S.O. Warnaar, Refined Q-trinomial coefficients and charater identities , *J.Stat.PHYS* .102(2001), no. 3-4, 1065-1081.

Résumé

Le domaine de ce mémoire est la combinatoire énumérative, notamment la combinatoire des numériques et des interprétations combinatoires. Dans un premier temps, on discute sur les nombres de Stirling classiques de première et deuxième espèces et leurs interprétations combinatoires. Les Stirling de première espèce représentent le nombre de permutations de $[n]$ en k cycles, et le deuxième espèce le nombre de partitions de $[n]$ en k blocs. Ensuite, on donne aussi des liens entre ces nombres et d'autres connus utiles dans ce domaine. Enfin, on présente certaines généralisations qui apparaissent dans la littérature avec leurs interprétations et identités chaperonnés par des preuves intéressantes.

Mots clés : Nombres de Stirling, Partition, Permutation, Nombres de Lah, Fonction génératrice, généralisation.

Abstract

The field of this memory is enumerative combinatorics, in particular number combinatorics and combinatorial interpretations. First, the classical Stirling numbers of the first and second kinds and their combinatorial interpretations are discussed. The first kind of Stirling represents the number of permutations of $[n]$ in k cycles, and the second kind the number of partitions of $[n]$ in k blocks. Then, connections are given between these numbers and other known numbers useful in this field. Finally, we present some generalizations that appear in the literature with their interpretations and identities supervised by interesting proofs.

Key words : Stirling numbers, Partition, Permutation, Lah numbers, Generating function, Generalization.