

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



No Réf :.....

Centre universitaire
Abd Elhafid Boussouf -Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de
Master

En: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

**Etude de la dynamique et chaotique du système
de Lorenz**

Préparé par :

- BOUCHENINE HOUSSAM
- GUERMACHE OUSSAMA

Soutenue devant le jury:

Boudjerida Nadjat	M.A.A	C. U. Abd Elhafid Boussouf
Labed Boudjemaa	M.A.A	C. U. Abd Elhafid Boussouf
Meskine Habiba	M.A.A	C. U. Abd Elhafid Boussouf

Présidente
Rapporteur
Examinatrice

Année Universitaire : 2020/2021

REMERCIEMENTS

Avant tout nous remercions ALLAH le tout puissant et miséricordieux qui nous a donné la force, la réussite et la patience d'accomplir ce modeste travail. Nous remercions nos très chers parents pour leur soutien moral qui nous a permis de réussir et de terminer nos études.

Nous tenons à remercier énormément notre encadreur Monsieur Labed Boudjama pour son aide appréciable sa disponibilité et ses conseils qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, qui ont accepté d'être membre du jury et de juger ce travail.

Je tiens, surtout, à adresser mes grands reconnaissance à toute ma famille, et tous mes amis, et tous mes collègues sans exception, qui m'ont supporté, soutenu et encouragé tout au long de ces années.

Dedicace

A mon cher père " Moussa " et ma chère mère " Fadila "

A mon binôme Oussama

A ma nièce Siwar et mon neveu Youssef

A mes frères et ma sœur

A toute ma famille et ma belle famille

A mes chers amis .

Houssam

Dedicace

A mon cher père " abdelmalek " et ma chère mère " hadjira "

A mon binôme houssam

A mes amis tchama et zaki et karim et fayssel

A mes frères et ma sœur

A toute ma famille et ma belle famille

A mes chers amis .

Oussama

Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons les résultats de l'étude de la dynamique chaotique du système de Lorenz.

Dans cette étude nous analysons d'abord la nature des points fixes et leurs stabilité, par des méthodes numériques ou théoriques, nous construisons les bifurcations du système, les attracteurs et leurs bassins d'attraction.

Dans le premier chapitre, nous présentons les notions principales et les théorèmes essentiels des systèmes dynamiques et les attracteurs.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons l'étude du système chaotique et Propriétés de systèmes chaotiques.

Dans le troisième chapitre, nous présentons l'étude du système Lorenz, Nous avons étudié les points fixes et leurs stabilités.

Table des matières

Remerciements	3
Dedicace	4
Résumé	6
Historique de la théorie du chaos	1
Introduction Générale	5
1 Système dynamique	6
1.1 Introduction	6
1.2 Définitions d'un système dynamique	6
1.3 Classification des systèmes dynamiques	8
1.3.1 Systèmes dynamiques à temps continu	8
1.3.2 Système dynamique à temps discret	8
1.3.3 Système autonomes ou non autonomes	8
1.3.4 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs	9
1.4 Comportement des systèmes dynamiques	10
1.4.1 Espace de phase	10
1.4.2 Espace d'état	10
1.4.3 Flot d'un système dynamique	10
1.4.4 Trajectoires et orbites	11
1.5 Propriétés des systèmes dynamiques	11
1.5.1 Point fixe	11
1.5.2 Ensembles limites	11
1.5.3 Portrait de phase, cycles limites et orbite périodique	12
1.6 Stabilité des systèmes dynamiques à temps continu	13
1.6.1 Classification des points d'équilibres	13
a. Cas des systèmes linéaires	13

b. Cas des systèmes non linéaires	14
1.7 Conclusion	14
2 Système chaotique	15
2.1 Introduction	15
2.2 Définition du chaos	15
2.3 Classes des systèmes chaotiques	15
2.3.1 Systèmes chaotiques continus	15
a. Système de Lorenz	16
b. Système de Rössler	16
2.3.2 Systèmes chaotiques discrets	17
a. Système de Hénon	18
b. Système Hénon-Heiles ou Hénon modifié	19
2.4 Propriétés de systèmes chaotiques	20
2.4.1 Non-linéarité	20
2.4.2 Déterminisme	20
2.4.3 Aspect aléatoire	20
a. Aspect aléatoire du système de Rössler	21
b. Aspect aléatoire du système de Hénon :	21
2.4.4 Sensibilité aux conditions initiales	22
. Stabilité aux conditions initiales du système de Lorenz :	23
2.4.5 Notion d'attracteur	24
a. Attracteurs réguliers :	24
b. Attracteurs étranges :	24
2.4.6 Exposants de Lyapunov	24
2.5 Conclusion	26
3 Système Lorenz	28
3.1 Introduction	28
3.2 Points fixes	29
3.3 Stabilité des points fixes	30
3.4 Etude de comportement du système	33
3.4.1 Étudions le modèle de Lorenz pour $0 < r < 1$	34
3.4.2 Étudions le modèle de Lorenz pour $1 < r < 24$	37
3.4.3 Étudions le modèle de Lorenz pour $r > 25$	40
3.5 Conclusion	42

Conclusion générale	48
Bibliographie	49

Table des figures

2.1	Attracteur de Rössler	17
2.2	Attracteur de Hénon	18
2.3	Attracteur de Hénon-Heile	19
2.4	Aspect aléatoire du système de Rössler	21
2.5	Aspect aléatoire du système de Hénon	22
2.6	Sensibilité aux conditions initiales (Système de Lorenz)	23
2.7	Attracteur de Lorenz	25
2.8	Divergence de deux trajectoires dans le plan de phase	26
3.1	Graphes de la stabilité des valeurs propres	34
3.2	Evolutions temporelles de x, y, z avec $r = 0.5$	35
3.3	$x(t)$ pour différentes valeurs de r	35
3.4	$z(t)$ pour différentes valeurs de r	36
3.5	Différentes conditions initiales / $r = 0.5$	36
3.6	Trajectoires avec $r = 0.5$	37
3.7	Position $x(t)$ pour $r = 15$	38
3.8	Position $z(t)$ pour $r = 15$	39
3.9	Trajectoires pour $r = 15$	40
3.10	Trajectoires pour $r = 15$	41
3.11	Position $x(t)$ pour $r = 30$	43
3.12	Position $x(t)$ pour $r = 30$	44
3.13	Position $z(t)$ pour $r = 30$	45
3.14	Trajectoire pour $r = 30$	46
3.15	projection sur (x, y) avec $r = 30$	47

Historique de la théorie du chaos :

La signification scientifique du chaos n'a été citée qu'à la fin du XIX^e siècle par Henri Poincaré

(1854-1912), car depuis les travaux d'Isaac Newton (1642-1727), la science était dominée par le déterminisme. Moyennant la connaissance des conditions initiales d'un système donné, les scientifiques pensaient pouvoir prédire complètement et précisément le futur du système en question. Un siècle après Newton, Pierre-Simon Laplace (1749-1827) définit le sens absolu du déterminisme, il affirmait que l'état présent de l'univers permettait en principe de prédire complètement son futur. Mais Poincaré allait donner tort à Laplace, il avait en effet montré que, malgré un caractère déterministe, le problème des trois corps en mécanique céleste (exemple Terre-lune-soleil) ne pouvait pas donner lieu à la prédiction [1].

On a ainsi pu tester la stabilité de ce système en comparant les trajectoires suivies par un des corps à partir de deux positions initiales très proches : ces trajectoires restent proches l'une de l'autre à court terme et on peut donc prédire les éclipses, mais elles deviennent complètement différentes à long terme, une toute petite différence initiale a donc produit un effet considérable. C'est dans cette extrême sensibilité aux conditions initiales que réside l'origine de l'imprédictibilité du chaos déterministe. Poincaré avait remarqué cet effet puisqu'il a écrit : " Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir et alors nous disons que cet effet est dû au hasard "[1].

L'idée que les petites causes peuvent avoir quelquefois de grands effets a été notée par les historiens et autres depuis longtemps, par exemple dans la fameuse expression "pour manque d'un clou un royaume a été perdu ". En 1860 James Maxwell a discuté comment les collisions entre molécules dures de la sphère pourraient mener à l'amplification progressive du rendement aléatoire microscopique dans les gaz[2].

En 1898 Jacques Hadamard a noté la divergence générale de trajectoires dans l'espace, et Pierre Duhem a discuté la signification générale possible de ceci en 1908, il a donné le résultat qu'on ne peut jamais atteindre une prédiction complète du système

chaotique, et cela à cause des conditions initiales aléatoires nécessairement présentes dans le théorème de Hadamard[1].

En 1961, Edward Lorenz, météorologue et professeur de mathématiques au MIT (Massachusetts Institut of Technology) observa par hasard le phénomène qui s'appellera plus tard la théorie de chaos déterministe, à la suite de calculs visant à prévoir les phénomènes météorologiques. Ces prévisions nécessitaient un grand nombre de calculs d'équations différentielles complexes à très grand nombre de variables impossible à faire à la main, il a utilisé alors un ordinateur, son Royal Mcbee LGP-300 qui est entré dans l'histoire de la théorie du chaos, et qui a fait de Lorenz le père officiel de cette théorie puisque les calculs des systèmes chaotiques régissant ces phénomènes étaient difficiles à comprendre et à simuler sans ordinateur. Après plusieurs heures de calculs, Lorenz avait obtenu une série de résultats et a décidé de repasser une deuxième fois ces données dans l'ordinateur pour s'assurer du résultat. Pour gagner du temps, il avait entré les variables avec trois chiffres après la virgule au lieu de six, il pensait qu'une faible variation dans les variables à la base d'un calcul aurait une incidence du même ordre de grandeur sur le résultat final, mais à sa grande surprise les résultats étaient totalement différents de la première série. Il venait de découvrir le comportement chaotique d'un système non linéaire : soit, d'infimes différences dans les conditions initiales d'un système déterministe entraîneraient des résultats complètement différents. Pour mieux comprendre l'importance de cette sensibilité aux conditions initiales Lorenz a eu recours à une métaphore qui contribua au succès médiatique de la théorie du chaos : "le simple battement d'aile de papillon au Brésil pourrait déclencher une tornade au Texas"[1].

En 1971, le physicien belge David Ruelle et le mathématicien Floris Takens ont également publié un article dans lequel ils avaient analysé les états finaux des modèles mathématiques de systèmes qui dissipent une partie de leur énergie en chaleur. Les résultats ont montré que l'ensemble des états finaux d'un tel système a une nature fractale : C'est un attracteur étrange. Le mouvement sur un tel attracteur dépend énormément des conditions initiales ; c'est la propriété appelée effet papillon par Lorenz. En appelant bifurcation le point où une faible variation d'un paramètre induit un changement qualitatif de la solution d'une équation, Ruelle et Takens ont montré qu'un tout petit nombre de bifurcations suffit à produire un comportement chaotique et donc à engendrer la turbulence. Quatre ans plus tard, l'étude expérimentale d'un fluide en rotation par les physiciens Jerry Gollub et Harry Swinnay, du City Collège de New York, montrait que l'apparition de la turbulence suit bien dans ce cas la description de Ruelle et Takens mais le mot Chaos n'a pas encore été utilisé ; il était introduit par le

mathématicien Yorke en 1975 et la théorie du chaos déterministe sera alors appliqué à l'étude de phénomènes dans *dive* [1].

Introduction Générale

Les systèmes dynamiques chaotiques sont des systèmes déterministes non linéaires, apériodique et borné. Les signaux qui évoluent dans ces systèmes sont en général à large bande et très sensibles aux conditions initiales, ce qui fait apparaître leur trajectoire comme un bruit pseudo aléatoire. En raison de ces propriétés, les signaux chaotiques sont de plus en plus utilisés dans les systèmes de communications, permettant ainsi de transférer les informations entre deux systèmes sans altérer le contenu. Afin d'augmenter le degré de sécurité, on utilise la cryptographie chaotique qui consiste à noyer l'information dans un signal chaotique.

Depuis longtemps, le chaos était synonyme du désordre et de confusion. Il s'opposait à l'ordre et devait être évité car la science était caractérisée par le déterminisme, la prévisibilité et la réversibilité. Poincaré fut l'un des premiers à entrevoir la théorie du chaos, il découvrit la notion de sensibilité aux conditions initiales à travers le problème de l'interaction de trois corps célestes. Le terme chaos définit un état particulier d'un système dont le comportement ne se répète jamais qui est très sensible aux conditions initiales, et imprédictible à long terme. Des chercheurs d'horizons divers ont alors commencé à s'intéresser à ce comportement. Le chaos a ainsi trouvé de nombreuses applications dans différents domaines tel que la physique, la biologie, la chimie, l'économie, les télécommunications (Cryptage de l'information)...etc. Nous nous intéresserons principalement dans ce chapitre aux systèmes dynamiques chaotiques sur leurs applications, aspect aléatoire, les attracteurs étranges et les différentes propriétés de ces systèmes, ce qui nous permettra de mieux comprendre la nature du chaos.

L'étude des systèmes dynamiques non linéaires ont tardivement fait l'objet d'intenses recherches et explorations. En 1963, le météorologue Edward Lorenz venait de découvrir le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. Les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de 1975 dénommés les systèmes chaotiques par Tien-Yien Li et James A Yorke qui ont présenté pour la première fois le terme chaos. Cependant, les travaux de David Ruelle et du mathématicien Floris Takens menaient bien avant cette découverte, et vont être très utiles à la compréhension de la dynamique chaotique.

Ce mémoire se compose de 3 chapitres à savoir :

Après une introduction général, le chapitre 1 présente des définitions sur les systèmes dynamiques et Comportement des systèmes dynamiques.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude du Propriétés de systèmes chaotiques.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude du système lorenz (Chercher les points fixes et etude de comportement du système).

Chapitre 1

Système dynamique

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous voulons étudier le comportement d'un système dynamique avec un accent particulier sur le temps continu. On introduit, notamment, les notions de trajectoire, orbite...

1.2 Définitions d'un système dynamique

Un système dynamique est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'état (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. L'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance :

- de son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant t_0 .
- de sa loi d'évolution.

Définition 1.2.1. *Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet $(X; T; f)$ constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état $f : X \times T \rightarrow T$, qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales, l'état du système à tout instant.*

Donc, on peut définir un système dynamique comme une description d'un phénomène physique qui évolue au cours du temps (système continu), ou par rapport à une autre variable (système discret).

Définition 1.2.2. *Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est une application :*

$$f: R^+ \times R^n \rightarrow R^n.$$

Définie sur tout $R^+ \times R^n$, telle que :

- $f(., x) : R^+ \rightarrow R^n$ est continue,
- $f(t, .) : R^n \rightarrow R^n$ est continue,
- $f(0, x) = x$,
- $f(t + s, x) = f(t, f(s, x))$ pour $t, s \in R^+, x \in R^n$.

Définition 1.2.3. Soit le système dynamique linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}, t \in R^+, x_0 \in R^n. \quad (1.1)$$

Où A est une matrice constante. La solution de (1.1) est :

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique du fait que l'application :

$$f: R^+ \times R^n \rightarrow R^n.$$

Qui à tout $t \in R^+, x \in R^n$ associe :

$$f(t, x) = e^{At} x. \quad (1.2)$$

Vérifie les quatre propriétés précédentes.

Définition 1.2.4. Soit le système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x). \quad (1.3)$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système (1.3) le point $x^* \in R^n$ tel que :

$$f(x^*) = 0.$$

1.3 Classification des systèmes dynamiques

1.3.1 Systèmes dynamiques à temps continu

Un système dynamique dans un temps continu est représenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{x}_t = f(x, t, p). \quad (1.4)$$

Où $x \in R^n$ et $p \in R^r$ où $f : R^n \times R^+ \rightarrow R^n$ désigne la dynamique du système.

1.3.2 Système dynamique à temps discret

Un système dynamique dans le cas discret est représenté par une application (fonction itérative) sous la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, p), \quad x_k \in R^n \quad \text{et} \quad p \in R^r, \quad k = 1, 2, 3... \quad (1.5)$$

Où $f : R^n \times Z^+ \rightarrow R^n$ indique la dynamique du système en temps discret.

1.3.3 Système autonomes ou non autonomes

Lorsque le champ de vecteur f ne dépende pas explicitement de temps, le système (1.4) est dit autonome, dans ce cas l'écrira :

$$\dot{x} = f(x, p).$$

Dans le cas contraire on dira qu'il est non autonome.

En utilisant un changement de variable approprié, on peut facilement transformer un système non autonome de dimension n en un système autonome équivalent de dimension $n+1$.

Exemple 1.3.1. Soit l'équation :

$$\dot{x} = -\frac{x}{1+t}.$$

Cette équation est non autonome.

Remarque 1.3.1. On peut aussi utiliser le procédé d'extension d'état pour transformer un système non autonome en système autonome.

En effet, la non autonomie se traduit par une équation de la forme :

$$\dot{x} = f(x, t, p).$$

Il suffit dès lors d'ajouter l'état $x_{n+1} = t$, la forme ce qui réhabilite la forme :

$$\dot{x} = f(x, p).$$

Avec cette fois $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et l'équation supplémentaire $\dot{x}_{n+1} = 1$.

Exemple 1.3.2. Soit le système non-autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 3t \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

On pose $x_3 = t$, alors $\dot{x}_3 = 1$, donc le système autonome est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases}$$

1.3.4 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

En physique, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, et possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie, et possède au moins un terme dépendant de la vitesse.

Les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, et pour préciser cette définition, on dit qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale x_0 a un et un seul état final $x(t)$, il faut pour cela qu'il existe une application bijective ϕ de l'espace des phases.

$$\phi : I \times \mathbb{R}^+ \rightarrow I,$$

$$(x, t) \rightarrow \phi_t(x) = \phi(x, t).$$

Qu'on appelle flot et qui possède les propriétés suivantes :

$$\phi_t(x_0) = x_0,$$

$$\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0)),$$

pour tous $t, s \in \mathbb{R}^+$.

Remarque 1.3.2. *Si le système est dissipatif, le flot n'est pas bijectif et il existe en général un (ou plusieurs) attracteurs dans l'espace des phases du système .*

1.4 Comportement des systèmes dynamiques

Un système dynamique est caractérisé par un certain nombre de variables d'état, qui est la propriété de définir complètement l'état du système à un instant donné. Le comportement dynamique du système est ainsi relié à l'évolution de chacune de ces variables d'état.

1.4.1 Espace de phase

L'espace de phase est un espace souvent multi-dimensionnel permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système dynamique décrit par des équations différentielles par rapport au temps.

1.4.2 Espace d'état

L'espace d'état est l'ensemble des coordonnées nécessaires à la description complète d'un système , cet espace peut être continu ou discret.

1.4.3 Flot d'un système dynamique

Soit M un ensemble quelconque ,et G un groupe additif ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$) considérons $\{\phi^t\}_{t \in G}$ un groupe à un paramètre d'applications M dans M indexées par le groupe G .

On appelle flot ou système dynamique le couple $(M, \{\phi^t\}_{t \in G})$. L'ensemble M précédent constitue l'espace des phases du flot . Tout point x de cet espace représente un état du système dynamique .

1.4.4 Trajectoires et orbites

Définition 1.4.1. Soient $(M, \{\phi^t\}_{t \in G})$ un système dynamique et x un état de l'espace des phases. On appelle trajectoire d'un point x de M l'application définie sur G et à valeurs dans M par :

$$\begin{aligned}\phi : G &\rightarrow M, \\ t &\rightarrow \phi^t(x).\end{aligned}$$

Donc, la trajectoire est une solution du système différentiel.

1.5 Propriétés des systèmes dynamiques

1.5.1 Point fixe

Les propriétés des systèmes dynamiques non linéaires, qui évoluent au cours de temps, sont fortement liées à l'évolution des points d'équilibre du système .

Tout changement dans leur nombre ou leur stabilité agit parfois de façon dramatique sur le comportement du système . De plus, ces changements se font suivant un petit nombre de scénarios qui permettent d'indiquer une classification des changements des comportements.

Définition 1.5.1. (à temps continu) Un point critique (ou point singulier, ou point stationnaire) de l'équation $\dot{x}_t = f(x, t, p)$ est un point x^* de l'espace des phases vérifiant l'équation $f(x^*) = 0$.

Remarque 1.5.1. Par un changement de variable $z = x - x^*$ on peut ramener le point à l'origine (0).

Définition 1.5.2. (à temps discret) Un point fixe d'une application $x_{k+1} = f(x_k, p)$ est un point invariant par f , c'est-à-dire un point x^* de l'espace des phase vérifiant l'équation $f(x^*) = x^*$.

Géométriquement, le point fixe est une intersection de la courbe de la fonction $y = f(x)$ avec la bissectrice $y = x$.

1.5.2 Ensembles limites

Définition 1.5.3. Un point $a \in I$ est un point ω -limite d'une trajectoire $x(x_0, t)$ s'il existe une suite $t_n \rightarrow +\infty$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n} = a.$$

Où ϕ_t est le flot du système $\frac{dx}{dt} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^k(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}^n$, et $x(x_0, t)$ est une solution de ce système avec $x(0) = x_0$.

Définition 1.5.4. Un point $b \in I$ est un point α -limite d'une trajectoire $x(x_0, t)$ s'il existe une suite $t_n \rightarrow -\infty$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n} = b.$$

Définition 1.5.5. L'ensemble des points α -limites (resp ω -limite) est désigné par $\alpha(x)$ (resp $\omega(x)$), et on définit l'ensemble limite de $x(x_0, t)$ par l'ensemble :

$$\alpha(x) \cup \omega(x).$$

1.5.3 Portrait de phase, cycles limites et orbite périodique

Définition 1.5.6. Soit le système planaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} . \quad (1.6)$$

Où P, Q sont des polynôme en x et y . Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.7) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites. Les points critiques du système (1.7) sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase .

Définition 1.5.7. :

1. Une solustion périodique du système (1, 7) est une solution telle que :

$$(x(t + T), y(t + T)) = (x(t), y(t)) \quad \text{pour } T > 0,$$

à toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phase.

2. Un cycle limite du système (1, 7) est une orbite isolée, c'est-à-dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans sont voisinage.
3. L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximal de la variable x sur le cycle limite.
4. Un cycle d'ordre p (ou orbite périodique d'ordre p ou encore un $(p - \text{cycle})$) est un ensemble

de p points $\{x_0^*, x_1^*, \dots, x_{p-1}^*\}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= f(x_i^*), \quad i = 0, 1, \dots, p-2, \\ x_p^* &= f(x_{p-1}^*) = x_0^*, \\ x_i^* &= f^p(x_i^*), \quad i = 0, 1, \dots, p-1, \\ x_i^* &\neq f^h(x_i^*), \quad i = 0, 1, \dots, p-1, \quad 1 \leq h \leq p, \end{aligned}$$

où p est l'entier minimal tel que : $x_0^* = f^p(x_0^*)$. Ainsi, les n éléments d'une orbite de période n correspondent aux points fixes propres de f^n .

1.6 Stabilité des systèmes dynamiques à temps continu

La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre. Il existe quelques concepts pour la stabilité des systèmes dynamiques tel que la stabilité au sens de Lyapunov.

1.6.1 Classification des points d'équilibres

a. Cas des systèmes linéaires

Considérons le système linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax. \quad (1.7)$$

Où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et A une matrice constante inversible. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A .

Définition 1.6.1. :

1. Si les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont réelles et de même signe, la solution $x = 0$ est appelée noeud.
2. Si les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution $x = 0$ est appelée selle.

3. Si les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec $\operatorname{Re}(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$ la solution $x = 0$ est appelée foyer.
4. Si les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0, i = 1, \dots, n$ la solution $x = 0$ est appelée centre.

b. Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x). \quad (1.8)$$

Définition 1.6.2. Un point critique de x^* de (1.8) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles négatives, il est appelé sources si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles positives, il est appelé selle s'il est hyperbolique et si $A = Df(x^*)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive ou au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

Théorème 1.6.1. Soit $\dot{x}(t) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^1,$ un système dynamique à temps continu. Si x^* un point fixe ($f(x) = 0$), alors si les valeurs propres de $Df(x^*)$ sont de partie réelle négative x^* est stable, et instable si l'une de ces valeurs propres de $Df(x^*)$ est de partie réelle positive.

1.7 Conclusion

L'intérêt de ce chapitre est de fournir les notions de base des systèmes dynamiques, telles que : la représentation mathématique des systèmes dynamiques, leurs classification l'espace de phases, les orbites, les trajectoires, la variété stable, etc...

Chapitre 2

Système chaotique

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est concerné quelques notions de base de chaos ,ainsi nous présentons les classes des systèmes chaotiques. De plus, on a abordé quelques propriétés des systèmes chaotiques.

2.2 Définition du chaos

Bien qu'il n'existe pas une définition du chaos adoptée de façon universelle dans la littérature, on pourrait dire que c'est un phénomène qui peut apparaître dans les systèmes dynamiques déterministes non linéaires caractérisés par une évolution qui semble aléatoire et un aspect fondamental d'instabilité appelé sensibilité aux conditions initiales, ce qui le rend imprédictible en pratique à long terme [4].

2.3 Classes des systèmes chaotiques

Il existe plusieurs systèmes chaotiques qui sont utilisés pour générer les signaux chaotiques comme les systèmes chaotiques continus et les systèmes chaotiques à temps discret.

2.3.1 Systèmes chaotiques continus

Un système chaotique à temps continu est décrit par un système d'équation différentielle de forme [7]

$$\dot{x} = f(t, x, u), y = h(t, x, u). \quad (2.1)$$

Où x est le vecteur d'état de dimension n , $f : R^n \rightarrow R^n$ est une fonction non linéaire désignant le champ de vecteur, $h : R^n \rightarrow R$ une fonction éventuellement non linéaire qui désigne le vecteur de sortie et $u \in V \subseteq R^p$ représente l'entrée du système. Si ce système ne dépend pas de l'entrée, on aura alors

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (2.2)$$

Il existe plusieurs systèmes chaotiques continus. Parmi eux, on peut citer les systèmes de Lorenz, Rössler, Bogdanov, le circuit de Chua, etc...

a. Système de Lorenz

Le système de Lorenz est généré par le système d'équations suivant :[9]

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = x(b - z) - y \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (2.3)$$

Cet exemple a été publié en 1963 dans un journal météorologique. Les variables x , y et z représentent les états du système à chaque instant. a , b , c sont les paramètres du système. Le système présente un comportement chaotique pour $a = 12$, $b = 26$, $c = 9$ et présente un attracteur étrange en forme d'ailes de papillon[4].

b. Système de Rössler

Le système de Rössler est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (2.4)$$

x , y , et z sont les variables d'états du système. a , b , c sont les paramètres réels. Les paramètres et les conditions initiales de cette équation ont été choisis de la manière suivants : $a=b=0.1$, $c=12$, $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.01, 0.01)$.

L'ensemble des trajectoires de ce système définissent un attracteur étrange aux propriétés fractales sur le long terme [4].

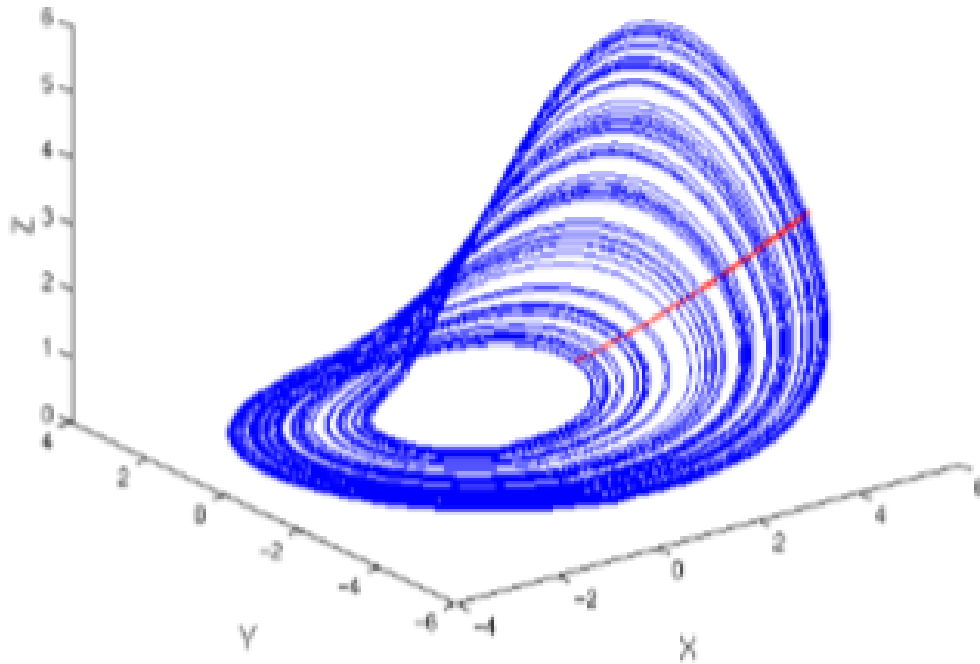


FIGURE 2.1 – Attracteur de Rössler

2.3.2 Systèmes chaotiques discrets

Un système chaotique à temps discret est décrit par un système d'équations aux différences finies, dont le modèle général est le suivant :

$$x(k+1) = G(x(k), u(k)), y(k) = h(x(k), u(k)). \quad (2.5)$$

La dynamique du système en temps discret. Parmi les systèmes chaotiques discrets, nous pouvons citer les systèmes de Hénon, Hénon modifié, Lozi, la fonction logistique, etc...[4].

a. Système de Hénon

Introduit par l'astronome Michel Hénon en 1976, il est présenté par des équations le suivant : [4]

$$\begin{cases} x(k+1) = y(k) + 1 - a * x(k)^2 \\ y(k+1) = b * x(k) \end{cases}, \quad (2.6)$$

tel que $(x(k), y(k)) \in \mathbb{R}^2$ Représente le vecteur d'état.

Pour les valeurs $a=1.4$ et $b=0.3$ le système présente un comportement chaotique Les conditions initiales prises sont $x_0 = 0.1, y_0 = 0$ Pour d'autres valeurs de a et b , il peut être chaotique, intermittent ou converger vers une orbite périodique [4].

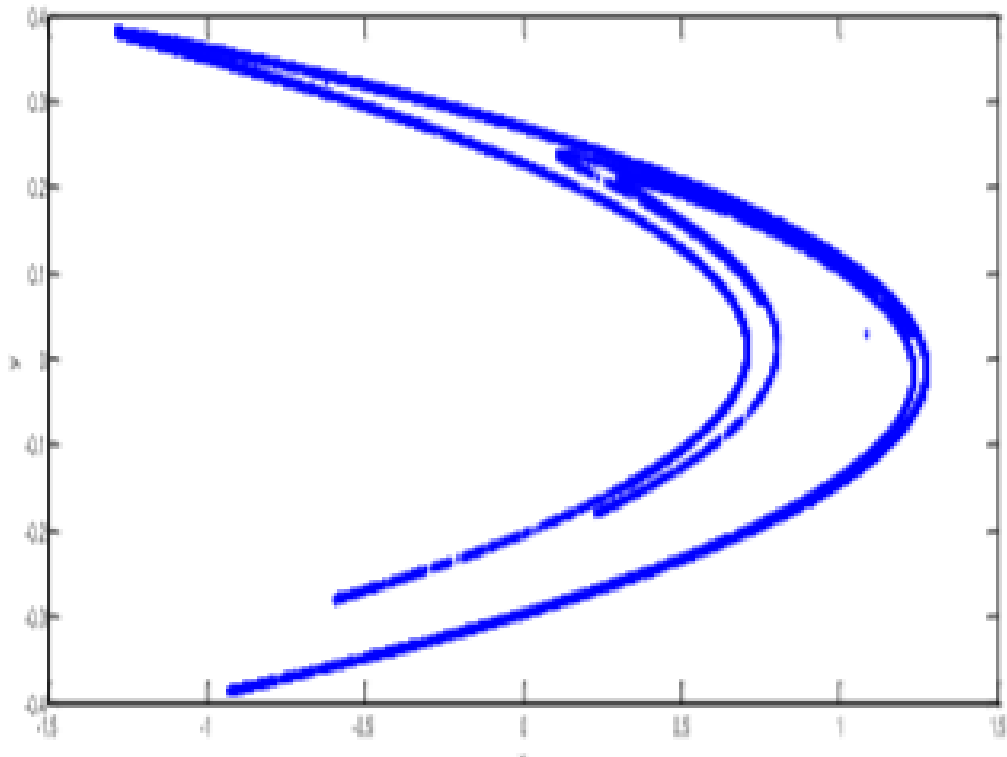


FIGURE 2.2 – Attracteur de Hénon

b. Système Hénon-Heiles ou Hénon modifié

Il est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(k+1) = a - y^2(k) - bz(k) \\ y(k+1) = x(k) \\ z(k+1) = y(k) \end{cases} \quad (2.7)$$

Pour avoir un comportement chaotique, les paramètres du système sont donnés comme suit : $a = 1.76$ et $b = 0.1$ et les conditions initiales du système : $x_0 = 0.1, y_0 = 0.1, z_0 = 0.1$ [4].

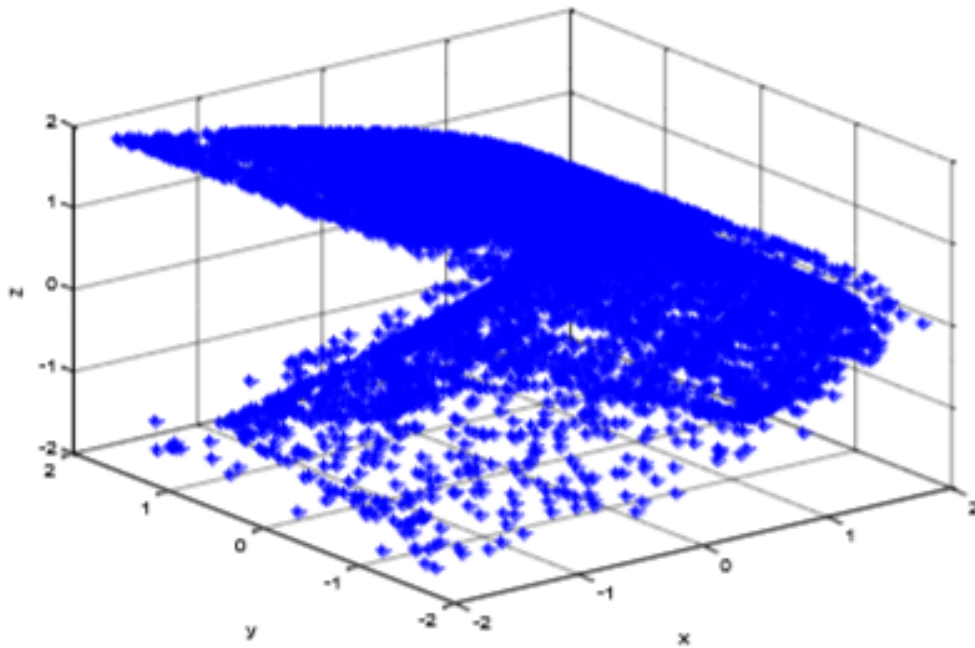


FIGURE 2.3 – Attracteur de Hénon-Heile

2.4 Propriétés de systèmes chaotiques

Bien qu'il n'y ait pas de définition mathématique du chaos universellement acceptée, une définition couramment utilisée stipule que pour qu'un système dynamique soit classifié en tant que chaotique, il doit comporter les propriétés suivantes [4] :

- Non-linéarité
- Déterminisme
- Aspect aléatoire
- Sensibilité aux conditions initiales
- Notion d'attracteur
- Exposants de Lyapunov

2.4.1 Non-linéarité

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique. Le comportement chaotique d'un système dynamique non linéaire est dû aux non linéarités. En général, pour prévoir des phénomènes générés par les systèmes dynamiques, la démarche consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effets. Si cette relation est une opération de proportionnalité, le phénomène est linéaire. Dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause.

2.4.2 Déterminisme

La notion de déterminisme signifie la capacité de “prédire” le futur d’un phénomène à partir d’un évènement passé ou présent. L’évolution irrégulière du comportement d’un système chaotique est dû aux non linéarités.

Dans les phénomènes aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire d’une quelconque particule. À l’opposé, un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes.

2.4.3 Aspect aléatoire

Les systèmes chaotiques se comportent, en effet d’une manière qui peut sembler aléatoire. Cet aspect aléatoire du chaos vient du fait que l’on est incapable de donner une description mathématique du mouvement, mais ce comportement est en fait décrit par des équations non linéaires parfaitement déterministes, comme par exemple les équations de Newton régissant l’évolution d’au moins trois corps en interaction. Les figures ci-dessus illustrent les aspects aléatoires du système chaotique continu et discrets [4].

a. Aspect aléatoire du système de Rössler

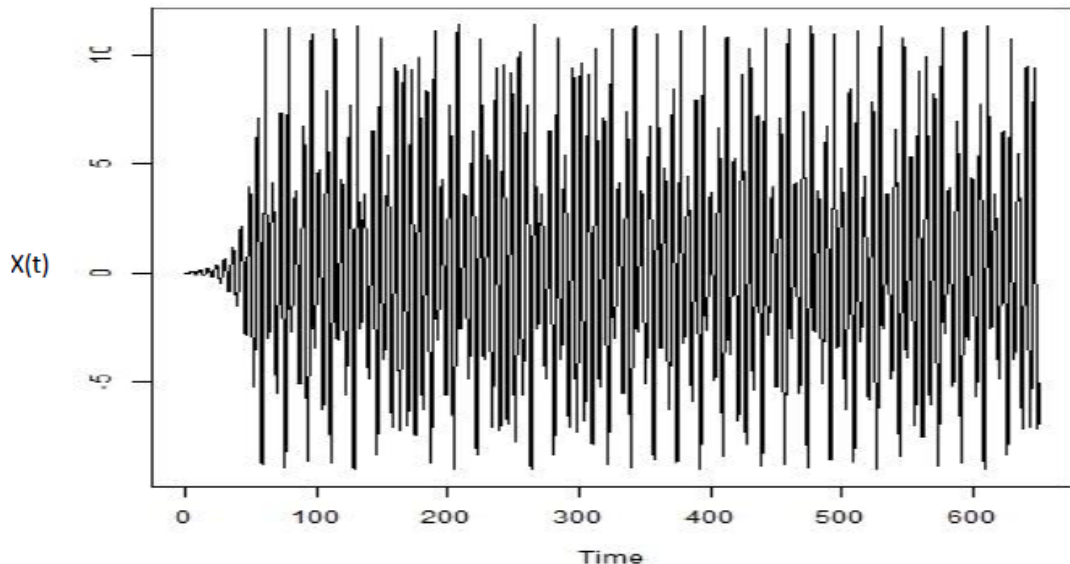


FIGURE 2.4 – Aspect aléatoire du système de Rössler

b. Aspect aléatoire du système de Hénon :

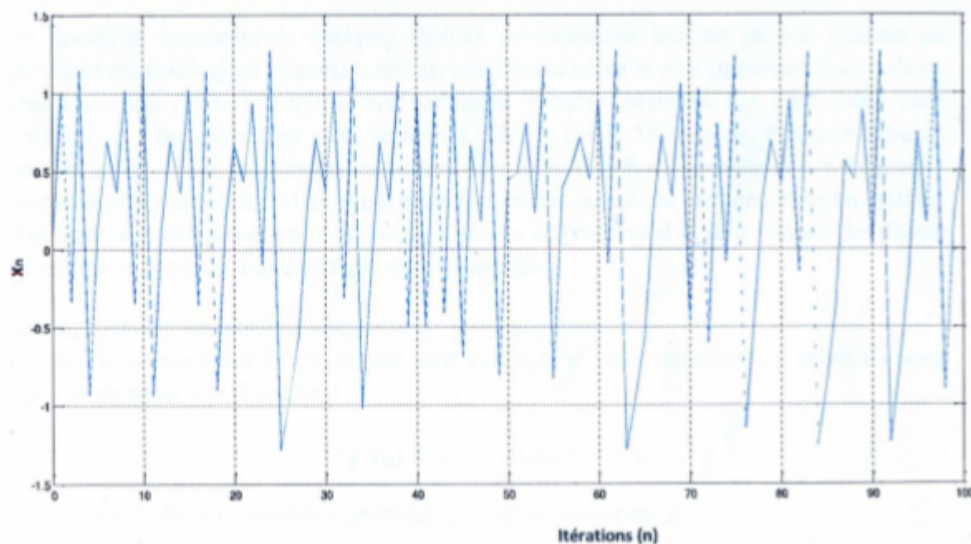


FIGURE 2.5 – Aspect aléatoire du système de Hénon

2.4.4 Sensibilité aux conditions initiales

En faisant la troncature de quelques chiffres sur les conditions initiales de son système de prévision météorologique, Lorenz a mis en relief le caractère le plus important des systèmes chaotiques qui est la sensibilité à la condition initiale. Mais en fait c'est avant cette anecdote, que ce phénomène a été découvert. Vers la fin du 19^{ème} siècle, Poincaré montrait que les trois orbites de 3 corps en mouvement sous une force centrale due à la gravité changent radicalement avec une petite modification des conditions initiales. Pour un système chaotique, une très petite erreur sur la connaissance de l'état initial x , dans l'espace des phases va se trouver (presque toujours) rapidement amplifiée[5].

. **Stabilité aux conditions initiales du système de Lorenz :**

Remarque 2.4.1. *a le cas initial :*

$$\begin{cases} x_1(0) = 0.100 \\ x_2(0) = 0.101 \end{cases} .$$

En prenant $x_1(0)$ et $x_2(0)$ pour conditions initiales très proches, les évolutions des signaux x_1 et x_2 ont un comportement différent au fur et à mesure que le temps augmente, on a obtenu les résultats suivants, figure(2.6).

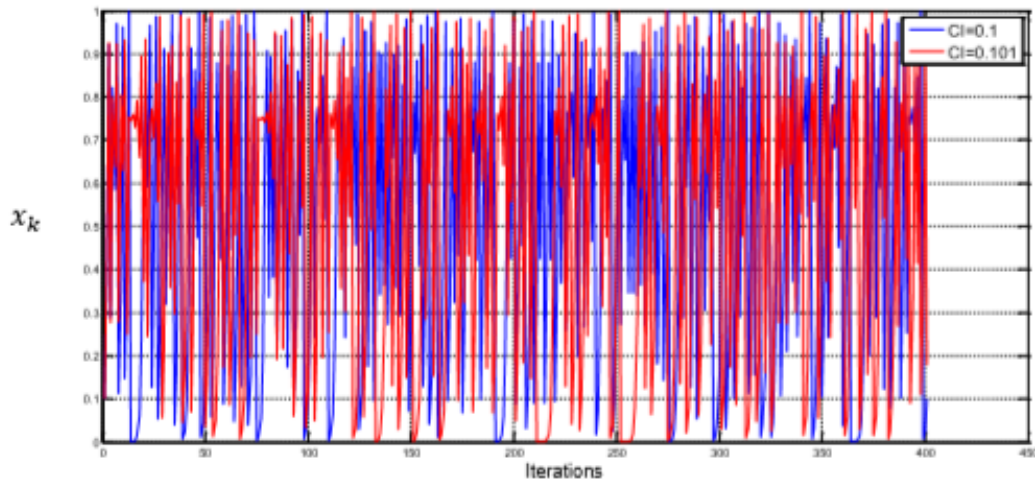


FIGURE 2.6 – Sensibilité aux conditions initiales (Système de Lorenz)

2.4.5 Notion d'attracteur

La région de l'espace de phases vers laquelle convergent les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle "attracteur". Les attracteurs sont des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamiques.

Il y a deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques :

a. Attracteurs réguliers :

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et peuvent être de deux sortes :

- Un point fixe : la trajectoire du pendule dissipatif simple (dans l'espace des phases représentant son altitude et sa vitesse), par exemple, tend vers l'origine du repère, quelles que soient la position et la vitesse initiales.
- Un cycle limite : la trajectoire du pendule idéal dans ce même espace des phases, par exemple. Pour tous les attracteurs réguliers, c'est-à-dire pour tous les systèmes non chaotiques, des trajectoires qui partent de "points" proches l'un de l'autre dans l'espace de phase 1 restent indéfiniment voisines. On sait donc prévoir l'évolution de ces systèmes, à partir d'une situation connue.

b. Attracteurs étranges :

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange.

L'attracteur étrange se caractérise par :

- Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique).
- La dimension de l'attracteur est fractale et non entière (ce qui justifie l'adjectif étrange).
- L'attracteur est de volume nul dans l'espace des phases.

Ci-dessus la figure (2.7) montre l'attracteur de Lorenz.

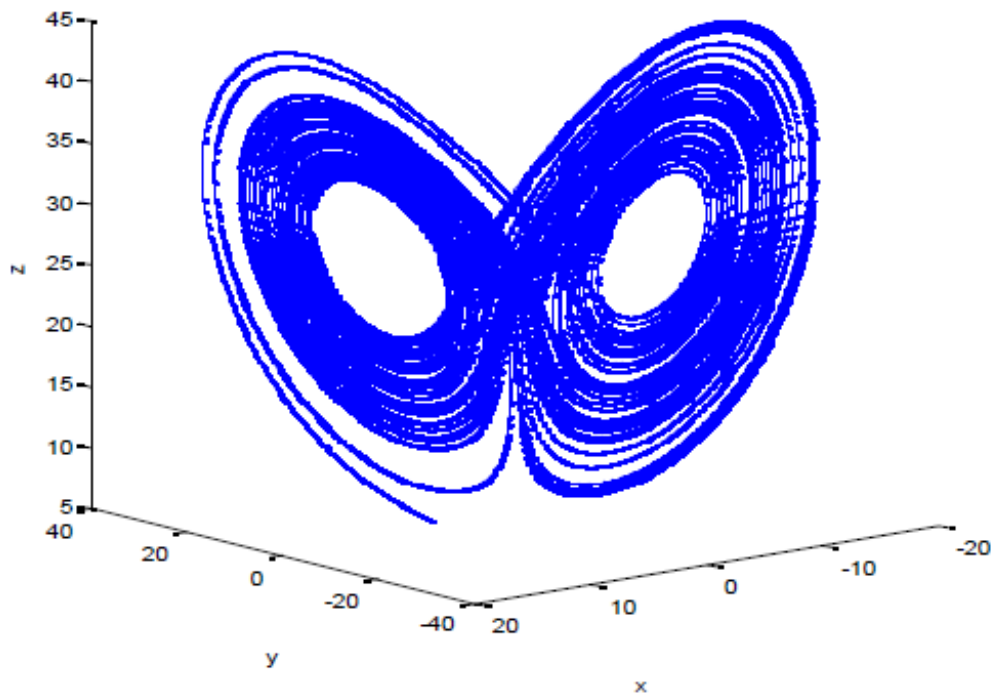


FIGURE 2.7 – Attracteur de Lorenz

2.4.6 Exposants de Lyapunov

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système et permet de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique.

L'évolution d'un flot chaotique est difficile à appréhender, parce que la divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide, C'est pourquoi on essaye d'estimer ou même de mesurer la vitesse de divergence ou convergence, Cette vitesse s'appelle l'exposant Lyapunov qui caractérise le taux de séparation de deux trajectoires très proches [19, 20]. Donc deux trajectoires dans le plan de phase initialement séparées par un taux Z_1

Etat	Attracteur	Dimension	Exposants de Lyapunov
Point d'équilibre	point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
Périodique	cercle	1	$\lambda_1 = 0; \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
Période d'ordre 2	Tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0; \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
Période d'ordre K	K-Tore	K	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0; \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0; \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyper chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0; \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

TABLE 2.1 – Attracteurs et exposants de Lyapunov

divergent après un temps $\Delta t = t_2 - t_1$ vers Z_2 tel que :

$$|Z_2| \approx \exp(\lambda \cdot \Delta t) |Z_1|.$$

Où λ est l'exposant de Lyapunov.

Pour un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous inférieurs ou

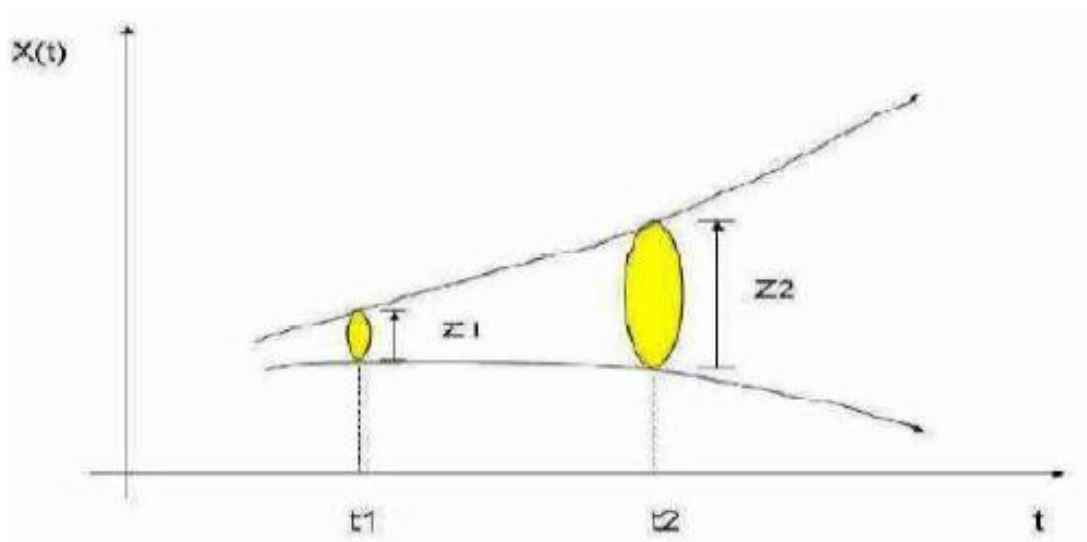


FIGURE 2.8 – Divergence de deux trajectoires dans le plan de phase

égaux à zéro et leur somme est négative. Un attracteur étrange possèdera toujours au moins trois exposants de Lyapunov, dont un au moins doit être positif.

Le tableau suivant résume les différentes configurations d'exposants de Lyapunov.

2.5 Conclusion

Un système chaotique est un système déterministe et imprévisible, et est un système non linéaire. Dans ce chapitre nous avons présenté la définition de système chaotique, et nous avons parlé des propriétés des systèmes chaotiques. Le phénomène du chaos est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales, son attracteur étrange et les exposants de Lyapunov. Nous avons présenté quelques exemples, les plus célèbres, qui illustrent le comportement des systèmes dynamiques chaotiques.

Chapitre 3

Système Lorenz

3.1 Introduction

Edward Lorenz fut un météorologue qui, le premier, mit en évidence le caractère chaotique de la météorologie. Le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides. En 1963, Lorenz eut l'idée de chercher un modèle d'équations pour étudier l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

Nous allons étudier à l'aide du programme Lorenz.c les différents portraits de phases obtenus pour différentes valeurs du paramètre r .

La modélisation comprendra trois étapes : sur un premier schéma, nous trouverons les évolutions temporelles des variables x et z . Nous décrirons les graphes observés et on liera les comportements temporels aux résultats analytiques trouvés dans la partie III. Le deuxième graphique représente une projection de l'espace des phases et le troisième visualise pour les trois coordonnées de l'espace.

Le système d'équations suivant décrit le transfert thermique dans l'atmosphère, avec de la conduction et parfois de la convection.

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z) = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) = rx - y - xz \\ \dot{z} = f_3(x, y, z) = xy - bz \end{cases} \quad (3.1)$$

x : représente la vitesse,

y : la différence locale de température (dt),

z : la distortion des profils de température (par rapport au cas linéaire conductif),

Les valeurs σ : est proportionnel au nombre de Prandtl, b est un rapport hauteur/largeur et r est le rapport du nombre de Rayleigh, sont respectivement à $10, \frac{8}{3}$ et r variée.

3.2 Points fixes

Cherchons les points fixes de ce système dynamique qui prend la forme $\frac{d\vec{u}}{dt} = f(\vec{u})$.

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ (r - 1 - z).x = 0 \\ x^2 = bz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} y = x \\ r - 1 = z \\ x^2 = bz \end{cases}$$

Le deuxième point fixe obéit à :

$$\begin{cases} x^2 = b(r - 1) \\ y = x \\ z = r - 1 \end{cases}$$

Premier cas :

$r < 1$ Dans ce cas, il n'y a qu'un seul point d'équilibre :

$$\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Deuxième cas :

$r > 1$ il y a trois points d'équilibre :

$$\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}; \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix};$$

3.3 Stabilité des points fixes

On linéarise le système. On obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_x \\ \dot{\xi}_y \\ \dot{\xi}_z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{pmatrix}$$

Avec

$$A \equiv \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right] \text{ et } A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

Comme les valeurs propres sont données par l'équation caractéristique, qui est :

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \text{tr}(A) \cdot \lambda^2 - \frac{1}{2}(\text{tr}(A^2) - \text{tr}^2(A)) \cdot \lambda + \det(A).$$

Les composants nécessaires sont calculés pour être :

$$\det(A) = \sigma b(r - z - 1) - \sigma x(x + y),$$

$$\text{tr}(A) = -(\sigma + 1 + b),$$

$$\text{tr}(A^2) = 2\sigma(r - z) - 2x^2 + b^2 + 1 + \sigma^2.$$

La stabilité dépend du signe de la partie réelle des valeurs propres de A qui sont les solutions de l'équation :

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Stabilité du point fixe $\vec{u}_0$

Dans ce cas, la matrice A s'exprime :

$$A_{(\vec{u}_0)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Par conséquent, on a :

$$\text{tr}(A) = -(\sigma + 1 + b) \text{ et } \det(A) = \sigma b(r - 1)$$

et

$$\text{tr}(A^2) = 2\sigma r + b^2 + 1 + \sigma^2.$$

d'où

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda^3 + (\sigma + 1 + b)\lambda^2 + \sigma(1 - r) + b(1 + \sigma) - \sigma b(r - 1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + b)(\lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda + \sigma(1 - r)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda + b = 0 \quad \text{et} \quad \lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda + \sigma(1 - r) = 0.$$

Le terme de droite est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est :

$$\Delta = (1 + \sigma)^2 - 4\sigma(1 - r).$$

La nature des solutions du polynôme caractéristique dépend du signe de Δ :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (1 + \sigma)^2 > 4\sigma(1 - r),$$

$$\Leftrightarrow 1 - r < \frac{(1 + \sigma)^2}{4\sigma},$$

Ici, $\sigma = 10$ Par conséquent, le discriminant sera positif si et seulement si $r > -\frac{81}{40}$. C'est toujours le cas car $r > 0$. Nous avons donc les 3 racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -b < 0 \\ \lambda_2 = \frac{-(1+\sigma) + \sqrt{(1+\sigma)^2 + 4\sigma(r-1)}}{2} \\ \lambda_3 = \frac{-(1+\sigma) - \sqrt{(1+\sigma)^2 + 4\sigma(r-1)}}{2} < 0 \end{cases}$$

On voit que λ_2 est négatif pour $0 < r < 1$ et positif pour $r > 1$. Par conséquent, le point fixe $\vec{u}_0$ est stable pour $0 < r < 1$ et instable pour $r > 1$.

Stabilité du point fixe $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$

La matrice jacobienne correspond a ces points s'écrit comme suit :

– Pour A_1 :

$$A_{(\vec{u}_1)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

– Pour A_2 :

$$A_{(\vec{u}_2)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

Par conséquent, on a :

$$\text{tr}(A_1) = \text{tr}(A_2) = -(\sigma + 1 + b) \text{ et } \det(A_1) = \det(A_2) = -2\sigma b(r-1)$$

. Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique suivant : Le polynôme est d'ordre trois, on peut le résoudre par les formules de **Cardan**.

Et selon les valeurs du paramètre r , ce polynôme peut avoir trois racines réelles négatives ou bien une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

On peut simplifier ce calcul en utilisant le fait qu'il existe une valeur propre $\lambda_1 = 0$ si $r = 1$ donc on peut supposer que $|\lambda_1| \ll 1$ si $|r-1| \ll 1$ on peut donc négliger λ_1^2 et λ_1^3 de l'équation.

$$\lambda_1 = -\frac{2b\sigma(r-1)}{b(\sigma+r)} < 0 \text{ pour } r > 1. \quad (3.2)$$

Les deux autres valeurs propres ne dépendent pas de r signifie que

$$\lambda_{2,3}(r) \approx \lambda_{2,3}(1) + o(r-1).$$

Il suffit de déterminer leur valeur à $r = 1$

$$-\lambda^2 - \lambda(\sigma + b + 1) - (\sigma b + b) = 0.$$

Alors

$$\Delta = (\sigma + b + 1)^2 - 4b(\sigma + 1).$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_2 = -\frac{(\sigma + b + 1) + \sqrt{(\sigma + b + 1)^2 - 4b(\sigma + 1)}}{2} < 0, \quad (3.3)$$

$$\lambda_3 = -\frac{(\sigma + b + 1) - \sqrt{(\sigma + b + 1)^2 - 4b(\sigma + 1)}}{2} < 0. \quad (3.4)$$

On fait de même avec A_2 et on trouve le même résultat (noeud stable).

Donc les points A_1 et A_2 sont stables pour $|r-1| \ll 1$.

A $r = 1$ on a donc une bifurcation de fourche supercritique.

On va maintenant montrer que les points fixes issus de la première bifurcation se déstabilisent à leur tour pour une valeur r_c par une bifurcation de **Hopf**.

Cette deuxième bifurcation est caractérisée par une paire de valeurs propres complexes conjuguées pour les quelles la partie réelle change de signe à la bifurcation. On sait donc qu'il existe des solutions purement imaginaires $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ quand r assume sa valeur critique r_c .

En prenant les parties réelles et imaginaires de l'équation caractéristique (avec $\lambda = i\omega$ et $\omega \in \mathbb{R}$) on trouvera deux équations indépendantes permettant de déterminer ω et la valeur de r_c .

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) = 0 &\iff -(\sigma + \lambda)((1 + \lambda)(b + \lambda) + b(r - 1)) = 0 \\
&\iff -(\sigma + \lambda)(br + \lambda + \lambda b + \lambda^2) - \sigma(br - 2b - \lambda) = 0 \\
&\iff -\sigma br - \sigma \lambda - \sigma \lambda b - \sigma \lambda^2 - \lambda br - \lambda^2 - \lambda^2 b - \lambda^3 - \sigma br + 2\sigma b + \sigma \lambda = 0 \\
&\iff -\lambda^3 - \lambda^2(\sigma + 1 + b) - \lambda(\sigma b + br_c) + 2\sigma b(1 - r_c) = 0 \\
&\iff -(i\omega)^3 - (i\omega)^2(\sigma + 1 + b) - i\omega(\sigma b + br_c) + 2\sigma b(1 - r_c) = 0 \\
&\iff \begin{cases} \omega^2(\sigma + 1 + b) - 2\sigma b(1 + r_c) = 0 \\ \omega^3 - \omega(\sigma b + br_c) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \omega^2 = \frac{2\sigma b(r_c - 1)}{\sigma + 1 + b} \\ \omega^2 = \sigma b + br_c \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r_c = \frac{\sigma(\sigma + 3 + b)}{\sigma - b - 1} \\ \omega = \pm((\sigma b + b)r_c) \end{cases}
\end{aligned}$$

Application numérique : $r_c = 24,74$ et $\omega = \pm 92,64$.

Il a une bifurcation de **Hopf** à $r_c = 24.74$, où les points fixes A_1 et A_2 qui étaient des foyers stables pour $r < r_c$ deviennent des foyers instables pour $r > r_c$ (et ils sont des centres pour $r = r_c$).

3.4 Etude de comportement du système

La méthode d'étude courante de ce système est de fixer les valeurs de b et de σ , respectivement à $\frac{8}{3}$ et 10, et de faire varier r .

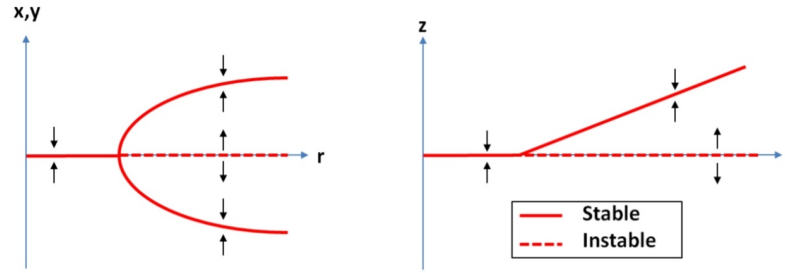
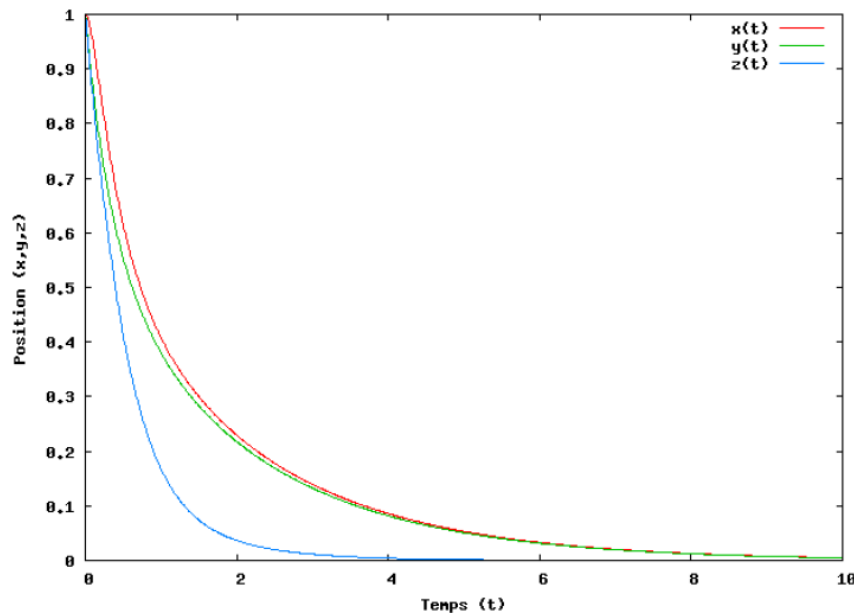


FIGURE 3.1 – Graphes de la stabilité des valeurs propres

3.4.1 Étudions le modèle de Lorenz pour $0 < r < 1$

Pour $r = 0.5$ le système converge vers l'origine qui est un point fixe.

Nous commençons avec la condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$:

FIGURE 3.2 – Evolutions temporelles de x, y, z avec $r = 0.5$

Avec ces conditions initiales, les trois variables convergent vers le $(0, 0, 0)$. Pour cette valeur de r .

Pour la suite, nous n'étudierons que les variables $x(t)$ et $z(t)$, $y(t)$ ayant un comportement proche de $x(t)$.

Avant de changer les conditions initiales, nous allons changer la valeur de r tout en restant dans le cas $0 < r < 1$ et voir ce qui se passe.

Les deux graphes de la page suivante montrent que, pour les trois valeurs de r , les deux variables tendent toujours vers 0 lorsque t augmente. Notons aussi que plus r , est petit, plus $x(t)$ et $z(t)$ tendent rapidement vers 0.

En étudiant la matrice jacobienne du point $(0, 0, 0)$, nous montrerons que les modules

des valeurs propres $|\lambda_i|$ sont maximaux pour $r \rightarrow 0$ (et minimaux $r \rightarrow 1$)

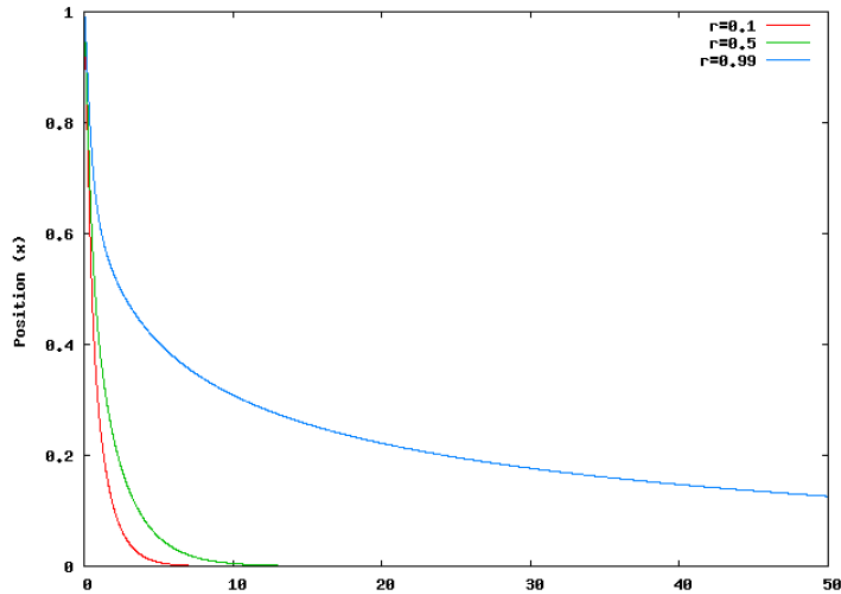


FIGURE 3.3 – $x(t)$ pour différentes valeurs de r

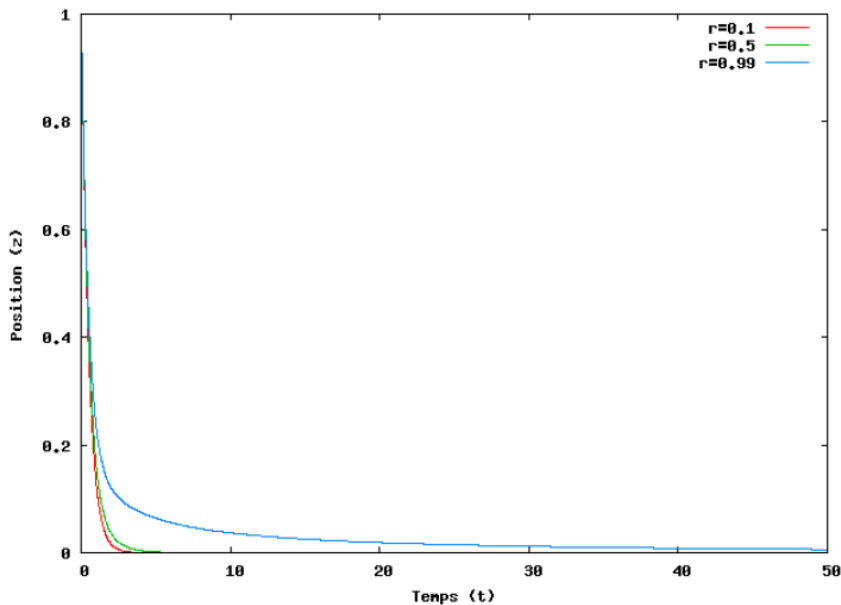
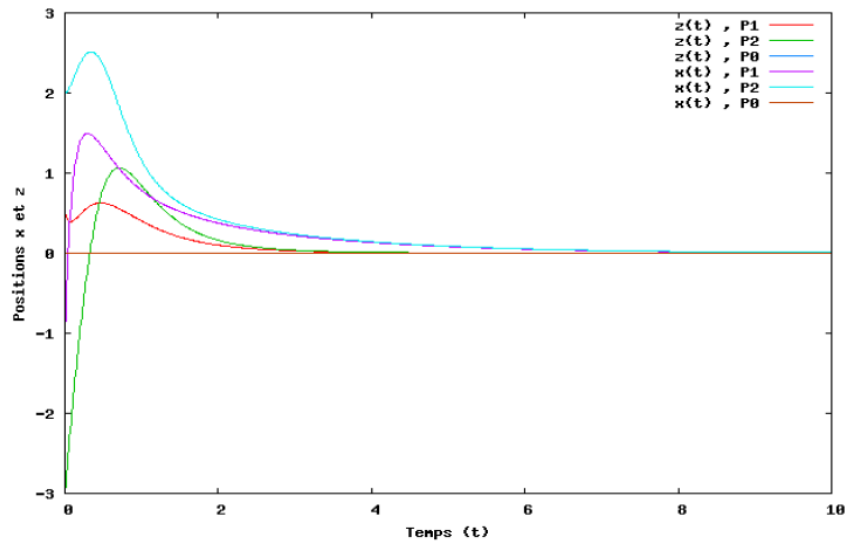
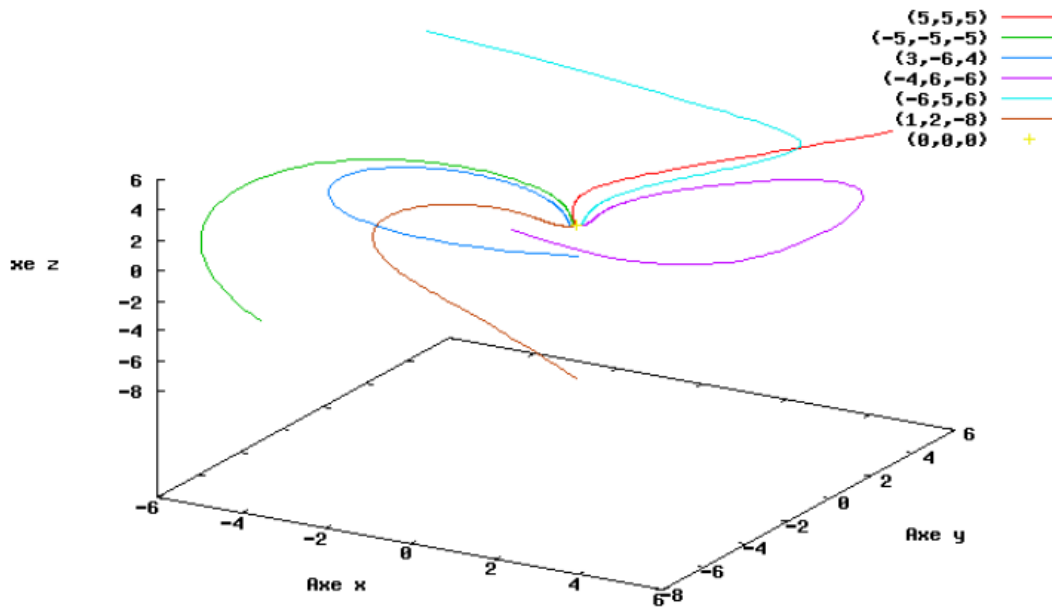


FIGURE 3.4 – $z(t)$ pour différentes valeurs de r

Nous allons nous remettre à $r = 0.5$ avec trois conditions initiales différentes $P_0 = (0, 0, 0)$ $P_1 = (-1, 2, \frac{1}{2})$ $P_2 = (2, 2, -3)$:

Le point $P_0 = (0, 0, 0)$ et un point fixe, il est invariant dans le temps. De plus, quelque soient leurs conditions initiales, les points convergent vers ce point fixe. C'est donc un point fixe stable et il est unique. De plus, les trajectoires font penser à un noeud. On aussi peut visualiser les trajectoires en trois dimensions obtenues avec des conditions

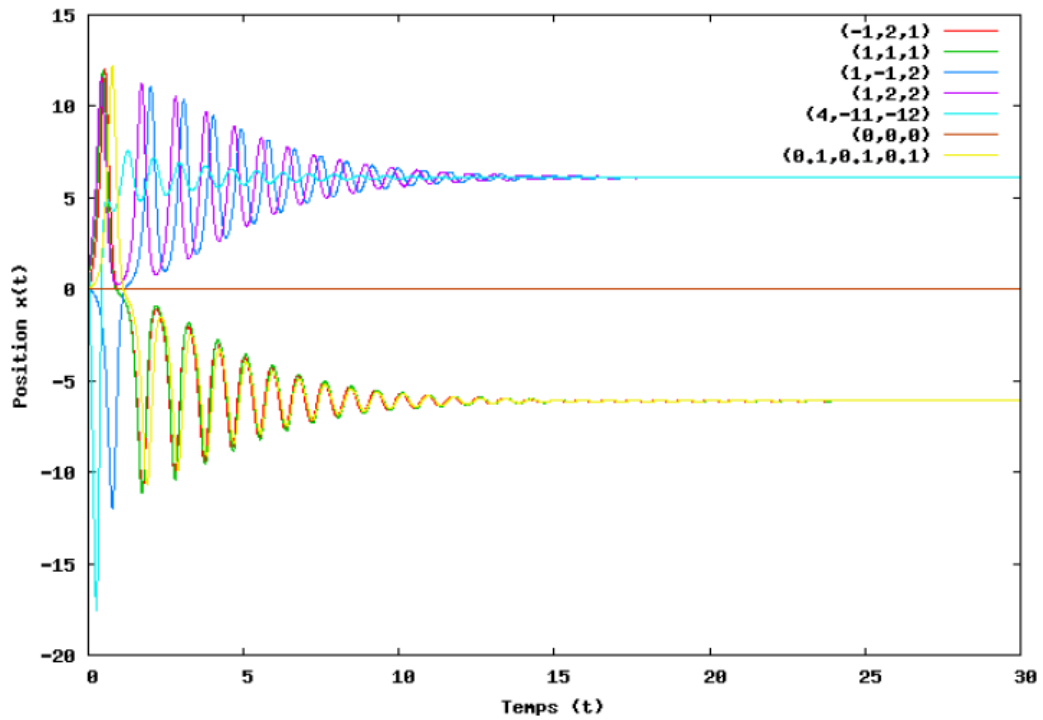
FIGURE 3.5 – Différentes conditions initiales / $r = 0.5$ FIGURE 3.6 – Trajectoires avec $r = 0.5$

initiales différentes :

3.4.2 Étudions le modèle de Lorenz pour $1 < r < 24$

Pour $r = 15$ deux nouveaux points fixes apparaissent formant deux bassins d'attraction.

Pour différentes conditions initiales, les trajectoires convergent vers deux valeurs de x différentes, nous montrerons qu'en fait les trajectoires convergent vers $x_{F1} = \sqrt{b(r-1)} \simeq 6.11$ ou $x_{F2} = -\sqrt{b(r-1)} \simeq -6.11$. De plus le point $(0,0,0)$ est toujours un point fixe mais n'est plus stable, pour une condition initiale proche $(1/10, 1/10, 1/10)$ la trajectoire

FIGURE 3.7 – Position $x(t)$ pour $r = 15$

diverge de $(0, 0, 0)$ et converge vers $x_{F1,2}$. Il est donc instable.

Nous voyons sur le premier graphe de la page suivante que les positions sur z convergent par contre vers une seule valeur. Cette valeur est $z_F = r - 1 = 14$.

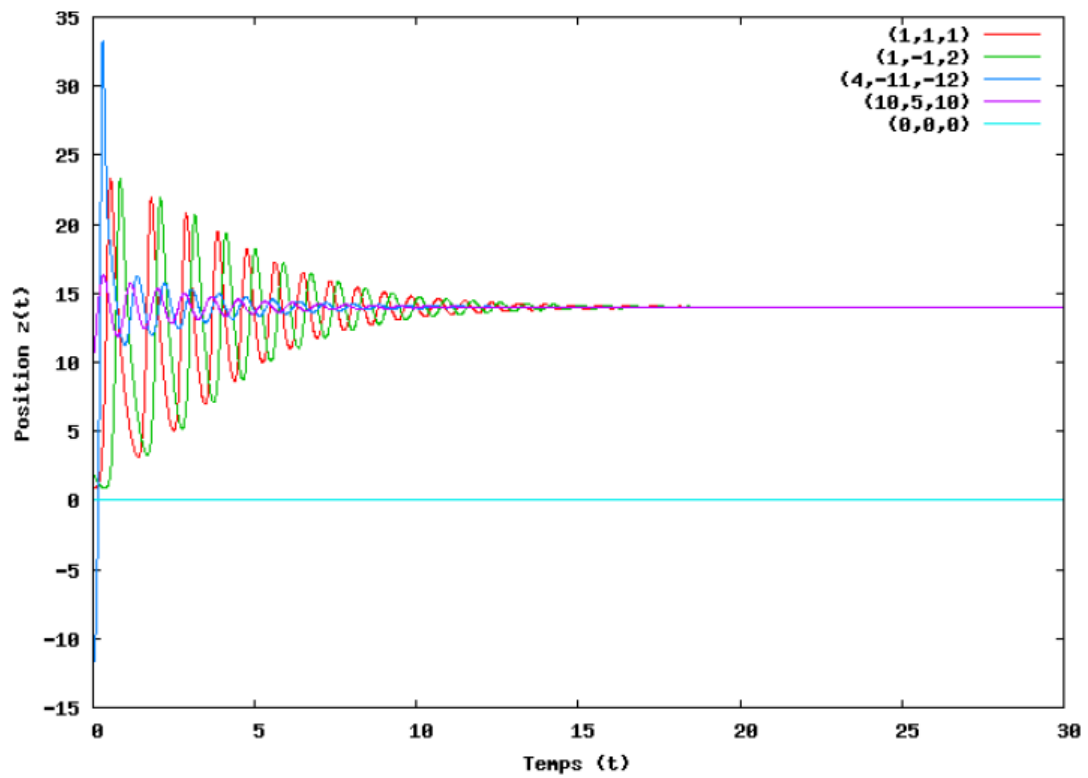
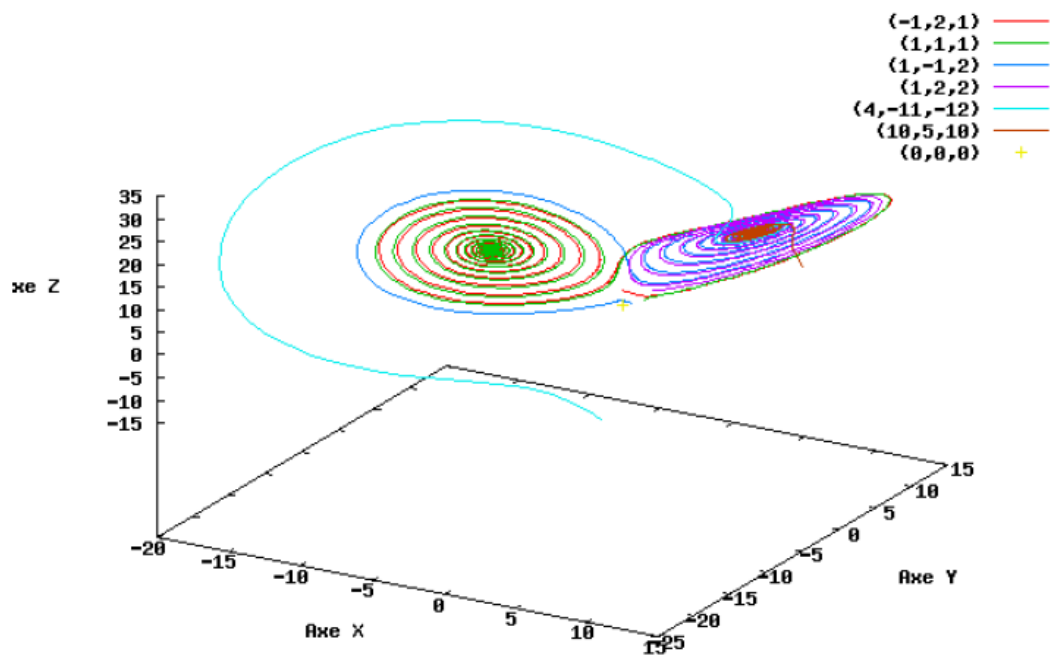
Plus généralement, nous montrerons que pour $1 < r < 24$ le modèle de Lorenz admet trois points fixes :

$$P_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix} \text{ qui sont stables et } P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ qui est instable.}$$

Il est important de remarquer que les trajectoires convergent vers les points fixes P_1 et P_2 en oscillant. Ceci est dû au fait que pour $r = 15$ les points fixes P_1 et P_2 sont des foyers stables. On le voit très bien en regardant les trajectoires en trois dimensions sur le deuxième graphe de la page suivante où les trajectoires (orbitent) autour des points fixes et s'en approchant.

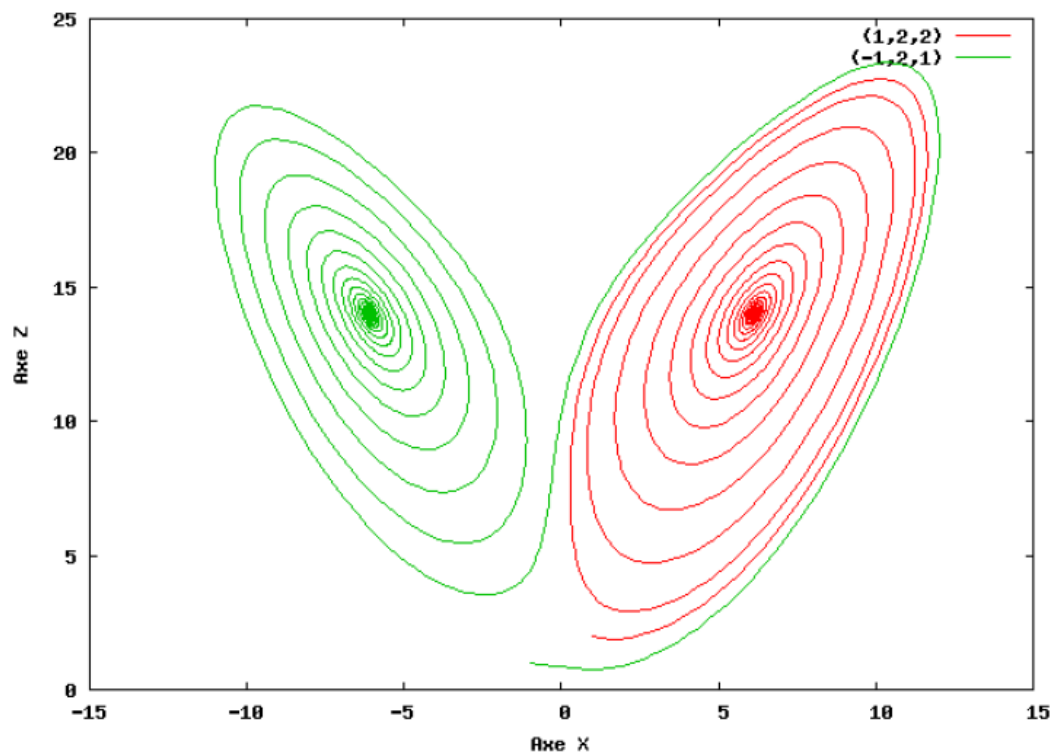
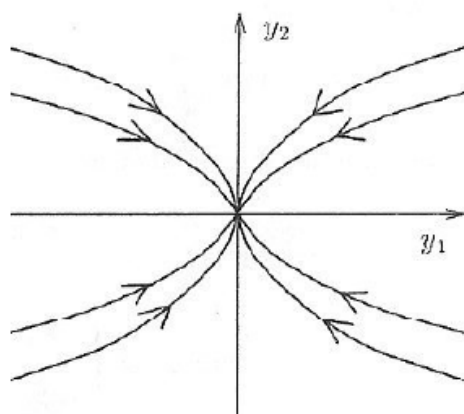
Notons aussi que le système est déjà chaotique, il est très sensible aux conditions initiales, pour des conditions initiales très peu différentes, les trajectoires peuvent converger vers l'un et l'autre des point fixes .

Ci-dessus, nous avons tracé la projection des trajectoires sur le plan (x, y) Les deux foyers stables sont bien visibles. Nous verrons dans la partie analytique que pour des valeurs de r légèrement supérieures à 1 les points P_1 et P_2 sont des noeuds stables et

FIGURE 3.8 – Position $z(t)$ pour $r = 15$ FIGURE 3.9 – Trajectoires pour $r = 15$

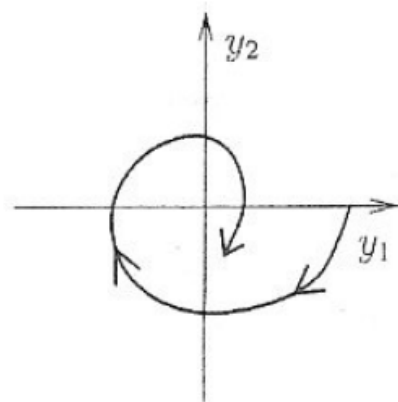
qu'ils deviennent des foyers stables lorsque r augmente.

Nous prenons, pour les deux graphes de la page suivante, les mêmes conditions initiales (1,2,2) et nous faisons varier r .

FIGURE 3.10 – Trajectoires pour $r = 15$ 

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

nœud stable



$a < 0$, foyer stable

3.4.3 Étudions le modèle de Lorenz pour $r > 25$

Les points fixes P_1 et P_2 sont devenus des foyers instables. La trajectoire "saute" de l'orbite du point P_1 à celle du point P_2 aléatoirement. La sensibilité est telle qu'une variation infime de la trajectoire ferait "sauter" celle-ci sur l'autre point fixe alors que, si elle n'était pas modifiée elle continuerait à effectuer quelques orbites autour du même point fixe. Il n'est donc plus du tout possible de prévoir la trajectoire physiquement (dans la réalité), car comme dans le cas $1 < r < 24$ la trajectoire est très sensible aux

conditions initiales.

Dans le cas $1 < r < 24$ où nous ne pouvons pas prédire physiquement sur quel point fixe un point (dont nous connaissons les conditions initiales) allait converger. Par contre, si la trajectoire commençait à orbiter autour d'un point fixe nous savions qu'elle allait converger dessus.

Ici ce n'est plus possible. Le système est complètement chaotique. Pour deux positions très proches.

Dans la partie analytique nous allons voir qu'il y a une bifurcation de **Hopf** à $r_c = 24.74$.

Les graphes des pages suivantes montrent les positions $x(t)$ et $z(t)$ pour plusieurs conditions initiales, puis une représentation en trois dimensions de différentes trajectoires et enfin une projection d'une trajectoire sur le plan (x, y) où nous voyons très bien le célèbre papillon de l'attracteur étrange de Lorenz.

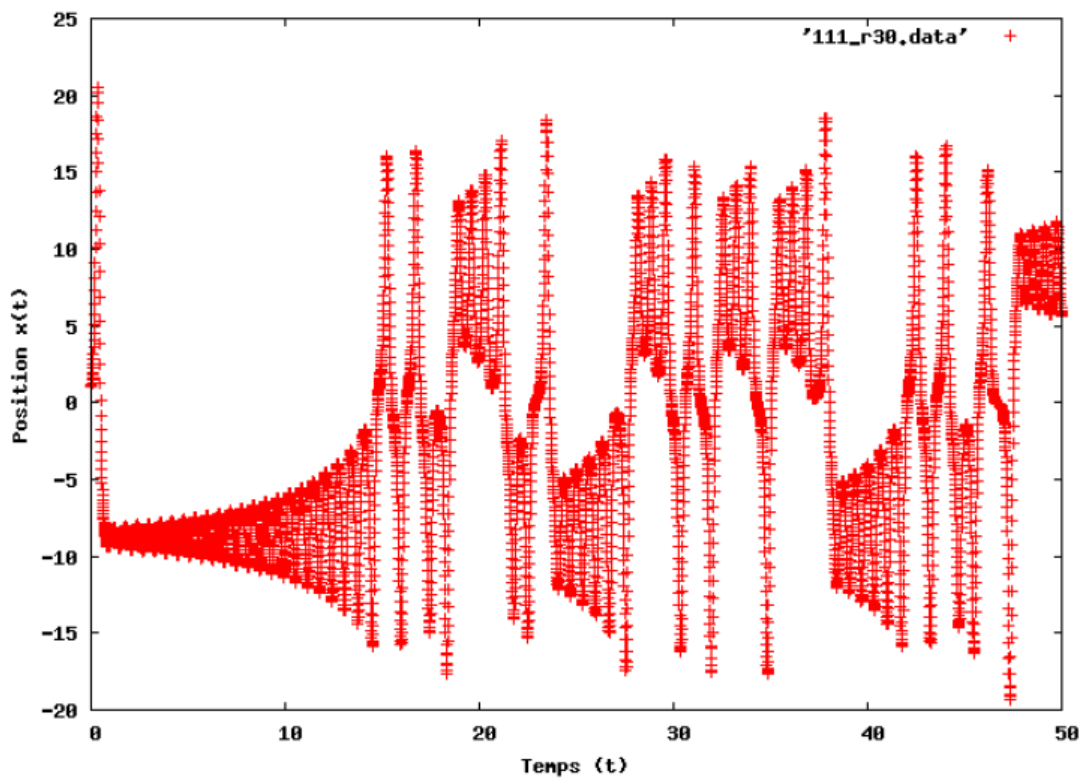
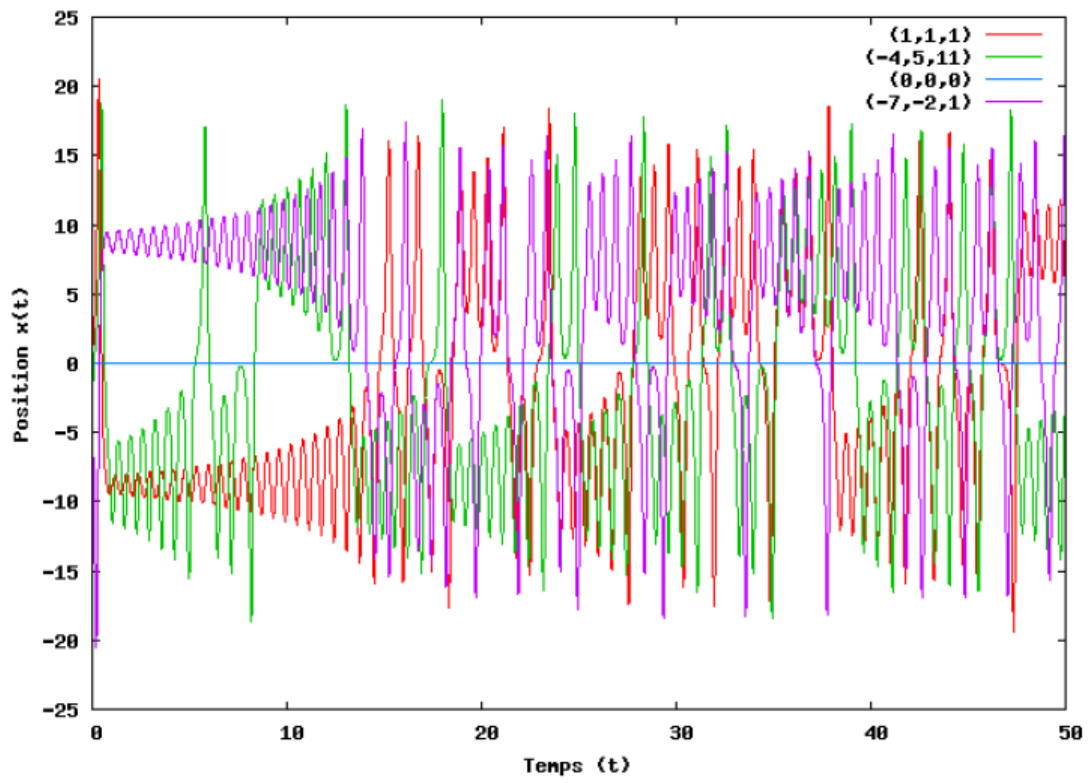
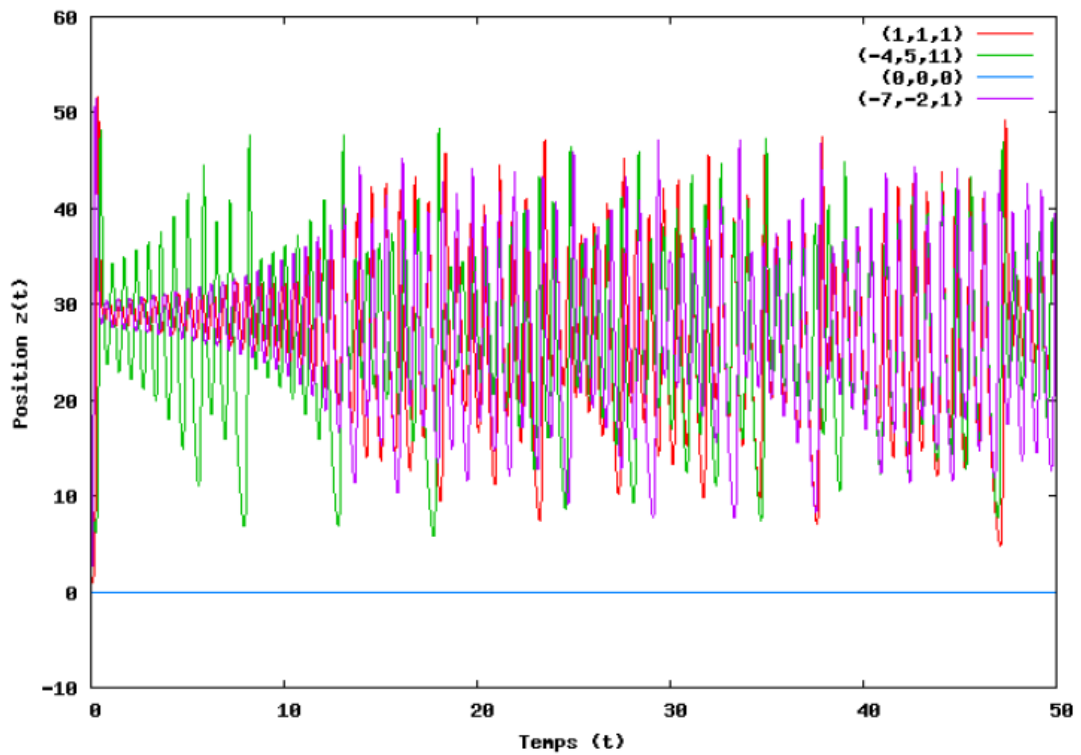
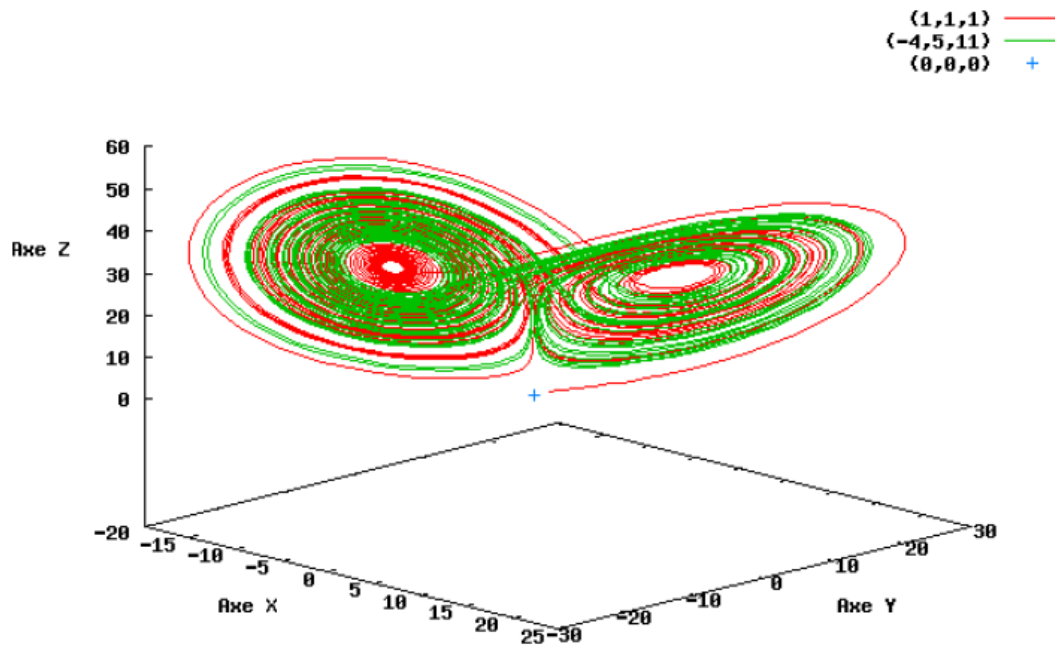
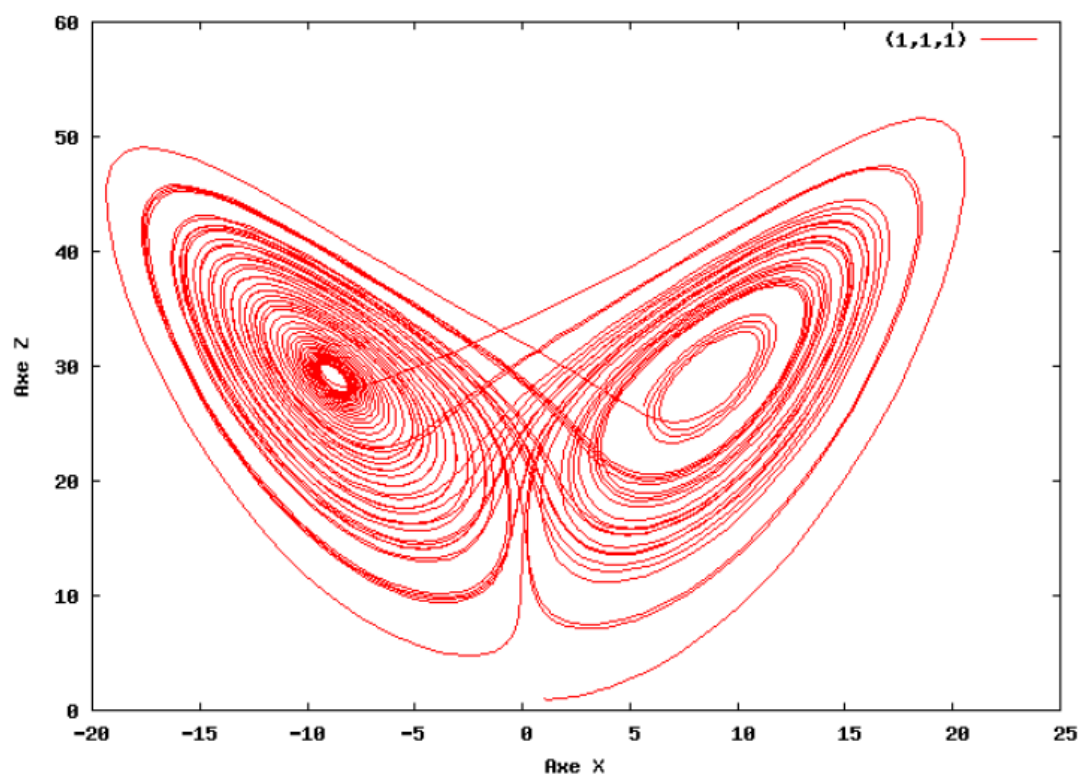


FIGURE 3.11 – Position $x(t)$ pour $r = 30$

FIGURE 3.12 – Position $x(t)$ pour $r = 30$ FIGURE 3.13 – Position $z(t)$ pour $r = 30$

FIGURE 3.14 – Trajectoire pour $r = 30$ FIGURE 3.15 – projection sur (x, y) avec $r = 30$

3.5 Conclusion

L'étude du modèle de Lorenz, nous a permis de montrer qu'un système d'équations apparemment simple peut en fait être complexe et dans certains cas chaotique. Ce

comportement chaotique apparaît alors que l'on est dans un modèle déjà très simplifié d'étude des phénomènes météorologiques, et il remet en cause notre capacité à prédire ces phénomènes physiques, nous avons mis en évidence ce comportement chaotique en particuliers en traçant le célèbre attracteur étrange de Lorenz (Chercher les points fixes et étude de comportement du système).

Conclusion Générale

Le but de ce mémoire est l'étude de la dynamique chaotique du système de Lorenz, Nous avons présenté tous les points essentiels concernant ces systèmes, tel que les définitions et leur caractéristiques et au final nous avons conclu que malgré la complexité de ces systèmes leur étude et leur réalisation n'est pas impossible.

Dans le premier chapitre nous avons fourni quelques définitions de système dynamique et parlé de système dynamique à temps continu et à temps discret et introduit les trajectoires de système dynamique et nous avons étudié les points fixes et stabilité des systèmes dynamiques à temps continu.

Dans le deuxième chapitre nous avons présenté systèmes chaotiques continus et systèmes chaotiques discrets et nous avons également parlé des Propriétés de systèmes chaotiques qui sont non linéarité, déterminisme, aspect aléatoire, Sensibilité aux conditions initiales, Notion d'attracteur et Exposants de Lyapunov.

Dans le dernier chapitre nous avons présenté le système de Lorenz et nous avons mis en évidence ce comportement chaotique en particulier en traçant le célèbre attracteur étrange de Lorenz (Chercher les points fixes et étude de comportement du système).

Bibliographie

- [1] Christian Jutten “ Systèmes asservis non linéaires” Systèmes asservis non linéaires cours de troisième année du département 3i option Automatique. Université Joseph Fourier- Polytech Grenoble. 2006.
- [2] S.Sastry “ Nonlinear Système”, Edition Spriger, New York, 1999.
- [3] Gasri Ahlem “Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques” Université Frères Mentouri-Constantine-1, Doctorat en sciences en Mathématiques, 7 May 2018.
- [4] E. Goncalvès ‘introduction au système dynamiques et Chaos’. Cours de l’institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.
- [5] D.Viennot ‘ Analyse Spectrale pour les systèmes dynamiques classiques’. Cours Master Physique, physique Numérique, Université de Franche-Comté.
- [6] Cours et TD Phénomènes non-linéaires.
- [7] G. Kaddoum ‘Contributions à l’amélioration des systèmes de communication multi utilisateurs par Chaos : synchronisation et analyse des performances ’ thèses de Doctorat de l’Université de Toulouse, 2008.
- [8] M. Iham ‘Attracteur de lorenz’, Université de Constantine Mentouri , édition 1997. thèse de Magister.
- [9] G.Zaibi ‘ Sécurisation par dynamiques des réseaux locaux sans fil au niveau de la couche MAC ’, thèse de Doctorat de l’université de Toulouse, 2012.
- [10] Djenhi Roukia et Makouf Aida, “Introduction à la théorie des systèmes dynamiques discrets”, Centre Universitaire Abd Elhafid Boussouf Mila, Mémoire préparé en vue de l’obtention du diplôme de Master ,2017.
- [11] Bassen Bhiri, “Stabilité et stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques”, 21 novembre 2017.
- [12] Belkhiri Saida, “ Etude des exemples des systèmes dynamiques chaotiques de dimension deux”, 2016.

-
- [13] Colin sparrom, "The Lorenz equations :Bifurcation, chaos and strange attractors".
- [14] Diar Ahmed, "l'évalutaion des bornes du système hyper-chaotique de Lorenz-Haken",2018.
- [15] Merabti Nesrine Lamya "Etude de quelques systèmes dynamiques chaotiques",Université de Larbi Ben M'hidi, Oum El Bouaghi, Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme : Master en Mathématiques.
- [16] O.Megherbi,"Etude et réalisation d'un système sécurisé à base de systèmes chaotiques," Mémoire de Magister en Automatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Algérie, 2013.
- [17] C. Benhabib, "Etude d'un système chaotique pour la sécurisation des communications optiques, "Mémoire de master, Université Abou Bakr Belkaid Tlemcen, 2014.
- [18] DJ. GOUMIDI, "Fonction logistique et standard chaotique pour le chiffrement des images satellitaires, "thèse magister, Université Mentouri de Constantine, 2010.
- [19] S. Rezzag, "Etude et estimation des bornes de systèmes dynamiques chaotiques et hyper chaotiques," thèse doctorat, Université Larbi Ben M'hidi.
- [20] HONGRE, L. SAILHAC, P. ALEXANDRESCU, M. et DUBOIS, J,"Nonlinear and multifractals approaches of the geomagnetic field," Physics of the Earth and Planetary Interiors 1999, 110, 157-190.
- [21] ROSENSTEIN, M. COLLINS, J. et DE LUCA, C," A practical method for calculating Largest Lyapunov exponents for small data sets, "Physica 1993, D 65, 117-134.